DE NOVO GENERE OSCILLATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quamuis doctrina de oscillationibus corporumque motibus reciprocis iam tanto studio sit pertractata, vt in ea nihil omnino noui proferri posse videatur; tamen in hac dissertatione nouum prorsus genus oscillationum sum prolaturus, quod cum a nemine adhuc tactum est, tum etiam singulari analysi indiget. Primum quidem ansam de eo cogitandi mihi praebuit Clarissimus Collega Krafft, in dissertatione, quam de insolitis quibusdam oscillationibus horologii portatilis suspensi praelegit; deinde vero etiam, cum aestum maris essem contemplatus, deprehendi istum maris motum reciprocum ad idem oscillationum genus pertinere.

§. 2. Corpus quodcunque oscillationes perficere motuue reciproco praeditum esse dicitur, quando vel totum vel eius partes in dato spatio ita perpetuo mouentur, vt eundo et redeundo alternatim in plagas oppositas progrediantur. Hac enim ratione comparatus est motus pendulorum, qui in hac doctrina tanquam casus simplicissimus spectari solet, ad quem omnia reliqua oscillationum genera reuocari conueniat: cuiusmodi sunt vibrationes chordarum, tremores campanarum, vndulationes aquarum;

atque

atque etiam fluxus et refluxus maris. In quibus omnibus motuum ſpeciebus talis reciprocatio alternaque commutatio ſecundum plagas oppoſitas fieri obſeruatur.

§. 3. Cum igitur haec proprietas communis ſit omni motui oſcillatorio, exponam qua in re nouum genus nunc quidem examini ſubiiciendum a reliquis ſatis iam agitatis diſcrepet. Sit ergo ACB linea vel curua vel recta id ſpatium repreſentans, in quo corpus vel portio corporis quaecunque motu reciproco feratur, ita vt alternis vicibus modo verſus dextram in directione ACB modo verſus ſiniſtram in directione BCA promoueatur. Cum igitur nullum corpus ſibi ſoli relictum et liberum iſtiusmodi motu reciproco cieri queat, ſed vniformiter in directum progredi nitatur, viribus opus eſt ad motum oſcillatorium producendum, in quarum diſcrimine praecipua diuerſitas ipſius motus oſcillatorii conſiſtit. Tab. I. Fig. 6. et 7.

§. 4. Quando autem ad vires attendimus perinde eſt cuiusnam figurae ſpatium, in quo fit motus, accipiamus; et propterea hoc ſpatium commodiſſime nobis repraeſentabitur per lineam rectam ACB. Cum igitur motus alternatim verſus dextram et ſiniſtram contingat, eiusmodi opus eſt viribus, quae corpus modo verſus dextram modo verſus ſiniſtram impellant. Hae ergo vires debent eſſe maxime variabiles, atque ſubinde ſui negatiuae fieri; vis enim verſus ſiniſtram pellens conſiderari poteſt inſtar vis negatiuae verſus dextram vrgentis. Quare ſi fuerit p vis, quae corpus, dum in M verſatur, ſollicitat, neceſſe eſt vt p ſic quantitas variabilis, quae non ſolum pro variis circumſtantiis maior minorue fiat, ſed etiam in ſui negatiuam abeat. Fig. 7.

§. 5. Quodſi quantitas huius vis per p ſolum locum, quem corpus in ſpatio ACB occupat, determinatur, oſcillationes inde ortas ad primum genus refero: in hocque genere continentur omnes oſcillationum ſpecies etiamnum tractatae, quae quidem in vacuo fieri ponuntur. Pro hoc itaque oſcillationum genere vis p exprimetur functione quapiam quantitatis, a qua locus corporis M pendet, ſcilicet functione quadam ſpatii MC, exiſtente C puncto fixo ſpatii ACB. Quoties autem iſtiusmodi oſcillationes iſochronae deprehenduntur, vis p directe proportionalis eſt ſpatio MC; quae ſi corpus verſetur inter A et C, tendit ad dextram, corpore autem inter C et B puta in N exiſtente, ſui fit negatiua atque corpus verſus ſiniſtram vrgebit vi, quae ſit vt NC.

§. 6 Ad ſecundum oſcillationum genus refero eas, quae oriuntur a vi p partim a ſpatio MC partim a celeritate, quam corpus in M habet, pendente, eritque his caſibus p functio quaedam cum ſpatii MC tum etiam celeritatis in M. Ad hoc genus praecipue pertinent eae oſcillationes, quae in medio reſiſtente fieri concipiuntur: quia enim reſiſtentia functioni cuidam celeritatis eſt proportionalis, corpus praeter vim ſollicitantem abſolutam retardari cenſendum eſt a reſiſtentia, quae eſt vis directioni motus, quam corpus habet, perpetuo contraria. Quomodo autem pro data lege reſiſtentiae vim abſolutam comparatam eſſe oporteat, vt oſcillationes fiant iſochronae, id in Tractatu meo de motu corporum fuſius expoſui.

§. 7. Ad tertium denique oſcillationum genus eas refero, in quibus corpus praeter vim abſolutam a ſpatio MC pendentem ſollicitatur a vi, cuius quantitas determinatur

minatur per tempus, quod a termino quodam fixo eſt ellapſum, dum corpus in M verſatur. Huiusmodi oſcillationes a nemine adhuc, quantum ſcio, ad calculum ſunt reuocatae; etiamſi tales oſcillationes non parui momenti in mundo fieri quotidie obſeruentur. Ad hoc enim genus pertinent oſcillationes ſupra memoratae atque a Clariſſimo Profeſſore Krafft primum obſeruatae, in quibus vires oſcillationes producentes a motu horologii interno atque idcirco a tempore pendent; accedit autem inſuper vis abſoluta a pondere horologii oriunda, quae diſtantiae a ſitu aequilibrii eſt proportionalis.

§. 8. Manifeſtum autem eſt in eodem hoc genere contineri motum maris reciprocum ſeu alternam eleuationem et depreſſionem. Praecipua enim vis mare ad hunc motum ciens a loco lunae pendet, qua interuallo duodecim fere horarum alternatim attollitur atque deprimitur: vnde haec vis neque a ſitu aquae neque ab eius celeritate pendet, ſed potius a temporis momento. Praeter hanc vero vim mare vrgetur a vi propria grauitatis, qua ſi ſupra libellam ſit eleuatum, deprimitur, contra vero attollitur, ſi eius ſuperficies infra libellam verſetur. Quocirca ſi ex effectu harum duarum virium motus maris debeat definiri, ante natura oſcillationum ad hoc tertium genus pertinentium inueſtigari oportebit.

§. 9. Ponamus igitur oſcillationes fieri in ſpatio ACB, Tab. I fig. 7 et 8.
corpusque dum in M verſatur ſollicitari a duplici vi, quarum altera a loco M pendeat ſpatioque MC ſit proportionalis: ab hac ergo vi corpus, dum in ſpatio AC exiſtit, vrgebitur verſus dextram, contra autem, ſi ſit in ſpatio BC ſitum, verſus ſiniſtram. Altera autem vis pendeat a

R 2 tem

tempore, eaque corpus certis momentis verſus dextram, certisque aliis momentis verſus ſiniſtram impelli, idque ſine vllo reſpectu ad corporis locum habito. Exprimamus autem tempus vniformiter fluens per peripheriam circuli FDHE, quippe quae, cum in ſe ipſam redeat, idonea eſt ad tempus quantumuis denotandum. Vires porro ſint proportionales ſinibus arcuum tempora denotantium, vrgeantque eae verſus dextram, ſi ſint affirmatiui, contra vero ſi fiant negatiui verſus ſiniſtram.

§. 10. Sit F temporis initium, quo oſcillationes inceperunt, fluatque tempus ſecundum ductum FTDHE. Initio igitur hoc vis corpus ſollicitans erit nulla, at poſt tempus FT corpus verſus dextram pelletur vi vt PT; quae vis fiet maxima elapſo tempore FD; poſtmodum iterum decreſcet, donec euaneſcat poſt tempus FDH. Deinde dum tempus ex H per E in F fluit, vis iſta erit negatiua, ac corpus verſus ſiniſtram ſollicitabit; atque elapſo tempore per totam peripheriam expreſſo, eaedem vis ſollicitantis redibunt reuolutiones, vnde in corpore propoſito motum oſcillatorium generari neceſſe eſt; idque ſi hae ſolae vires agerent: a priori autem vi abſoluta a loco corporis pendente iſte motus oſcillatorius eo magis turbabitur, quo maior quouis momento inter has vires reperietur diſſenſus.

§. 11. Ponatur circuli FDHE radius $FG = DG = a$; tota circumferentia $FDHE = 4c$ ita vt c quadrantem circuli denotet: atque elapſum iam ſit tempus per arcum FT repraeſentatum, quod poſito arcū $FT = t$, ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$: ob homogeneitatem enim conuenit tempus per functionem dimidiae dimenſionis linearum exprimi. Hoc praeterea tempo-

temporis momento exiſtat corpus in loco M., ſitque ſpatium $MC = s$; atque hoc in loco celeritatem habeat verſus dextram tantam, quanta debetur altitudini v. Hoc ergo in loco a priori vi verſus dextram ſollicitabitur, haecque vis, cum proportionalis ſit ſpatio MC, ponatur $= \frac{s}{b}$ exiſtente vi grauitatis $= 1$.

§. 12. Ab altera igitur vi a tempore pendente pariter vrgebitur ad dextram, ſinui PT proportionaliter, ſi quidem ſinus arcus FT ſit affirmatiuus. Ponamus arcus $FT = t$ ſinum $PT = y$, atque vim corpus verſus dextram pellentem eſſe $= \frac{y}{g}$. Cum igitur corpus in M ſollicitetur ab his viribus coniunctim in eandem plagam puta verſus dextram vi $= \frac{s}{b} + \frac{y}{g}$; acceleratio, dum ſpatii elementum Mm abſoluit, innoteſcet. Quoniam vero eſt $Mm = -ds$ prodibit per legem accelerationis $dv = -ds \left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$, cuius aequationis integratio determinanda erit ex initio motus, ſcilicet ex loco, quem tum corpus occupauit a celeritate, quam eo tempore habuit.

§. 13. Praeter hanc vero aequationem natura circuli ſuppeditat iſtam $dt = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ ex qua fit $t = a \,\text{A ſin.} \frac{y}{a}$ denotante A ſin. $\frac{y}{a}$ arcum cuius ſinus eſt $\frac{y}{a}$ in circulo ſemidiametrum habente $= 1$: ſimilique modo inuerſe erit $y = a \,\text{ſin. A} \frac{t}{a}$: denotante pariter ſin. A $\frac{t}{a}$, in circulo cuius radius eſt 1, ſinum arcus $\frac{t}{a}$. Si ergo fiat $t = c$, erit $y = a$ et ſi $t = 2c$ fiet $y = 0$; ac generaliter denotante i numerum quemcunque integrum, ſi fuerit $t = 2ic$ erit $y = 0$; ſin $t = (4i + 1)c$ erit $y = a$; at ſi $t = (4i - 1)c$; fiet $y = -a$. Hinc igitur pro lubitu t loco y, vel y loco t in computum introducetur.

§. 14. Quia vero quatuor habentur incognitae ad problema resoluendum tribus opus erit aequationibus; quarum duae quidem iam sunt exhibitae. Tertia vero aequatio ex consideratione temporis est deducenda. Cum enim totum tempus sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, erit tempusculum, quo elementum Mm absoluitur $= \frac{dt}{\sqrt{a}}$, idem vero tempus habetur $= -\frac{ds}{\sqrt{v}}$ vnde ista emerget aequatio $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$. Quamobrem cum habeantur hae quatuor variabiles s, t, y et v, ope trium aequationum $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$; $dt = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ et $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, duae quaecunque poterunt eliminari, atque aequatio inter duas reliquas elici.

§. 15. Motus autem oscillatorius commodissime cognoscetur, si ad datum quoduis temporis momentum assignari poterit in spatio A B locus, in quo tum corpus versabitur. Hanc ob rem conueniet variabiles y et v eliminari atque aequationem inter s et t inueniri. Cum igitur per duas posteriores aequationes sit $y = a$ sin. A. $\frac{t}{a}$ et $v = \frac{ads^2}{dt^2}$, si elementum temporis constans ponatur erit $dv = \frac{2adsdds}{dt^2}$; qui valores in prima aequatione $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$ substituti praebebunt hanc aequationem inter s et t: $\frac{2adsdds}{dt^2} = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{a}{g}\text{ sin. A}\frac{t}{a}\right)$ seu $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}\text{ sin. A}\frac{t}{a} = 0$: quam ergo bis integrari oportet, vt aequatio finita inter s et t obtineatur.

§. 16. Antequam integrationem huius aequationis suscipiam, quippe quae non parum est difficilis, casus nonnullos singulares perpendisse iuuabit. Ac primum quidem euanescat penitus vis illa a momento temporis pendens, ita vt corpus a sola vi $\frac{s}{b}$, a spatio MC pendente sollicitetur.

tetur. Hoc posito erit $g = \infty$, atque haec habebitur aequatio $2abdds + sdt^2 = 0$, quae per ds multiplicata et integrata dat $abds^2 + \frac{s^2dt^2}{2} = \frac{Cdt^2}{2}$; seu $\frac{-ds\sqrt{2}}{dt} = \sqrt{\frac{C-s^2}{2b}} = + \sqrt{v}$, ex qua aequatione valor constantis C est determinandus ita, vt celeritas initialis congruat cum proposita. Ponamus celeritatem in C deberi altitudini b, fiet $C = 2bb$, atque ista emerget aequatio $\frac{-ds\sqrt{2ab}}{\sqrt{(2bb-ss)}} = dt$.

§. 17. Aequatio haec vltima integrari potest concessa circuli quadratura, fitque $t = C - \sqrt{2ab}$. A sin. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$. Quoniam autem est $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{2bb-ss}{2b}}$; motus initium, quo celeritas euanescebat, incidit in punctum A existente $CA = \sqrt{2bb}$: ex quo definitur constans $C = \sqrt{2ab}$ A sin. 1. Quocirca tempus per spatium AM seu t erit $= \sqrt{2ab}$. A cos. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$: quare cum tempus positum sit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, habebitur ipsum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}} = \sqrt{2b}$. A cos. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$. In punctum itaque medium C corpus ex A pertinget tempore $= \sqrt{2b}$ A cos. $0 = \frac{\pi\sqrt{2b}}{2} = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$. Vnde non solum natura harum oscillationum sed etiam isochronismus perspicitur.

§ 18. Ponamus nunc vim istam spatio MC proportionalem euanescere, alteramque a tempore pendentem solam corpus vrgere; cui conditioni satisfiet ponendo $b = \infty$, quo facto ista emerget aequatio $2gdds + dt^2$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$. Ad quam integrandam notari iuuabit esse diff. sin. A. $\frac{t}{a} = \frac{dt}{a}$ cos. A $\frac{t}{a}$; atque diff. cos. A $\frac{t}{a} = -\frac{dt}{a}$ sin. A $\frac{t}{a}$. Integratione ergo prima vice instituta prodibit $2gds - adt$ cos. A $\frac{t}{a} = Cdt$: vnde fit $\frac{ds}{dt} = \frac{C + a \text{ cos. A } \frac{t}{a}}{2g}$ atque celeritas

leritas in $M = \sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{-Ca - a^2 \operatorname{cof.} A \frac{t}{a}}{2g\sqrt{a}}$. Ponatur initio temporis celeritas fuiſſe verſus dextram et debita eſſe altitudini b; erit $2g\sqrt{ab} = -Ca - a^2$ ideoque $Ca = -a^2 - 2g\sqrt{ab}$, ex quo fiet poſt tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas in eandem plagam $\sqrt{v} = \sqrt{b} \frac{+ a\sqrt{a} \operatorname{fin.} v. A \frac{t}{a}}{2g}$.

§. 19. Cum igitur ſinus verſus cuiusque arcus ſemper ſit affirmatiuus, intelligitur celeritatem $\sqrt{v}$ ſemper fore affirmatiuam ſeu verſus dextram eſſe directam, ſi quidem initio temporis celeritas $\sqrt{b}$ in eandem plagam tendat. Hoc ergo caſu corpus per rectam A B in infinitum progredietur, motu quidem inaequabili; elapſis enim temporibus $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$; $\frac{12c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$ celeritas corporis a ſiniſtra ad dextram erit $= \sqrt{b}$; elapſis autem temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; et generatim $\frac{(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$; $\frac{10c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{2(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit maxima et $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{g}$. Quamobrem niſi celeritas initialis $\sqrt{b}$ ſit negatiua ſeu verſus ſiniſtram tendat, motus non dabitur reciprocus, nullaeque abſoluentur oſcillationes.

§. 20. Vt igitur motus oriatur oſcillatorius, quo corpus perpetuo in eodem interuallo contineatur, in quo alternis vicibus eundo et redeundo moueatur, neceſſe eſt vt celeritas aeque ſaepe fiat negatiua ac affirmatiua: id quod eueniet, ſi corpus initio verſus ſiniſtram moueatur celeritate $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$: ſeu ponendo $\sqrt{b} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$. Hac autem hypotheſi facta prodibit ad datum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas ver-

ſus

ſus dextram ſeu $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}.\text{coſ. A}\frac{t}{a}}{2g}$. Temporibus igitur $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$, celeritas erit $= \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; $\frac{9c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$; itemque temporibus $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= 0$. Temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+2)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 21. Cum igitur caſu quo oſcillationes regulares abſoluuntur, ſit $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2g}$ coſ. $\frac{t}{a}$, ſeu $2g\,ds = a\,dt$ coſ. A $\frac{t}{a}$, cuius integrale eſt $2gs = C + aa$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ponatur conſtans $C = 0$, quo ſpatium s quod a medio puncto C computatur, tam crebro fiat negatiuum quam affirmatiuum, erit $s = \frac{aa}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Temporibus ergo $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et $\frac{2ic}{\sqrt{a}}$ corpus exiſtet in puncto C. Temporibus vero $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$, et generaliter $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$ corpus verſabitur in A, exiſtente $CA = \frac{aa}{2g}$. Temporibus autem $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ corpus ſitum erit in B, exiſtente $CB = \frac{aa}{2g}$. Tempus denique, quo corpus vel ex A in B vel viciſſim ex B in A pertingit erit $= \frac{2c}{\sqrt{a}} = \pi\sqrt{a}$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 22. His igitur caſibus euolutis iam ſatis intelligere licet, quomodo in integratione aequationis differentio differentialis $2\,a\,dds + \frac{s\,dt^2}{b} + \frac{a\,dt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$ verſari oporteat; ex qua aequatione deriuandus eſt motus, corpus ſi ab vtraque vi coniunctim cieatur. Ac primo quidem tentemus integrationem eo modo, quo in integrationibus

 aequa-

aequationum differentialium cuiuscunque gradus, in quibus altera variabiles plus vna dimensione non habet, vti soleo. Qui modus, tametsi ad constructionem aequationis propositae manuducet, tamen vehementer implicabitur formulis integralibus, ita vt alia integrandi methodus particularis quidem illi sit anteferenda.

§. 23. Methodus autem mea prior ita se habet: reiectis omnibus terminis, in quibus illa variabilis, quae plures vna dimensiones nusquam habet, non inest, residua aequatio integretur. Ex nostra igitur aequatione emerget ista $2adds + \frac{sdt^2}{b} = 0$, quae, cum sit ea ipsa, quam primo casu habuimus, bis integrata dabit $t = \sqrt{2ab}$. A cos. $\frac{s}{C}$ ex qua oritur $s = C$ cos. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Quo ipsius s valore inuento regula mea porro postulat, vt s producto ex hoc valore in nouam variabilem ponatur aequalis: sit itaque $s = u$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, erit $ds = du$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$; atque $dds = ddu$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{2dtdu}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt^2}{2ab}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$.

§. 24. Si iam isti valores in aequatione proposita $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$ substituantur, prodibit ista aequatio $2addu$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4adudt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt^2}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$. Cum nunc habeatur aequatio, in qua altera variabilis u ipsa non inest, ponatur $du = pdt$, atque aequatio proposita abibit in hanc differentialem primi gradus $2adp$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4apdt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$: quae vlterius transit in hanc $dp - \frac{2pdt}{\sqrt{2ab}}$ tang. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = -\frac{dt}{2g} \cdot \frac{\text{sin. A} \frac{t}{a}}{\text{cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae ad integrationem magis est accommodata.

§. 25.

§. 25. Cum nunc sit $\frac{-dt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ = diff. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, aequatio vltima transformabitur in hanc $dp + \frac{2p \text{ diff. cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}} = \frac{-dt}{2g} \cdot \frac{\text{sin. A} \frac{t}{a}}{\text{cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae multiplicata per cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ fit integrabilis, atque integralis aequatio erit haec p cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = C - \frac{1}{2g}$ $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ vel si constans in ipso integrali inuoluatur, erit $p = \frac{-1}{2g \text{ cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ Cum igitur per t detur p, ex eo reperietur $u = \int p\,dt$ ac denique $s =$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int p\,dt$.

§. 26. Quantumuis autem non solum prima integratio, sed etiam altera difficiles videantur, tamen vtraque re bene perpensa satis commode absolui potest. Transmutatione enim integralium fit $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\sqrt{2ab}}{a} \cdot \int dt$ cos. A $\frac{t}{a}$. sin. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2b$ cos. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ \frac{2b}{a} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, quae posterior formula integralis cum propositae sit similis, habebitur $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{a\sqrt{2ab}. \text{ sin. A} \frac{t}{a}. \text{ sin. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2ab \text{ cos. A} \frac{t}{a}. \text{ cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{a - 2b}$ $+ C$ vnde fiet $p = \frac{C}{\text{cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}} . \text{ cos. A.} \frac{t}{\sqrt{2ab}}} -$

$$\frac{a\sqrt{2ab}. \text{ sin. A.} \frac{t}{a} . \int \text{A} . \frac{t}{\sqrt{2ab}} - 2ab \text{ cos. A} \frac{t}{a} \text{ cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{2g(a-2b) \text{ cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}} . \text{ cos. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}} .$$

 ex

ex qua aequatione valor ipſius p per quantitates finitas habetur expreſſus.

§. 27. Quoniam porro eſt $u = \int p\,dt$, multiplicetur valor ipſius p inuentus per dt, quo facto ſingula membra deprehendentur integrabilia; prodibit autem $u = D + \frac{C \text{ ſin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{coſ. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a^2 b \text{ ſin. } A \frac{t}{a}}{g(a-2b) \text{ coſ. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$. Quare cum ſit $s = u$ coſ. $A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$ orietur tandem iſta aequatio $s = D \text{ coſ. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + C \text{ ſin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \text{ ſin. } A \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$, cuius quantitates conſtantes ex circumſtantiis caſus propoſiti debent definiri. Quod, quo facilius fieri queat, celeritas $\sqrt{v}$ eſt definienda, quae cum ſit $= \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, erit $\sqrt{v} = \frac{+D}{\sqrt{2b}} \text{ ſin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}} \text{ coſ. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}.\text{ coſ. } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$. Ex his ergo aequationibus ad datum quoduis tempus cum locus corporis in recta AB tum etiam celeritas, qua mouebitur, poterit determinari.

§. 28. Caſus quo $2b = a$ ſeu $\sqrt{2ab} = a$, peculiari indiget integratione, neque praecedens ad hunc caſum patet. Erit enim $\int dt \text{ ſin. } A \frac{t}{a}. \text{ coſ. } A \frac{t}{a} = \frac{1}{2} a \text{ ſin. } A \frac{t}{a}. \text{ ſin. } A \frac{t}{a} + C$. ideoque $p = \frac{C}{\text{coſ. } A \frac{t}{a}. \text{ coſ. } A \frac{t}{a}} - \frac{a \text{ ſin. } A. \frac{t}{a} \text{ ſin. } A \frac{t}{a}}{4g \text{ coſ. } A \frac{t}{a}. \text{ coſ. } A \frac{t}{a}}$. Vnde fit $\int p\,dt = u = \frac{C \text{ ſin. } A \frac{t}{a}}{\text{coſ. } A \frac{t}{a}} - \frac{a^2 \text{ ſin. } A. \frac{t}{a}}{4g \text{ coſ. } A \frac{t}{a}} + \frac{at}{4g} + D$. Conſequenter habebitur $s = D \text{ coſ. } A \frac{t}{a} + C \text{ ſin. } A. \frac{t}{a} + \frac{at}{4g} \text{ coſ. } A \frac{t}{a}$. mutata conſtante C. Hinc itaque oritur $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{D}{\sqrt{a}} \text{ ſin. } A \frac{t}{a} - \frac{C}{\sqrt{a}} \text{ coſ. } A \frac{t}{a} - \frac{a\sqrt{a}}{4g} \text{ coſ. } A \frac{t}{a} + \frac{t\sqrt{a}}{4g} \text{ ſin. } A \frac{t}{a}$.

A $\frac{t}{a}$. Ex quo iſtae oſcillationes poſt tempus infinitum in infinitum excreſcent ac per ſpatium infinite magnum excurrent.

§. 29. Cum iſtae integrationes penitus ſint inſolitae, ac propterea non cuiuis diiudicatu faciles, aliam methodum particularem exponam, cuius ope eaedem aequationes integrales erui queant. Cum aequatio propoſita eſſet $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$, ea ſinum arcus $\frac{t}{a}$ per ſeriem exprimendo tranſibit in hanc $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{dt^2}{g}$ $(t - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4} - \frac{t^7}{1\cdot 2 \cdots 7a^6} + \text{etc.}) = 0$. Aſſumatur iam pro s iſte valor indefinitus, $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 + \zeta t^5 + \eta t^6 +$ etc. erit ſubſtitutione facta vt ſequitur:

$$\frac{2adds}{dt^2} = 2\cdot 1\cdot 2\gamma a + 2\cdot 2\cdot 3\delta at + 2\cdot 3\cdot 4\varepsilon at^2 + 2\cdot 4\cdot 5\zeta at^3 + 2\cdot 5\cdot 6\eta at^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta t}{b} + \frac{\gamma t^2}{b} + \frac{\delta t^3}{b} + \frac{\varepsilon t^4}{b} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{g}\ \text{ſin. A}\ \frac{t}{a} = \frac{t}{g} - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2 g} + \text{etc.}$$

§. 30. Si nunc harum trium ſerierum termini ſinguli homogenei ponantur $= 0$, coefficientes aſſumti ſeriei, cui s aequale eſt poſitum, ita definientur vt ſit:

$$\gamma = \frac{-\alpha}{1\cdot 2\cdot 2ab}; \quad \delta = \frac{-b - \beta g}{2\cdot 3g\cdot 2ab}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^2 a^2 b^2}$$

$$\zeta = \frac{2b + a + \frac{\beta ag}{b}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^2\cdot a^3 gb}; \quad \eta = \frac{-\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, 2^3\cdot a^3 b^3}$$

$$\theta = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{\beta a^2 g}{4bb}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 7\cdot 2a^5 bg}. \quad \iota = \frac{\alpha}{1\cdot 2 \cdots 8\cdot 2^4 a^4 b^4}$$

$$\varkappa = \frac{b + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^3}{8bb} + \frac{\beta a^3 g}{8b^3}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 9\cdot 2a^7 bg}; \quad \lambda = \frac{-\alpha}{1\cdot 2 \cdots 10\cdot 2^5 a^5 b^5}$$

$$\mu = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{a^3}{8bb} - \frac{a^4}{16b^3} - \frac{\beta a^4 g}{16b^4}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 11\cdot 2a^9 bg}; \quad \text{etc.}$$

vnde reliquorum coefficientium valores cognoſci poterunt.

§. 31 Coefficientes quidem poteſtatum parium ipſius t ſatis regulariter progrediuntur, at poteſtatum imparium exponentes ad has formas rediguntur.

$$\beta = \beta\,; \qquad \delta = \frac{-a+2b}{1\cdot2\cdot3\cdot2ag(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab}$$

$$\zeta = \frac{a^2-4b^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^3bg(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2}$$

$$\theta = \frac{-a^3+8b^3}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots7\cdot8a^5b^2g(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdots7\cdot8a^3b^3}$$

$$\varkappa = \frac{a^4-16b^4}{1\cdot2\cdot3\cdots9\cdot16a^7b^3g(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdots9\cdot16a^4b^4}$$

etc.

Quare ſi ſeries $\alpha + \beta t + \gamma t^2 +$ etc. in ſeries ſimplices regulares reſoluatur, prodibit $s =$

$$\alpha\left(1 - \frac{t^2}{1\cdot2\cdot2ab} + \frac{t^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4a^2b^2} - \frac{t^6}{1\cdot2\cdot3\cdots6\cdot8a^3b^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\beta\sqrt{2ab}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdots5\cdot4a^2b^3\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{a^2b}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{a} - \frac{t^7}{1\cdot2\cdot3\cdot a^3} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot a^5} - \text{etc.}\right)$$

quae ſeries cum ſingulae ſint ſummabiles, obtinebitur loco s ſequens valor finitus, $s = \alpha \text{ coſ. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \beta\sqrt{2ab}\colon \text{ſin. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}\text{ ſin. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}\text{ ſin. A}\cdot\frac{t}{a}$. quae aequatio ſi conſtantes α et β aliquantillum mutentur plane congruit cum ea, quae ſupra §. 27. ope integrationis eſt eruta.

§. 32. Retineamus aequationes ſupra inuentas $s = \text{D coſ. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \text{C ſin. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}\text{ ſin. A}\,\frac{t}{a}$ et $\sqrt{v} = \frac{\text{D}}{\sqrt{2b}}\text{ ſin. A}\cdot\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\text{C}}{\sqrt{2b}}\text{ coſ. A}\,\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}\text{ coſ. A}\,\frac{t}{a}$ in quibus caſus ambo ſpeciales ſupra tractati egregie continentur. Ponamus nunc autem initio quo $t = 0$, corpus quieuiſſe in C, ita vt tum fuerit tam $s = 0$ quam $\sqrt{v} = 0$. Fiet itaque $\text{D} = 0$; et $\text{C} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$, quibus valoribus

loribus ſubſtitutis erit $s = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ atque $\sqrt{v} = \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}$ (coſ. A $\frac{t}{a}$ − coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$), ex quibus aequationibus ad datum tempus tum locus corporis, tum eius celeritas innoteſcent.

§. 33. Vt naturam harum oſcillationum penitius inſpiciamus, varias relationes quantitatum a et b contemplemur, quibus arcus $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ commenſurabiles reddantur. Ac primo quidem incipiamus a maximo ipſius b valore, quo caſu vis a ſpatio s pendens euaneſcit. Cum igitur hoc caſu ſit ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, fiet $s = \frac{-at}{2g} + \frac{a^2}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$; atque $\sqrt{v} = \frac{+a\sqrt{a}}{2g}$ ſ verſ. A $\frac{t}{a}$. Ergo

ſi tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac velocitas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-2ac}{2g}$	$\frac{2a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-3ac-aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-4ac}{2g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-5ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 34. Hoc igitur caſu, quo cum b ponimus infinitum, tum corpus initio in C quieuiſſe aſſumimus, corpus ex C verſus dextram CB continuo vltra progredietur, motu alternatim accelerato et retardato. Quanquam autem hoc caſu oſcillationes non contingunt, tamen ab eo examen ordiri viſum eſt, vt nexus inter motus hoc modo oriundos, dum b pedetentim minorem valorem conſequitur, clarius pateat. Ponamus $b = \frac{nna}{2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = na$; vnde fiet $s = \frac{n^2 a^2}{2g(nn-1)}$ (ſin. A $\frac{t}{a} - n$ ſin. A $\frac{t}{na}$) atque $\sqrt{v} = \frac{n^2 a\sqrt{a}}{2g(nn-1)}$ (coſ. A $\frac{t}{na}$ − coſ. A . $\frac{t}{a}$): in quibus ex-

expreſſionibus arcuum $\frac{t}{c}$ et $\frac{t}{na}$ ſinus et coſinus inter ſe comparari poterunt, quoties n fuerit numerus rationalis.

§. 35. A valore ipſius n, qui priore caſu erat infinitus, deſcendamus ad valores continuo minores, quoad perueniatur ad caſum $n = 1$; quo per peculiarem aequationem fit $s = \frac{-a^2}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; ac $\sqrt{v} = \frac{t\sqrt{a}}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, quo caſu oſcillationes tandem in infinitum excreſcunt: motus autem ita ſe habebit.

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	[illegible]
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{aa}{4g}$	$+\frac{c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2ac}{4g}$	0
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{a^2}{4g}$	$-\frac{3c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4ac}{4g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{a^2}{4g}$	$+\frac{5c\sqrt{a}}{4g}$

§. 36. Euolutis igitur caſibus, quaſi extremis, ſcilicet $n = \infty$ et $n = 1$. videamus quantum caſus intermedii, quibus pro n ſucceſſiue numeros integros ponemus, ab extremis diſcrepent. Ponamus itaque $n = 2$, ſeu $b = 2a$: erit $s = \frac{2a^2}{3g}$ (ſin. A $\frac{t}{a}$ − 2 ſin. A $\frac{t}{2a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{2c\sqrt{a}}{3g}$ (coſ. A $\frac{t}{2a}$ − coſ. A. $\frac{t}{a}$). Quoties igitur fuerit $t = 4ic$, erit $s = 0$; at celeritas euaneſcet, quoties fit $t = \frac{8ic}{3}$, deſignante i numerum integrum quemcunque. Motus ergo ſe habebit, vt ex hac tabella perſpicietur.

Si

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
et $t = \frac{0c}{3}$	0	0
$t = \frac{4c}{3}$	$\frac{-2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A. $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{8c}{3}$	$\frac{-6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{12c}{3}$	0	$\frac{-4a\sqrt{a}}{3g}$.
$t = \frac{16c}{3}$	$\frac{+6a^2}{g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{20c}{3}$.	$\frac{+2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{24c}{3}$.	0	0

§. 37. Eaedem igitur motus reuolutiones redeunt elapſo tempore $= \frac{8c}{\sqrt{a}}$, ſeu bis percurſa peripheria circuli; intereaque tres oſcillationes abſoluuntur, quarum media fit per ſpatium duplo maius quam ceterae. Simili modo progrediendo patebit, ſi ponatur $n = 3$, easdem periodos fore redituras poſt tempus $\frac{12c}{\sqrt{a}}$, ſeu peripheria circuli ter confecta: atque ita porro, donec ſi $n = \infty$, periodorum nulla fit reuolutio, atque corpus in eandem plagam perpetuo progredi pergit. Namque ſi $n = 3$, celeritas $\sqrt{v}$ toties euaneſcit, quoties euenit $t = 3ic$: ac ſi $n = 4$, celeritas corporis euaneſcet partim caſibus quibus $t = \frac{16ic}{3}$ partim quibus eſt $t = \frac{16ic}{5}$. Poſito ergo $t = \frac{16ic}{15}$, ſi loco i ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur, celeritas corporis deprehendetur nulla caſibus quibus i eſt,

0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25 etc.
different: 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 1,

poſt tempus adeo $16c$ eadem periodus repetetur, ſeptiesque vna periodo celeritas corporis erit nulla, totidemque vna periodus continebit inaequales oſcillationes: ſi quidem vna oſcillatio ſumatur inter duos terminos, quibus celeritas eſt $= 0$.

§. 38. Magis fient hae oſcillationes regulares, ſi fuerit $n \lesssim 1$ atque $\frac{1}{n}$ numerus integer. Ponamus itaque eſſe $b = \frac{a}{2n^2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = \frac{a}{n}$, eritque $s = \frac{a^2}{2g(nn-1)} \left(\frac{1}{n} \text{ſin. A} \frac{nt}{a} - \text{ſin. A} \frac{t}{a} \right)$ atque $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}}{2g(n^2-1)} \left(\text{coſ. A} \frac{t}{a} - \text{coſ. A} \frac{nt}{a} \right)$. Toties igitur celeritas corporis euaneſcet, quoties fuerit $t = \frac{4ic}{n \pm 1}$. In idem autem punctum C quo $s = 0$ corpus non recidet, niſi ſit $t = 2ic$. At ſi ſumatur $t = \frac{4ic}{n-1}$ fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n+1)} \text{ſin. A} \frac{t}{a}$, ſin autem capiatur $t = \frac{4ic}{n+1}$, fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n-1)} \text{ſin. A} \frac{t}{a}$. Ex his ergo formulis ponendo ſucceſſiue loco n numeros 2, 3, 4, 5, etc. natae ſunt ſequentes tabellae, ex quibus motus oſcillatorius corporis duplici vi ſollicitati cognoſci poterit.

Sit $n = 2$ ſeu $b = \frac{a}{8}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0\,c$	0	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 2\,c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{3g}$
ſi $t = \frac{8}{3}c$	$+\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 3\,c$	$+\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = 4\,c$	0	0

Sit

Sit $n = 3$ feu $b = \frac{a}{18}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit fpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
fi $t = 0\ c$	0	0
fi $t = c$	$-\frac{aa}{12g}$	0
fi $t = 2\ c$	0	0
fi $t = 3\ c$	$+\frac{aa}{12g}$	0
fi $t = 4\ c$	0	0

Sit $n = 4$, feu $b = \frac{a}{32}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit fpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
fi $t = 0$	0	0
fi $t = \frac{4}{5}\ c$	$-\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{4c}{5g}$	0
fi $t = c$	$-\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
fi $t = \frac{4}{3}\ c$	$-\frac{a^2}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3g}$	0
fi $t = \frac{8}{5}\ c$	$-\frac{a^2}{24g}$ fin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
fi $t = 2\ c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{15g}$
fi $t = \frac{12}{5}\ c$	$+\frac{a^2}{24g}$ fin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
fi $t = \frac{8}{3}\ c$	$+\frac{a^2}{40g}$ fin. A . $\frac{2c}{3g}$	0
fi $t = 3\ c$	$+\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
fi $t = \frac{16}{5}\ c$	$+\frac{a^2}{24g}$ fin. A $\frac{4c}{5g}$	0
fi $t = 4\ c$	0	0

Sit $n = 5$ feu $b = \frac{a}{50}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit fpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
fi $t = 0$	0	0
fi $t = \frac{2}{3}\ c$	$-\frac{aa}{40g}$ fin. A $\frac{2c}{3a}$	0
fi $t = c$	$-\frac{aa}{60g}$	0
fi $t = \frac{4}{3}\ c$	$-\frac{aa}{40g}$ fin. A . $\frac{2c}{3a}$	0
fi $t = 2\ c$	0	0

 fi t

si $t = \frac{8}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3a}$	o
si $t = 3c$	$+ \frac{aa}{60g}$	o
si $t = \frac{10}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3a}$	o
si $t = 4c$	o	o

§. 39. Inter hos casus omnes maxime notari meretur is, quo erat $2b = a$: eo quod spatium, in quo continetur quaeque oscillatio continuo augetur, ac tandem in infinitum excrescit: qui effectus eo magis est admirandus, quod huic soli casui est proprius, atque a viribus finitis oriatur. Ex hoc igitur casu, si quidem commode ad praxin reuocari posset, inuentio perpetui mobilis deriuari posse videtur: pendulum enim in cycloide oscillans iam ita est comparatum, vt impulsiones a grauitate oriundae versus situm aequilibrii, sint vt spatia percurrenda. Quare si tali pendulo istiusmodi automaton applicetur, quod alteram vim a tempore pendentem producat, vis oscillationes tantopere augentis portio tum ad automati intensionem renouandam, quoties opus est, tum ad resistentiam et frictionem superandam impendi posset, ita vt si oscillationes non increscant, tamen datae quantitatis perpetuo conseruentur.

§. 40. Si nunc in causam inquiramus, propter quam solus iste casus oscillationes continuo adaugeat, aliam non deprehendimus, nisi quod hoc casu tempus vnius oscillationis integrae ex vno itu vnoque reditu compositae, quae producitur a sola actione vis a spatio s pendente, aequale sit tempori, quod per totam circuli FDHE peripheriam exprimitur. Si enim corpus a sola vi $\frac{s}{b}$ sollicitetur, tempus vnius oscillationis integrae ex itu et reditu

con-

constantis erit $= 2\pi\sqrt{2b} = \frac{4c}{a}\sqrt{2b}$ ob $1:\pi = a:2c$. Tempus autem per totam circuli peripheriam expressum est $= \frac{4c}{\sqrt{a}}$; quare vt haec tempora sint aequalia, necesse est sit $2b = a$. qui est ipse casus memoratus.

§. 41. Hinc etiam natura discriminis, quod inter oscillationes reliquorum casuum obseruauimus, penitius inspici potest. Pendet enim hoc discrimen partim a quantitate litterae g, qua quidem nulla alia diuersitas oscillationibus inducitur, nisi quod per eo maiora spatia fiant, quo minorem valorem habeat g, ceterum autem tam ratione motus quam temporis sui maneant similes. Partim autem differentia oscillationum, qua indoles ipsarum maxime immutatur, sita est in diuerso habitu literarum a et b, quo ipso ratio remporum oscillationum ab ambabus viribus seorsim oriundarum definitur. Est enim tempus vnius oscillationis sola agente vi $\frac{s}{b}$ ad tempus vnius oscillationis a sola vi $\frac{2}{g}$ ortae vt $\sqrt{2b}$ ad $\sqrt{a}$. Ex quo intelligitur, quo magis haec ratio a commensurabilitate recedat, eo magis oscillationes futuras esse irregulares.