INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D. D. EULER; *Mathematicarum Professore, è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgensis.*

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto;
Adversis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita causa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso;
Sidera sublimi vertice summa petam.

INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

CAPUT PRIMUM.

De Causa Fluxus ac Refluxus Maris in genere.

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsa motûs conservatione proficisci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitùs sunt explosæ, nulla indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato Phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu positum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum causam in ulla re alia, nisi in ipsa corporum natura, quæri oportet. Quocirca si hujus generis Phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio Planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò Planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem Phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii à se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur.

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis

Dialogis de æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus cùm producant, tùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus Mare aliter non afficiet, nisi id sub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus Systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu & situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgeatur; ac ne hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab

Oriente versùs Occidentem secundùm eccliptîcam inducetur, hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omnino liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, qua tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortasse alia occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usquè differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs Maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versatur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius, causam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ quærens, cujus explicatio mox satis dilucidè est subversa. Superest denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente

contradicente Phænomenis multò magis est consentanea: at in ea id ipsum quod hoc loco quæritur, causa scilicet physica, non assignatur, sed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria satis est evoluta, ut de ejus sive consensu sive dissensu cum observationibus judicium satis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium sit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris causa in viribus externis & realibus sit posita, quæ si cessarent, simul æstus Maris mox evanesceret; ubi lateant hæ vires & quomodo sint comparatæ potissimùm nobis erit explicandum, hoc enim est id ipsum, quod celeberrima Academia Scientiarum Regia in quæstione proposita requirit. Neque verò vires tantummodò indicasse sufficiet, verùm prætereà id maximè erit monstrandum, quomodo istæ vires agant, atque hos ipsos effectus, quos observamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæstionis cardo, explicationis scilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari potest, studium adhibendum est summum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque sunt neque locum habere possunt. Parum enim scientiæ naturali consulunt, qui quovis Phænomeno oblato sibi pro arbitrio mundi structuram peculiarem effingunt, neque sunt solliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis consistere queat, an verò secùs. Quòd si enim jam aliundè constet existere in mundo ejusmodi vires, quæ oblato effectui producendo sint pares, frustrà omne studium in conquisitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad causam cujusque Phænomeni detegendam, ad singulas circumstantias sedulò attendere necesse est, ante omnia mirificum consensum æstûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non solùm enim insignis harmonia inter æstum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, sed etiam revolutio synodica respectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique observationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à situ cùm Lunæ tùm etiam Solis conjunctim pendere : ex quo statim prono ratiocinio consequitur, vires illas æstum Maris producentes, quæcunque etiam sint, cùm Lunam potissimùm, tùm verò etiam Solem respicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejusmodi vires Solem & Lunam respicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis est æstus Maris, producere queant, jure ac ratione statui possint, an secùs. Ac si pluribus modis istiusmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit dispiciendum, quænam cum aliis Phænomenis consistere possint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conspiret, nisi virium, quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà effectus ejusmodi viribus tribuatur, quas in mundo reverà existere alia Phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum, quin ista explicatio sit genuina & sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æstûs Maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur : quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum sint idoneæ : tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quasi attrahi, idque fortiùs in minori distantia, debiliùs verò in majori ; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum : ex quo sponte sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota

quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta ; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem alliciuntur, quàm totum Terræ corpus ; prouti vel minùs vel magis sint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstûs Maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur, ita eorum sententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole ; cùm motus Terræ in orbitâ suâ à Luna omninò non affici deprehendatur : sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui Maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videatur, multùm mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum Maris habito respectu, satis clarè evinci potest ; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis, Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitùs sublato, Terræ ac Lunæ omnem motum subitò adimi, Luna utique ad Terram accedet ; nemo autem non concedet, probè perpensis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs esse quieturam, sed Lunæ obviam ituram, concursumque in communi gravitatis centro contingere : hoc autem evenire non poterit, nisi Terra actu ad Lunam sollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari similem huic, quam in Terrâ sentimus, negari non potest ; nisi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etsi sit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolassent, partesque solidæ consistentiam suam amisissent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex natura vorticum petitis, magis confirmari posset tale corpus mundanum, cujusmodi est Luna, subsistere non posse, nisi vortice sit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd si autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos usquè admittamus, nulla omninò ratio suadet: quin potiùs ejusmodi vim similem statui conveniet, reliquis in mundo deprehensis, quæ quasi in infinitum porriguntur, atque inversam duplicatam tenent distantiarum rationem.

§. 10. His expositis manifestum est, & quasi experientia convictum, Terram cum singulis suis partibus tàm versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò sollicitari, atque utramque vim proportionalem esse reciprocè quadratis distantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu existant, constanterque effectum suum exerant, in præsenti negotio, quo in causam æstûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; nisi dilucidè antè sit probatum, eas non solùm Fluxum ac Refluxum non generare, sed ne quidem quicquam afficere. Si enim istæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam sit exiguus, atque adeò æstui Maris fortassè contrarius, earum tamen ratio necessariò erit habenda, cùm sine illis vera causa, quæcumque sit, neque investigari neque cognosci possit. Neque præterea sanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iisque causam æstûs Maris collocare, antequam evidenter sit demonstratum, binas istas vires Solem Lunamque spectantes, quas non gratuitò assumsimus, sed ex certissimis Phænomenis in mundo existere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non esse sufficientes. In sequentibus autem capitibus clarissimè sumus ostensuri, ab his duabus viribus non solùm in Oceano motum reciprocum generari debere, sed etiam eum ipsum, qui æstûs marini nomine insigniri solet: atque hanc ob rem

firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs causam in solis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem est directa, altera ad Lunam, esse positam; hocque simul omnium eorum sententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adscribere, vel cum his ipsis alias vires conjungere conantur.

§. 11. Quæstio igitur de causa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ est proposita, ad hanc deducitur quæstionem, ut binarum illarum virium, quibus singulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in distantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, causa assignetur Physica. Ex quo tractationem nostram bipartitam esse oportebit. Primò scilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit ostendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque respicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo singula Phænomena distinctè explicari posse: hac enim parte absolutâ nullum supererit dubium, quin origo æstûs Maris his ipsis viribus, quas actu jam in mundo existere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium causa Physica indicari debet, cùm id sit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæsitamus; & clarissimis certissimisque demonstrationibus evincere pollicemur, per istas vires omnia omninò æstûs Maris Phænomena absolutissimè explicari posse; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam sublimiorem pertineat, calculoque analytico sit subjecta. Altera verò pars, in scientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm ista res occasione plurium quæstionum ab Academiâ Celeberrimâ antehac propositarum jam tanto studio sit investigata atque absoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Explosis hoc saltem tempore qualitatibus occultis, missâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum saniori philosophandi modo nullatenùs consistere potest, omnium virium quæ quidem in mundo observantur, duplex statuendus est fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iste effectus semper vel ab allisione corporum, vel à vi centrifugâ proficiscitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora sunt prædita in statu suo sive quietis sive motûs æquabilis in directum perseverandi, debetur. Ob hanc enim ipsam facultatem corpus in motu positum alia corpora, quæ vel ipsius motui directè sunt opposita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum sollicitat; atque priori casu regulæ collisionis corporum, posteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonstrantur. Cùm igitur omnia corpora terrestria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò sollicitentur, causa hujus sollicitationis vel continuo appulsui materiæ cujusdam subtilis, vel vi centrifugæ similis materiæ tribui debebit. Priori igitur casu materiam subtilem statui oporteret, quæ constanter summâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujusmodi verò hypothesis ob maximas difficultates, quibus est involuta, admitti minimè potest. Primò enim perpetuò novis viribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifuga consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac vorticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causa gravitationis agitaretur, laudes Illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ulla hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem & Planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque Phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præsenti negotio sufficere posset, si æstûs Maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tam versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam sub duplicatam distantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tempore Terræ periodico cum distantia ejusdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia à centro Solis æqualis est semidiametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ à suo centro semidiametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1. erit vis absoluta Solis $= 227512$, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præcessione Æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare si, positâ Terræ semidiametro $= 1$, corporis cujusdam à centro Solis vel Lunæ distantia fuerit X, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel $= \frac{S}{xx}$ vel $= \frac{L}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum S & L determinationibus assumsimus mediam Solis à Terra distantiam 20620 semidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ sequitur, Lunæ verò à Terra distantiam mediam 60 semid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti ex sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum Maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus expositurі, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notandum est, quòd si Newtonus veram causam hujus Phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ Physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expositionem omnium Phænomenorum ad æstum Maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem locus est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs Maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in sua orbita determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbita elliptica circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & vicissim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani resultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur,

hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit & turbat; deinde dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situmque relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes à tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.

§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, & distantia $SP = x$, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta $= S$. His positis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in FIG. I.

directione MS vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ $= 1$, tùm etiam semidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $= \frac{S.Mm}{xx+yy}$. Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò sit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipsi PS parallela vi $= \frac{Sx.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde positâ ratione radii ad peripheriam $= 1:\pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa dividatur per massam movendam, quæ est $= \pi y$, eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

FIG. II. §. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphæricam genitam conversione circuli AMB circa diametrum AB; sitque semidiameter $AC = BC = r$; erit ipsa superficies $= 2\pi rr$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S, existente distantiâ $SC = a$; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protensa per S transeat. Positis igitur $SP = x$, $PM = y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS = \frac{\pi Sxy.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At posito $Pp = dx$, erit $Mm = \frac{rdx}{y}$, & $xx+yy = 2ax - aa + rr$, unde annuli conatus versùs S erit $= \frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale est $= C + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis superficiei sphæricæ conversione arcus AM

ortæ prodibit $= \frac{\pi Srr}{aa} + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare si ponatur $SP = SB$ seu $x = a+r$, emerget conatus totius superficiei sphæricæ $= \frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipsa superficies sit $= 2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphærica actu versùs S tendet $= \frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, si tota superficies in centro C esset collecta.

§. 21. Cùm igitur superficies sphærica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphæricas, ex quibus integra Sphæra composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constent, sive quod eodem redit, ipsa Sphæra in iisdem à centro distantiis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmodi Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi sunt confectæ, sed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ constant difformi, dummodo in æqualibus à centro distantiis, materia circumquaque sit homogenea seu saltem ejusdem densitatis. Cùm igitur Terram sibi repræsentare liceat tanquam Sphæram, si non ex uniformi materiâ conflatam, tamen sine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè densam includat, Terra quoque universa tàm à Sole quàm à Luna æquè sollicitabitur, ac si omnis ejus materia in centro esset collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratissimis ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ institutis passim mensuris satis est demonstratum, Terræ figuram ad polos esse compressam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc instituto tutò negligi potest. Parique ratione, etiamsi Terra in æqualibus à centro distantiis non sit æquè densa, tamen differentia certè non est tanta, ut error sensibilis inde sit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad ſitum partium Terræ relativum immutandum, definienda eſt vis acceleratrix, quâ centrum Terræ ſive ad Solem ſive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, ſi comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis urgeri, nulla omnino ſitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in ſe ſpectata omnium partium ſitum mutuum invariatum conſervabit. At ſi vires, quibus ſingulæ partes à Sole aut Luna urgentur, diſcrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum niſi firmiſſimè inter ſe ſint connexæ in ſitu ſuo mutuo perturbari debebunt. Hocque caſu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, ſenſibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iſte motus, qui in ſingulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipſas partes ſollicitantes proficiſcatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innoteſcet, ſi à vi acceleratrice illam particulam ſollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque ſubtractio ita inſtituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam ſollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compoſitione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco ſuo deflectens.

§. 23. Conſentanea eſt hæc reductio principiis Mechanicis, quibus ſtatuitur motum relativum in ſyſtemate quotcunque corporum & à quibuſcunque viribus ſollicitatorum manere invariatum, ſi non ſolùm toti ſyſtemati motus æquabilis in directum ſimul imprimatur, ſed etiam ſingulis partibus vires æquales, quarum directiones ſint inter ſe parallelæ, applicentur. Noſtro igitur caſu motus inteſtinus partium Terræ non turbabitur, ſi ſingulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd ſi autem iſtæ vires æquales ſint illi, quâ tota Terra ſeu centrum ſollicitatur, & contrariæ, hoc ipſo Terræ motum curvilineum & in-

æquabilem, quippe qui ab iiſdem viribus oritur, adimemus. Quare ſi inſuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impreſſum concipiamus, obtinebimus totam Terram quieſcentem, atque etiamnunc partes perinde agitabuntur & inter ſe commovebuntur, ac ſi nullas iſtiuſmodi mutationes intuliſſemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hac reductione ſubſidium aſſequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, ſi centrum Terræ conſtituatur immotum, quàm ſi totalis motus ſingularum partium motibus eſſet permixtus. Hanc ob rem iſtâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æſtûs Maris, prouti in Terrâ immotâ ſentiri debent, eliciamus; quippe qui eſt caſus naturalis, ad quem omnes obſervationes ſunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus FIG. III. $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S exiſtentem cujus vis abſoluta ſeu ea, quam in diſtantia à centro ſuo S ſemidiametro Terræ æquali exerit, ſit $= S$, diſtantia verò centri Terræ C ab S ſeu CS ponatur $= a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta ſollicitabitur in directione CS, $= \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus ſitus ita ſit definitus, ut ſit $CP = x$ & $PM = y$, exiſtente MP normali ad CS; hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \sqrt{((a-x)^2 + y^2)}$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2 + y^2}$; à quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur, concipienda eſt particulæ M applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione MN ipſi CS parallela & oppoſita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac ſi univerſa Terra quieſceret vel uniformiter in directum moveretur, qui caſus ab illo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innoteſcet, quo particula M à vi ad S

directa de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: & quia hæc particula non est libera, sed quaquaversùs materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M insuper trahatur in directione MN vi $= \frac{S}{aa}$; tres istæ vires à Sole Lunave in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare si rectæ MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, si fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO sollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.

§. 26. Ut autem istæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio est MC, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem MC cadat, alteriùs verò directio sit MR normalis ad MC. Ad hoc commodissimè præstandum, resolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipsi CS parallelam, alteriùs verò directio in ipsam MC incidat. Cùm igitur sit $MC = \sqrt{(x^2+y^2)}$, erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, posterior verò $= \frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, quâ vis gravitatis augebitur. At si à priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ sollicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob similitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria secundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali sollicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametsi istæ expressiones tantoperè sint compositæ, ut parùm ex iis ad usum deduci posse videatur, tamen si consideremus distantiam Lunæ à Terra, multò magis autem distantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y; per approximationem satis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim sit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2 - 2ax + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

satis tutò substitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx - yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis sive Lunæ in S existentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy - 2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea autem eadem particula M sollicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4xx+yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$ $= \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x + \frac{4xx - yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi posteriores multis vicibus excedant, rem crassiùs inspiciendo, particula M à vi Solis Lunæve secundùm MC urgebitur vi $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$, in directione verò MR vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in S existentis gravitatem particulæ M augeri, si ejus situs respectu rectæ SC ita fuerit comparatus, ut sit $yy \rhd 2xx$ hoc est tangens anguli $MCP \rhd \sqrt{2}$ posito sinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $yy \lhd 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens est $= \sqrt{2}$ contineat 54°, 45′ circiter, si concipiatur circu-
FIG. IV. lus Terræ maximus quicunque $ADBE$, cujus planum per punctum S transeat, in eoque ducantur rectæ FCI & GCH, quæ cum rectâ SAB angulos constituant 54° 45′; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis FCH & GCI sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis FCG & HCI positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in S existente vel augeatur vel diminuatur. Altera
FIG. III. verò vis, quâ particula M in directione horizontali MR urgetur, affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates x & y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si parti-

cula M sita fuerit vel in quadrante ACD vel ACE, tum vis FIG. IV.
horizontalis ad rectam CA tendet; contrà verò hæc vis ad radium CB dirigetur, si particula M sit vel in quadrante BCD vel BCE constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet DAE & inferius DBE, inter se esse ferè similes; quæ similitudo quoque in ipso æstu Maris observatur.

§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\sqrt{(x^2+y^2)} = 1$ ob Terræ semidiametrum $= 1$. Quare si particula M fuerit posita in M, existente anguli ACM sinu $= y$ & cosinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in S augebitur vi $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3}$, secùndum horizontem autem in directione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570}$; pro Luna autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$: unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta, & cùm maximè est aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001, hoc est ut 4666666 ad 4666667; ex quo satis perspicitur differentiam hanc minimè percipi posse. Similis autem omninò est ratio alterius Phænomeni declinationis scilicet à situ verticali comparatæ, quæ numquam ad 5‴ exsurgere potest.

CAPUT TERTIUM.

De Figura, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.

§. 31. CUM igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Luna oriundas determinaverimus, quibus singulæ Terræ particulæ ad situm relativum cùm inter se tùm respectu centri, quod in hoc negotio tanquam quiescens consideratur, immutandum sollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipsum motum, quo singulæ particulæ inter se commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc investigatio sit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter se respicientibus, qualia vix usquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem secundùm principia statica ulteriùs persequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm seorsim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ seu aquâ cinctam contemplabimur, quò sollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc scilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipsam Terram quiescentes concipimus, ita ut inter se perpetuò eundem situm relativum conservent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tandiu retinebit, quoad idem situs relativus duret. Perspicuum autem est cognitionem hujus figuræ magno futuram esse adjumento ad ejusdem figuræ transmutationem definiendam, si tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Consideremus igitur primùm Terram in statu suo naturali, in quem se sola vi gravitatis composuit; in quo, cùm habitura sit figuram sphæricam, repræsentet circulus $ADBE$ seu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfusam ponimus. Ver- FIG. V.

ſetur jam Sol vel Luna in S, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò & E augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in A & B, contrà verò in D & E deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ. Sit itaque curva $adbe$ ea figura, quæ circa axem ab rotata generet Terræ formam, quam à vi ad S directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio conſtitutæ, neceſſe eſt ut directio media omnium ſollicitationum, quibus ſingulæ Terræ particulæ in ſupremâ ſuperficie ſitæ urgentur, ad ipſam ſuperficiem ſit normalis. Quare ſi particulam quamcunque M ſpectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione MC urgetur deorſùm, idque vi, quam conſtanter ponimus $= 1$; quippe quæ eſt ipſa gravitas in ſuperficie Terræ, eò quòd elevatio vel depreſſio hujus particulæ diſtantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, ſenſibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula M à vi in S exiſtente ſollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipſam MC incidit, alterius verò in MR normalem ad MC. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam MN normalem ad curvam aMd, quo ipſo natura hujus curvæ determinabitur.

§. 33. Dubium hîc ſubnaſci poſſet, quod cùm ad præſens inſtitutum omnium virium, quibus ſingulæ particulæ ſollicitantur, ratio haberi debeat, cam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non ſolùm non eſt infinitè parva, ſed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ reſultant: ſed quia hæc vis conſtantem producit effectum, Terræ ſcilicet figuram ſphæroidicam ad polos compreſſam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris obſervatur, ſenſibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ ſphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifeſtum autem eſt, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à ſphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admiſſo motu diurno Terræ à figurâ ſphæroidicâ eſſe diſcrepaturam. Quapropter in hoc negotio ſufficere poteſt, ſi, Terrâ inſtar ſphæræ perfectæ conſideratâ, definiamus quantam differentiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, ſi Terræ motus vertiginis reſtituatur, perſpicuum erit totam figuram ſub æquatore intumeſcere, ſub polis autem ſubſidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depreſſio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque ſi ulla etiam varietas in æſtu Maris à motu vertiginis Terræ proficiſcatur, ea calculo monſtrante nuſquam major eſſe poteſt parte $\frac{1}{289}$ æſtûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam cauſam operæ prætium eſt tam complicatos & abſtruſos calculos inire, ad quos perveniretur, ſi Terræ figura naturalis à ſphæricâ diverſa poneretur, atque inſuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex altera parte axis ab ſimilis eſt & æqualis, determinandam, ponatur vis abſoluta ſive Solis ſive Lunæ in S exiſtentis $= S$, diſtantia $CS = a$, ac ducta ſemiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, inſuper autem idem punctum M ſollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorſum pellitur vi $= 1$ ſecundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorſum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 ſequens terminus tutò negligi poteſt, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium ſi MN ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motus anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2S(yy-2xx)}$, quæ divisione actu institutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, sed tantùm à vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio MN debet esse ad curvam aMd in puncto M normalis, erit subnormalis $PN = \frac{-ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur sit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc est anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ superiori expressioni, quâ hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ $aMdb$ sequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli MCA cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx - xdy = \frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx + ydy = zdz$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ seu $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod

quod autem integrale proximè tantum satisfacit; at mox alia via aperietur verum ipsius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.

§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ adb circa axem ab, æqualis esse debeat soliditati Sphæræ radio $CA = 1$ descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$, & $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui soliditas genita conversione spatii $dCPM$ est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3} - \frac{3Sc^4u^5}{2a^3} - \frac{3Sc^5u^2}{a^4} + \frac{21Sc^5u^4}{4a^4} - \frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u = 1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3 + \frac{Sc^4}{a^3} - \frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac = z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} - \frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3 + \frac{Sc^4}{a^3} + \frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3 + \frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $= 1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1 = c^3 + \frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c = 1 - \frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z = 1 + \frac{S(3u^2-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa = \frac{S}{a^3} + \frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb = \frac{S}{a^3} - \frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm exceſſus ſuperioris elevationis ſuper inferiorem ſit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod diſcrimen reſpectu totius elevationis vix eſt ſenſibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd = Ee = \frac{S}{2a^3}$; ex quo iſta depreſſio duplo minor eſt, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B diſtant angulo 54° 45′, quippe pro quo eſt $3uu - 1 = 0$, neque elevàbitur aqua neque deprimetur, ſed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoſcetur aquæ vel elevatio vel depreſſio ex angulo ACM, cujus coſinus u eſt ſinus altitudinis ſub quâ Sol vel Luna in S exiſtens ſuper horizonte conſpicitur ab obſervatore in M conſtituto; hoc enim in loco aqua elevata erit ſupra naturalem altitudinem intervallo $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expreſſio, ſi ſit negativa, Maris depreſſionem indicat. Hîc autem annotare non eſt opus, quòd ſi punctum S ſub horizonte lateat, tum ſinus depreſſionis maneat quidem u, ſed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depreſſionem, quæ à ſolâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, ſi, uti ponimus, omnia in ſtatu æquilibrii eſſent conſtituta. Quoniam itaque eſt $S = 227512$ atque $a = 20620$ ſemid. Terræ, ſi una Terræ ſemidiameter aſſumatur 19695539 pedum Pariſ. erit $\frac{S}{a^3} = 0,5072$ ped. ſeu pauxillum excedet ſemipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evaneſcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus ſub Sole verticaliter ſitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad ſemipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreſſio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conſpicient, ubi aqua ad quadrantem

pedis tantum deprimetur; ex quo totum diſcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter aſſurget. Iſte Solis effectus autem diſtantiæ tantum mediocri Solis à Terra eſt tribuendus: quòd ſi enim Sol verſetur vel in apogæo vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diſtantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas ſit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo verſatur, $= 0,5332$ ped. ſin autem Sol in apogæo ſit conſtitutus, $= 0,4825$ pedum; quorum differentia ad viceſimam pedis partem aſcendit: valor autem medius eſt $= 0,5072$, quem pro mediocri diſtantiâ Solis à Terra invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucuſque dedimus ſolutum, quodque maximi eſt momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, ſed aliam viam ſecutus, non ſolùm indirectam ſed etiam erroneam, invenit Mare à ſolâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli abſolutam quàm eandem diſtantiam à Terra aſſumſiſſet, quibus nos ſumus uſi. Concluſit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis ſeu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra ſub æquatore extenditur ac craſſior redditur quàm ſub polis; atque aſſumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ ſub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed prætérquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo ſuperſtructum ſit fundamento, noſtrâ viâ directâ, quâ ſumus uſi, ſtatim evertitur: ex ipſâ enim rei naturâ, nullis precariis aſſumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac ſi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inſtitutum reſtaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorsus diversâ sumus resoluturi, congruentemque solutionem exhibituri.

§. 40. Quamvis autem iste Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus esse videatur ob parallaxin Solis, quam 10″ assumsimus, nondum accuratissimè definitam; à quâ tam distantia Solis à Terra a, quàm æstimatio vis absolutæ S, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semiaxis transversus seu distantia à Sole media sit $=a$, vis autem Solis absoluta $=S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $=t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur a in semidiametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t=\frac{5064\frac{1}{2}\,a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3}=\frac{5064\frac{1}{2}\cdot 5064\frac{1}{2}}{tt}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro una Terræ semidiametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t=31558164$, atque $\frac{S}{a^3}=0,50723$ ped. positâ semidiametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 ped. Paris. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ $=L$, poni oportet $S=L$, ejusque valor proximè

erit $=\frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris distantia est $=60\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3}=L.\ 88,94$ ped. $=2,223$ ped. & $\frac{S}{a^4}=L.\ 1,47=0,037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3}=L.\ 104,44$ ped. $=2,611$ ped. & $\frac{S}{a^4}=L.\ 1,82=0,045$ pedum. At si Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3}=L.\ 75,74$ ped. $=1,893$ ped. & $\frac{S}{a^4}=L.\ 1,19=0,030$ pedum. Ex his igitur si Luna à Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio $Aa=L.\ 90,41$ ped. $=2,260$ ped. elevatio autem $Bb=L.\ 87,47$ ped. $=2,187$ pedum: ac depressio ad latera $Dd=Ee=L\ 44,47$ pedum $=1,112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa=L.\ 106,26$ ped. $=2,656$ pedum; $Bb=L.\ 102,62$ ped. $=2,565$ pedum; atque $Dd=Ee=L.\ 52,22=1,305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa=L.\ 76,93$ ped. $=1,923$ pedum, & $Bb=L.\ 74,55$ ped. $=1,864$ pedum, atque $Dd=Ee=L.\ 37,87$ ped. $=0,947$ pedum.

§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depressio quæ vel à Sole vel Lunâ seorsùm gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs sit diversa, simul ea, quæ jam sunt eruta atque à Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ aqueæ à superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in S, FIG. VI. cujus vis absoluta ponatur $=S$, & distantia $SC=a$, sit AC

columna aquea à ſuperficie Terræ A ad centrum C uſque pertingens, quæ altitudo AC ſit $=h$. Ponatur anguli ACS coſinus $=u$, qui ſimul erit ſinus altitudinis ſub qua punctum S à ſpectatore in A conſtituto ſuper horizonte elevatum conſpicitur; ſumaturque intervallum quodcunque $CM=z$, & conſideretur totius columnæ elementum $Mm=dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorſum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis diſtantiis non ſatis conſtet, ponatur dignitati cuicunque diſtantiarum à centro putà ipſi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes eſſe turbaturum. Urgebitur ergo elementum Mm versùs centrum C vi $=z^n dz$; ex quo totius columnæ AC niſus deorſum à gravitate oriundus, erit $=\frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Prætererea autem elementum $Mm=dz$ à vi S ſollicitabitur duplici modo, altero deorſum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ poſterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, ſolaque prior conſiderabitur. Demiſſo autem ex M in CS perpendiculo MP, poſitiſque $CP=x$ & $PM=y$, erit $\sqrt{(x^2+y^2)}=z$, & $x=uz$ atque $y=z\sqrt{(1-uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particula Mm deorſum ſollicitatur, eſt $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expreſſio per dz multiplicata, tumque integrata facto $z=h$, præbebit totius columnæ AC niſum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC niſus deorſum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat eſſe idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis ſemidiametro Terræ 1 in ſtatu naturali à ſolâ gravitate deorſum nititur, quæ vis eſt $=\frac{1}{n+1}$. Hinc igitur ſequens emergit æquatio, $1=h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h=1+\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ eſt ea ipſa expreſſio, quam ſuprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem deſignet S Solis vim abſolutam, a ejus diſtantiam à Terra, & u ſinum anguli, quo Sol ſuprà horizontem eſt elevatus. Deinde ſit ſimili modo pro Luna L ejus vis abſoluta, b ejus diſtantia à Terrâ, atque v ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC=h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis eſſe debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione reſultat $h=1+\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A ſupra ſitum naturalem, quem à ſolâ gravitate ſollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim ſollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex qua expreſſione ſtatus aquæ vel elevationis vel depreſſionis ubique terrarum cognoſcetur.

§. 45. Hanc poſteriorem viam ſecuti, non ſolùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, ſed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuiſſet inſuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura eſſet à vi gravitatis & vi centrifugâ ſimul, ſeu quod eodem redit, in figurâ Terræ ſphæroidicâ compreſsâ, eſſe $=f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ eſſe $=h$; atque manifeſtum eſt quantitates f & h quàm minimè ab 1 diſcrepare. Cùm igitur utriuſque columnæ f & h idem debeat eſſe niſus deorsùm, columnæ autem f in quam ſola gravitas & vis centrifuga agunt niſus ſit $=\frac{f^{n+1}}{n+1}-\alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h niſus ſit $=\frac{h^{n+1}}{n+1}-\alpha h^2+\frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3}+\frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3}+\frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}+\frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1}-(n+1)\alpha ff=h^{n+1}-(n+1)\alpha h^2+\frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3}+\frac{(n+1)Lh^2(1-3vv)}{2b^3}+\frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}+\frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h=f+s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0=f^ns+\frac{Sf^2(1-3uu)}{2a^3}+\frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3}-2\alpha fs+\frac{Sfs(1-3uu)}{a^3}+\frac{Lfs(1-3vv)}{b^3}+\frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4}+\frac{Lf^3v(3-5vv)}{2b^4}$, neglectis terminis in quibus s plures obtinet dimenſiones, ob ſummam ipſius s parvitatem reſpectu ipſius f. Hinc itaque fiet

$$s=\frac{\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Sfu(5uu-3)}{2a^4}+\frac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}}{f^{n-2}-\frac{2\alpha}{f}+\frac{S(1-3uu)}{a^3f}+\frac{L(1-3vv)}{b^3f}}.$$

Quòd ſi porrò ponatur ſemiaxis Terræ per polos tranſiens $=1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1}-\alpha ff=\frac{1}{n+1}$ & $f=1+\alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè diſcrepabit; ſub ipſo enim æquatore eſt $\alpha=\frac{1}{578}$, ubi quidem eſt maximum: unde erit omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta ſupra altitudinem naturalem $s=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; diſcrimen enim quod revera aderit, ſenſus omnino effugiet, pendebitque ſimul à valore exponentis n.

CAPUT

CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris ſi aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente ſunt tradita reſpiciunt hypotheſin aſſumtam, quâ Solem ac Lunam reſpectu Terræ perpetuò eundem ſitum tenere poſuimus; ibique præcipuè ſtatum æquilibrii, ad quem oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem ſe res habet, ſi tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo caſu ob perpetuam ſitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adeſſe poterit; cùm enim tempore opus ſit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo ſtatus oceani aſſignatus à vero diſcrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii ſitum, quem vires ſollicitantes intendunt, pervenire non poterit, ſed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamſi in ipſum æquilibrii ſitum perveniat, in eo tamen non acquieſcet, ſed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè conſtat. Hujus autem utriuſque aberrationis ratio in inertiâ aquæ eſt poſita, quâ fit ut aqua nec ſubitò in eum ſitum ſe conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii ſitum attigerit, ibi quieſcat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem aſſumamus, hoc eſt iſtius indolis, ut non ſolùm quovis momento ſe in ſtatum æquilibrii ſubitò recipiat, ſed ibi etiam omnem motum inſitum deponendo permaneat, quamdiu iſte ſitus viribus ſollicitantibus conveniat. Hac itaque factâ hypotheſi, perſpicuum eſt aquam quovis temporis momento in eo ipſo ſtatu fore conſtitutam, qui ſecundùm præcepta capitis præcedentis poſitioni cùm Solis tùm Lunæ reſpondeat.

§. 47. Ut igitur in hac hypotheſi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus ſtatum Maris quàm commodiſſimè definiamus, primùm ſo-

Mm

lam Lunam confiderabimus, cùm in eâ præcipua æftûs Maris caufa contineatur, atque tam Fluxus quàm Refluxus Maris à tranfitu Lunæ per meridianum computari foleat: quòd fi enim Lunæ effectus innotuerit, non folùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, fed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus fimul agentibus proficifcitur. Propofitus igitur fit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith fit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO fit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel viciffim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, five hoc tempus fe habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod eft 24 horarum 48′, uti fe habet angulus MPL ad quatuor rectos. Sit igitur anguli MPL cofinus $= t$, finus elevationis poli PO feu finus arcûs $PZ = p$, cofinus $= P$, ac finus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem eft finus diftantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipfius arcûs finus fit $= q$, cui fimul cofinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob finum totum conftanter pofitum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo fphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam fphæricam arcûs ZL cofinus $= tpq + PQ$, qui fimul eft finus altitudinis Lunæ fupra horizontem, quem antè pofuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5(tpq + PQ)^2 - 3$; qui valores in formulis præcedentis capitis fubftituti præbebunt ftatum Maris, hoc eft vel elevationem vel depreffionem, pro loco propofito ad tempus affignatum.

FIG. VII.

§. 48. Quòd fi ergo Lunæ vis abfoluta ponatur $= L$, ejufque à Terra diftantia $= b$, erit intervallum, quo aqua fupra ftatum naturalem elevabitur, $= \frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreffio fi fit negativa, indicat aquam infra ftatum naturalem effe depreffam. Ponamus Lunam fuper horizonte feu versùs auftrum per meridianum tranfire, quo cafu erit $t = 1$; hoc igitur tempore aqua fupra ftatum naturalem erit elevata intervallo $= \frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna fub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ fupra ftatum naturalem per intervallum $= \frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(PQ-pq)(5(PQ-pq)^2-3)}{2b^4}$, quoniam hoc cafu fit $t = -1$. Tempore autem intermedio inter binos hos appulfus ad meridianum loci propofiti, feu eo tempore quo angulus ZPL fit rectus, hoc eft 6 horis 12′ vel ante vel poft tranfitum per meridianum ob $t = 0$, erit intervallum, quo aqua elevabitur, $= \frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3} + \frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreffio femper eft negativa, ideoque indicat aquam infra ftatum naturalem confiftere. Namque cùm P ubique fit minor unitate nifi fub ipfis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° affurgere poffit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ & $QQ < \frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreffio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicari licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, feu cùm pofterior terminus vix fit fenfibilis, ex folo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hac autem expreffione intelligitur aquæ elevationem à fola elongatione Lunæ ab horizonte pendere, five Luna fit fuper five fub horizonte, retinet enim $3vv - 1$ eundem valorem five v fit affirmativum five negativum. Deinde quia fit $3vv - 1 = 0$ fi Luna ab horizonte diftet arcu 35° 16′, tum aqua in ipfo ftatu naturali erit conftituta, neque elevata neque depreffa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel fupra vel infra horizontem versetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte distantia minor est quàm 35°. 16'. Omnino autem aqua maximè erit depressa dum Luna ipsum horizontem occupat, hocque tempore infra situm naturalem subsidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1,111$ pedum (§. 41.); atque de hoc situ elevabitur recedente Lunâ ab horizonte sive super sive sub Terra. Hinc iis in regionibus) in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24 hor. 48' Mare bis maximè erit depressa, bisque elevata; status scilicet depressionis incidet in appulsus Lunæ ad horizontem, status autem elevationis in appulsus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulsu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte distat, spatio 24 h. 48' aqua semel tantum elevabitur, semelque deprimetur: sub ipsis autem polis æstus Maris omnino erit nullus, diurnus scilicet; nam variatio declinationis sola statum Maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur sub polis Terræ nullus sit Fluxus ac Refluxus Maris, sed aqua tantùm aliquantulum ascendat descendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æstus Maris in aliis Terræ regionibus secundùm nostram hypothesin debeat esse comparatus. Considerabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima posita sit sub ipso æquatore, secunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depressio aquæ ubique erit eadem, scilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra situm naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipso horizonte versatur. Ab hoc itaque statu maximæ depressionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, spatiis assignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel supra horizontem in M vel infra in K ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter distat, qui

locus sit L existente angulo MPL recto. Præterea tres quoque Lunæ situs in sua orbita contemplabimur, quorum primus sit, cùm Luna in ipso æquatore versatur, secundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet australem pariter 20 graduum. Denique in tabella sequente adscripsimus quantitatem anguli MPQ, ex quo tempus tam ortûs quàm occasûs Lunæ, quo aqua maximè est depressa, atque elevatio existit nulla, innotescit.

In locis sub Æquatore sitis, est elevatio Maris, dum Luna versatur in

	M	L	K	ang. MPQ.
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{3L}{2b^3} + \frac{2L}{2b^4}$	0	$\frac{3L}{2b^3} - \frac{2L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3} + \frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3} - \frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3} + \frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3} - \frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0'

Sub elevatione Poli 30°, erit Maris elevatio

	M	L	K	ang. MPQ.
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{2,250\,L}{2b^3} + \frac{1,082\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,250\,L}{2b^3} - \frac{1,082\,L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,909\,L}{2b^3} + \frac{1,880\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3} - \frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{1,239\,L}{2b^3} - \frac{0,154\,L}{2b^4}$	102°, 8'
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{1,239\,L}{2b^3} + \frac{0,154\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3} + \frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{2,909\,L}{2b^3} - \frac{1,880\,L}{2b^4}$	77°, 52'

Sub elevatione Poli 60°, erit Maris elevatio

	M	L	K	ang. MPQ.
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{0,740\,L}{2b^3} - \frac{0,125\,L}{2b^4}$	0	$\frac{0,740\,L}{2b^3} + \frac{0,125\,L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{1,760\,L}{2b^3} + \frac{0,582\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3} - \frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{0,092\,L}{2b^3} + \frac{0,158\,L}{2b^4}$	129°, 5'
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{0,092\,L}{2b^3} - \frac{0,158\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3} + \frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{1,760\,L}{2b^3} - \frac{0,582\,L}{2b^4}$	50°, 55'

§. 51. Si quis jam ex hac tabulâ elevationem Maris supra statum maximæ depressionis in mensuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Parisinis ex §. 41. substituat, habitâ ratione distantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem est expositum. Consequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia consectaria, quæ verò nondum summo cum rigore ad experientiam examinari possunt, etiamsi jam insignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perspicuum autem est, si aquæ inertia tribuatur, tum diversa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd si igitur hi assignati effectus jam cum observationibus planè consentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra statum suum naturalem simus contemplati. Interim tamen satis tutò jam status Maris sub ipsis polis poterit definiri, qui etsi ad experientiam examinari non potest, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem sub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte distantiam, id quod ipsa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulsu æstus Maris alibi æstimari solet. Dabitur tamen his locis mutatio menstrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipso æquatore versatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua sensim elevabitur prout Lunæ declinatio sive versùs boream sive versùs austrum augetur, donec tandem si declinatio sit maxima, per spatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm sit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iisdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & b substitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorsim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem simplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione versari,

id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco versabuntur, atque simul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus superioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis sinus $= Q$, cosinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus cosinus est $= t$, erit sinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs austrum transeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem superabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$ $\left(3(pq+PQ)^2 - 1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2 - 3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm sensus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $=$ $\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(PQ - pq)^2 - 1\right) + \frac{L(PQ - pq)}{2b^4}$ $\left(5(PQ - pq)^2 - 3\right)$. Maxima denique aquæ depressio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $=$ $\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ sit circiter subquadruplum ipsius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ suprà recensiti quartâ sui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem se habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppositione versantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol secundùm ascensionem rectam à Lunâ distet 180°, erit hoc casu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur sinus altitudinis Solis $= -tpq - PQ$, qui pro novilunio erat $= tpq + PQ$, ex quo quadratum hujus sinûs utroque casu est idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte versantur, tumque aqua humilior erit quàm in statu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque situ donec Luna ad meridianum supra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ + pq)^2\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum subsidet usque ad Lunæ obitum; tum verò rursus elevabitur usque ad appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per spatium $3(PQ - pq)^2\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino sequente quippe ferè insensibili. Cùm igitur sint $PQ + pq$ & $PQ - pq$ sinus distantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano versatur, erunt spatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum supra statum maximè depressum elevatur, in ratione duplicata sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit. Nisi ergo vel Luna in ipso æquatore existat, vel Terræ locus sub æquatore sit situs, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per spatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis siti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipso æquatore versari, quoniam tum plerumque minimus æstus observatur. Hoc itaque casu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine assumamus 23° 29', cujus sinus sit $= Q$, cosinus $= q$, positâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M versari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua supra statum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per spatium $\frac{L(3(pq + PQ)^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$: at dum Luna sub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per spatium $\frac{L(3(PQ - pq)^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more solito medium, eritque elevatio aquæ media hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2 + 3P^2Q^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè versabitur, ex quo depressio totalis aquæ in Refluxu infra statum naturalem proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp - 1)}{2a^3}$: quare à Fluxu usque ad subsequentem Refluxum aqua subsidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2 + P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo assignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æstibus quàm minoribus infert, satis tutò assumere posse videmur spatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii sive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu ascendit, expressionibus inventis esse proportionalia. Quamobrem si in dato Terræ loco ex pluribus observationibus determinetur spatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum ascendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniisve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis consequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per observationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ absolutas S & L, quæ est ipsa via quâ Newtonus est usus ad vim Lunæ absolutam definiendam, cùm vis Solis sit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non satis accuratè sit pertractatum, nos id ex istis principiis expediemus. Exprimat igitur $m : n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in syzygiis luminarium quàm quadraturis tempore æquinoctiorum, ascendendo descendendoque oscillatur; eritque $m : n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2 + P^2Q^2)}{2b^3}$

$-\frac{3Spp}{2a^3}$; ex qua elicitur ista proportio $m\left(q^2+\frac{P^2Q^2}{p^2}\right)-n$: $m+n=\frac{S}{a^3}:\frac{L}{b^3}$; ex qua cùm data sit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducetur vis à Lunâ oriunda $\frac{L}{b^3}$ saltem proximè. Instituamus calculum pro observationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter se collatis pro ratione $m:n$ prodit ista 17 : 11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli sit circiter 50°, erit $P=$ sin. 50°, & $Q=$ sin. 23°, 29′; hincque $qq+\frac{P^2Q^2}{pp}=1,0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3}:\frac{L}{b^3}=7,1356:28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ sit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, uti jam Newtonus ex aliis observationibus conclusit: atque hanc ob rem ipsius determinationem vis Lunæ absolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque respicientibus sunt allata, attentiùs considerentur, mox patebit maximos æstus menstruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depressio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, simul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò dissentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum discrimen inter quemque Fluxum ac subsequentem Refluxum observabitur, æstusque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phases æstus Maris medium teneat inter maximum minimumque necesse est, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omnino conspirant, nec sibi invicem adversantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniisque maximus eveniat æstus, quibusque quadraturis minimus æstus respondeat, absolutè sine respectu ad situm loci habito definiri nequit.

Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm est in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium est nullum, quin æstus maximi in æquinoctia incidat, quandò ambo luminaria in æquatore sunt posita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum dissita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æstus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æstus mox subsequentes multo sunt minores. Quòd si autem inter binos æstus à Lunâ oriundos consequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æstus est $\frac{2,250}{2b^3}L$ si Lunæ declinatio sit nulla, æstum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $=\frac{2,074}{2b^3}L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò sub elevatione poli 60 graduum, est æstus Maris, Lunâ versante in æquatore, $=\frac{0,740}{2b^3}L$, æstus autem medius, cùm Lunæ declinatio est 20°, est $=\frac{0,926}{2b^3}L$, ideoque major. Ex quo consequitur in regionibus polis vicinioribus æstus maximos, non in æquinoctia, sed potius circa solstitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria nostra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eadem hypothesi.

§. 57. QUANQUAM in præcedente capite, quo in quantitatem æstûs Maris præcipuè inquisivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite istud argumentum fusiùs atque ad observationes accommodatè persequemur. Observationes enim, quæ circa æstum Maris institui solent, ad tria genera commodissimè referuntur; ad quorum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depreſſio, atque indicatur quantum quovis æſtu aqua cùm aſcendat tùm deſcendat. Ad ſecundum obſervationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus reſpiciunt, quibuſque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm ſummam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus obſervationum ad ipſum motum Maris reciprocum ſpectat, iiſque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depreſſio abſolvatur, ſive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum tranſit & viciſſim, inveſtigatur. Quibus tribus rebus cùm obſervationes convenientiſſimè inſtituantur, iiſdem theoria atque explicatio phænomenorum commodiſſimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro noſtrâ hypotheſi in præcedentibus capitibus abundè ſatisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliiſque circumſtantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abſtrahimus, manifeſtum eſt ubique terrarum, ſi ſola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longiſſimè fuerit remota, hoc eſt iis ipſis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam ſupra quàm infra Terram tranſit: ſunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo ſimul ſucceſſiva Maris commotio cognoſcitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulſu aqua debet eſſe ſumma, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus ſolliciti; cùm tam obſervationes ſufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipſe Maris motus indicatus rationi ſit conſentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis ſatis remotis ſeu extra circulos polares ſitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totieſque deprimetur; atque

utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus ſeu ſummas elevationes interjectum conſtanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abſtrahendo; at tempus ſummæ depreſſionis, cùm reſpondeat appulſui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, ſed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propoſiti elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc eſt quò majus fuerit diſcrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium ſextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut noſtræ concluſiones magis ad obſervationes perducantur. Ac primò quidem manifeſtum eſt tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci tranſit, quippe quo momento etiam Sol ad eundem meridianum appellit, ſi quidem ſyzygia ipſo meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem ſi novilunium pleniluniumve in ipſum meridiem incidat, ipſo quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque ſi id eveniat mediâ nocte, eodem ipſo momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm ſi conjunctio vel oppoſitio luminarium meridiem vel præcedat vel ſequatur, tum Fluxus non in ipſum meridiem incidet, ſed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his caſibus tanquam primaria æſtûs cauſa vel poſt vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem ſive plenilunium ſive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs reſpectu meridiei. Ponamus enim novilunium ſeu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus ſit 12° circiter, ipſo meridie Luna à meridiano jam diſtabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna poſt meridiem demum per meridianum tranſibit, elapſis $\frac{n}{30}$ horis ſeu $2\,n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis post meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscentur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ à Terrâ indicetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum Maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem si syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs observari debebit. Atque hæc est ea ipsa regula quam Celeb. Cassini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem vel præcedit vel sequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire solet, vel addi vel ab eo subtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perspicuum est eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ

motu petitâ, quæ verò plerumque erit insensibilis, cùm summa aquæ elevatio non subitò adsit, sed per tempus satis notabile duret.

§. 61. Nisi autem luminaria proxima sint vel conjunctioni vel oppositioni, maxima Maris elevatio non in ipsum Lunæ transitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum versatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conservat, tantisper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem si Sol interea sensibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel crescet sensibiliter, vel decrescet; ex quo dum Luna prope meridianum existit, fieri potest, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perspicuum est summam Maris altitudinem tardiùs seu post transitum Lunæ per meridianum accidere debere, si eo tempore Sol ab horizonte recedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem si Luna post Solem per meridianum transeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occasum; tum, quia Mare in transitu Lunæ per meridianum à vi Solis jam deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulsum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve sequentibus. Quando autem Sol ipsum horizontem occupat, dum Luna in meridiano versatur, tum etiamsi distantia Solis horizonte perquam sit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato sinûs altitudinis Solis sit proportionalis, quod omnino evanescit, etiam hoc casu maxima aquæ elevatio in ipsum Lunæ per meridianum transitum incidet, hicque casus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut igitur innotescat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel crescant vel decrescant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L versari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempusculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræsentato FIG. VII.

progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum ſit ut antè anguli MPL coſinus $= t$, & ſinus $= T$, eritque ipſe angulus $LPl = d\theta = \frac{+dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{dt}{T}$; ex quo orietur anguli MPl coſinus $= t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur ſinus elevationis poli $= P$, ſinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam ſi declinatio ſit auſtralis, ſinus Q ſumi debet negativè, coſinus verò reſpondentes ſint p & q, reperietur ſinus altitudinis L ſupra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l ſinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpq\,d\theta$. Quocirca ſi Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum ſit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lv\,dv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{b^3}$. At ſi Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempuſculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora reſpondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt, ſunt enim ut 24 ad $24\frac{3}{4}$ ſeu ut 32 ad 33, ſine ſenſibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen ſi res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquiſitum ſit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempuſculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{11\,b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus caſibus evaneſcere, quorum primus evenit ſub polis, quia ibi eſt $p = 0$; ſecundus, ſi punctum L in meridiano ſit ſitum, tum enim ſit $T = 0$; tertius denique locum habet, ſi punctum L in horizonte exiſtat, ubi eſt $tpq + PQ = 0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L verſari ac Lunam per meridianum jam tranſiiſſe, hocque momento maximè aquam eſſe elevatam; jam enim oſtendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam ſummam incidere poſt tranſitum Lunæ per meridianum.

Hoc ergo momento neceſſe eſt, ut decrementum vis Lunæ, quod tempuſculo $d\theta$ patitur, æquale ſit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum ſumti quo Luna jam à meridiano receſſit, coſinus $= n$, ſinus $= N$, atque ſit Lunæ declinationis borealis ſinus $= R$, coſinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Npr\,d\theta}{b^3}$, quod cùm æquale eſſe debeat incremento vis Solis eodem tempuſculo nato $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$, denotante Q ſinum declinationis borealis Solis, & q ejus coſinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{32}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul diſtabit, poni poterit $n = 1$, atque cùm ſit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iſte valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo aqua poſt tranſitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P = 0$ & $p = 1$; quare ſi declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales aſſumantur, ita ut ſit $qq = rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expreſſionis valor extat maximus ſi angulus MPL ſit 45°, quo caſu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus reſpondens $= 7°, 11'$, qui indicat aquam ſummam 30 minutis poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante tranſitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, ſi Sol tum verſùs occaſum verſetur angulo $MPL =$ ſemirecto. Quamobrem ſi Luna ad meridianum appellat horâ nonâ ſive matutinâ ſive pomeridianâ, Fluxus demum poſt ſemihoram eveniet; at ſi horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua ſumma 30′ antè obſervabitur: in aliis verò Terræ regionibus iſta aberratio magis eſt irregularis; interim tamen ſatis prope ex formulâ datâ per ſolam æſtimationem poteſt definiri.

§. 64. Quòd si autem hanc rem curatiùs investigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à se mutuò maximè ob angulum horarium MPL inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phasi aberrationem maximæ aquæ elevationis à transitu Lunæ per meridianum determinemus, FIG. VIII. repræsentet nobis circulus $ZBNC$ verticalem primarium, BC horizontem, ZN meridianum per dati loci Zenith Z & Nadir N ductum, atque æquator sit BAC, polus australis p, & ecliptica ♊♎♐. Constitutus nunc sit Sol in S & Luna in L, quæ modò per meridianum transierit, quo tempore ponimus aquam maximè esse elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ sinum esse $=F$, cosinum $=f$; Lunæ verò longitudinis sinum esse $=G$, cosinum $=g$; sitque inclinationis eclipticæ B♎♐ sinus $=M$, cosinus $=m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum sinus antè erant positi Q & R; erit scilicet $Q=FM$, $R=GM$; hincque $q=\surd(1-F^2M^2)$ & $r=\surd(1-G^2M^2)$. Deinde angulus SpL æqualis est angulo cujus tangens est $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens est $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejusdem anguli ob angulos SpZ & LpZ datos, quorum sinus sunt positi T & N, tangens quoque est $\frac{nT+Nt}{nt-NT}$, quæ tangens propter sinum N valde parvum proximè est $=\frac{T}{t}+\frac{N}{tt}$. Ponatur autem K pro sinu anguli qui excessus est anguli habentis tangentem $=\frac{mF}{f}$ super angulum cujus tangens est $\frac{mG}{g}$, & k pro cosinu, reperietur $T=K-Nk$ & $t=k+NK$ scripto 1 pro n: quibus valoribus substitutis prodibit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$, ex æquatione $N=\frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis versari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut

arcus LS futurus sit $90°$, erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ sin. (Atãg. $\frac{mg}{f}$ — Atãg. $\frac{-mf}{F}$) atque k ejusdem anguli cosinui æquabitur. Quare his tempestatibus aqua maximè erit elevata post transitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris conversum dabit angulum cujus sinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$. Pro posteriore verò quadraturâ post novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$, unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ sin. (Atãg. $\frac{mF}{f}$ — Atãg. $\frac{-mf}{F}$) & $k=$ cosinui respondenti. Ne autem hic signa $+$ & $-$ calculum confundant, notari convenit K esse sinum arcûs, qui restat, si ascensio recta Lunæ subtrahatur ab ascensione rectà Solis; atque k esse ejusdem arcûs cosinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis versari, erit longitudo Solis $=0°$, seu $360°$, & longitudo Lunæ $=$ vel $90°$ vel $270°$, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea ascensio recta Solis est $360°$, & ascensio recta Lunæ vel $90°$ vel $270°$; utroque casu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, si Sol versetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis versatur, aqua maximè erit elevata eo ipso momento, quo Luna ad meridianum appellit.

§. 66. Sit porrò Sol in solstitio æstivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis $90°$, Lunæ verò $=0°$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò ascensio recta habebitur $90°$, Lunæ verò $=0°$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ est longitudo Lunæ $180°$, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ ascensio recta sit $180°$, erit $K=$ sin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$.

Quoniam autem est $4 > m^2$, dum Sol in solstitio æstivo versatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget post Lunæ transitum per meridianum supra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc transitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; sub æquatore enim omnino evanescit. Sit poli elevatio 45°, fietque his regionibus $N = + \frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm sit M sinus 23°, 29′, prodibit $N =$ sinui anguli 6°, 33′, qui in tempus conversus dat 26′. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante transitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis post transitum. Contrarium evenit si vel Luna sub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in solstitio hyemali versetur. Ex his igitur formulis, si tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio transitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel sequi debeat; cujusmodi supputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur satis est expositum, quo momento Mare maximè sit elevatum, maximam quoque Maris depressionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifestum est, si sola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem observatum iri, eo ipso momento, quo Luna in horizonte versetur: atque hinc perspicuum est, idem usuvenire debere, si Sol eodem momento quoque in horizonte existat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua respondebit situi Lunæ in horizonte, si eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamsi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos casus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo casu aqua jam elevabitur, ex quo necesse est imam aquam

ante adventum Lunæ ad horizontem extitisse, contrà verò si dum Luna in horizonte versatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs scilicet post appulsum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum sub horizonte Hh in ☽ adhuc versari, Solemque in ☉ esse positum, unde ad meridianum PZH progrediatur, hocque ipso momento aquam maximè esse depressam. Necesse igitur est, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale sit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam sit anguli ☽PO ad polum sumti, distantiam Lunæ à suo ortu O indicantis, sinus $= V$ & cosinus $= v$, qui ob angulum ☽PO valde parvum tutò sinui toti 1 æqualis concipi potest. Invento ergo angulo hoc ☽PO seu arcu æquatoris illi respondente, eoque in tempus converso, constabit quanto temporis intervallo ima aqua appulsum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occasum quàm ad accessionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur. FIG. IX.

§. 68. Positis nunc $A\Upsilon a$ æquatore ac ♒♈♌ ecliptica, sit elevationis poli Ph sinus $= P$, cosinus $= p$; sinus declinationis Lunæ borealis ☽$L = R$, cosinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO cosinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evanescit. Cùm igitur anguli APO sinus sit $= \frac{\surd(p^2r^2 - P^2R^2)}{pr} = \frac{\surd(1 - P^2 - R^2)}{pr} = \frac{\surd(pp - RR)}{pr}$, erit anguli AP☽ sinus $= \frac{v\surd(pp-RR) - VPR}{pr}$, & cosinus $= \frac{-vPR - V\surd(pp-RR)}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $= \frac{3LV\surd(pp-RR)\,(\surd(pp-RR) - VPR)\,d\theta}{b^3}$ $= \frac{3LV(pp-RR)\,d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ☉S sinus $= Q$ & cosinus $= q$, atque anguli AP☉ sinus $= T$, cosinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)\,Tpq\,d\theta}{b^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale est ponendum, siquidem Maris altitudo hoc tempore est minima. Quare cùm sit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, ista habebitur æquatio $4V\sqrt{(pp-RR)} = Tpq(tpq+PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq+PQ)}{4\sqrt{(pp-RR)}}$: cùm igitur hoc pacto innotescat angulus $OP☽$, is in tempus conversus dabit temporis spatium, quo summa Maris depressio ante ortum Lunæ contingit. At si punctum O designet Lunæ occasum, idem angulus præbebit tempus post Lunæ occasum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si $T=0$, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si $tpq+PQ=0$, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit $P=0$, & $p=1$, unde efficitur $V = \frac{Ttqq}{4(1-RR)} = \frac{Ttqq}{4rr}$; in qua formula cùm q & r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu $=0$, erit tamen cosinuum ratio minor quàm $1:\sqrt{\frac{3}{4}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ semper intra hos limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantum prope definire conamur, habebitur $V = \frac{Tt}{4} = \frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ sinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano distat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua

Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45°, cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava fit sinus anguli 7°, 11′, cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈ ☉ sinum esse $=F$, cosinum $=f$; longitudinis verò Lunæ ♈ ☽ sinum esse $=G$, cosinum $=g$; atque inclinationis eclipticæ ☊ ♈ a sinum $=M$, cosinum $=m$. His positis erit $Q=MF$, & $R=MG$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $=\frac{mF}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $=\frac{mG}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, & differentiæ sinus sit $=K$, cosinus $=k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ sit sinus $=K$ & cosinus $=k$, anguli verò AP☽ sinus $=\frac{v\sqrt{(pp-RR)}-VPR}{pr}$ ob $v=1$, & cosinus $=\frac{-PR-V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli AP☉ sinus $=T=\frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)}-kPRV+KPR}{pr}$ & cosinus $t=\frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)}-KPRV-kPR}{pr}$; quibus valoribus substitutis, simulque sinu V tanquam valde parvo considerato, reperietur sinus $V=\frac{(KPR+k\sqrt{(pp-RR)})\,q\,(Kq\sqrt{(pp-RR)}-kPRq+PQr)}{4rr(pp-RR)}$.

Sub æquatore autem, quo fit $P=0$, $V=\frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula superior à distantiâ Solis à meridiano petita simul ad differentiam ascensionalem Solis & Lunæ potest accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præsens institutum, quo tantum veritatem causæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus est hæc pluribus persequi, quippe quæ potissimum ad accuratissimas æstûs marini tabulas supputandas pertinent, quæ res in propositâ quæstione Illustrissimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æstu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æstum Maris fusiùs deduximus, eâ hypothesi nituntur assumtâ, quâ aquam inertiæ expertem posuimus: quamobrem non est mirandum si plerique effectus assignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet facilè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientia dissentiunt, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa Maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem Mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertiæ aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum sitûi est tribuenda, uti in sequenti capite clarissimè monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertiâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumsimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera & genuina æstûs Maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumtæ hypothesi superstruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertiæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatæ vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab Inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfecisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam istarum virium modo rationali & legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque fecissemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab Illustrissimâ Academiâ in præsente quæstione non requiri videatur.

§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, qua viribus sollicitantibus subitò obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hocque pacto aquam non solùm subitò omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subitò se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertiâ aquæ, à potentiis sollicitantibus motum omnino diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertiâ privata esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus

FIG. X. enim corpus pendulum OC ob gravitatem situm tenens verticalem, à vi quapiam in latus secundùm directionem CM sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm OM acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm OM perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurret, putà in N usque, ita ut spatium CN ferè sit duplo majus spatio CM, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat, atque à situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertiâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.

§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs Maris transferamus, primò ingens similitudo in

situ penduli verticali ac statu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, observatur. Nam quemadmodum pendulum, si in quamcunque plagam de situ verticali declinetur, propriâ vi gravitatis se in eundem recipit, ita etiam aqua, si ex situ suo æquilibrii depellatur, vi gravitatis se ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oscillationes peragit, cujusmodi oscillationum casus in aqua observati passim inveniuntur expositi. Deinde etiam simili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex situ suo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim sese in situm æquilibrii restituendi. Quòd si igitur Mare à viribus externis, Solis scilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, necesse est ut inde motus oscillatorius seu reciprocus oriatur æstui Maris omnino similis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam verò proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem sunt res, quæ absolutam ac perfectam totius motûs determinationem summopere reddunt difficilem, quarum altera physicam spectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ consistit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè si quæstio sit de amplissimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analysi est posita, eò quòd iste motus Maris reciprocus prorsus sit diversus ab omnibus oscillationibus à Mathematicis adhuc consideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare sollicitantes neque à situ corporis oscillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id usuvenit in omnibus oscillationum casibus etiam nunc expositis, sed eæ vires à situ luminarium respectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujusmodi oscillationes nemo adhuc, quantum quidem constat, calculo subjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem physicam attinet, res hoc quidem tempore ferè desperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia sit assecuta incrementa, tamen ea potissimum motum aquarum in vasis & tubis fluentium respiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari potest. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præstare non licet, nisi ut hypothesibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæstio ad considerationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamsi difficillimis integrationibus sit involuta, tamen feliciter superare confidimus. Con-

FIG. XI. sidero scilicet superficiem aquæ RS, quæ hoc in situ æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd si igitur aqua in M usque sit depressa, atque externæ vires Solis ac Lunæ subitò cessarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur sese elevare usque in situm RS naturalem, isteque conatus eò erit major, quò majus fuerit spatium CM quo à situ naturali distat. A veritate itaque non multum recedemus, si hanc vim ipsi spatio MC ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd sponte indicat, si aquæ superficies supra C jam sit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypothesis confirmatur pluribus phænomenis aquæ nisum respicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium supersit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M constitutam urgeri à solâ Lunâ, atque ut calculus per se molestus minus habeat difficultatis, sit locus C sub ipso æquatore situs, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith transeunte æquatore scilicet circumferetur: sit $EGFH$ iste circulus, cujus radius ponatur $=1$, atque EF repræsentet horizontem, & G zenith. Positis his, sit Luna in T dum Maris superficies versatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat sinum altitudinis Lunæ super horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, posito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo superficies

Maris in M duplici vi attolletur scilicet vi, $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd si ergo ponamus aquam in M jam habere motum sursum directum, cujus celeritas tanta sit quanta acquiritur lapsu gravis ex altitudine v, atque spatium $Mm = -ds$ tempusculo infinitè parvo absolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E jam elapsum, quod arcui ET est proportionale, esse $= z$, quæ littera ipsum arcum ET simul denotet, erit $y = \text{sin.}\, z$ scilicet sinui arcûs z, hoc enim modo sinus ac cosinus arcuum sumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \text{cos.}\, 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\text{cos.}\, 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{cos.}\, 2z.\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis sit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde sumto elemento dz pro constante, fiet $dv = \frac{2\,ds\,dds}{dz^2} = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{cof.}\, 2z\right)$, atque $2\,dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{cof.}\, 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z; & propterea si debito modo integretur, indicabit situm seu statum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio est differentialis secundi gradûs, atque insuper arcus & sinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus esse obviam; interim tamen cùm alterius variabilis plus una dimensione nusquam adsit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejusmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non inest, rejicere; unde hæc consideranda venit æquatio $2\,dds + \frac{s\,dz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, existente integrali $ds^2 + \frac{ss\,dz^2}{2g} = c\,dz^2$ ob dz constans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ = arcui cujus sinus est $\frac{s}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur

$s = \sqrt{2cg}.\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea naſcitur ſubſtitutio facienda pro æquatione propoſitâ $2dds + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1-3\ cof.\ 2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{udz}{\sqrt{2g}}\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2dudz}{\sqrt{2g}}\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{udz^2}{2g}\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget iſta æquatio $2ddu\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4dudz}{\sqrt{2g}}\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1-3\ cof.\ 2z)}{2h} = 0$, in qua hoc commodè accidit, ut ipſa variabilis u non inſit, ſed tantum ejus differentialia.

§. 78. Quòd ſi ergo ponatur $du = pdz$, erit $ddu = dpdz$, & æquatio noſtra tranſibit in ſequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4pdz}{\sqrt{2g}}\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1-3\ cof.\ 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, ſi multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & conſtantibus compoſitam, eò quòd p plures una dimenſiones habet nuſquam. Ad integrationem autem abſolvendam notandum eſt hujus æquationis $dp + pZdz = \Sigma dz$, in qua Z & Σ functiones quaſcunque ipſius z denotent, integrale eſſe $e^{\int Zdz} p = \int e^{\int Zdz} \Sigma dz$. Reductâ autem noſtrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2pdz\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\ cof.\ 2z - 1)}{4h\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque $Zdz = \frac{2dz\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\ diff.\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Zdz = 2\log.\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Zdz} = \left(\text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his ſequitur integrale noſtræ æquationis $p\left(\text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}(3\ \text{coſ.}\ 2z - 1) = \frac{3}{4h}\int dz\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ \text{coſ.}\ 2z - \frac{1}{4h}$

$\int dz\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur eſſe $\int dz\ \text{ſin.}\ \alpha z = C - \frac{1}{\alpha}\ \text{coſ.}\ \alpha z$, atque $\int dz\ \text{ſin.}\ \alpha z.\ \text{coſ.}\ \beta z = C$ $\frac{\beta\ fin.\ \alpha z.\ fin.\ \beta z - \alpha\ cof.\ \alpha z.\ cof.\ \beta z}{\alpha^2 - \beta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(\text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$

$$= C + \frac{\sqrt{2g}}{4h}\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ \frac{\left(2\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}.\ fin.\ 2z + \frac{1}{\sqrt{2g}}\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}.\ cof.\ 2z\right)^3}{\left(\frac{1}{2g} - 4\right)4h}$$

atque

$$p = \frac{C}{\left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}.\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2}$$

$$\frac{\left(4g\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ fin.\ 2z + \sqrt{2g}.\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ cof.\ 2z\right).^3}{4h(1-8g)\left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2}.$$

§. 79. Cùm autem poſuiſſemus $du = pdz$, erit $u =$

$$\int pdz = \int \frac{Cdz}{\left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \int \frac{dz\sqrt{2g}.\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2}\ \frac{3}{4h}\int dz$$

$$\frac{\left(4g\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ fin.\ 2z + \sqrt{2g}.\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\ cof.\ 2z\right)}{(1-8g)\ \left(fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2}.$$

Hæ autem formulæ omnes ſunt abſolutè integrabiles, prodibitque $u =$

$$D - \frac{C\sqrt{2g}.\ cof.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}}{fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\ cof.\ 2z}{2h(1-8g)\ fin.\ \frac{z}{\sqrt{2g}}};$$

ex quo tandem reſultat $s = u\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} = D\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + C\ \text{coſ.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\ cof.\ 2z}{2h(1-8g)}$, quæ eſt æquatio generalis ad quodvis tempus z ſtatum aquæ, ſeu diſtantiam ejus ſupremæ ſuperficiei à C indicans, ubi conſtantes C & D ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando

Luna in T versatur, in eodem loco M versetur, necesse erit ut valor ipsius s maneat idem, etsi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At posito $z + 2\pi$ loco z, terminus cos. $2z$ manet quidem invariatus, at D sin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ cos. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ sin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ cos. $\frac{+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adesse non potest nisi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ sit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam est datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut ista habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g\ cos.\ 2z}{2h(1-8g)}$, ex qua facillimè ad quodvis tempus status Maris cognoscetur: valores scilicet affirmativi ipsius s dabunt situm aquæ infra situm naturalem C, negativi verò supra C.

§. 80. Cognito autem spatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M ascendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$, erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g\ sin.\ 2z}{h(1-8g)}$, quæ expressio ipsi celeritati, quâ aquæ superficies, dum in M versatur, elevatur, est proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ semper est ut sinus dupli arcûs ET, vel etiam ut sinus dupli temporis, quo Luna à transitu per meridianum abest, tempore scilicet in arcum æquatoris converso. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla si Luna fuerit vel in E vel in G, vel in F vel in H, hoc est, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè sit elevata vel maximè depressa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, bisque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depressa iis ipsis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit cos. $2z = 1$; atque spatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipsos Lunæ transitus per meridianum, quibus est cos. $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non satis conveniunt, tamen ea hypothesi assumtæ planè congruunt, qua posuimus Lunam solam agere, ac perpetuò in ipso æquatore versari, ex quo æstus se tandem ad summam regularitatem componat necesse est. Quòd si enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol insuper agat, æstus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò sublatam effectus tardiores necessariò consequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus posuimus, inertiâ careret; tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus sollicitantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad meridianum continget, fiet per spatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si aqua inertiâ careret, foret spatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admissâ agitationes perficientur in spatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$, cujus excessus super spatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet à valore litteræ g, qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æstus orietur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8g = 1$, hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse poteſt $8g > 1$, quod tamen ſi eveniret, maxima elevatio appulſui Lunæ ad horizontem, maximaque depreſſio Lunæ meridianum occupanti reſponderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, ſi inertiâ careret, agitetur per ſpatium $MN = \frac{3g}{h}$, ſuprà autem §. 41. eâdem hac hypotheſi, qua tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari ſupra libellam per ſpatium 2, 260 pedum, infra eam verò deprimi ſpatio 1, 112 pedum, erit $\frac{3g}{h} =$ 3, 372 pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1, 124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipſius g cum unitate comparatur, ideo venit, quòd tempus per ipſum arcum circuli cujus radius eſt $= 1$ expreſſimus: hinc itaque valor ipſius g reſpectu unitatis definietur tempore eodem modo expreſſo, quo aqua in M uſque depreſſa ſolâ vi gravitatis ſe in C reſtitueret, quod tempus ex circumſtantiis facilè poterit æſtimari: prodibit autem per calculum tempus hujus reſtitutionis $= \frac{\pi}{2}\sqrt{2g}$, denotante π ſemiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, ſeu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd ſi igitur reſtitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$, & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perſpicuum eſt, quò citiùs aqua ſe propriâ ſuâ vi reſtituere valeat, eò minùs exceſſurum eſſe ſpatium AB ſpatium MN. Cùm autem de hac reſtitutione non ſatis tutò judicare queamus, præſtabit ex obſervationibus rationem ſpatii AB ad MN proximè aſſumere. Si enim ponamus eſſe $AB = 2\,MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; ſin autem ſit $AB = 3\,MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at poſito $AB = 4\,MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus ſpatium abſolvere poni poteſt, aſſumamus $g = \frac{2}{36}$ ſeu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in ſtatum naturalem ſe reſtituere valeat. Poſito autem $g = \frac{1}{18}$,

fiet $\frac{3}{1-8g} = 5, 4$; ſpatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat ſpecialis, retineamus litteram n, cujus valorem eſſe circiter 6 vel 5 notaſſe ſufficiet, qui valor ſatis propè ad æſtimationem accedit: ita ut ſit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16}\cdot\frac{9}{8}$ pedum: unde ſatis patet n neceſſariò eſſe debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in ſenſu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli ſinum eſſe $= P$, coſinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis ſinum eſſe $= Q$, coſinum $= q$; Lunamque ſuper Terra jam per meridianum tranſiiſſe, ab eoque diſtare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ deſignet; quòd ſi nunc arcûs z coſinus ponatur $= t$, erit ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}\left(3(tpq + PQ)^2 - 1\right) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, poſito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò eſt $t = $ coſ. z erit $2tt - 1 = $ coſ. $2z$ & $tt = \frac{1 + \text{coſ. } 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $= \frac{3p^2q^2 \text{ coſ. } 2z}{2h} + \frac{6pqPQ \text{ coſ. } z}{h} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h}$. Ponamus nunc ſuperficiem aquæ in M verſari, exiſtente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu aſcendit debitam eſſe altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \right.$ vi Lunæ$\left.\right)$, cùm verò ſit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = $ ipſi celeritati aſcenſûs; erit $v = \frac{ds^2}{dz^2}$ atque $dv = \frac{2ds\,dds}{dz}$, poſito dz conſtante: hinc igitur emerget iſta æquatio $2dds + dz^2\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h} + \frac{6pqPQ \text{ coſ. } z}{h} + \frac{3p^2q^2 \text{ coſ. } 2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & ſtatum Maris s continens.

§. 84. Quòd ſi nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo ſuperior, ea pariter bis integrari poſſe deprehendetur, integrationibus autem ſingulis debito modo abſolutis, & conſtantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} - \frac{6gpqPQ\,cof.\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,cof.\,2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas aſcensûs $\surd v = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ\,fin.\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,fin.\,2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem ſit ſin. $2z = 2$. ſin. z coſ. z, celeritas duobus caſibus evaneſcit, quorum primus eſt ſi ſin. $z = 0$, alter ſi coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi caſus dabunt aquam ſummam, hi verò imàm. Hinc igitur patet aquam ſummam contingere debere iis ipſis momentis, quibus Luna per meridianum tranſit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò eſt ima ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ poſito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem eſt notandum quod ſuprà, ſcilicet nos poſuiſſe motum aquæ eſſe uniformem ſeu quotidie ſui ſimilem, Lunamque in eclipticæ locum tenere fixum, ſeu ſaltem ſuam declinationem non variare. Quoniam verò ob variabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iſte motus perpetuò turbatur, atque inſuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita eſt ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis ſequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter ſi Luna ſuper horizonte ad meridianum appellit, alter ſi ſub Terra; priori caſu eſt coſ. $z = 1$, & coſ. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare ſupra libellam C elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna ſub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per ſpatium $= \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter

coſ. $z = -1$ at coſ. $2z = 1$ hoc caſu: harum igitur altitudinum differentia eſt $= \frac{12gpqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in tranſitu Lunæ per meridianum ſupra horizontem altiùs elevatur, ſi declinatio Lunæ ſit borealis; contrà verò ſi declinatio fuerit auſtralis, major Maris elevatio reſpondebit appulſui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipſo æquatore verſante, ambo Fluxus inter ſe erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum ſucceſſivorum inæqualitas erit maxima ſub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; quo valore ſubſtituto, reperietur aqua infra libellam C ſubſidere per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æſtu movebitur per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum ſignorum ambiguorum ſuperius $+$ valet ſi Luna ſuper horizonte, alterum verò $-$ ſi Luna ſub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum ſuperiore Lunæ tranſitu per meridianum elevaretur ſupra libellam C per ſpatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò tranſitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum diſcrimen eſt $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut diſcrimen admiſſâ inertiâ majus ſit parte circiter octava, quàm idem diſcrimen ſi inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua ſublatâ inertiâ, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit conſtituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo ſpatium, per quod æſtus Maris ſit ſublatâ inertiâ, prodit $=$

$\frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h}g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)}\,(1-8g)}$, hoc eſt, $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem ad horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium AB, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque g ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}(pq \pm \frac{3}{7}PQ)^2$, 3, 372 ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}(pq \pm \frac{5}{8}PQ)^2$. 3, 372 ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

Elevatio Poli.	Declinatio ☽	Elevatio Poli.	Declinatio ☽	Elevatio Poli.	Declinatio ☽
0°.	0°, 0′	30°.	13°, 54′	60°.	———
5°.	2°, 8′	35°.	16°, 42′	65°.	———
10°.	4°, 19′	40°.	19°, 46′	70°.	———
15°.	6°, 33′	45°.	23°, 11′	75°.	———
20°.	8°, 52′	50°.	27°, 3′	80°.	———
25°.	11°, 18′	55°.	maxima.	85°.	———

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hac verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hac itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2$. 16, 86 ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2$. 16, 86 ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos

Fluxus dirimit, quàm fieret, si ima aqua Lunæ horizontali responderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit cos. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem insequitur, cosinus est $= \frac{-pQ}{4pq}$, ejusque ergo intervalli à tempore medio sinus est $= \frac{pQ}{4pq}$, quæ expressio adeo sub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit = sin. 13°, unde Refluxus à tempore inter Fluxus medio circiter 54′ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius g assumto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias significationes sortietur.

§. 89. Ex solutione horum duorum problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ potest conjungi, atque æstus Maris definiri, quatenus à solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè cum ejusmodi observationibus, quæ in amplissimo oceano apud exiguas insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè

alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde Fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia à motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis Fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum Maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is stato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi: unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò sint majores. Atque hoc ipsum experientia confirmat, quâ constat æstus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs insequi transitum Lunæ per meridianum, quàm æstus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs respectu Solis per meridianum transeat, quàm in syzygiis, æstus tamen non 6 horis tardiùs, sed tantum circiter $5\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim institui potest simili modo, quo pro solâ vi Lunæ fecimus, ejusmodi retardationem majorem in syzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamsi eum ob summas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipsâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas accelerationem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24' retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hac quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt idipſum quod calculus ille ſummopere implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis

certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræſentet igitur tempore quocunque figura $ADBE$ ſtatum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis A & B aqua maximè ſit elevata, in locis verò mediis ab A & B æquidiſtantibus, maximè depreſſa. Poſt aliquod tempus transferatur æſtus ſummus ex A & B in a & b, ſitque $aDbE$ figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore neceſſe eſt, ut à parte oceani DF defluxerit aquæ copia $FAMDmf$, in partem verò FE tantundem aquæ affluxerit, portio ſcilicet $FaNEne$: ſimili modo portio EG decrevit copiâ aquæ $EPBGgp$, portioque GD augmentum accepit $GbQDqd$. Si nunc ponamus portionem FMm tranſire in locum FNn, ac portionem EPp in ENn deferri, ſatis clarè motum aquæ progreſſivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ ſummæ A fiat ab ortu in occaſum, aqua quæ circa A versùs orientem ſcilicet ab M ad N uſque eſt ſita, in occaſum movebitur; ſimiliterque ea quæ huic è diametro eſt oppoſita & ſpatium PQ occupat. Contrà verò reliqua aqua in MQ & NP contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim M, N, P & Q quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab M uſque ad F creſcet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut A ſint differentiis Af proportionalia: ab F verò uſque ad N celeritas decreſcere debet, & decrementum celeritatis in e erit ut ae; ſimilique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propoſitæ. FIG. XII.

§. 93. Si hæc diligentiùs proſequamur ac punctum a ipſi A proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque M fore intervallum Mm ſinui dupli anguli MCA proportionale. Quare ſi anguli ACM ſinus ponatur $= x$, coſinus

$=y$, ac celeritas quam aqua in M habet, versùs occasum $=u$, erit du ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs AM sit ut $\frac{dx}{y}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit du ut $2xdx$, atque u proportionale erit ipsi $2xx-1$ ejusmodi adjecta constante, ut ubi Mm est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quocunque M, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli MCA. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & B 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli $=0$, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana $ADBE$ æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.

§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper à profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus mn jam esse Maris fundum, ita ut profunditas Maris in M major non esset quàm Mm, tum isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum Fluxus ex A in a transit, ex situ $nFMm$ in situm $mFNn$ transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis & per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex spatio à centro

gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad mn usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ $nFMm$ ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum A, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, qua tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas utique foret enormis ac stupenda. At si Mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad $\mu\nu$ usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in se spectata inventa est cosinui dupli anguli MCA proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli MCA atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, positâ scilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen etiam ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprà est definitus. Primò enim manifestum est, si Mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio & depressio Maris à motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs & descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento celeritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprà §. 84, si Luna à meridiano versùs occasum jam recessit angulo z, hoc est cùm regio proposita ab ea, in qua aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo z, fore celeritatem quâ aqua ascendit $= \frac{-6gpqPQ\,\text{fin.}\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\text{fin.}\,2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\,\text{cof.}\,z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\,\text{cof.}\,2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè sumtum & per dz divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo Mare supra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, & inversè profunditati Maris, quæ est vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tam verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu usque ad Refluxum, indeque ad sequentem Fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs ut $-$ fin. $2z$, celeritas autem horizontalis versùs occasum ut 15 cof. $2z + 1$ posito $g = \frac{1}{10}$,
ig. XIII. cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis A & B aqua sit maximè elevata, in C & D verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post Fluxum elapsas.

Horæ post Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*		*Celeritas Maris horizontalis.*	
0	0,000	descendit.	1,067	in occasum.
1	0,500	descendit.	0,927	in occasum.
2	0,860	descendit.	0,567	in occasum.
3	1,000	descendit.	0,067	in occasum.
4	0,860	descendit.	0,432	in ortum.
5	0,500	descendit.	0,792	in ortum.
6	0,000	ascendit.	0,932	in ortum.
7	0,500	ascendit.	0,792	in ortum.
8	0,860	ascendit.	0,432	in ortum.
9	1,000	ascendit.	0,067	in occasum.
10	0,860	ascendit.	0,567	in occasum.
11	0,500	ascendit.	0,927	in occasum.
12	0,000	descendit.	1,067	in occasum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem; atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diversa, motus horizontalis simul rationem inversam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æstus iis ipsis temporibus evenire posse, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æstus tum, cùm vis à Luna & Sole nata est debilissima, sed aliquanto tardiùs. Æstûs enim magnitudo non solum à quantitate virium sollicitantium pendet, uti id usuveniret, si aqua inertiâ careret, sed insuper à motu jam antè concepto. Quòd si enim antè Mare omnino quievisset, tum primus certè æstus oriundus admodum futurus esset exilis; etiamsi vires sollicitantes essent maximæ; sequentes verò æstus continuò crescerent, donec tandem post tempus infinitum magnitudinem assignatam obtinerent, si quidem vires sollicitantes idem robur perpetuò servarent: atque hoc idem evenire debet, si æstus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus sollicitantibus convenit. Quare cùm æstus novilunia ac plenilunia præcedentes sint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò subitò totam suam quantitatem consequentur, atque hanc ob rem æstus etiamnum post syzygias augmenta accipient, donec ob tum secutura virium decrementa, æstus iterum decrescere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipsi æstus quàm incrementa eorum censenda sunt maxima, quatenus scilicet æstus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui sequi deberent; ex quo manifestum est non illos æstus, qui in ipsis syzygiis luminarium contingunt, esse maximos, sed sequentes esse majores. Hocque idem intelligendum est de æstibus minimis, qui non in ipsas quadraturas incidunt, sed tardiùs sequuntur: unde ratio luculenter perspicitur, cur æstus tam maximi quàm minimi non ipsis syzygiarum & quadraturarum tempestatibus respondeant, sed seriùs observentur, tertii scilicet demum vel quarti post hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æstum Maris observatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fusiùs exposuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam est directa, altera versùs Solem, produci debent; eosque cùm per calculum analyticum, tùm per solida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum existentiâ dubitari omnino non liceat, si quidem illæ vires admittantur. At verò istas vires in mundo existere non solum per alia phænomena evidentissimè probavimus, sed etiam earum causam physicam assignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam sit constitutus, posuimus, quippe quæ est unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in suis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipsa phænomena internam vorticum structuram & indolem commonstrarunt; ob eaque vortices ita comparatos esse statuimus, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò assumserimus, si effectus ex iis oriundi cum phænomenis æstûs Maris conveniant, certissimè nobis persuadere poterimus, in assignatis viribus veram æstûs Maris causam contineri; absonumque omnino fore, si causam æstûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite constituimus omnes effectus, qui in superioribus capitibus sparsim sunt eruti, conjunctim & ordine proponere, summumque eorum consensum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terrisque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejusmodi anomalias æstûs Maris, quæ evidentissimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujusmodi sunt æstus vel vehementer enormes vel vix sensibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel insignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis sequens caput ultimum destinavimus: ita in hoc capite tantum ea æstûs Maris phænomena explicanda suscipimus, quæ in portubus amplissimum oceanum respicientibus vel insulis observari solent in oceano sitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus esse observatur, distinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres classes revocari debere. Ad primam scilicet classem referenda sunt phænomena, quæ in uno æstu in se spectato conspiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodissimè sub varietatibus diurnis comprehendi possunt, quatenus ea se offerunt observatori, qui per integrum tantum diem observationes instituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda classis complectitur varietates menstruas, quæ sese observatori per integrum mensem æstum Maris contemplanti offerunt, quorsum pertinent æstus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique classis comprehendit varietates annuas ac plusquam annuas, quæ sequuntur vel varias Lunæ à Terra distantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuscujusque classis recensebimus, atque quomodo singula cum theoriâ traditâ congruant, ostendemus. Hìc verò, ut jam est monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire possunt, animum prorsus abstinemus, eas sequenti capiti reservantes. Multò minùs verò ad ventum hìc respicimus, quo æstus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici observatur; sed tantum ejusmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo oceano quotidie bini Maris Fluxus seu elevationes, binique Refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos Fluxus successivos circiter 12 h. 24′ deprehendatur. Huic verò Phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12 hor. 24′, necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothesi aquæ inertiâ carentis, quàm admissâ inertiâ, clarissimè indicavit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt, quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli ampliùs dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter Fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod Phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori Fluxui esse propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portubus versùs apertum oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis Fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri posset Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè consideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstuum momenta, quæ successivè ad littora Britanniæ minoris & Normanniæ observantur continuóque magis retardantur, attentiùs inspiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipsos Lunæ transitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non solum demtâ inertiâ, sed etiam eâ positâ, si tantum aquæ motus verticalis spectetur; at si etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè ostendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum post Lunæ transitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm sit admodum variabile pluribusque circumstantiis subjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis sese in situm æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n esse circiter 5 vel 6, manifestum est tanto etiam tempore opus esse, quo aqua eum situm quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel $2\frac{1}{2}$ hor. post transitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum observationibus in oceano libero institutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis causam meritò assignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon suppeditat æstûs magnitudo, quæ autem tam diversis locis quàm diversis tempestatibus maximè est mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æstubus, qui nonnullis in portubus observari solent, reliqui cum nostrâ Theoriâ egregiè consentiunt; inertiâ enim sublatâ, invenimus sub æquatore maximum

æstum fore per spatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipsius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate oceani sese propriâ suâ vi in statum æquilibrii restituendi pendet; ex quo sub æquatore spatium per quod maximus æstus agitatur ad 8, 12, 16 & plures pedes exsurgere potest. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æstûs tenere rationem duplicatam cosinuum elevationis poli, unde sub elevatione poli 45°, magnitudo æstûs circiter duplo erit minor quàm sub ipso æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æstus multò minor quàm ad littora; cujus discriminis causa in sequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æstus adhuc minor observatur, quàm hæc regula requirit; id autem ostendetur à non satis amplâ oceani extensione secundùm longitudinem proficisci, quemadmodum in oceano Atlantico qui versùs occidentem littoribus Americæ, versùs orientem verò littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non est satis magna, ut integram æstûs quantitatem suscipere queat.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menstruas respicit, atque ostendit æstus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejusdem mensis esse maximos, æstus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoria nostra ad amussim quadrat. Cùm enim æstus Maris non solum ab ea vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, sed etiam à vi Solem spectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor est vi Lunæ, manifestum est æstum Maris maximum esse debere, si ambæ vires inter se conspirent, atque aquam simul vel elevent vel deprimant, id quod accidere ostendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde simili modo, quoniam istæ vires inter se maximè discrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Luna maximè elevatur, simul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoria exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt Galilæi, Wallisii atque Carteſii, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur, ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantum Mare ad eum ſtatum ſollicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis

calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore ſyzygiarum multo ſtrictiùs ordinem tenere obſervantur, quàm circa quadraturas. Hìc verò ante omnia animadvertendum eſt præcipuam ſenſibilem anomaliam in momentis æſtuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore ſolari atque à vero meridie ſeu tranſitu Solis per meridianum ſoleant computari, cùm ea potiùs à tranſitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd ſi autem ad has obſervationes tempus lunare à tranſitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evaneſcent, hoc verò multo magis in fluxubus circa ſyzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum tranſit, Sol non ſemper in horizonte verſatur, ſed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, neceſſe eſt ut illo caſu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod diſcrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumſtantiarum ratione ſatis propè definiri poteſt. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc ſola correctio ſeu reductio ad tranſitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorſum ſpectat regula à celeb. Caſſino in Mem. 1710 tradita, qua pro totidem horis, quibus plenilunium ſeu novilunium vel ante meridiem vel poſt incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo ſubtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ eſt petita. Interim tamen hac correctione adhibitâ aliqua anomalia ſupereſſe deprehenditur, cujus autem ratio ex noſtra theoria ſponte ſequitur. Quando enim ſyzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum transit, Sol jam ante eum est transgressus, atque ideo jam horizonti appropinquant; ex quo necesse est ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula sola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ observatorum, Mem. 1710. insertis, manifestò conspicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs advenisse observatur, quàm calculus Cassinianus indicabat; contrà verò tardiùs si syzygiæ demum pluribus horis post meridiem inciderint, cujus majoris retardationis causa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente est quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon suppeditat diversa retardatio Fluxuum in syzygiis luminarium & quadraturis respectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs scilicet ubique locorum Fluxus, qui in syzygiis contingunt, insequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex causa potest assignari, quarum prima à solâ quantitate æstuum petitur, quia enim æstus syzygiarum multò sunt majores quàm æstus quadraturarum, consentaneum videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc Phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus Fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem

quentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t usque augebitur. Hujusque Phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque à nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum, cùm Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen adeo sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantiâ ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentia inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos Fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus Fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori Fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia Celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in portibus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias Fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque Fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi transitum à binis æstubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia si Fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, Refluxus aquæ seu maxima depressio Fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ à summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24′ circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utraque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem,

atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs Maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ à diversis Lunæ à Terra distantiis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, qua demonstravimus Lunæ vires ad Mare movendum decrescere in triplicata ratione distantiarum Lunæ à Terra: quòd si igitur Luna versetur in perigæo Fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam tabula quam Celeb. Cassini in Mem. 1713. pro diversis Lunæ à Terra distantiis ex plurimis observationibus Brestiæ institutis collegit, satis accuratè cum theoriâ nostrâ conspirat, etiamsi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm ista ratio requireret, tamen discrimen valde est exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum suum effectum non tam citò consequi posse, quem tandem consequeretur, si Luna perpetuò in perigæo versaretur. Aliter autem Luna apogæa est comparata, quæ ad diminuendum æstum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipsum ad diminutionem æstûs sit proclive, sine ullâ resistentiâ Luna in apogæo constituta effectum suum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Cassini se observasse testatur, similem differentiam etsi multò minorem à variis Solis à Terrâ distantiis produci, id quod nostræ theoriæ non solum est consentaneum, sed inde etiam ipsa quantitas hujus differentiæ potest definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon sese nobis contemplandum offert, quo vulgò statui solet æstus tam novilunorum quàm pleniluniorum, qui contingant circa æquinoctia, ceteris esse majores, etiamsi observationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æstus ceteris paribus comparatus esse debeat pro diversis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex nostrâ theoriâ constat (§. 87.) æstus dum Luna in æquatore versatur, maximos esse non posse, nisi in locis sub ipso æquatore sitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex qua patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æstus respondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æstus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, si quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at posito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æstum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum observationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia institutis, quibus constat maximos syzygiarum æstus mensibus Novembri & Februario accidere solere, quibus temporibus Luna ferè assignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore versanti maximi æstus adscribi solet, ansam præbuisse videtur, est modus æstuum quantitates definiendi peculiaris ac satis perversus; cùm enim crederent plerique observatores causis alienis tribuendam esse inæqualitatem, quæ inter binos æstus successivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire sunt arbitrati, si sumerent medium inter binos Fluxus successivos. Quòd si autem hoc modo quique æstus æstimentur, tum utique maximi æstus in æquinoctia incidere observabuntur, id quod etiam nostræ theoriæ maximè est conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim positis sinu elevationis poli $= P$, cosinu $= p$, sinu declinationis Lunæ $= Q$, cosinu $= q$, major æstus fiat per spatium $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, minor verò per spatium $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$: (§. 86.) erit per hunc æstum Maris mensurandi modum quantitas æstûs $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2 q^2 + \frac{(1-8g)^2 P^2 Q^2}{(1-2g)^2}\right) = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2 - p^2 Q^2 + \frac{(1-8g)^2 P^2 Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex qua expres-

sione perspicitur maximos æstus ubique, si quidem modo recensito mensurentur, Lunæ in ipso æquatore degenti respondere, nisi sit $\frac{(1-8g)^2 P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc est nisi tangens elevationis poli major sit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his scilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æstus producet. At si ponatur $g = \frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; sin autem ponatur $g = \frac{1}{18}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at posito $g = \frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis observationes institui non soleant, satis tutò affirmare licet, maximos æstus menstruos accidere circa æquinoctia, si quidem quantitas æstûs quotidie mensuretur per medium arithmeticum inter spatia, quæ duo æstus successivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ nostrâ sit sentiendum; nisi eam veram & genuinam æstûs Maris causam, qualis ab Illustrissima Academia Regia in proposita quæstione desideratur, in se complecti, non videmus? Non solum enim omnia Phænomena, quæ in æstu Maris observantur, clarè & distinctè explicavimus, sed etiam existentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adscribimus evidentissimè demonstravimus; ex quo efficitur causam à nobis assignatam, non tantum omnibus Phænomenis satisfacere, sed etiam esse unicam quæ cum verâ consistere queat. Quòd si enim quispiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare posset, etiamsi hoc fieri posse minimè concedamus, ejus certè explicatio subitò concideret & everteretur à viribus nostræ theoriæ, quas aliunde in mundo existere abundè constat; quoniam ab illis viribus imaginariis hisque realibus conjunctim effectus duplicatus consequi deberet, quem experientia aversatur. Nunc igitur nobis summo jure asserere posse videmur, veram æstûs Maris causam in duobus vorticibus esse positam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus sit indolis, ut vires centrifugæ decrescant in duplicata ratione distantiarum à centris utriusque vorticis: quæ proprietas obtinetur, si celeritas materiæ subtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam subduplicatam distantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum sunt excogitati, sed ille qui Solem circumdat est is ipse, qui omnes planetas in suis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etsi ejus vis nisi in æstu Maris non sentitur, tamen sine ulla hæsitatione admitti potest, cùm certò constet Terram, Jovem ac Saturnum similibus vorticibus esse cinctas, unde ejusmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari posse videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamsi in illis veram æstûs Maris causam ponamus; hoc autem de industria fecimus, cùm hoc argumentum jam toties sit tractatum ac ferè exhaustum; neque nobis persuadere possumus, si hac occasione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quàm etiamnum à quoquam est factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æstûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam nostræ disquisitionis partem, quæ præcipua est, in qua Theoriam expositam ad statum telluris, in quo revera reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua ista disquisitio facilior redderetur, ab omnibus circumstantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi possent, cogitationem abstraximus. Primò scilicet non solum totam Terram ex aqua conflatam posuimus, sed etiam inertiam aquæ mente sustulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ superessent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito

modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfusam assumsimus, seu etiamnum anomalias à Terris oriundas negleximus. Nunc itaque nostra theoria eò est perducta, ut nihil ampliùs adjicere necesse foret, si quidem æstus Maris à Terris littoribusque sensibiliter non afficeretur; nisi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perspecto facilè dijudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput destinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam singularium, quorum causa non tam in ipsâ aquâ viribusque eam sollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribusque est quærenda: hac enim parte absolutâ nihil ampliùs restare videtur, quod vel ad Theoriæ nostræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem desiderari queat. Quamvis enim Illustrissima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæstiones de eodem in posterum proponere constituisset, tamen quia hoc tempore vera causa physica desideratur, veritatem nostræ theoriæ non satis confirmari arbitramur, nisi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè ostenderemus, cùm si vel unicum Phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab occidente afferatur : sic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimitur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eatenus tantum, quatenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur : quamobrem iste motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorsumque in Refluxu decedere debeat, si modò elevationes & depressiones aquæ per totum Mare attentè considerentur; tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut Fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum ac noviluniorum Fluxus adveniat horâ tertiâ pomeridianâ,

pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censeri potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum Fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter 8 milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs Maris ad littora attinet, facilè intelligitur æstum Maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quò allapsu solo jam intumescentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat in oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in finibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis Fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hac regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficilè rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum & Fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex oceano Atlantico, quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celeritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc Mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia observata, ad Ostia scilicet Thamisis pertingit Fluxus elapsis jam duodecim horis pòst transitum Lunæ per meridianum, atque ad Londinum usque tribus fere horis tardiùs defertur; quod Phænomenon consistere non posset si aqua per fretum Gallicum solum moveretur, cùm jam in ipso freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum oceano Atlantico per fretum Gallicum æstum quodammodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum Maris ex oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per freta Herculea & Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ à vasto oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam

sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; qua de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem extare æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem oceano Atlantico; ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia Phænomena in æstu Maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul Refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ut ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eadem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit remotum, tum ob inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, superabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini Fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æstûs illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem nostræque theoriæ conformem indicabimus causam.

§. 118. Hactenus æstum Maris, quemadmodum in amplissimo oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum ſitu cùm ratione quantitatis tùm retardationis diverſimodè turbetur, ſumus contemplati, neque neceſſe eſſe duximus ventorum Mariſque curſuum propriorum rationem habere, cùm ſatis pronum ſit perſpicere, quomodo his rebus æſtus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Supereſt igitur ut exponamus, quomodo in ſatis amplo tractu Maris, qui ab oceano vel omnino eſt ſejunctus, vel per anguſtum tantum canalem conjunctus, peculiaris æſtus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perſpicuum enim eſt ſi talis tractus ſecundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æſtum pari modo generari debere, ac in ampliſſimo oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extenſio tanta eſt, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu ſimul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, neceſſe eſt etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, ſi iſte tractus omnino non eſſet terminatus. At ſi iſte tractus tam fuerit parvus ut ſingulæ partes æqualibus fere viribus ſimul vel attollantur vel deprimantur, nulla ſenſibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit niſi in alio ſubſidat, & contrà; ſi quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conſervetur. Atque hæc eſt ratio ut in Mari Baltico, Caſpio, Nigro, aliiſque minoribus lacubus nullus omnino æſtus deprehendatur.

§. 119. Quòd ſi autem iſtiuſmodi Maris tractus tantum ſpatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus ſenſibiliter differant, tum neceſſe eſt ut non ſolum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, ſed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta ſit, quanta in aperto oceano eidem virium differentiæ reſpondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta differentia in diverſis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, ſolam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam

effectu Lunæ cognito facile eſt Solis effectum æſtimando vel adjicere vel auferre. Repræſentet ergo $PLpl$ ſuperficiem Terræ cujus poli ſint P & p, atque M & N ſint duo termini in eodem Maris tractu aſſumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, ſit inveſtigandum. Repræſentet porro Ll parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, ſitque Luna in L; atque exprimet angulus LPM tempus, quod poſt Lunæ tranſitum per meridianum termini M eſt præterlapſum, angulus verò LPN tempus poſt tranſitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis PM & PN, erit arcus PM complementum latitudinis loci M, arcus PN verò loci N; angulus verò MPN dabit differentiam longitudinis locorum M & N; quæ proinde omnia ponuntur cognita. FIG. XIV.

§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M & N circuli maximi LM & LN, exhibebuntque iſti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M & N ſupra horizontem elevata conſpicitur. Ponatur arcûs PL ſinus $= q$, coſinus $= Q$, erit Q ſinus declinationis borealis Lunæ, ſi quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs PM ſinus $= p$, coſinus $= P$, erit P ſinus elevationis poli pro loco M; ſimilique modo ſit arcûs PN ſinus $= r$ & coſinus $= R$, ita ut R ſit ſinus elevationis poli loci N: denique ſit anguli MPN ſinus $= M$ & coſinus $= m$, anguli verò LPM ſinus $= T$, coſinus $= t$; unde erit anguli LPN coſinus $= mt - MT$. Ex his per trigonometriam ſphæricam reperietur ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem loci M ſeu coſinus arcûs $LM = tqp + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ ſinus $= (mt - MT)\,qr + QR$. Quare ſi ut ſuprà vis abſoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & diſtantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt - MT)qr + QR)^2 - 1)}{2b^3}$, utroque caſu ſupra

libellam naturalem. Si ergo illa expressio hanc excedat, aqua
in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq+$
$PQ)^2-((mt-MT)qr+QR)^2)$, hæcque expressio,
quando fit negativa, indicabit, quanto aqua in N altiùs con-
sistat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligi-
mus, quoniam tantum proximè Phænomena hujusmodi
casibus oriunda indicare annitimur; si enim hanc materiam
perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum nostrum Maris ab oriente N
versùs occidentem M sub eodem parallelo extendi, ita ut
elevatio poli in locis M & N sit eadem; erit adeo $R=P$,
& $r=p$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M su-
pra Terram ita ut sit $T=0$, $t=1$; hoc ergo tempore ma-
gis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq+$
$PQ)^2-(mpq+PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2+2(1-m)pqPQ)$.
At quando Luna per meridianum loci N supra Terram
transit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in
M. Ex quo sequitur, dum Luna à meridiano loci N ad
meridianum loci M progreditur, aquam in M sensim ele-
vari per spatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq+2(1-m)PQ)$, in-
terea verò in N tantundem subsidere. Sin autem Luna in-
fra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M
progrediatur, aqua in M elevabitur interea per spatium
$=\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq-2(1-m)PQ)$, per tantumque spa-
tium aqua in N subsidet. Ponamus nunc angulum LPM
esse 90 graduum, seu quæstionem institui, cùm Luna jam
ante sex horas meridianum loci M sit trangressa, atque ob-
tinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M & N
$=\frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2-(PQ-Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ-M^2pq)$.
Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci
M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M in-

tervallo $=\frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ+M^2pq)$. Sequuntur hæc si
inertia aquæ negligatur; at inertiâ admissâ ex præceden-
tibus satis clarum est, cùm has differentias majores esse de-
bere, tùm tempora mutationum tardiùs sequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem
aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantum aquæ
unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ
parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem
Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum
nostrum secundùm longitudinem terminari binis meridia-
nis PM & PN, secundùm latitudinem verò binis paral-
lelis MN & mn, positâque Lunâ in L sit sinus $PL=q$,
cosinus $=Q$; sinus $LPM=T$, cosinus $=t$. Porro sit
sinus arcus $PM=p$, cosinus $=P$, sinus $Pm=r$, cosinus
$=R$, atque anguli MPN sinus $=M$ & cosinus $=m$.
Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra
libellam $=\alpha$, ita ut hoc loco suprema aquæ superficies à
centro Terræ distet intervallo $=1+\alpha$, unde cùm sinus
altitudinis Lunæ in M sit $=tpq+PQ$, erit gravitatio to-
tius columnæ aquæ ab M ad centrum Terræ $=\frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1}+$
$\frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n}+\alpha+\frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3}$,
prouti suprà §. §. 43. & 44. demonstravimus. Conside-
retur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua
supra libellam sit elevata spatio $=\varphi$; ac ducto per hunc
locum meridiano PR, sit anguli LPR sinus $=X$, cosinus $=x$;
arcûs PX sinus $=z$ & cosinus $=Z$, unde gravitatio colum-
næ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $=\frac{1}{1+n}$
$+\varphi+\frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio
æqualis esse debeat illi, orietur $\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2$
$-(tpq+PQ)^2)$, ex quâ formulâ si modò constaret ele-
vatio aquæ in M, simul innotesceret elevatio vel depressio
in quovis loco X.

§. 123. Cùm ergo in X aqua supra libellam elevetur spatio φ, in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in statu naturali, & quidem quantitas $XY.Xx.\varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum sumtum debet esse $=0$, ex quo valor ipsius α innotescet. Erit autem angulus $RPr = \frac{dX}{x}$, hincque arculus $Xx = \frac{zdX}{x}$, at elementum $XY = \frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx = \frac{dXdZ}{x}$, in quo ergo excessus aquæ supra statum naturalem est $= \frac{\varphi\, dXdZ}{x} = \frac{dX}{x}\left(\alpha dZ + \frac{3LdZ}{2b^3}\left((xqz + QZ)^2 - (tpq + PQ)^2\right)\right)$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X constans, & integratione absolutâ reperietur in elemento $RSsr$ excessus aquæ supra statum naturalem $= \frac{dX}{x}\left(\alpha(R-P) + \frac{3L}{2b^3}\left(q^2x^2(R-P) - \frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3) - \frac{2xQq}{3}(r^3-p^3) + \frac{Q^2}{3}(R^3-P^3) - (tpq+PQ)^2 (R-P)\right)\right)$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui accessisse oporteret, $= \alpha(R-P)A\,\text{sin}.\,M + \frac{3L}{2b^3}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}\left(Mm(1-2TT) - 2M^2Tt\right) + \frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T - Mt - mT) + \frac{q^2(R-P)}{2} A\,\text{sin}.\,M + \frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6} A\,\text{sin}.\,M - (tpq+PQ)^2(R-P)\,A\,\text{sin}.\,M\right)$, quæ adeo quantitas debet esse $=0$: unde oritur $\alpha = \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{sin}.\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}\left(2M^2Tt - Mm(1-2TT)\right) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M supra libellam,

libellam, quam antè posuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio supra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim sinus anguli $MPX = S$ & cosinus $= s$, erit sin. $LPR = X = Ts + tS$ & $x = ts - TS$, manentibusque arcûs PX sinu $= z$ & cosinu $= Z$, erit elevatio aquæ in $X = \varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}\left((ts - TS)qz + QZ\right)^2 - \frac{3L}{2b^3}(tpq + PQ)^2$; quare loco α valore invento substituto, reperietur aqua in X supra libellam attolli actu per spatium $= \frac{3L}{2b^3}\left((ts-TS)qz + QZ\right)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{sin}.\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}\left(2M^2Tt - Mm(1-2TT)\right) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$. Quòd si ergo ponatur tractus noster ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur casus jam suprà tractatus; quoniam enim fit $MN = 360°$, seu A sin. $M = 2\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M = 0$ & $m = 1$: præterea verò quia M in polum australem p, m verò in borealem P incidit, erit $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = +1$: si hi valores substituantur, prodibit elevatio aquæ in $X = \frac{L}{2b^3}\left(3\left((ts-TS)qz + QZ\right)^2 - 1\right)$, quæ expressio, quia $ts - TS$ denotat cosinum anguli LPX atque $(ts - TS)qz + QZ$ sinum altitudinis Lunæ supra horizontem in X, cum superioribus formulis exactissimè convenit: si quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipsa expressio quoque emergit, si tantum alterum hemisphærium vel boreale vel australe ponatur aquâ totum circumfusum, manent enim omnia ut antè, nisi quòd fiat $p = 1$ & $P = 0$: utroque enim casu fit $R^2 + PR + P^2 = 1$; ultimusque terminus ob $M = 0$ utroque casu evanescit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris secundùm longitudinem MN usque ad 180 gradus extendi, erit $M = 0$ & $m = -1$ & A sin. $M = \pi$, denotat enim A sin. M semper arcum circuli, qui mensura est anguli MPN: hinc si brevitatis gratiâ ponatur sinus anguli, quo Luna in X supra horizontem elevata apparet, $= v$, erit aquæ elevatio in X supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lqq}{4b^3} + \frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemisphærium $LPlp$ aquâ esse circumfusum, fiet $p=0$; $P=-1$, $r=0$ & $R=1$; unde elevatio aquæ in X erit $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac si tota Terra aquâ cincta esset, uti in præcedentibus capitibus posuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua super Terra mutuam habeat communicationem satis amplam. Quòd si autem tractus noster Maris tantum ad æquatorem usque porrigatur à polo P, ita ut quartam superficiei terrestris partem solum obtegat, tum erit $p=1$, $P=0$, $r=0$ & $R=1$, hoc itaque casu aqua in X elevabitur ad altitudinem $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3} + \frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perspicitur hoc casu elevationem in X majorem fore, quàm si tota Terra aquâ esset circumdata, si expressio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò si TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæstioni præscripti non permittunt hinc plura consectaria deducere, cùm debita evolutio satis amplum tractatum requirat, neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.

§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè esse parvam, seu $R=P$ & $r=p$, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2-q^2-3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{fin.}\,M}\Big(\frac{pq}{2}\big(2M^2Tt - Mm(1-2TT)\big) + 2PQ(T-Mt-mT)\Big)$. Consideremus autem elevationem in M, ubi cùm sit $v = tpq + PQ$, erit ea $=$

$\frac{3Lpq(2ttpq+4tPQ-pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{fin.}\,M}\Big(pq\big(2M^2Tt - Mm(1-2TT)\big) + 4PQ(T-Mt-mT)\Big)$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, erit $T=0$, & $t=1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq+4PQ)}{4b^3}\ \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{fin.}\,M}(Mmpq+4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq-4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{fin.}\,M}(Mmpq-4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superiorem, erit $T=-1$, & $t=0$, unde elevatio erit $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{fin.}\,M}\big(pqMm - 2PQ(1-m)\big)$; sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci M versùs occasum, erit altitudo aquæ in M supra libellam $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{fin.}\,M}\big(2pqMm - 2PQ(1+m)\big)$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M=1$, $m=0$, & A fin. $M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3Lpq(2ttpq+4tPQ-pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2\pi b^3}\big(2pqTt + 4PQ(T-t)\big)$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $=0$, fiet $= \frac{3Lp^2q^2(2tt-1)}{4b^3} + \frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ existente $q=1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M transit, sed tardiùs, & quidem si dupli anguli LPM sinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa. Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $= \frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte verſatur, erit aquæ depreſſio $= -\frac{3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æſtum propemodum fore ſimilem æſtui generali, niſi quòd majoribus anomaliis ſit obnoxius, præcipuè ſi Luna habeat declinationem.

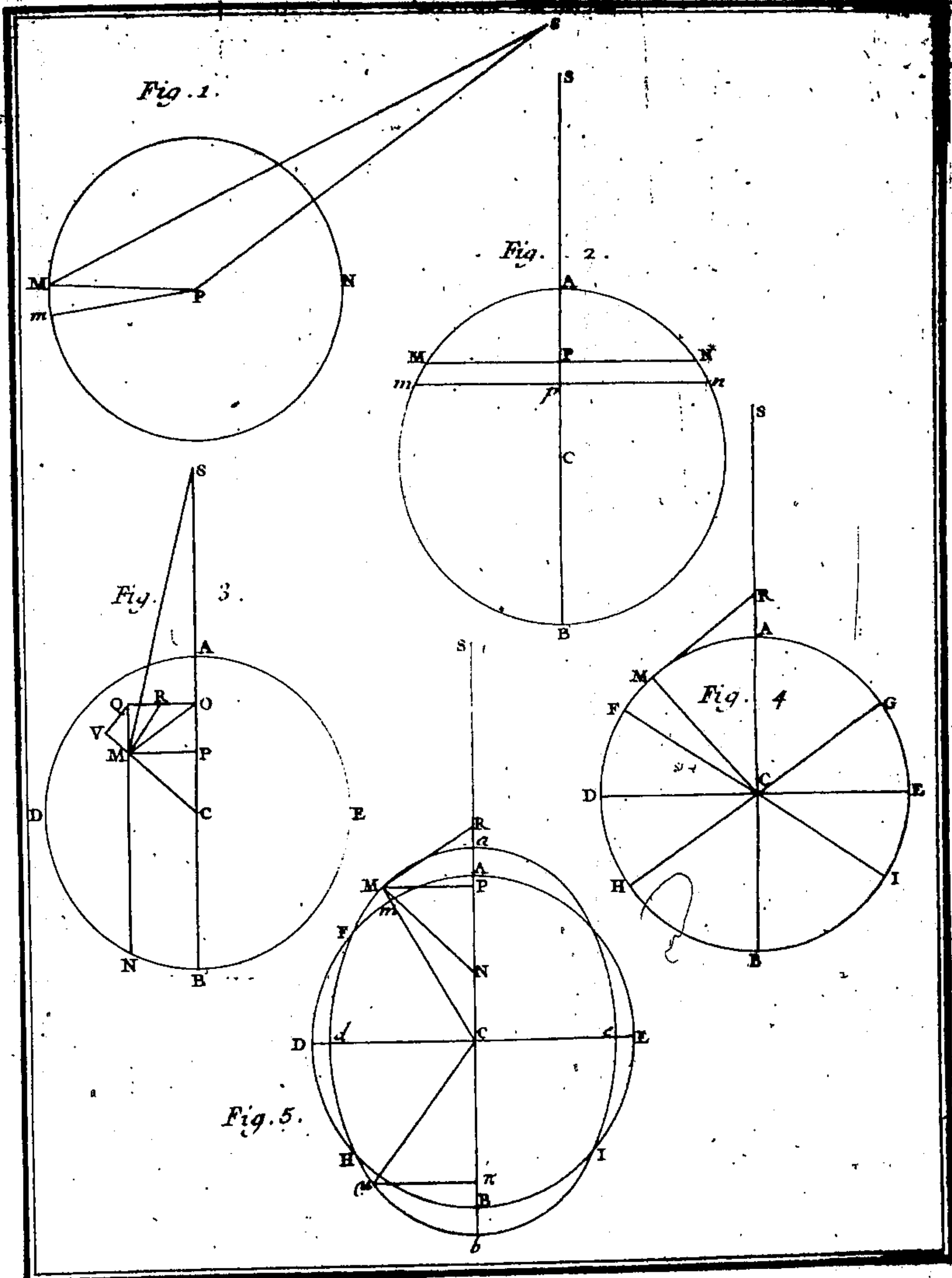
§. 128. Hinc explicari poteſt ratio æſtûs, qui in Mari Mediterraneo obſervatur, & qui in ipſo hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æſtus erunt multò minores; decreſcunt enim ſi cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd ſi ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æſtus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri ſint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis ſubjecti, quas quidem omnes ex formulis traditis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æſtus à ventis & curſu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix uſquam æſtus regularis obſervabitur. Excipi, autem debet Mare Adriaticum, quod cùm ſinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò ſenſibiliorem patietur, à quo æſtus Maris Venetiis obſervatus originem habet. Tametſi enim Mare Mediterraneum non ſolum ſatis amplam habeat latitudinem, ſed etiam vehementer inæqualem, tamen ejuſmodi marium æſtus admodum exquiſitè ex præſenti caſu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi poteſt, quia extenſio Maris in longitudinem præcipuam cauſam æſtuum binorum ſingulis diebus evenientium continet, neque extenſio latitudinis multum conferat.

§. 129. Ponamus nunc tractûs noſtri Maris longitudinem evaneſcere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab
FIG. XVI. M uſque ad N extendi, ita ut ſit $M = 0$, $m = 1$; ſinus autem elevationis poli in M ſit $= P$, coſinus $= p$, in N

verò ſit ſinus elevationis poli $= R$, coſinus $= r$. Ex his ſi Luna in L verſetur, ob A ſin. $M = M$, erit in M elevatio aquæ ſupra libellam $= \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(r^2+rR+R^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}\left(q^2(3-P^2-PR-RR)(2TT-1) - \frac{4Qqt(p^3-r^3)}{R-P}\right) = \frac{L}{2b^3}\left((ttqq-QQ)(R^2+PR-2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR+r^3-3P^2p-p^3)}{R-P}\right)$. Quòd ſi nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs auſtrum ſitus, ita ut ſinus elevationis poli auſtralis in N duplo major ſit quàm ſinus elevationis borealis in M, ſeu $R = -2P$ & $r = \sqrt{(1-4P^2)}$, erit $R^2 + PR - 2P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M ſupra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3p}(9P^2p + p^3 - r^3)$. Ex hac igitur formulâ ſequitur, ſi Lunæ declinatio ſit nulla ſeu $Q = 0$, tum nullum omnino æſtum in M obſervari debere. Quòd ſi autem Luna habeat borealem, tum ad tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem aquam attolli ad ſpatium $= \frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p + p^3 - r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario ſexto verſetur, tum aquam ad libellam naturalem fore conſtitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depreſſum iri per ſpatium $= \frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p + p^3 - r^3)$; contrarium denique fore æſtum, ſi Luna habeat declinationem auſtralem. In tali igitur Maris tractu quotidie ſemel tantum aqua affluet, ſemelque refluet, ſi quidem Luna habeat declinationem; nam ſi Luna æquatorem occupat, æſtus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc caſu aptiſſimè explicari poſſe videtur Phænomenon illud æſtûs ſingularis, qui in portu Tunquini ad Batsham obſervatur, ubi omnino ut in præſente caſu dum Luna in æquatore verſatur, Mare nullum æſtum ſentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs auſtrum, quotidie aqua ſemel tantum affluit ſemelque refluit, prorſus ut calculus monſtravit; ſcilicet ſi Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occaſum, hoc eſt post tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut ſuprà. Contrà verò ſi Lunæ declinatio ſit auſtralis, aqua deprimitur Lunâ ad occaſum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum caſu modò expoſito. Eſt præterea elevatio poli Tunquini 20° 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninſulis tùm inſulis ab utroque oceano Pacifico & Indico fere prorſus ſeparatur, ſaltem ut libera communicatio non adſit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur, extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis ſinus circiter duplo major eſt, quàm ſinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumſtantiis per noſtram Theoriam eadem ipſa ſingularia Phænomena æſtûs Maris obſervari debent, quæ actu obſervantur: atque hoc modo ſi ullum adhuc dubium circa noſtram theoriam reliquum fuiſſet, id reſolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs ſublatum iri confidimus.

FINIS.



Dheulland Sculp.

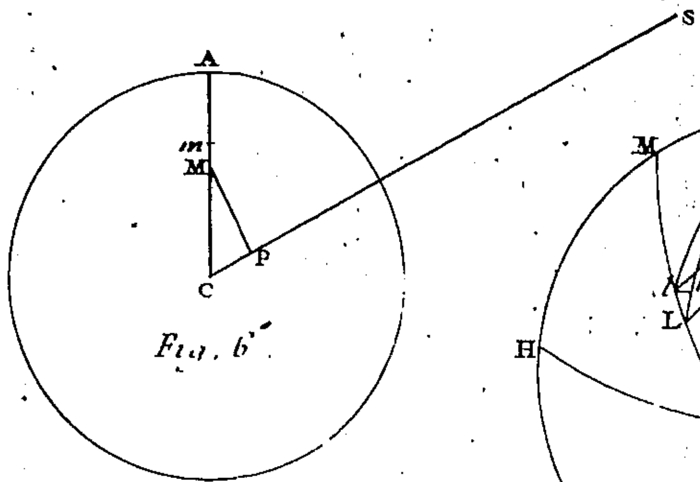


Fig. 6.

Fig. 7.

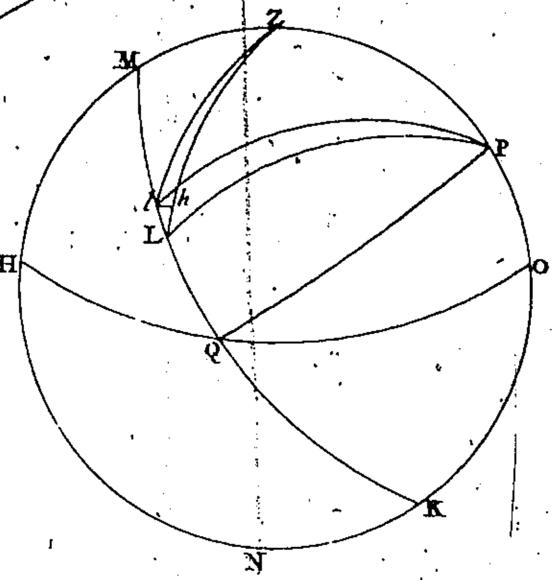


Fig. 8.

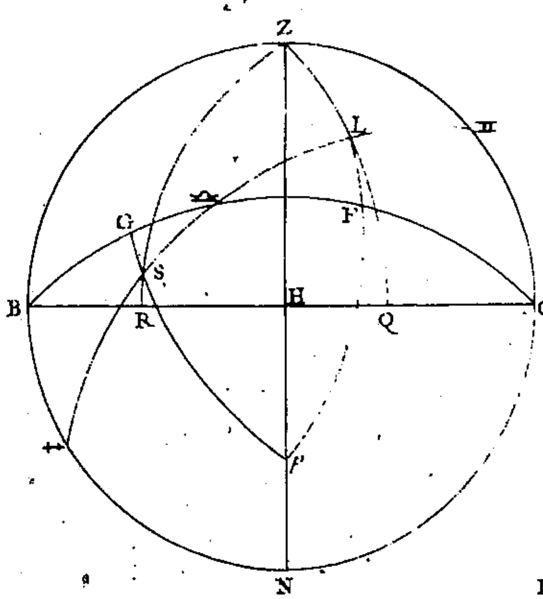
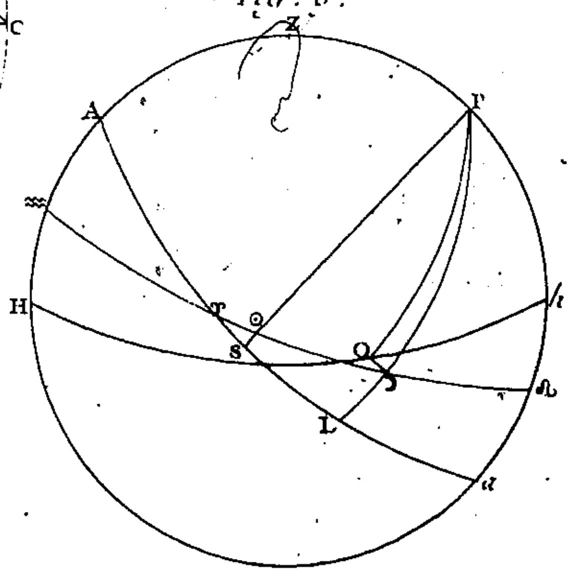


Fig. 9.



Dheulland Sculp.

Fig. 10.

Fig. 11.

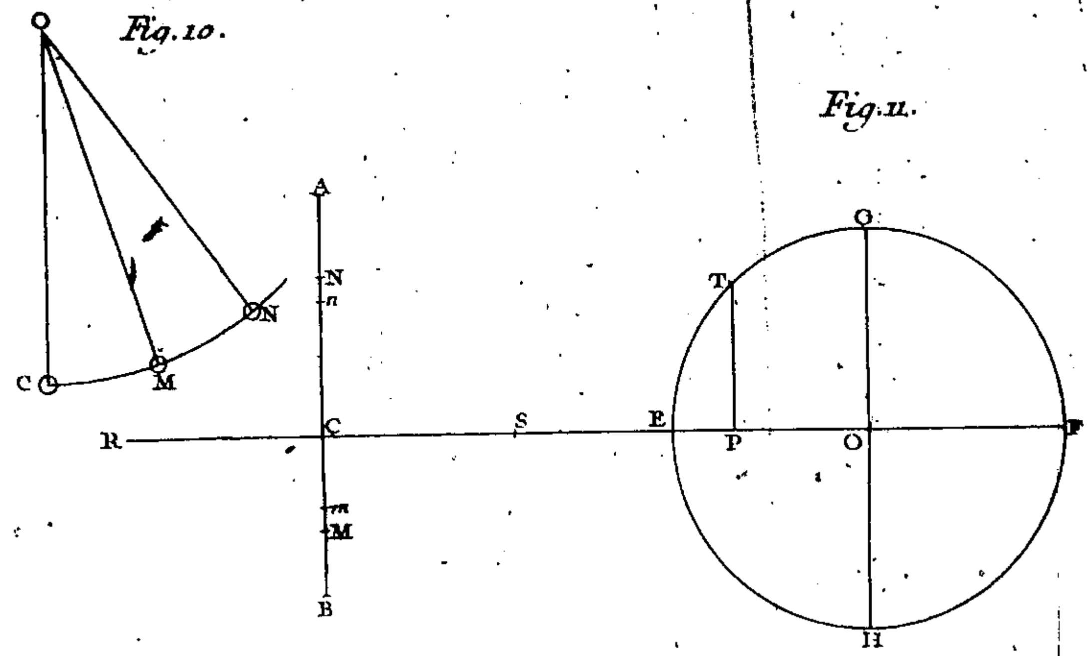


Fig. 12.

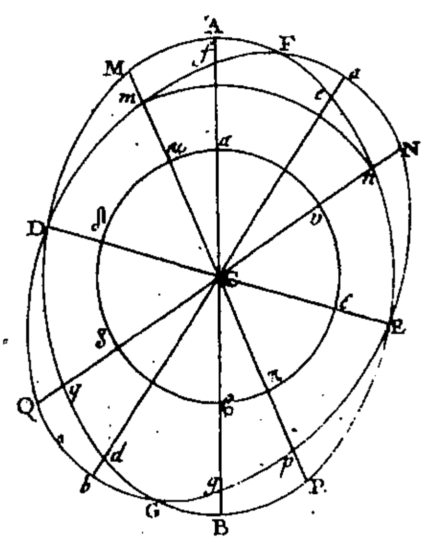
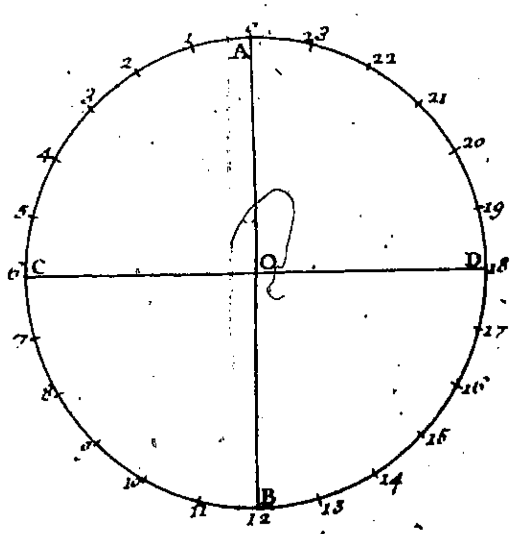


Fig. 13.



Dheulland Sculp.

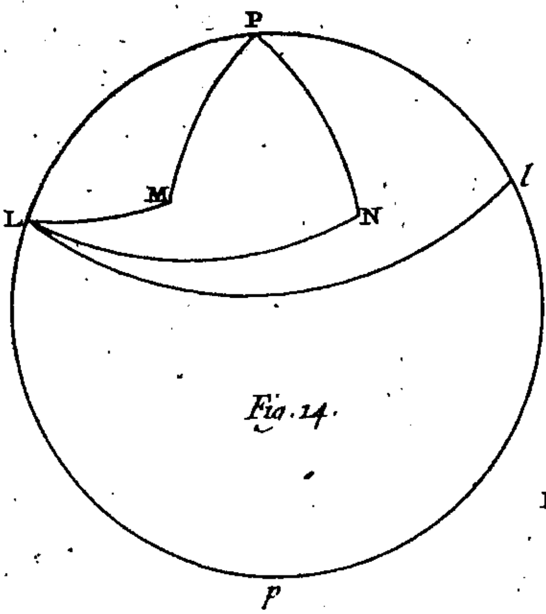


Fig. 14.

Fig. 15.

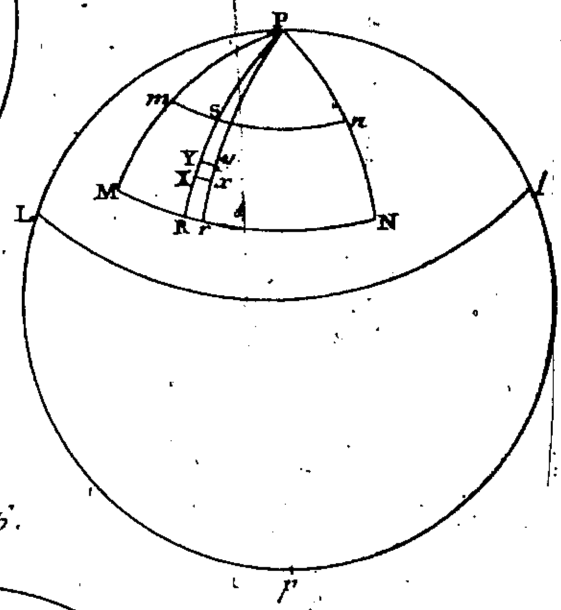
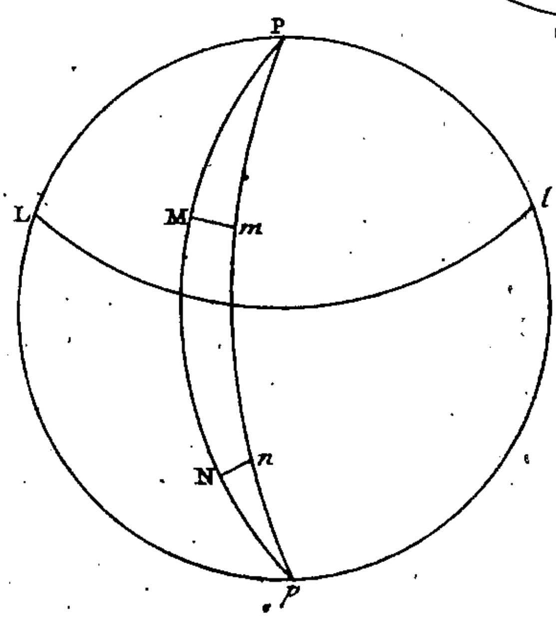


Fig. 16.



Dheulland Sculp.