# INVESTIGATIO CVRVARVM QVAE EVOLVTAE SVI SIMILES PRODVCVNT

*A. L. Eulero.*

§. 1.

In hac dissertatione nomini euolutarum aliquanto latiorem significationem tribuo, quam vulgo fieri solet, ac non solum eam curuam, ex cuius euolutione data curua nascitur, huius euolutam appello, sed insuper euolutam huius euolutae, similiterque vniuersam curuarum seriem, quarum quaelibet praecedentis est euoluta; interim tamen hoc discrimen in denominatione obseruabo, vt ipsam datae curuae euolutam, quae hoc nomine insigniri consueuit, eius euolutam primam appellem, huius vero euolutam secundam, eamque ex cuius euolutione ista nascitur, tertiam atque ita porro. Sic si datae curuae A euoluta sit curua B, curuae autem B euoluta C, atque huius curuae C euoluta D, huiusque E et ita deinceps, erit mihi respectu curuae A curua B euoluta prima, curua C euoluta secunda, curua D euoluta tertia, E quarta atque ita porro. Tab. I.

§. 2. Hac vocis euolutae significatione praemissa in hac dissertatione in eas curuas inquirere constitui, quarum euolutae vel primae vel secundae vel tertiae etc. ipsis sint similes. Quod quidem ad euolutas primas attinet a Viro Clarissimo Prof. Krafft iam est ostensum, praeter spiralem logarithmicam et cycloidem alias non dari curuas, quae cum suis euolutis primis conueniant; atque idem alia methodo hic sum demonstraturus, quae simul viam praeparet ad eas curuas inuestigandas, quae similes sint suis euolutis



lutis

lutis vel secundis vel tertiis, etc. Neque vero in hoc negotio viam simplicissimam sum secuturus, quae facillime ad cognitionem curuarum quaesitarum manuducat; sed praecipue mihi propositum est relationem inter arcum curvae et respondentem radium curuedinis inuestigare, quae etsi differentialibus altiorum graduum est inuoluta, quae alia methodo plerumque euitari possunt, tamen magis videtur genuina atque ad institutum accommodata. Praeterea vero non tam sollicitus ero de ipsis his curuis definiendis quam de ratione aequationes differentiales altiorum graduum debito modo tractandi, ex iisque curuas, ad quas pertineant assignandi. Eum scilicet in finem hoc negotium potissimum suscepi, vt varias vias aequationum differentialium altiorum graduum resoluendarum patefacerem, quae in plurimis aliis casibus vtilitatem non contemnendam afferre queant.

§. 3. Initium igitur facio ab iis curuis inuestigandis

Fig. 1. quae similes sint suis euolutis primis, quae quaestio duplicem requirit solutionem. Primo enim, si curua quaesita ponatur AMB, cuius euoluta sit *amb*, quaestioni satisfiet, si curua *amb* ita fuerit similis curuae AMB, vt punctum *a* homologum sit puncto A, *b* homologum puncto B, atque quoduis punctum *m* homologum illi puncto M, ex cuius euolutione nascitur. Hoc enim ipsa natura euolutionis et similitudinis postulat, si enim punctum *a* homologum fuerit puncto A, atque curua *amb* similis curuae AMB: arcui cuiuis AM similis erit arcus *am*, qui est aeque amplus, hoc est qui ductis normalibus ad curuas AN, MN, *an*, *mn*, angulum complectitur *anm* aequalem angulo ANM: haec vero aequalitas locum habet, si normalis MN producta tangat curuam *am* in *m*, seu *m* fuerit cen-

centrum circuli osculantis curuam AMB in M. Cum igitur quaestionem hoc modo considerando quaelibet curuae AMB portio similis sit sui euolutae, hanc quaestionis partem ita restringi conueniet, vt in ea quaerantur curuae, quae suis euolutis sint *directe* similes, hocque modo istam partem quaestionis ab altera parte distinguo, qua curuae quaeruntur, quae suis euolutis *inuerse* sint similes.

§. 4. Inuersam autem similitudinem, qua alter quaestionis casus continetur, ita animo repraesentari oportet. Curua scilicet AMB ita similis esse potest suae euolutae *bma*, vt modo inuerso punctum *b*, quod ratione euolutionis puncto A respondet homologum sit alteri extremitati B, punctum *a* ratione euolutionis puncto B respondens homologum puncto A; ideoque curua tota *ameb* similis curuae AEMB. Quare si ducantur normales AC, BC, *ac* et *bc*, erit primo ex euolutionis quidem natura angulus $bca$ = ang. ACB, deinde AC:BC = $ac:bc$. Ducatur nunc in puncto quocunque M radius osculi M*m* euolutam in *m* tangens, erit punctum *m* ita comparatum vt normalis *mn* cum *bc* producta angulum constituat aequalem angulo ANM, ex quo inter puncta M et *m* ista relatio intercedet, vt summa angulorum ANM + *anm* quos normales in M et *m* cum axibus AC et *ac* constituunt perpetuo aequalis sit angulo ACB. Quodsi ergo in curua *ab* capiatur punctum μ homologum ipsi M, et ad μ normalis ducatur μν; erit summa angulorum $a\nu\mu$ + $anm = acb$. Dabitur igitur casus, quo duo puncta *m* et μ conueniunt puta in *e*, id quod accidit, vbi angulus *afe* est semissis anguli ACB, hocque punctum *e* Fig. 2.

 erit

erit homologum ipsi puncto E cui ratione euolutionis respondet.

§. 5. Notatis itaque in vtraque curua punctis E et $e$, quae simul ratione similitudinis sunt homologa, atque ratione euolutionis sibi mutuo respondent, reliqua puncta homologa omnia ratione euolutionis a se inuicem discrepabunt; ita punctum $m$ ratione euolutionis respondet in curua AMB illi puncto M quod homologum est puncto $\mu$, amboque puncta $m$ et $\mu$ vtrinque circa punctum fixum $e$ ita erunt disposita, vt ductis normalibus $\mu\nu$ et $mn$ summa angulorum $anm + a\nu\mu$ aequalis sit angulo $acb$, vel duplo angulo $afe$. Quare si normales $\mu\nu$ et $mn$ producantur, donec concurrant cum normali fixa $ef$ producta in $p$ et $r$; erunt anguli $mre$ et $\mu pe$ aequales, arcusque $em$ et $e\mu$ aeque ampli, eam huic vocabulo significationem tribuendo, qua vsus est Celeb. Bernoullius in dissertatione de motu reptorio: atque haec est proprietas binorum quorumque punctorum $m$ et $\mu$ in euoluta, quorum alterum ex alterius puncto homologo per euolutionem nascitur; haecque proprietas non solum communis est euolutis primis sed etiam secundis, tertiis et omnibus sequentibus.

§. 6. Si ergo quaestio de curua inuenienda proponatur, quae similis sit cuicunque euolutae, ea quaestio bipartito est tractanda, primo enim ea curua debet definiri, quae suae euolutae designatae directe sit similis, hoc est cuius singula puncta ratione euolutionis in euoluta generent puncta homologa. In altera vero solutionis parte in eas curuas erit inquirendum, quae similes sint suis euolutis ordine inuerso, hoc est, quarum singula puncta non generent

sibi

sibi homologa per euolutionem. Notandum autem est binorum horum casuum posteriorem ad priorem reduci, nam si curua AMB euolutam habeat *bma* sibi inverse similem, eius euoluta secunda eidem erit directe similis; si enim punctum M generet in euoluta prima punctum *m* sibi non homologum, idem in euoluta secunda generabit punctum sibi homologum. Simili modo, quae curua habet euolutam secundam sibi similem inuerse, eadem habebit euolutam quartam sibi directe similem; similiterque erit comparata ratio euolutarum reliquorum graduum. Fig. 2.

§. 7. Antequam autem solutionem horum problematum aggrediar, generalem nexum, quem quaeuis curua cum suis euolutis cuiusque ordinis tenet, considerasse iuuabit. Sit igitur proposita curua quaecunque AM cuius euoluta prima sit BN, secunda euoluta CP, tertia DQ, quarta ER et ita porro; erunt ex natura euolutionis omnes arcus AM, BN, CP, DQ, ect. aeque ampli. Quare si in ipsa curua proposita AM ponatur arcus $AM = s$; et radius osculi $MN = r$; erit pro euoluta prima BN arcus $BN = a \pm r$ prout radius osculi MN recedendo a puncto A vel crescit vel decrescit: secundum autem figuram est curua $BN = a + r$. Ob aequalem autem amplitudinem est euolutae primae radius osculi $NP = \frac{rdr}{ds}$ hinc porro euolutae secundae CP est arcus $CP = b - \frac{rdr}{ds}$ siquidem figuram sequamur: eiusdemque radius osculi $PQ = -\frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$. Euolutae itaque tertiae arcus DQ est $= c + \frac{r}{ds}. d\frac{rdr}{ds}$, eiusque radius osculi $QR = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$. Simili modo euolutae quartae ER est arcus $ER = e + \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$ atque eiusdem radius osculi $= \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, hocque pa- Fig. 3.

cto pro qualibet datae curuae euoluta facile erit tum arcum ratione euolutionis dato arcui $s$ in data curua respondentem assignare, tum etiam radium osculi; hae vero singulae expressiones tam affirmatiue sunt accipiendae quam, negatiue, siquidem solutiones problematum proponendorum latissime patentes desideramus.

§. 8. Proponatur igitur ex isto quaestionum genere problema primum, quod ita se habet

Fig. 1. *Inuenire curuam AMB quae suae euolutae primae* abm *directe sit similis.*

Ponatur pro curua quaesita AMB arcus ad lubitum assumtus $AM = s$, et radius osculi in puncto $M = r$, crescantque radii osculi ab A versus B recedendo, qua quidem conditione amplitudo problematis non restringitur, cum initium A, a quo arcus AM computantur vbi libuerit, accipi queat. Sit radius osculi in A seu $Aa = a$, et quia curua $amb$ directe similis esse debet curuae AMB, erit arcus $am = ns$ et radius osculi euolutae in $m = ns$. Hanc ob rem ex natura euolutionis erit vel $a + ns = r$ vel $nr = \frac{rdr}{ds}$, quae ambae aequationes congruunt. Erit ergo pro curua quaesita AM haec aequatio $s = \frac{r-a}{n}$; et quia arcus data quantitate augeri diminuiue potest ob initium A arbitrarium, erit $s = \frac{r}{n}$ seu $r = ns$; quae aequatio exprimit naturam curuae, quae euolutam habet sui similem, existente similitudinis ratione vt $1 : n$, haec scilicet ratio exprimit rationem linearum ad curuam quaesitam pertinentium ad lineas homologas in euoluta.

§. 9. Quoniam autem ex aequatione, quae datur inter arcum et radium osculi, natura curuae non distincte perspicitur, etiamsi ex tali aequatione immediate curuae

con-

constructio deduci queat, eliciamus ex aequatione inuenta aequationem inter coordinatas orthogonales AP $= x$ et PM $= y$ pro eadem curua quaesita AMB. Quum vero positus sit arcus AM $= s$, erit $dx^2 + dy^2 = ds^2$; atque si fiat $dx = p\,ds$ et $dy = ds\,\surd(1 - pp)$ erit curuae radius osculi $r = \frac{ds\surd(1-pp)}{dp}$. Hac itaque substitutione facta ista emergit aequatio $\frac{ds\surd(1-pp)}{dp} = ns$ seu $\frac{n\,dp}{\surd(1-pp)} = \frac{ds}{s}$ cuius integrale est $n\,\mathrm{A}\,\sin. p = l\frac{s}{a}$, seu $p = \sin. \mathrm{A}\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$, vnde fit $\surd(1 - pp) = \cos. \mathrm{A}\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$. Quapropter nanciscimur $dx = ds\,\sin. \mathrm{A}\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$ et $dy = ds\,\cos. \mathrm{A}\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$.

§. 10. Ad has aequationes denuo integrandas sequens, notandum est lemma, quod in solutionibus sequentium problematum maximum afferet subsidium. Est scilicet:

$$\int ds\,\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)} = \frac{\beta s}{1+\beta}\,\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)} - \frac{\surd(\alpha+\beta s^2)}{1+\beta}\,\cos. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)}$$

atque

$$\int ds\,\cos. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)} = \frac{\beta s}{1+\beta}\,\cos. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)} + \frac{\surd(\alpha+\beta s^2)}{1+\beta}\,\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha+\beta ss)}$$

quae formulae vsum habent solo excepto casu, quo est $\beta = -1$. Hoc autem casu, quia est $\int\frac{ds}{\surd(\alpha-ss)} = \mathrm{A}\,\sin.\frac{s}{\surd\alpha}$, erit $\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha-ss)} = \frac{s}{\surd\alpha}$; hincque $\int ds\,\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha-ss)} = \frac{ss}{2\surd\alpha}$, et $\int ds\,\cos. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{\surd(\alpha-ss)} = \int\frac{ds}{\surd\alpha}\,\surd(\alpha-ss) = \frac{s\surd(\alpha-ss)}{2\surd\alpha} + \frac{\surd\alpha}{2}\,\mathrm{A}\,\cos.\frac{s}{\surd\alpha}$.

§. 11. Quia nunc in nostro casu est $\frac{1}{n}\,l\frac{s}{\alpha} = \int\frac{ds}{ns}$ erit lemmate ad hunc casum accommodando, $\alpha = 0$, $\beta = nn$, quibus valoribus substitutis fit $x = \int ds\,\sin. \mathrm{A}\,.\int\frac{ds}{ns} = \frac{nns}{1+nn}$



Fig. 4.

$\frac{nns}{1+nn}$ sin. A . $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn}$ cos. A . $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ atque $y = \int ds$ cos. A . $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{nns}{1+nn}$ cos. A . $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn}$ sin. A . $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$: vbi in integrationibus nouis constantibus addendis non est opus, quia natura curuae non mutatur, quacunque quantitate coordinatae siue augeantur siue diminuantur. Ex his autem binis expressionibus, quibus coordinatae per eandem quantitatem $s$ definiuntur, curua desiderata ope logarithmorum et circuli poterit construi; interim tamen ista constructio satis est operosa, aliaeque complures faciliores hinc deduci possunt.

§. 12. Vt autem ipsam curuam propius cognoscamus, sumamus aequationes inuentas pro coordinatis orthogonalibus:

$$x = \frac{nns}{1+nn} \text{sin. A.} \frac{1}{n} l \frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn} \text{cos. A.} \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$$
$$y = \frac{nns}{1+nn} \text{cos. A.} \frac{1}{n} l \frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn} \text{sin. A.} \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$$

ex quibus si sinus et cosinus arcus $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ eliminentur, prodit ista aequatio $xx + yy = \frac{n^4 ss + nnss}{(1+nn)^2} = \frac{nnss}{1+nn}$, in qua $xx + yy$ exhibet quadratum chordae arcum $s$ subtendentis; vnde curua quaesita hanc habet proprietatem, vt omnes arcus ab initio A sumti ad suas chordas datam teneant rationem, ex qua iam sponte sequitur curuam esse spiralem logarithmicam.

§. 13. Quoniam vero iam supra erat $dx = ds$ sin. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ et $dy = ds$ cos. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$, erit sin. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{dx}{ds}$ et cos. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{dy}{ds}$, ex quibus valoribus in aequationibus integratis substitutis emergent sequentes aequationes: $x ds = \frac{nnsdx - nsdy}{1+nn}$ et $y ds = \frac{nnsdy + nsdx}{nn+1}$ quarum illa per hanc diuisa praebet istam $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$ seu $nxdy + xdx = nydx - ydy$

quae

quae adeo inter ſolas coordinatas, $x$ et $y$ continetur. Cum igitur ſit $n(y\,dx - x\,dy) = x\,dx + y\,dy$, diuidatur per $xx + yy$, quo facto integrale aequationis erit $n$ A tang. $\frac{x}{y} = l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{a}$: ex qua admodum breuis et facilis constructio curuae quaeſitae conſequitur ope logarithmicae et circuli, quae eadem autem mox alia via eruetur. Interim ex hac conſtructione natura curuae quaeſitae, qua ea eſt ſpiralis logarithmica, non difficulter colligitur.

§. 14. Quodſi autem aequationem $xx + yy = \frac{nnss}{1+nn}$ euoluere velimus, facile intelligitur id commodiſſime fieri per relationem diſtantiae cuiusque puncti M a puncto fixo A ad perpendiculum quod ex A in tangentem in M demittitur. Sit igitur AM curua quaeſita, et ducta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, demittatur ex A in tangentem MT perpendiculum AT, ſitque AT $= p$ et MT $= t = \sqrt{(zz-pp)}$ erit ob triangula $Mmn$, MAT ſimilia, et $mn = dz$, elementum arcus Mm $= ds = \frac{zdz}{t}$. At aequatio inuenta praebet $ss = \frac{(1+nn)zz}{nn}$ et $s = \frac{z}{n}\sqrt{(1+nn)}$ hincque $ds = \frac{dz}{n}\sqrt{(1+nn)} = \frac{zdz}{t}$ vbi, cum commode accidat vt per $dz$ diuidi queat aequatio, habetur ſtatim aequatio in terminis finitis $t\sqrt{(1+nn)} = nz$ ſeu $\frac{t}{z} = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\frac{p}{z} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Cognoſcitur igitur angulum TMA, quem curuae tangens cum recta AM conſtituit vbique eſſe eundem ideoquae conſtantem, quo ipſo logarithmica ſpiralis ſolet definiri: anguli vero huius conſtantis AMT tangens eſt $= \frac{p}{t} = \frac{1}{n}$. fig. 2.

§. 15. Quodſi ad curuam conſtruendam centro A deſcribamus circulum arbitrarii radii AF $= 1$ arcumque a puncto fixo F ſumtum, FS ponamus $= q$; erit ob S$s = dq$, M$n = zdq$, et $dz : zdq = t : p = n : 1$: vnde obtinetur $dz$

 $= n$

$=nz\,dq$ et $n\,dq=\frac{dz}{z}$, quae integrata dat $nq=l\frac{z}{a}$ ex qua aequatione intelligitur, quanta sit recta AM, quae per quodque punctum S traducitur, haecque simul est constructio, quae ex aequatione integrali §. 13. data consequitur: arcus scilicet circuli FS exprimunt logarithmos radiorum AM, hancque ob causam ista curua vocata est logarithmica spiralis.

Fig. 2. §. 16. Progrediamur ad problema secundum, quod ita se habet:

*Inuenire curuam* AMB *quae suae euolutae bma inuerse sit similis.*

Ad curuam AB ducatur primum is radius osculi $Ee$, qui euolutam in puncto $e$ homologo ipsi E tangat, sitque hic radius osculi $Ee=a$; a puncto nunc hoc E computetur arcus $EM=s$, et ponatur radius osculi $Mm=r$, qui euolutam tanget in $m$, eritque arcus $em=r-a$. Iam in euoluta sumatur punctum $\mu$ homologum puncto M, positaque ratione similitudinis curuae quaesitae ad suam euolutam $=1:n$, erit arcus $e\mu=ns$ et radius osculi in $\mu=nr$. Nunc ex $\mu$ ducatur tangens $\mu$R quae simul erit radius osculi curuae AMB in R, puncto ipsi $m$ homologo. Ponatur arcus $ER=S$ et radius osculi $R\mu=R$, erit $e\mu=a-R$; atque $em=nS$ et radius osculi in $m=nR$.

§. 17. Hinc itaque obtinentur sequentes aequationes; prima scilicet $em=r-a=nS$, secunda $e\mu=a-R=ns$, ex quibus elicitur $S=\frac{r-a}{n}$, et $R=a-nS$. At quia arcus EM et ER sunt aeque ampli, erit $\frac{dS}{R}=\frac{dr}{na-nns}=\frac{ds}{r}$, hincque $r\,ds=na\,ds-nns\,ds$ et integrando $rr=2nas-nnss+aa$ eiusmodi addita constante vt posito $s=0$ fiat

$r=a$,

$r=a$, vti assumsimus. Ponamus autem $ns$ loco $ns-a$, seu initium, a quo arcus mensuramus, mutemus in alium locum B existente $BE=\frac{a}{n}$; quo pacto natura curuae nil mutatur, habebimus $rr=2aa-nnss$, et $r=\surd(2aa-nnss)$. Ex qua aequatione si curua fuerit determinata, punctum E circa quod arcus aeque ampli sunt abscindendi, vt prodeat curua suae euolutae inuerse similis, ibi est sumendum vbi fit radius osculi $r=a$; id quod eueniet si ab initio nunc capto abscindamus arcum $s=\frac{a}{n}$.

§. 18. Quaeramus aequationem inter coordinatas orthogonales $AP=x$, $PM=y$, sitque $dx=p\,ds$ et $dy=ds\surd(1-pp)$ erit radius osculi in M, scilicet $r=\frac{ds\surd(1-pp)}{dp}$, vnde obtinetur ista aequatio $\frac{dp}{\surd(1-pp)}=\frac{ds}{\surd(2aa-nnss)}$ quae integrata dat A sin. $p=\int\frac{ds}{\surd(2aa-nnss)}=\frac{1}{n}$ A sin. $\frac{ns}{a\surd 2}$, si quidem axem AP in A ad curuam normalem ponimus. Nisi autem sit $n=1$, quo casu euoluta curuae quaesitae non solum fit similis sed etiam aequalis, praestabit formam $\int\frac{ds}{\surd(2aa-nnss)}$ retinere, ne calculus multiplicatione arcuum implicetur. Si enim expressionem $\frac{1}{n}$ A. sin. $\frac{ns}{a\surd 2}$ sumeremus, foret $p=$ sin. A. $\frac{1}{n}$ A sin. $\frac{ns}{a\surd 2}$ quae expressio, nisi $\frac{1}{n}$ sit numerus integer ad computum accommodate exhiberi non potest. Fig. 4.

§. 19. Euoluamus igitur primum casum quo $n=1$ seu curuam quaeramus, quae suae euolutae primae inuerse similis sit et aequalis: erit igitur pro hac curua A sin. $p=$ A sin. $\frac{s}{a\surd 2}$ seu $p=\frac{s}{a\surd 2}$ et $\surd(1-pp)=\frac{\surd(2aa-ss)}{a\surd 2}$. Hinc itaque obtinetur $dx=p\,ds=\frac{sds}{a\surd 2}$ atque integrando $2ax\surd 2=ss$, quae aequatio indicat curuam quaesitam esse cycloidem vulgarem, minimam curuedinem in puncto A et rectam AP pro diametro

metro habentem. Punctum vero E in curua hac, vbi radius osculi $= a$ respondet abscissae $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, quod punctum in centrum circuli generatoris incidit; est enim diameter circuli generatoris $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. Satisfacit igitur cyclois ordinaria huic quaestioni eo quidem modo, qui iam pridem constat, atque inter praecipuas cycloidis proprietates referri solet.

§. 20. Ad curuas iam definiendas quae suis euolutis primis inuerso modo sint saltem similes, vtamur hac aequatione $p = \text{fin. A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$, ex qua fluit ista $\sqrt{(1-pp)} = \text{cof. A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$. Erit itaque $dx = ds$ fin. $\text{A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ et $dy = ds$ cof. $\text{A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ quarum aequationum integralia per lemma §. 10. datum reperiuntur $x = \frac{nns}{nn-1}$ fin. $\text{A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2a^2-n^2s^2)}} + \frac{\sqrt{(2a^2-n^2ss)}}{nn-1}$ cof. A. $\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ et $y = \frac{nns}{nn-1}$ cof. $\text{A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} - \frac{\sqrt{(2aa-n^2ss)}}{nn-1}$ fin. $\text{A}.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$. Cum igitur sit $\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{1}{n}\text{A. fin.}\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, intelligitur quoties fuerit $n$ numerus rationalis, solo excepto casu $n = 1$, valores coordinatarum $x$ et $y$ algebraice per $s$ posse exhiberi, indeque curuam quaesitam esse algebraicam.

§. 21. Si vtriusque expressionis quadrata inuicem addantur, prodibit haec aequatio $xx + yy = \frac{n^4ss + 2aa - nnss}{(nn-1)^2}$: ex qua commode elicitur aequatio inter distantias cuiusuis

Fig. 6. puncti M a centro fixo C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem in M demittitur. Posito enim $CM = \sqrt{(xx+yy)} = z$, $CT = p$ et $MT = t = \sqrt{(zz-pp)}$ erit $ds = \frac{zdz}{t}$. Natura autem curuae exprimitur hac aequatione $zz = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$, quae praebet $s = \frac{1}{n}\sqrt{}$

((nn

$\left((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1}\right)$ et $ds=\frac{(nn-1)zdz}{n\sqrt{\left((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1}\right)}}=\frac{zdz}{t}=\frac{zdz}{\sqrt{(zz-pp)}}$ quae diuiſa per $zdz$ et quadrata, ſuppeditat hanc $(nn-1)^2zz-(nn-1)^2pp=nn(nn-1)zz-\frac{2nnaa}{nn-1}$ ſeu $p=\sqrt{\left(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3}-\frac{zz}{nn-1}\right)}$ et $t=n\sqrt{\left(\frac{zz}{nn-1}-\frac{2aa}{(nn-1)^3}\right)}$ Ducto autem ad M radio osculi $MR=r$, ob $ns=\sqrt{\left((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1}\right)}$, erit $r=(nn-1)p$, et $s=\frac{(nn-1)t}{nn}$

§. 22. Initium ergo curuae, a quo arcus aeſtimantur incidit in punctum B, vbi recta CB ad curuam eſt normalis ſeu $t=0$, eritque recta $BC=\frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$. Hoc igitur puncto B notato erit quiuis arcus $BM=s=\frac{(nn-1)t}{nn}$ ſeu erit $BM:MT=nn-1:nn$; et cum ſit radius osculi $MR=r=(nn-1)p$, erit $MR:CT=nn-1:1$. Radius osculi itaque euaneſcet in puncto A, cuius tangens per C tranſit, eritque $AC=\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$. Deſcribatur centro C radio $AC=\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$ circulus, et ponatur breuitatis gratia $\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}=c$, ſeu $a=\frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$, erit $BD=c-\frac{c}{n}=\frac{(n-1)c}{n}$ ergo $CD:BD=n:n-1$. Porro in radium osculi productum demittatur perpendiculum $CQ=t=n\sqrt{\left(\frac{zz}{nn-1}-\frac{2aa}{(nn-1)^3}\right)}$ erit ducto radio CN ſpatium $NQ=n\sqrt{\left(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3}-\frac{zz}{nn-1}\right)}=np=n\,.\,MQ$ hincque $MN=(n-1)p$. Quare cum ſit $MR=r=(nn-1)p$, erit $MR:MN=n+1:1$: quia porro eſt $NQ:MN=n:n-1=CN:VN$ fiet $VN=\frac{(n-1)c}{n}=BD$: ex quo punctum M eſt in peripheria circuli tangentis circulum AD in N, cuius diameter eſt $NV=BD$.

§. 23.

§. 23. Ex his ergo proprietatibus manifesto consequitur curuam inuentam esse hypocycloidem $ABa$, genitam reuolutione circuli diametrum habentis $BD = \frac{(n-1)c}{n} = \frac{a\sqrt{2}}{n+1}$, super concauitate circuli maioris AD semidiametrum habentis $CD = c = \frac{(na\sqrt{2})}{nn-1}$; si quidem fuerit numerus $n$ vnitate maior. At si $n$ fuerit vnitate minor, curua satisfaciens erit Epicyclois ob valorem ipsius $BD = \frac{(n-1)c}{n}$ negatiuum, quae generetur reuolutione circuli super parte conuexa circuli ADC, existente ratione diametri circuli reuoluentis ad semidiametrum circuli quiescentis vt $1-n$ ad $n$: ex quo simul intelligitur; quoties fuerit $n$ numerus rationalis vnitate excepta, curuam satisfacientem esse algebraicam.

§. 24. Pro hypocycloide igitur seu casu, quo $n > 1$, positis abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, et arcu $BM = s$ habetur ista aequatio $xx + yy = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$. At si ponatur abscissa $BP = u$, erit $x = u + \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$, atque inter $u$, $y$ et $s$ haec habebitur aequatio $yy + uu + \frac{2au\sqrt{2}}{nn-1} = \frac{nnss}{nn-1}$ seu $nnss = 2au\sqrt{2} + (nn-1)(uu+yy)$, ex qua sponte patet, casu $n = 1$ prodire cycloidem ordinariam, fit enim $ss = 2au\sqrt{2}$. Quodsi autem semidiameter circuli quiescentis CD ponatur $= c$, et diameter circuli voluti $BD = b$, erit $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$ et $b = \frac{(n-1)c}{n}$ erit $n = \frac{c}{c-b}$ et $a = \frac{2bc-bb}{(c-b)\sqrt{2}}$; vnde pro hypocycloide $ABa$ haec oritur aequatio $ss = \frac{2b(c-b)(2c-b)u}{cc} + \frac{b(2c-b)(uu+yy)}{cc}$. Pro epycycloide vero ex iisdem circulis nata fit $u$ negatiuum, atque ista habebitur aequatio $ss = \frac{2b(c+b)(2c+b)u}{cc} - \frac{b(2c+b)(uu+yy)}{cc}$.

§. 25.

§. 25. Vt autem aequationem inter coordinatas CP $= x$ et PM $= y$ obtineamus differentialem, ſaltem in qua non inſit arcus $s$, ea ex aequationibus §. 20. datis eruetur: cum enim ſit ſin. A $.\int \frac{ds}{\surd(2aa-nnss)} = \frac{dx}{as}$ et coſ. A $.\int \frac{ds}{\surd(2aa-nnss)} = \frac{dy}{ds}$, erit $x\,ds = \frac{nns\,dx + dy\surd(2aa-nnss)}{nn-1}$ et $y\,ds = \frac{nns\,dy - dx\surd(2aa-nnss)}{nn-1}$ ex quibus eliminato arcu $s$, reſultat ſequens aequatio differentialis $\frac{2nnaads^2}{(nn-1)^2} = cc\,ds^2 = nn(x\,dy - y\,dx)^2 + (xdx + ydy)^2 = cc\,dx^2 + cc\,dy^2$ inter $x$ et $y$ tantum. Ad quam aequationem tractandam ponamus $\frac{y}{x} = v$ et $V(xx+yy) = z$, ſeu $x = \frac{z}{\surd(1+v^2)}$ et $y = \frac{vz}{\surd(1+vv)}$ erit $ds^2 = dz^2 + \frac{z^2dv^2}{(1+vv)^2}$; hisque ſubſtitutionibus factis peruenitur ad hanc aequationem $c^2dz^2 + \frac{ccz^2dv^2}{(1+vv)^2} = \frac{nnz^4dv^2}{(1+vv)^2} + zzdz^2$, quae porro reducitur ad hanc: $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dz\surd(cc-zz)}{z\surd(nnzz-cc)}$. Ponatur porro $\frac{\surd(nnzz-cc)}{\surd(cc-zz)} = t$, ſeu $z = \frac{c\surd(1+tt)}{\surd(nn+tt)}$ fiet $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dt}{1+tt} - \frac{dt}{nn+tt}$: atque integrando A tang $v =$ A tang. $t - \frac{1}{n}$ A tang $\frac{t}{n}$ ſeu $n$ A tang. $\frac{t-v}{1+tv} =$ A tang. $\frac{t}{n}$; quae reſtitutis prioribus valoribus transmutatur in hanc $n$ A tang. $\frac{x\surd(nnzz-cc) - y\surd(cc-zz)}{x\surd(cc-zz) + y\surd(nnzz-cc)} =$ A tang. $\frac{\surd(nnzz-cc)}{n\surd(cc-cc)}$ quae quoties $n$ eſt numerus rationalis, fit algebraica. Cum autem his expreſſionibus ad figuram relatis ſit $p = \frac{\surd(cc-zz)}{\surd(nn-1)}$ et CQ $=$ MT $= t = \frac{\surd(nnzz-cc)}{\surd(nn-1)}$, itemque NQ $= \frac{n\surd(cc-zz)}{\surd(nn-1)}$, erit $n$ A tang. $\frac{tx-py}{px+ty} =$ A tang. $\frac{t}{NQ}$ indeque $n$ ang. BCT $=$ ang. TCV; ex quo erit ang. TCV : ang. TCB $= n : 1$ ſeu ang. TCV : ang. BCV $= n : n-1 =$ CD : BD. atque hinc quoque oritur BC : BD $=$ ang. BCT : ang. BCV $=$ arc. DX : DN. quae omnia cum receptis epicycloidum et hypocycloidum proprietatibus apprime conueniunt.

§. 26. Sic itaque definitae ſint omnes curuae, quae ſuis euolutis primis tam directe quam inuerſe ſint ſimiles, priori ſcilicet caſu ſatisfaciunt omnes ſpirales logarithmicae, poſteriori vero omnis generis cycloides, quae communiter tam epicycloidum quam hypocycloidum nomine comprehendi ſolent. Manifeſtum autem eſt has easdem curuas omnibus quaeſtionibus ſequentibus ſatisfacere debere, quibus quaeruntur curuae, quae ſint ſimiles ſuis euolutis altioris cuiusdam gradus, ſiue directe ſiue inuerſe. Logarithmicae enim ſpirales ſuis euolutis cuiuscunque ordinis directe ſunt ſimiles, quia omnes euolutae manent logarithmicae ſpirales. Deinde omnes cycloides, quae ſuis evolutis primis inuerſe ſimiles eſſe repertae ſunt, ſuis euolutis ſecundis, quartis, ſextis omnibusque ordine paribus directe erunt ſimiles: euolutis vero tertiis, quintis, ſeptimis omnibusque ordine imparibus ſimiles erunt inuerſe. His vero iisdem quaeſtionibus innumerabiles aliae ſatisfacient curuae, eoque plures, quo ad vlteriores ordines procedatur: quarum curvarum ſatisfacientium vt plures ſpecies detegamus, quaeſtionem noſtram ad euolutas ſecundas accommodatam pertractabimus.

§. 27. Ad curuas igitur inueſtigandas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis, quaeſtio pro ſimilitudine directa et inuerſa bipartienda eſt: vnde primum hoc nobis problema erit reſoluendum.

Fig. 7. *Inuenire curuas quae ſuis euolutis ſecundis directe ſint ſimiles.*

Sit AM eiusmodi curua, quae problemati ſatisfaciat, cuius initium ſumatur in puncto A, a quo verſus M recedendo radii oſculi creſcant. Sit igitur BN huius curuae euoluta,

luta, quae vel ita erit comparata, vt ab B ad N radii osculi crescant, sicuti figura repraesentat, vel decrescant, ex quo huius problematis duplex nascitur solutio. Ad priorem igitur, cui figura est accommodata, absoluendam ponatur curuae quaesitae AM arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$; erit eius euolutae BN arcus $BN = r - a$; radius osculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$; atque euolutae secundae arcus $am = \frac{rdr}{ds} - b$; eiusque in $m$ radius osculi $= \frac{r}{ds}\, d. \frac{rdr}{ds}$.

§. 28. Cum igitur curua $am$ similis esse debeat directe curuae AM, erit eius arcus $am = ns$, et radius osculi $= nr$, vnde duplex nascitur aequatio $\frac{rdr}{ds} - b = ns$ et $nr = \frac{r}{ds}\, d. \frac{rdr}{ds}$, quarum vtraque eodem redit. Sumamus itaque aequationem $\frac{rdr}{ds} = ns + b$, quae ob initium A arbitrarium transit in hanc $\frac{rdr}{ds} = ns$, quae integrata dat $rr = nss + aa$, ita vt curuae quaesitae AM radius osculi in initio A sit $= a$: circa hocque punctum A curva vtrinque habebit arcus similes et aequales. Ceterum apparet, si fiat $a = 0$, tum prodire aequationem pro spirali logarithmica, quam huic casui satis facere perspicuum est. Praeterea etiam hoc notari oportet in aequatione $rr = nss + aa$ constantem $aa$, quae per integrationem est inducta negatiue nullo pacto accipi posse, ne radius osculi $r$ vsquam fiat imaginarius: omnis enim aequatio, quae inter arcum et radium osculi exhibetur, ita debet esse comparata, vt cuique arcui radius osculi realis respondeat, nisi forte curua alicubi in puncto quodam terminetur seu retrogrediatur, tum enim si curuae vltra id punctum constans longitudo addita concipiatur, per id interuallum radius osculi debet esse imaginarius.

fig. 4. §. 29. Quoniam itaque habemus hanc aequationem $rr = nss + aa$, erit $r = \sqrt{(aa + nss)}$. Conſideremus nunc curuam quaeſitam ad axem AP relatam, ſitque abſciſſa AP $= x$, applicata PM $= y$, et ponatur $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{(1-pp)}$ erit radius oſculi $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp} = \sqrt{(aa + nss)}$: hincque $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$. Quodſi autem huius curuae euolutae primae arcus ponatur $=$ S et radius oſculi $=$ R, erit $S = r$, et $R = \frac{rdr}{ds} = ns$ ex quo pro euoluta prima iſta emergit aequatio $RR = nSS - naa$, quae ergo curua in puncto quopiam terminabitur, vltra quod curuae adiecta eſt longitudo $= a$. Quare ſi in aequatione pro curua quaeſita ponamus $-naa$ loco $aa$ ſimul prodibit aequatio pro euoluta prima, quae adeo pariter problemati ſatisfaciet, ſuamque euolutam ſecundam ſibi directe habebit ſimilem.

§. 30. Cum itaque problemati ſatisfaciat aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$, in eaque loco $aa$, quantitatem tam affirmatiuam quam negatiuam accipere liceat, ponamus $ab$ loco $aa$, ne forma quadrati ſolum ſignum affirmatiuum inuoluere videatur: hincque erit A ſin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $p =$ ſin. A $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $\sqrt{(1-pp)} =$ coſ. A. $\int \frac{ds}{(\sqrt{nss+ab})}$. Quae aequationes ſi multiplicentur per $ds$, obtinebitur $dx = ds$ ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $dy = ds$ coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$, quae per lemma §. 10. datum ita integrabuntur, vt ſit $x = \frac{ns}{1+n}$ ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} - \frac{\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $y = \frac{ns}{1+n}$ coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} + \frac{\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$.

§. 31. Quoniam autem ex aequationibus differentialibus eſt ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dx}{ds}$ atque coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dy}{ds}$, prodibit his valoribus in aequationibus integratis

ſubſti-

substituendis $xds = \frac{nsdx - dy\sqrt{(nss+ab}}{1+n}$ et $yds = \frac{nsdy + dx\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$; ex quibus si arcus $s$ eliminetur, sequens inter solas coordinatas $x$ et $y$ nascitur aequatio $\frac{nabds^2}{(1+n)^2} = n(ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2$, quae quomodo ad separationem atque constructionem sit perducenda ex §. 25. intelligi potest. Constructio scilicet commodius deducetur ex aequatione inter distantias singulorum curuae punctorum a dato puncto fixo ceu centro et perpendicula in tangentes: eiusmodi autem aequatio deriuabitur facillime sumendis quadratis coordinatarum $x$ et $y$, tum enim prodibit ista aequatio $xx + yy = \frac{ab}{(1+n)^2} + \frac{nss}{1+n}$. seu $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$. Pro huius vero curuae euoluta prima aequatio simili modo accepta erit $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{ab}{1+n}\right)}$ pro euoluta secunda haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{nab}{1+n}\right)}$ pro euoluta tertia $s = \sqrt{\left(\frac{(1+r)(xx+yy)}{n} + \frac{n^2ab}{1+n}\right)}$ etc. ex quo si habeatur pro prima curua aequatio vel constructio, eadem totius seriei euolutarum naturam in se complectetur: quarum singulae problemati aeque ac ipsa prima satisfaciet.

§. 32. Referatur itaque curua ad centrum fixum A, in quo ante axis AP terminabatur, ponaturque recta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, perpendiculum in tangentem, AT $= p$ ipsaque tangens MT $= \sqrt{(zz - pp)} = t$, erit elementum curuae $ds = \frac{zdz}{t}$. At ex praecedente aequatione pro curua nostra inuenta emergit haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)zz}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$, vnde fit $ds = \frac{(1+n)zdz}{\sqrt{\left(n(1+n)zz - \frac{nab}{1+n}\right)}} = \frac{zdz}{t}$: quae Fig. 5.

cum per $zdz$ diuidi queat, erit $t = \sqrt{\left(\frac{nzz}{1+n} - \frac{nab}{(1+n)^3}\right)} = \frac{s}{1+n}$ [illegible]

$\frac{s}{1+n}$; et $p = \sqrt{(\frac{zz}{1+n} + \frac{nab}{(1+n)^2})}$. Radius osculi vero $r$, qui eſt $= \sqrt{(nss + ab)}$, erit $= \sqrt{((1+n)zz + \frac{nab}{1+n})}$ ex quo erit $r = (1+n)p$ et $s = (1+n)t$, quae ſunt proprietates notatu dignae pro curua quaeſita.

§. 33. Ad figuram curuae inueſtigandam habeat primum conſtans $ab$ valorem affirmatiuum ſitque $\frac{ab}{(1+n)^2} = cc$, erit $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz - cc)}$ et $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz + ncc)}$: vnde perſpicitur $z$ neceſſario maiorem eſſe debere quam $c$. Caſu autem quo $z = c$ fit $t = 0$, et $p = c$; quare hoc
Tab. I. fig. 8. loco ipſa recta AM in curuam erit normalis. Deſcribatur igitur centro C radio $CA = c$ circulus AS, ſitque curuae quaeſitae initium in A, vbi curua ad radium CA erit normalis, ibique radium osculi habebit $= (1+n)$ CA. Iam ſumatur curuae punctum quodcunque $M$, poſitaque vt ante $CM = z$, $CT = p$ et $MT = t$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz + ncc)}$ et $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz - cc)}$, et anguli CMT tangens $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz + ncc}{nzz - ncc}}$; quare crescente diſtantia $z$, hic angulus continuo decreſcet, donec tandem, quando fit $z = \infty$, huius anguli tangens fiat $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi curua cum logarithmica ſpirali confundetur.

§. 34. Vt vero curuae huius commodam conſtructionem tradamus, ponatur arcus circularis $AS = q$, cuius elementum $Ss$ erit $= dq$, vnde fiet $Mn = \frac{zdq}{c}$, atque $t : p = dz : \frac{zdq}{c}$, ex quo oritur $dq = \frac{cpdz}{zt} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz+ncc}{nzz-ncc}}$ Ponatur $\sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} = u$ erit $zz = \frac{nncc(1+uu)}{n-uu}$ et $\frac{dz}{z} = \frac{udu}{1+uu} + \frac{udu}{n-uu}$, hincque $\frac{dq}{c} = \frac{du}{1+uu} + \frac{du}{n-uu}$, cuius integrale eſt $\frac{q}{c} = \text{A tang. } u + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u} = \text{A tang.}$ $\sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}}$ Sumta igitur prolubitu diſtantia

diſtantia $z$ eius poſitio reſpectu C A ita definietur. Dabitur primo triangulum M C T, cuius anguli M C T tangens erit $= \sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}}$. Deinde hoc triangulum circa C ita erit diſponendum, vt angulus A C T fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l \frac{p\sqrt{n}+t}{p\sqrt{n}-t}$. Quodſi ergo fiat $z = \infty$, arcus A S infinite magnus euadet, ac propterea curva A M O infinitis ſpiris circa C peragendis in infinitum excurret: ac recta A C erit huius curuae diameter.

§. 35. Sit nunc $ab$ quantitas negatiua, et ponatur $\frac{-nab}{(1+n)^2} = cc$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ et $t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ vnde perſpicuum eſt $z$ non poſſe eſſe $< c$: caſu autem quo $z = c$, fit $p = 0$ et $t = c$; ex quo tangens curuae hoc loco per ipſum centrum tranſibit. Deſcribatur igitur centro C radio $CA = c$ circulus, ſitque A M O curua quaeſita, quae in A circulo normaliter inſiſtat, ita vt recta A C ſit tangens huius curuae in A. Sumto ergo puncto quocunque M, et ex C in tangentem M T demiſſo perpendiculo C T, erit $CM = z$. $CT = p$ et $MT = t$, atque anguli C M T tangens erit $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$ Quare diſtantia $z$ in infinitum creſcente fiet anguli C M T tangens $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, ibique curua cum logarithmica ſpirali confundetur. Tab. II. Fig. 1.

§. 36. Constructio huius curuae ſimili modo perficietur, quo caſu praecedente; poſito enim arcu circulari $AS = q$, erit $t : p = dz : \frac{zdq}{c}$, vnde fit $dq = \frac{cpdz}{tz} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$. Facta nunc ſimili ſubſtitutione prodibit ſequens aequatio integralis $\frac{q}{c} = \text{A tang.} \sqrt{\frac{nzz+cc}{zz-cc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l \frac{\sqrt{n(zz-cc)}+\sqrt{(nzz+cc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{n(zz-cc)}} - \text{A tang.}\ \infty$; quae reducitur ad hanc

$\frac{q}{c} +$

$\frac{q}{c} +$ A tang. $\sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$. Quod si ergo longitudo M C pro lubitu accipiatur, super ea formetur triangulum rectangulum C P M, ita vt sit C P $= t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ *et* P M $= p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ quo facto hoc triangulum in talem situm collocetur vt angulus A C P fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$.

Tab II. fig. 2. §. 37. Cum igitur his duobus casibus solutionis problematis pars prior absoluatur, accedamus ad alteram partem, in qua euolutae primae B N radii osculi a B ad N pergendo decrescunt. Quare si in curua quaesita ponatur arcus A M $= s$, radius osculi M N $= r$, erit euolutae primae BN arcus BN $= r - a$, radius osculi N $m = \frac{rdr}{ds}$ hincque pro euoluta secunda arcus $a\,m = b - \frac{rdr}{ds} = n\,s$; et radius osculi $m\,n = -\frac{r}{ds} d.\frac{rdr}{ds} = n\,s$. Ex vtraque aequatione mutato initio A resultat ista $n\,s\,d\,s + r\,d\,r = 0$, quae integrata dat $n\,s\,s + r\,r = a\,a$ seu $r = \sqrt{(a\,a - n\,s)}$, quae cum omnino similis sit illi quae supra §. 17. est inuenta, huic casui satisfacient epicycloides et hypocycloides omnes. Curuarum itaque, quae suis euolutis secundis directe sunt similes quinque nacti sumus genera; quorum primum omnes spirales logarithmicas complectitur, tum sequentur bina spiralium genera noua §. §. 33, 35. exposita; reliqua bina genera constituunt epicycloides et hypocycloides.

§. 38. Circa similitudinem euolutarum secundarum restat hoc problema.

Tab. II. fig. 3. *Inuenire curuas, quae suis euolutis secundis inuerse sint similes.*

Huius

Huius problematis pariter ac praecedentis duplex requiritur ſolutio, prout euolutae primae radii oſculi ab H pergendo vel creſcunt vel decreſcunt, ſi quidem in curua quaeſita AEB curuedo ab A ad B decreſcat. Ponamus igitur euolutae primae radios osculi ab H ad N creſcere, ſitque E id punctum in curua quaeſita ita comparatum vt portionis EB euoluta ſecunda ac ſimilis ſit portioni AE, huiusque euoluta ſecunda $be$ ſimilis illi portioni BE, prouti ſimilitudo inuerſa poſtulat. Circa E ſumantur vtrinque arcus EM et EQ aeque ampli, atque euolutis prima HN et ſecunda $ba$ deſcriptis, debebit arcus $em$ ſimilis eſſe arcui EM, et arcus $eq$ ipſi EQ.

§. 39. Vocetur radius osculi $EF = a$, et $Fe = b$, atque ponantur arcus $EM = s$; $EQ = S$; itemque radii osculi $MN = r$ et $QR = R$, habebitur ob arcus aeque amplos $\frac{ds}{r} = \frac{dS}{R}$. Iam itaque in euoluta ſecunda erit propter ſimilitudinem $em = ns$, $eq = nS$, radius osculi in $m = nr$, et radius osculi in $q = nR$. At ex natura euolutionis habebitur $FN = r - a$; $FR = a - R$: $Nq = \frac{rdr}{ds}$; et $Rm = \frac{-RdR}{dS} = \frac{-rdR}{ds}$ Denique in euoluta ſecunda erit $eq = \frac{rdr}{ds} - b$; et $em = b + \frac{rdR}{ds}$: atque radius oſculi in $q = \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$, ac radius osculi in $m = \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdR}{ds}$. His cum expreſſionibus ex ſimilitudine natis coniungendis orientur hae aequationes $ns = b + \frac{rdR}{ds}$; $nS = \frac{rdr}{ds} - b$; $nr = \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdR}{ds}$; $nR = \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$ quae binae poſteriores aequationes in prioribus continentur ob aequationem fundamentalem $\frac{dS}{R} = \frac{ds}{r}$.

§. 40. Habemus itaque tres iſtas aequationes

I. $rdS = Rds$

II. $nsds = rdR + bds$

III. $nSds = rdr - bds$

ex æquibus curuae conſtructio debet formari : quae ita abſoluetur, vt binae variabiles S et R eliminentur, atque aequatio eruatur inter $s$ et $r$; haec enim ſi ita fuerit comparata, vt ad datum arcum $s$ quantitas radii oſculi $r$ poſſit aſſignari, ſimul ipſa curua poterit conſtrui, quemadmodum alibi oſtendi. Eſt vero ex tertia aequatione $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, atque ex prima $R = \frac{rdS}{ds} = \frac{r}{nds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$, qui in ſecunda ſubſtitutus dat hanc $\frac{(ns-b)ds}{r} = \frac{1}{n}\, d.\, \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$ : haec vero aequatio euoluta ad differentialia tertii gradus exſurgit, quae vix vllo modo deprimi atque ad conſtructionem accommodari queat. Ipſa quidem aequatio haec mutato initio E ſeu ſcripto $ns$ loco $ns-b$ ita ſe habebit : $n^2 s ds^3 = r^3 d^3 r + 4r^2 dr ddr + r dr^3$; poſito $ds$ conſtante, haec vero commode integrabilis exiſtit, eſt namque integralis $n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 41. Quantumuis autem difficilis huius aequationis differentio-differentialis conſtructio videatur, tamen ea ex aequationibus primitiuis deduci poteſt. Secunda ſcilicet aequatio per primam abit in hanc

$$n s dS = R dR + b dS$$

ad quam ſi tertia addatur, obtinebitur iſta :

$$n s dS + n S ds = R dR + r dr + b dS - b ds,$$

cuius integralis eſt $2nSs = R^2 + r^2 + 2bS - 2bs - 2aa$ eiusmodi adhibita conſtante, vt euaneſcentibus arcubus $s$ et S radii oſculi R et $r$ fiant $= a$. Simili modo ſi ad tertiam aequationem per primam in hanc transformatam :

$n S dS = R dr - b dS$ addatur ſecunda, prodit $n s ds + n S dS = r dR + R dr + b ds - b dS$, cuius integralis eſt $ns^2 + nS^2 = 2Rr + 2bs - 2bS - 2aa$. Hinc itaque emergunt binae ſequentes aequationes :

$R^2 +$

$R^2 + r^2 = 2aa + 2bs - 2bS + 2nSs$ ; et
$2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$
ex quibus additis et ſubtractis obtinetur
$(r+R)^2 = 4aa + n(s+S)^2$ atque
$(r-R)^2 = 4b(s-S) - n(s-S)^2$

§ 42. Ex his duabus aequationibus ſi eliminetur R, obtinebitur aequatio algebraica inter S, $s$ et $r$ in qua ſi porro loco S ſubſtituatur eius valor $\frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, habebitur aequatio differentialis primi gradus inter $r$ et $s$ quae propterea erit integralis illius aequationis differentialis ſecundi gradus ſupra inuentae

$$n^2 s^2 ds^2 + Cds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$$

Haec eadem vero aequatio differentialis ſecundi gradus reſultat ſi in aequatione $2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$ loco R et S ſubſtituantur valores per $r$ et $s$ ſcilicet $R = \frac{r}{nds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{nds^2}$ et $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$ fiet enim $\frac{2r^3 ddr + 2rrdr^2}{nds^2} = 2aa - 2bs + \frac{2brdr}{nds} - \frac{2bb}{n} + \frac{r^2 dr^2}{nds} - \frac{2brdr}{nds} + \frac{bb}{n} + nss$ ſeu $2r^3 ddr + r^2 dr^2 = (n^2 s^2 - 2nbs - bb + 2naa) ds^2$. Quare ſi vt ſupra fecimus loco $ns - b$ ſcribamus ſimpliciter $ns$, prodibit aequatio $n^2 s^2 ds^2 + 2(naa - bb) ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 43. Vt nunc huius aequationis differentialis ſecundi gradus veram aſſignemus aequationem integralem, quae erit differentialis primi gradus, ponamus etiam $s = S + \frac{b}{n}$ et $S = S - \frac{b}{n}$, erit $(r+R)^2 = 4aa + n(S+s)^2$ atque $(r-R)^2 = \frac{4bb}{n} - n(s-S)^2$ exiſtente $S = \frac{rdr}{nds}$ ſeu $R^2 + r^2 = 2aa + \frac{2bb}{n} + 2nSs$ atque $2Rr = 2aa - \frac{2bb}{n} + nS^2 + ns^2$ ex qua erit $4R^2 r^2 = n^2 (S^2 + s^2)^2 + 4n$

$(a^2-\frac{b^2}{n})(S^2+s^2)+4(a^2-\frac{b^2}{n})^2$: at ex priore aequatione eſt $4R^2r^2=8(aa+\frac{bb}{n})rr+8Ssr^2-4r^4$, ſcribatur $f$ loco $aa-\frac{bb}{n}$ et $g$ loco $aa+\frac{bb}{n}$, ac proueniet ſequens aequatio:

$r^4dr^4+2n^2s^2r^2ds^2dr^2+n^4s^4ds^4+4nfr^2ds^2dr^2$ $+4n^3fs^2ds^4+4n^2f^2ds^4=8n^2gr^2ds^4-4n^2r^4ds^4$ $+8n^2sr^3ds^3dr$, quae adeo eſt integralis huius $n^2s^2ds^2+2nfds^2=2r^3ddr+r^2dr^2$, id quod eo magis eſt notandum, quod nulla pateat via alteram ex altera deducendi, immediate ſcilicet. Nam ſi differentialis aequatio ſecundi gradus reſoluatur in plures aequationes per valores aſſumtitios $S=\frac{rdr}{nds}$ et $R=\frac{r^2ddr+rdr^2}{nds^2}$, tum congruentia ſatis perſpicitur eo modo quo ſumus vſi. Atque hinc fortaſſe aliquando nouam methodum detegere licebit, ad aequationes differentiales altiorum graduum integrandas. Hic quidem ſufficiat ſpeciem quandam huius methodi indicaſſe, ex qua ipſius vſus ingens, ſi quando excoletur, perſpiciatur.

§. 44. Interim tamen iſtae aequationes ad curuam quaeſitam conſtruendam non multum iuuant, quam ob cauſam aliam viam ad conſtructionem perueniendi aperiemus. Ponamus $s+S=p$; $s-S=q$; $r+R=u$; et $r-R=v$: erit $s=\frac{p+q}{2}$; $S=\frac{p-q}{2}$; $r=\frac{u+v}{2}$ et $R=\frac{u-v}{2}$; qui valores in aequatione $rdS=Rds$ ſubſtituti dabunt $udq=vdp$; aequationes vero §. 41. inuentae abibunt in ſequentes $u^2=4aa+np^2$ et $v^2=4bq-nq^2$, ex quibus obtinebitur $\frac{dp}{\sqrt{(4aa+npp)}}=\frac{dq}{\sqrt{(4bq-nqq)}}$, in qua cum variabiles $p$ et $q$ ſint a ſe inuicem ſeparatae, dabitur $q$ per $p$ et proinde $S$ per $s$; hincque porro $v$ et $u$ atque adeo $r$ et $R$ per $s$.

Quare

Quare cum ad datum ipſius $s$ valorem quemuis aſſignari queat valor ipſius $r$, ipſa curua, in qua $s$ arcum et $r$ radium osculi denotat, conſtrui poterit, ex quo problema propoſitum, quantum quidem deſiderari poteſt, eſt reſolutum, cum id ſit perductum ad aequationem differentialem primi gradus, in qua variabiles $p$ et $q$ ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

§. 45. Quodſi autem detur relatio inter arcum curuae cuiuspiam $s$ ac radium oſculi $r$, ipſa curua ſequenti modo conſtruetur. Ponatur abſciſſa $= x$, applicata $= y$, ſitque $dx = p\,ds$, erit $dy = ds\,\sqrt{(1-pp)}$ atque $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp}$, vnde fiet $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{r}$ et $A.\,\text{ſin}.\,p = \int\frac{ds}{r}$ quod integrale dabitur ob datam relationem inter $s$ et $r$. Hanc ob rem habebitur $p = \text{ſin}.\,A.\int\frac{ds}{r}$ atque $\sqrt{(1-pp)} = \text{coſ}.\,A.\int\frac{ds}{r}$; hincque $dx = ds\;\text{ſin}.\,A.\int\frac{ds}{r}$, et $dy = ds\;\text{coſ}.\,A.\int\frac{ds}{r}$. Ex quibus tandem per integrationem prodit $x = \int ds\;\text{ſin}.\,A.\int\frac{ds}{r}$ atque $y = \int ds\;\text{coſ}.\,A.\int\frac{ds}{r}$; ita vt per quadraturas ad datum cuiusque arcus valorem aſſignari queant tam abſciſſa quam applicata.

§. 46. Accedamus iam ad caſum alterum problematis §. 38. propoſiti, ac decreſcant radii osculi euolutae primae HN ab H ad N pergendo. Maneant vti in praecedente caſu radii osculi fixi $EF = a$, $Fe = b$, vocenturque arcus $EM = s$, $EQ = S$ et radii osculi $MN = r$, et $QR = R$; vnde ob ſimilitudinem in euoluta ſecunda erit $em = ns$ et $eq = nS$. Per naturam vero euolutionis erit in euoluta prima $FN = r - a$; $FR = a - R$ $Nq = \frac{rdr}{ds}$ et $Rm = \frac{-RdR}{ds}$: ex quibus pro euoluta ſecunda oritur $em = ns = \frac{-RdR}{ds} - b$, atque $eq = nS = b - \frac{rdr}{ds}$. Tab. II. fig. 4.

$\frac{rdr}{ds}$. Ob arcus denique EM et EQ aeque amplos erit $\frac{ds}{r} = \frac{ds}{R}$. Quamobrem habebuntur tres sequentes aequationes:

I. $rdS = Rds$

II. $nsdS = -RdR - bdS$.

III. $nSds = -rdr + bds$

quarum binae posteriores ope primae transmutantur in has:

II. $nsds = -rdR - bds$

III. $nSdS = -Rdr + bdS$.

§. 47. Addamus primum binas aequationes posteriores in forma priore, eritque summa:

$$nsdS + nSds = -RdR - rdr + bds - bdS$$

quae integrata dat hanc aequationem

$$2nSs = 2aa - R^2 - r^2 + 2bs - 2bS$$

seu $R^2 + r^2 = 2a^2 + 2b(s-S) - 2nSs$

Deinde addamus easdem aequationes in forma posteriori, erit $nsds + nSdS = -rdR - Rdr - bds + bdS$ cuius integrale est $ns^2 + nS^2 = 2a^2 - 2Rr - 2b(s-S)$ seu $2Rr = 2a^2 - 2b(s-S) - n(s^2 + S^2)$, quae cum illa coniuncta tum addendo tum subtrahendo praebet

$$(r+R)^2 = 4a^2 - n(s+S)^2 \text{ atque}$$

$$(r-R)^2 = 4b(s-S) + n(s-S)^2$$

quae aequationes ab illis, quas casu praecedente inuenimus non differunt, nisi quod $n$ habeat valorem negatiuum.

§. 48. Quodsi ergo ad curuam construendam faciamus vt ante $s + S = p$; $s - S = q$; $r + R = u$; et $r - R = v$ erit $u = \sqrt{(4aa - npp)}$ et $v = \sqrt{(4bq + nqq)}$ hincque per aequationem primam $rdS = Rds$ obtinebitur

$$\frac{dp}{\sqrt{(4aa-npp)}} = \frac{dq}{\sqrt{(4bq+nqq)}}$$

per

per quam dabitur relatio inter $p$ et $q$, vnde $s$ et $r$ per eandem variabilem vel $p$ vel $q$ determinabitur; id quod ad curuam construendam sufficit.

§. 49. Vt autem naturam huius curuae propius inspicere liceat, tentabimus ipsam constructionem perficere, atque aequationem inter coordinatas orthogonales $x$ et $y$ elicere. Quod quo commodius fieri queat, introducamus nouam variabilem $z$ sitque
$dz = \frac{dp\sqrt{n}}{\sqrt{(4aa-npp)}} = \frac{dq\sqrt{n}}{\sqrt{(4bq+nqq)}}$, atque tam $p$ quam $q$ per eandem variabilem $z$ definiatur, primo autem prodibit A. sin. $\frac{p\sqrt{n}}{2a} = z$ hincque $p = \frac{2a}{\sqrt{n}}$ sin. A. $z$; tum vero habebitur $z = l\frac{nq+2b+\sqrt{(4nbq+nnqq)}}{c}$ hincque $q = \frac{(ce^z-2b)^2}{2nce^z}$
Per $z$ igitur definitis $p$ et $q$, porro reperientur $u$ et $v$, ex quibus tandem consequitur.

$$s = \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ sin. A } z + \frac{(ce^z-2b)^2}{4nce^z} \quad \text{et}$$

$$r = a \text{ cos. A } z + \frac{(c^2e^{2z}-4bb)}{4ce^z\sqrt{n}}.$$

§. 50. Hinc differentiando emergit $ds = \frac{adz \text{ cos. A}.z}{\sqrt{n}} + \frac{dz(c^2e^{2z}-4bb)}{4nce^z}$, ita vt sit $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{\sqrt{n}}$ et $\int\frac{d}{r} = \frac{z}{\sqrt{n}}$. Quare si ponatur abscissa $= x$ et applicata $= y$ erit per §. 45.

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ cos. A}.z. \text{ sin.A} \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ sin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ sin. A}. \frac{z}{\sqrt{n}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ cos. A } z. \text{ cos. A } \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ cos. A } \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ cos. A } \frac{z}{\sqrt{n}}$$

quae

quae quidem formulae iam sufficere possent ad curuam per quadraturas construendam; at constructio facilior inde euadet, quod singulae hae formulae differentiales actu integrationem admittant.

§. 51. Singulas autem has formulas differentiales sequenti modo integramus: $\int dz \cos. A z. \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \sin. A z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz \sin. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \sin. A z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cos. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \int dz \cos. A z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}$; vnde oritur

$$\int dz \cos. A z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \sin. A z. \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}. \cos. A z. \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}$$

at casu quo $n = 1$, quia est $\cos. A z. \sin. A z = \frac{1}{2} \sin. A 2z$ erit $\int dz \cos. A z. \sin. A z = -\frac{1}{4} \cos. A 2z$. Deinde pari modo est $\int dz \cos. A z. \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \sin. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz. \sin. A z. \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \sin. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cos. A, \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \int dz \cos. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}$. ergo $\int dz \cos. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \sin. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}. \cos. A z. \sin. A. \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}$. Casu autem quo $n = 1$ ob $\cos. A z \cos. A z = \frac{1 + \cos. A 2z}{2}$ erit $\int dz \cos. A z \cos. A z = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \sin. A 2z$.

§. 52. Reliquas formulas simili modo integramus; est scilicet $\int e^z dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{e^z}{\sqrt{n}} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \int e^z dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}$, hincque $\int e^z dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n e^z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - e^z \sqrt{n}. \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$.

At $\int e^z dz \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n e^z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + e^z. \sqrt{n}. \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$. Deinde simili modo

$\int e^{-z} dz$

$$\int e^{-z} dz \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{n\sqrt{}} \int e^{-z} dz \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}$$

$$= -e^{-z} \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} \; \frac{e^{-z}}{\sqrt{n}} \text{ cof. A. } \tfrac{z}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \int e^{+z} dz \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}$$

hincque $\int e^{-z} dz \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} = \dfrac{-ne^{-z} \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} - e^{-z} \sqrt{n}. \text{ cof. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$

Denique $\int e^{-z} dz \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-z} dz$ $\text{fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} = \dfrac{-ne^{-z} \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} + e^{-z} \sqrt{n}. \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}.$

His igitur integralibus inuentis habebimus $x =$

$$x = \frac{a\sqrt{n} \text{ fin. A } z \,.\, \text{fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} + a \text{ cof. A } z \,.\, \text{cof. A. } \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$$

$$\frac{c\sqrt{n} e^{z} \text{ fin. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}} - c e^{z} \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n} e^{-z} \text{ fin. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}} + bbe^{-z} \text{ cof. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

atque $y = \dfrac{a\sqrt{n} \text{ fin. A } z \text{ cof. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}} - a \text{ cof. A } z \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$

$$\frac{c\sqrt{n}\,.\, e^{z} \text{ cof. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}} + c e^{z} \text{ fin. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n}\,.\, e^{-z} \text{ cof. A} \tfrac{z}{\sqrt{n}} - bbe^{-z} \text{ fin. A } \tfrac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

fumendis quadratis obtinebitur $x\,x + y\,y =$

$$\frac{a^2(n \text{ fin. A} z \,.\, \text{fin. A} z) + \text{cof. A} z . \text{cof. A} z)}{(n-1)^2} + \frac{ac\, e^{z}(n \text{ fin. A} z - \text{cof. A} z)}{2(n^2-1)\sqrt{n}}$$

$$+ \frac{2abbe^{-z}(n \text{ fin. A} z + \text{cof. A} z)}{c(nn-1)\sqrt{n}} + \frac{cc\, e^{2z}}{16n(n+1)} + \frac{bb(n-1)}{2n(n+1)^2} +$$

$$\frac{b^4\, e^{-2z}}{c^2 n(n+1)}.$$

Simili autem modo curuae cafui praecedenti huius problematis fatisfacientis conftructio poteft adornari. Ceterum curuae iftae, quae fuis euolutis fecundis inuerfe funt fimiles, fimul ita funt comparatae vt direčte fint fimiles fuis euolutis quartis.

§. 52. Quod autem ad curuas attinet, quae cuicunque euolutae directe ſint ſimiles, lex aequationum inter arcum $s$ et radium oſculi $r$ contentarum facile patet. Pro curuis enim quae ſuis euolutis primis directe ſunt ſimiles haec habetur aequatio $\pm n s = r$. Pro curuis quae ſuis euolutis ſecundis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{rdr}{ds}$. Pro curuis quae ſuis euolutis tertiis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + r dr^2}{ds^2}$; pro curuis quae ſuis euolutis quartis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d \cdot \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds} = \frac{r^3 d^3 r + 4 r^2 dr ddr + r dr^3}{ds^3}$. Pro curuis vero, quae ſuis euolutis quintis ſint ſimiles, habebitur haec aequatio $\pm n s = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d \cdot \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds}$. quas aequationes quousque lubuerit continuare licet.

§. 53. Conſideremus igitur curuas, quae ſuis euolutis tertiis ſint ſimiles, quae hac aequatione continentur $\pm n s ds^2 = r^2 ddr + r dr^2$ poſito $ds$ conſtante. Ad hanc aequationem in differentialem primi gradus transmutandam ponamus $s = e^{\frac{\int u du}{y}}$ et $r = e^{\frac{\int u du}{y}} u$ erit ob $ds$ conſtans $ddu = \frac{dudu}{y} - \frac{du^2}{u} - \frac{udu^2}{y}$ atque $ds = e^{\frac{\int u du}{y}} \cdot \frac{udu}{y}$; $dr = e^{\frac{\int u du}{y}} (du + \frac{uudu}{y})$; $ddr = e^{\frac{\int u du}{y}} (\frac{dudy}{y} + \frac{udw^2}{y} - \frac{dw^2}{w})$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra differentialis ſecundi gradus abit in hanc $\pm n du = y dy + 3 uy dn + u^3 du$, cuius aequationis integrale particulare reperitur eſſe $y = -u^2 - u \sqrt[3]{\pm n} - \sqrt[3]{n^2}$ Ad integrale igitur generale inueniendum ponamus $y = z - u^2 - u \sqrt[3]{\pm n} - \sqrt[3]{n^2}$ erit

erit $dy = dz - 2udu - du\sqrt[3]{\pm n}$ atque $o = zdz + zudu - zdu\sqrt[3]{\pm n} - uudz - udz\sqrt[3]{\pm n} - dz\sqrt[3]{n^2}$ Ponamus $\pm n = m^3$ quia $m$ perinde aſſignari poteſt ſiue ſit $n$ numerus affirmatiuus ſiue negatiuus; eritque $o = zdz + zudu - mzdu - uudz - mudz - m^2dz$.

§. 54. Haec vero aequatio ex earum eſt numero, quae ſeparabiles redduntur, ſi ponatur $dz = pdu$, hoc enim facto erit $o = pz + zu - mz - pu^2 - mpu - m^2p$ vnde fit $z = \frac{p(u^2+mu+m^2)}{p+u-m}$, quae ſubſtitutio adhibeatur. Differentietur ſcilicet, eritque $dz = pdu = \frac{u^3dp + pu^2du - 2m^2pdu - 2m^2pdu - 2mpudu + 2up^2du + mp^2du - m^3dp}{(p+u-m)^2}$ quae reducta abit in hanc: $\frac{du}{u^3-m^3} = \frac{dp}{p^3-3mp^2+3m^2p}$ ſeu $\frac{du}{(u-m)(u^2+mu+mm)} = \frac{dp}{p(p^2-3mp+3m^2)}$ quae integrata dat $\frac{1}{3m^2}\, l\, \frac{u-m}{\sqrt{(u^2+mu+m^2)}} - \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u+2m} = \frac{1}{3m^2}\, l\, \frac{p}{\sqrt{(pp-3mp+3m^2)}} + \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{p}{2m\sqrt{3}-p\sqrt{3}} + \mathrm{C}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{(u-m)\sqrt{(p^2-mp+3m^2)}}{p\sqrt{(uu+mu+m^2)}} =$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u+2m}$ + A tang. $\frac{p}{2m\sqrt{3}-p\sqrt{3}}$ + Conſt. = A tang. $\frac{3mu+mp-pu}{2m^2\sqrt{3}-mp\sqrt{3}+mu\sqrt{3}-pu\sqrt{3}}$ + Conſt. Quia vero eſt $p = \frac{(m-u)(y+uu+mu+mm)}{y}$ erit $\frac{1}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{(y^2+y(2uu-mu-m^2)+(m-u)^2(uu+mu+mm))}}{y+uu+mu+mm} =$ A tang. $\frac{(y+(m-u)^2)(u^2+mu+m^2}{(y(uu+mu-mm)+(u^2-m^2)(uu+mu+mm))\sqrt{3}}$ + Conſt. vbi eſt $u = \frac{r}{s}$ et $y = \frac{rdr}{sds} - \frac{rr}{ss}$.

§. 55. Quoniam inuenimus quaeſtioni particulariter ſatisfieri aequatione $y + uu + mu + mm = o$ prodibit haec aequatio inter $r$ et $s$ partem quaeſtionis reſoluens $rdr + mrds + m^2sds = o$, quae igitur aequatio erit integralis

 huius

huius $m^3 s ds^2 = r^2 ddr + rdr^2$ id quod illius differentiatio indicat, etiamsi vice versa per integrationem illa ex hac erui vix queat: Ponamus igitur ad integrale latissimo sensu acceptum inueniendum id esse $rdr + mrds + m^2 sds = Vds$ erit differentiando $rddr + dr^2 + mdrds + m^2 ds^2 = dVds$, ergo $r^2 ddr + rdr^2 = rdVds - mrdrds - m^2 rds^2 = m^3 sds^2$. Hinc erit porro $rdVds = m^3 sds^2 + m^2 rds^2 + mrdrds = mVds^2$ ex qua fit $\frac{dV}{V} = \frac{mds}{r}$ et $V = ce^{\int \frac{mds}{r}}$ vbi $\int \frac{ds}{r}$ per coordinatas exprimi potest vt constat, ita vt sit integrale $rdr + mrds + m^2 sds = ce^{\int \frac{mds}{r}} ds$.

§. 56. Succinctiores autem prodeunt aequationes pro omnibus huiusmodi curuis, quae cuipiam euolutae debent esse similes, si non inter $r$ et $s$ sed inter $s$ et $\frac{ds}{r}$ quaerantur aequationes. Hunc in finem ponatur $\frac{ds}{r} = dv$ erit $r = \frac{ds}{dv}$ positoque elemento $dv$ constante habebitur pro curuis

| quae similes sunt | ista aequatio |
|---|---|
| euolutis primis | $+nsdv = ds$ |
| euolutis secundis | $+nsdv^2 = dds$ |
| euolutis tertiis | $+nsdv^3 = d^3 s$ |
| euolutis quartis | $+nsdv^4 = d^4 s$ |
| euolutis quintis | $+nsdv^5 = d^5 s$ |
| euolutis sextis | $+nsdv^6 = d^6 s$ |
| etc. | |

quae aequationes etsi sunt vno gradu differentialium altiores quam praecedentes, tamen tractatu sunt faciliores. Deinde de ſi $s$ determinetur per $v$, mox habebitur aequatio inter coordinatas orthogonales, $x$ et $y$, ope aequationum $x = \int ds$ ſin. A $v$ et $y = \int ds$ coſ. A $v$.

§. 57. Quanquam hae aequationes pluribus modis tractari poſſunt, tamen hic reliquis praeferendus eſſe videtur, quo primo eiusmodi valores ipſius $s$ perpenduntur, quae ſuis differentialibus cuiusuis ordinis ſint ſimiles. Cum enim generaliter ſit $\frac{d^{\nu} s}{dv^{\nu}} = \pm n s$, valorem ipſius $s$ ita comparatum eſſe oportet, vt ipſius differentiale cuiusuis gradus ipſi ſit ſimile, ſeu per id diuiſum conſtantem quantitatem producat. Huiusmodi autem quantitatum tria dantur genera, quorum primum quantitates exponentiales complectitur, ſecundum ſinus et coſinus arcuum circularium, tertium vero vtriusque ſpeciei quantitatibus exponentialibus, ſcilicet et ſinibus coſinibusque arcuum circularium coniunctim continetur.

§. 58. Primum igitur genus ita eſt comparatum vt ſit $s = e^{gv}$, huiusque formulae differentialia cuiusque gradus ſequenti modo pro-

| grediuntur | eritque |
|---|---|
| I. $\frac{ds}{dv} = e^{gv} g$ | $\frac{ds}{s dv} = g = \pm n$ |
| II. $\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} g^2$ | $\frac{dds}{s dv^2} = g^2 = \pm n$ |
| III. $\frac{d^3 s}{dv^3} = e^{gv} g^3$ | $\frac{d^3 s}{s dv^3} = g^3 = \pm n$ |
| IV. $\frac{d^4 s}{dv^4} = e^{gv} g^4$ | $\frac{d^4 s}{s dv^4} = g^4 = \pm n$ |
| etc. | etc. |

Apparet igitur aequationem $s = e^{gv}$ ſatisfacere plerisque quaeſtionum caſibus, quibus curuae euolutis ſuis dati ordi-

 nis

nis fimiles requiruntur. Quodfi enim quaeratur curua, quae fuae euolutae ordinis $\nu$ fit fimilis, duplex pro ea habetur aequatio fcilicet vel $d^\nu s = n s d v^\nu$, vel $d^\nu s = - n s d v^\nu$; quarum aequationum priori femper fatisfacit valor $s = e^{gv}$, fumto $g = \sqrt[\nu]{n}$. Alteri vero cafui haec aequatio tantum fatisfacit, fi $\nu$ fuerit numerus impar, fitque $g = \sqrt[\nu]{-n} = -\sqrt[\nu]{n}$; fin autem fuerit $\nu$ numerus par, aequationi $d^\nu s = -n s d v^\nu$ ifte valor $s = e^{gv}$ ob $g$ imaginarium fatisfacere nequit.

§. 59. Perfpicuum porro eft quibus cafibus aequationi $d^\nu s = \pm n s d v^\nu$ fatisfaciat valor $s = e^{gv}$, id quod euenit fi fiat $g^\nu = \pm n$, iisdem cafibus fatisfacere valorem $s = c e^{gv}$, quia conftans $c$ vtramque aequationis partem afficit. Quando autem ad hanc peruentum fuerit aequationem $s = c e^{gv}$, pro curua quaefita, aequationes $x = \int ds$ fin. A. $v$ et $y = \int ds$ cof. A. $v$ fuppeditabunt aequationem inter coordinatas orthogonales curuae quaefitae. Erit autem $x = cg \int e^{gv} dv$ fin. A $v = c e^{gv}$ fin. A $v - c \int e^{gv} dv$ cof. A. $v = c e^{gv}$ fin. A $v - \frac{c}{g} e^{gv}$ cof. A $v - (\frac{c}{g} \int e^{gv} dv$ fin. A. $v) - \frac{x}{gg}$; vnde fit $x = cge^{gv} \frac{(g \text{ fin. A} v - \text{cof. A} v)}{1 + gg}$. Cum vero fit $y = cg \int e^{gv} dv$ cof. A $v$ erit $y = cge^{gv}$ fin. A $v - gx$ feu $y = \frac{cge^{gv}(\text{fin. A} v + g \text{ cof. A} v)}{1 + gg}$, quae aequatio femper eft ad logarithmicam fpiralem.

§. 60. Secundum genus valorum ipfius $s$ qui fuis differentialibus cuiusque ordinis funt fimiles eft $s = \alpha$ fin. A. $bv +$

$bv + \beta \operatorname{cof.} A . bv$ : cuius differentialia ſequenti modo progredientur.

$$\frac{ds}{dv} = - \beta b \operatorname{fin.} A . bv + \alpha b \operatorname{cof.} A . bv$$
$$\frac{dds}{dv^2} = - \alpha b^2 \operatorname{fin.} A . bv - \beta b^2 \operatorname{cof.} A . bv$$
$$\frac{d^3 s}{dv^3} = + \beta b^3 \operatorname{fin.} A . bv - \alpha b^3 \operatorname{cof.} A . bv$$
$$\frac{d^4 s}{dv^4} = + \alpha b^4 \operatorname{fin.} A . bv + \beta b^4 \operatorname{cof.} A . bv \quad \text{etc.}$$

Differentialia igitur tantum ordinum parium ita ſunt comparata, vt per $s$ diuiſa quantitatem conſtantem producant. Aequationi ſcilicet $d^{2\nu} s = \pm n s d v^{2\nu}$ ſatisfaciet aequatio $s = \alpha \operatorname{fin.} A . bv + \beta \operatorname{cof.} A\, \overline{bv}$ ſumendo $(-b^2)^\nu = \pm n$.

§. 61. Tertium genus valorum ipſius $s$ ambo priora in ſe complectitur, atque ideo ſolum conſiderari meretur, cum per id omnibus omnino caſibus ſatisfieri queat. Formula autem generalis ita ſe habet $s = e^{gv} (\alpha \operatorname{fin.} A\, bv + \beta \operatorname{cof.} A . bv)$ differentialia vero ſequenti modo progrediuntur

$$\frac{ds}{dv} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} -\beta b \\ +\alpha g \end{array} \operatorname{fin.} A . bv \quad \begin{array}{l} +\alpha b \\ +\beta g \end{array} \operatorname{cof.} A . bv \right\}$$
$$\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha b^2 \\ -2\beta g b \\ +\alpha g^2 \end{array} \operatorname{fin.} A . bv \quad \begin{array}{l} -\beta b^2 \\ +2\alpha g b \\ +\beta g^2 \end{array} \operatorname{cof.} A . bv \right\}$$
$$\frac{d^3 s}{dv^3} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} +\beta b^3 \\ -3\alpha g b^2 \\ -3\beta g^2 b \\ +\alpha g^3 \end{array} \operatorname{fin.} A . bv \quad \begin{array}{l} -\alpha b^3 \\ -3\beta g b^2 \\ +3\alpha g^2 b \\ +\beta g^3 \end{array} \operatorname{cof.} A . bv \right\}$$
$$\frac{d^4 s}{dv^4} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} +\alpha b^4 \\ +4\beta g b^2 \\ -6\alpha g^2 b^2 \\ -4\beta g^3 b \\ +\alpha g^4 \end{array} \operatorname{fin.} A . bv \quad \begin{array}{l} +\beta b^4 \\ -4\alpha g b^3 \\ -6\beta g^2 b^2 \\ +4\alpha g^3 b \\ +\beta g^4 \end{array} \operatorname{cof.} A . bv \right\}$$

etc.

Ex

Ex quibus formulis colligitur fore generaliter $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = e^{gv}$
$\left(\frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu + (g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}\,\alpha \sin. A. hv + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu - (g+h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}}\,\beta \sin. A. hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu + (g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}\,\beta \cos. A. hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu - (g-h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}}\,\alpha \cos. A. hv\right)$

§. 62. Ponamus esse debere $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = ms$ existente $m = \pm n$, ita vt $m$ quantitatem quamcunque siue affirmatiuam siue negatiuam significet: eritque comparatione instituta

$$m\alpha = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{2} + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{2}$$

$$\text{et } m\beta = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\beta-\alpha\sqrt{-1})}{2} + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\beta+\alpha\sqrt{-1})}{2};$$

ex quibus aequationibus eliminata $m$ conficitur haec aequatio

$$(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1} = (g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1}$$

cui quidem satisfacit expressio $\alpha^2+\beta^2 = 0$, at quia hinc ad imaginaria peruenitur, hic valor tanquam inutilis est reiiciendus. Quamobrem habebitur $(g+h\sqrt{-1})^\nu = (g-h\sqrt{-1})^\nu$, quae euoluta abit in hanc $\nu g^{\nu-1} h - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3.} g^{\nu-3} h^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} g^{\nu-5} h^5 - \text{etc.} = 0$ ex qua aequatione $g$ per $h$ definiri oportet.

§. 63. Ex inspectione harum formularum mox intelligitur eas diuisionem arcuum circularium inuoluere. Quodsi scilicet sumatur arcus quispiam $w$ in circulo, cuius radius $= 1$, ponaturque $g = f \cos. A. w$ et $h = f \sin. A.$

$w$,

$w$, debebit $w$ eiusmodi eſſe arcus, vt ſit ſin A. $\nu w = o$. Sumtis autem huius modi arcubus pro $w$, reperietur valor litterae $m = f^{\nu}$ coſ. A. $\nu w$. Hanc ob rem pro $\nu w$ ſucceſſiue ſubſtitui debebunt arcus $0°$, $180°$, $360°$, $540°$, etc. pro ſingulisque valores cum arcuum $w$ tum litterarum $g$ et $h$ definiri; quo facto obtinebitur valor ipſius $m$, qui ſemper erit vel $+ f^{\nu}$ vel $- f^{\nu}$. Litterae autem $\alpha$ et $\beta$ omnino manent indeterminatae, indeque ſolutiones latius patentes colligentur:

§. 64. Quoniam pro $\alpha$ et $\beta$ quantitates quaecunque accipi poſſunt, ſumatur $\alpha = c$ coſ. A. $\zeta$; et $\beta = c$ ſin. A. $\zeta$ erit $s = c\, e^{gv}$ ſin. A $(hv + \zeta)$: in qua aequatione litterae $g$ et $h$ ex valoribus $n$ et $\nu$ determinantur. Cum autem haec determinatio pendeat ab reſolutione aequationis $\nu$ dimenſionum, in qua omnes radices ſint reales, manifeſtum eſt totidem valores pro $s$ inventum iri: At ſi aequationem $d^{\nu} s = \pm n s d v^{\nu}$ inſpiciamus, facile intelligimus, ſi ſatisfaciant valores $s = P$, $s = Q$, $s = R$; etc. ſingulatim exiſtentibus P, Q et R functionibus ipſius $v$, tum etiam ſatisfacere aequationem ex his coniunctam $s = \alpha P + \beta Q + \gamma R$; haecque aequatio integralis aeque late patebit ac differentialis propoſita, ſi pro P, Q, R. omnes particulares ipſius $s$ valores accipiantur.

§. 65. Percurramus igitur ordine ſingulos ipſius $\nu$ valores, et pro angulo 180 graduum ponamus $\pi$, ita vt ſit $360° = 2\pi : 540° = 3\pi$ etc. Primum ergo ſit $\nu = 1$, ſeu ſatisfiat aequationi $ds = m s dv$ eritque $\nu w = w = o$; atque hinc $g = f$, et $h = o$ et $m = f$; ex quo aequationis huius

$$d\,s = f\,s\,d\,v$$

erit aequatio integralis haec:

$$s = C\,e^{fv}$$

Quodsi autem ponatur $\nu w = w = \pi$, fiet $g = -f$; $h = o$; et $m = -f$, vnde prodit huius aequationis $d\,s = -f\,s\,d\,v$ integralis haec $s = C\,e^{-fv}$ quae quidem in praecedente iam continetur facto $f$ negatiuo. Quare aequatio $s = C\,e^{\pm fv}$ omnes praebet curuas, quae similes sunt suis euolutis primis, quas iam ostendimus esse logarithmicas spirales.

§. 66. Sit porro $\nu = 2$, seu integretur aequatio $dds = msdv^2$: atque primo ponatur $\nu w = 2w = 0$, erit $w = 0$, et $g = f$, ac $h = 0$, atque $m = ff$, vnde huius aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Secundo sit $\nu w = 2w = \pi$, erit $w = \frac{1}{2}\pi = 90°$; atque $g = 0$; $h = f$; et $m = -ff$: vnde aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C$ fin. A $(fv + \zeta)$. Tertio sit $\nu w = 2w = 2\pi$ seu $w = \pi = 180°$; erit $g = -f$; $h = 0$; et $m = ff$; vnde aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis est $s = Ce^{-fv}$. Quarto sit $\nu w = 2w = 3\pi$ seu $w = \frac{3}{2}\pi$; erit $g = 0$; $h = -f$; et $m = -ff$, ex quo aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C$ fin. A $(\zeta - fv) = C$ fin. A $(fv - \zeta)$ quae quidem aequatio cum superiori casu secundo inuenta congruit, vtraque enim continetur in forma $\alpha$ fin. A. $fv$ + $\mathfrak{C}$ cof. A. $fv$.

§. 67. Hinc itaque vtriusque aequationis differentialis secundi gradus $dds = ffsdv^2$ et $dds = -ffsdv^2$ completa nanciscimur integralia, atque adeo curuas obtinemus omnes, quae sint suis euolutis secundis similes. Scilicet cum pro casu priore duplex inuenta sit aequatio integralis,

ambo

ambo ipsius $s$ valores per constantes quantitates multiplicati et inuicem coniuncti dabunt completum integrale. Sic aequationis huius:

$$dds = + ffsdv^2$$

integrale erit completum:

$$s = Ce^{fv} + De^{-fv}$$

At alterius aequationis

$$dds = - ffsdv^2$$

integrale completum erit hoc:

$$s = C \text{ sin. A.} fv + D \text{ cos. A.} fv$$

in vtroque enim integrali insunt duae nouae constantes C et D, quae ex duabus integrationibus sunt natae.

§. 68. Ponamus $\nu = 3$, ita vt integranda sit aequatio haec $d^3 s = msdv^3$; ac primo ponatur $3w = 0$ seu $w = 0$ erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f^3$ vnde aequationis $d^3 s = hs^3 dv^3$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Deinde sit $3w = \pi$ seu $w = \frac{1}{3}\pi = 60°$; erit $g = f$ cos A. $\frac{1}{3}\pi$ et $h = f$ sin. A. $\frac{1}{3}\pi$ atque $m = -f^3$, vnde aequationis $d^3 s = -f^3 s dv^3$ integralis erit $s = e^{fv \cos. A. \frac{1}{3}\pi} (\alpha \text{ sin. A.} fv \text{ sin. A.} \frac{1}{3}\pi + \mathfrak{E} \text{ cos. A.} fv \text{ sin. A.} \frac{1}{3}\pi)$. Tertio sit $3w = 2\pi$ seu $w = \frac{2}{3}\pi = 120°$, erit $g = f \text{ cos. A.} \frac{2}{3}\pi$, $h = f \text{ sin. A.} \frac{2}{3}\pi$, et $m = f^3$, vnde aequationis $d^3 s = f^3 s dv^3$ integrale erit $s = e^{fv \cos. A. \frac{2}{3}\pi}$ $\alpha \text{ sin. A.} fv \text{ sin. A} \frac{2}{3}\pi + \mathfrak{E} \text{ cos. A.} fv \text{ sin. A.} \frac{2}{3}\pi)$. Ex quibus huius aequationis

$$d^3 s = + f^3 s dv^3$$

prodit integrale completum.

$$s = Ce^{fv} + e^{fv \cos. A. \frac{2}{3}\pi} (D \text{ sin. } A. fv \text{ sin. A} \tfrac{2}{3}\pi + E \text{ cos. A.} fv \text{ sin. A} \tfrac{2}{3}\pi)$$

Alterius vero aequationis differentialis

$d^3 s = -f^3 s dv^3$
integrale completum erit hoc

$$s = Ce^{-fv} + e^{fv \cos. A \frac{1}{3}\pi} (D \sin. A.\, fv \sin. A \tfrac{1}{3}\pi + E \cos. A.\, fv \sin. A \tfrac{1}{3}\pi$$

vbi notandum est esse fin. $A \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; fin. $A \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cof. $A \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ et cof. $A. \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

§. 69. Ponamus nunc $\nu = 4$ seu hanc contemplemur aequationem $d^4 s = msdv^4$, ac primo sit $4w = 0$, erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f4$ vnde fit $s = Ce^{fv}$. Deinde sit $4w = \pi$ seu $w = \frac{1}{4}\pi$ erit $g = f$ cof. A. $\frac{1}{4}\pi$ et $h = f$ fin. A. $\frac{1}{4}\pi$, atque $m = -f^4$ vnde fit $s = Ce^{fv \cos. A \frac{1}{4}\pi}$ fin. A $(fv$ fin. A. $\frac{1}{4}\pi + \zeta)$ hanc enim formam praestat adhibere quam alteram, in qua insuper cosinus arcus $hv$ occurit. Tertio si ponatur $4w = 2\pi$ seu $w = \frac{2}{4}\pi$ erit $g = f$ cof. A $\frac{2}{4}\pi = 0$; $h = f$ fin. A $\frac{2}{4}\pi = f$ et $m = f^4$, vnde fit

$s = Ce^{fv \cos. A \frac{2}{4}\pi}$ fin. A $(fv$ fin. A $\frac{2}{4}\pi + \zeta)$. Quarto si ponatur $4w = 3\pi$ seu $w = \frac{3}{4}\pi$, fit iterum

$m = -f^4$ et $s = Ce^{fv \cos. A \frac{3}{4}\pi}$ fin. A $(fv$ fin. A. $\frac{3}{4}\pi + \zeta)$.
Ex his igitur colligitur huius aequationis $d^4 s = -f^4 s dv^4$ integrale completum hoc:

$$s = Ce^{fv} + De^{fv \cos. A \frac{2}{4}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{2}{4}\pi + \delta) + Ee^{-fv}$$

Alterius vero aequationis huius $d^4 s = -f^4 s dv^4$ integrale completum erit hoc:

$$s = Ce^{fv \cos. A \frac{1}{4}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{1}{4}\pi + \gamma) +$$
$$De^{fv \cos. A \frac{3}{4}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{3}{4}\pi + \delta).$$

§. 70. Non opus est, vt haec vlterius prosequamur, cum tam ex his formis quam methodo ipsa iam pateat lex progressionis. Habebimus igitur generaliter huius aequatioquationis differentialis $d^{\nu} s = + f^{\nu} s\, d v^{\nu}$ istam aequationem integralem completam

$$s = C e^{fv} + D e^{fv \cos . A \frac{2}{\nu} \pi} (\sin . A (f v \sin . A \tfrac{2}{\nu} \pi + \delta) + E e^{fv \cos . A \frac{4}{\nu} \pi} \sin . A (f v \sin . A \tfrac{4}{\nu} \pi + \varepsilon) + F e^{fv \cos . A \frac{6}{\nu} \pi} \sin . A (f v \sin . A \tfrac{6}{\nu} \pi + \zeta) + G e^{fv \cos . A \frac{8}{\nu} \pi} \sin . A (f v \sin . A \tfrac{8}{\nu} \pi + \eta)$$

etc. quos terminos quidem in infinitum continuare licet, at sufficit eousque continuasse, quoad terminus occurrat primo similis, id quod accidit sumendis terminis vel $\frac{\nu+2}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ prout $\nu$ fuerit numerus vel par vel impar.

§. 71. Simili modo integrale alterius aequationis differentialis indefiniti gradus erit comparatum

$$d^{\nu} s = - f^{\nu} s\, d v^{\nu}$$

huius scilicet aequationis integrale completum erit

$$s = C e^{fv \cos . A \frac{1}{\nu} \pi} \sin A (f v \sin . A \tfrac{1}{\nu} \pi + \gamma) + D e^{fv \cos . A \frac{3}{\nu} \pi} \sin . A (f v \sin . A \tfrac{3}{\nu} \pi + \delta) + E e^{fv \cos . A \frac{5}{\nu} \pi} \sin A (f v \sin . A \tfrac{5}{\nu} \pi + \varepsilon)$$

$+$ etc. quam itidem non opus est in infinitum producere, cum sumtis vel $\frac{\nu}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ terminis iidem termini recurrant, sequentesque iam in praecedentibus contineantur. Completum autem integrale vtriusque aequationis differentialis propositae cognoscetur, si tot quantitates constantes C, D, E etc. $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ etc. iam fuerint ingressae, quod $\nu$ continet vnitates. Deinde etiam iusto plures termini non accipientur, si $\pi$ nusquam per fractionem vnitate maiorem multiplicetur.

§. 72. In vtraque igitur expressione integrali alii termini non continentur nisi huius formae

$$B e^{fv \cos . A \frac{\mu}{\nu} \pi} \sin . A (f v \sin . A \tfrac{\mu}{\nu} \pi + \mathfrak{E})$$



Neque

Neque vero tantum arcus curuarum quaesitarum $s$ per huiusmodi formulas ipsius $v$ exprimuntur, sed etiam abscissae et applicatae $x$ et $y$. Cum enim sit $x = \int ds\, \sin. A . v$ et $y = \int ds \cos. A . v$; si pro $s$ expressiones inuentae substituantur, hae formulae actu integrari poterunt. Namque formula generali assumta erit $ds = Be^{fv \cos. A \frac{\mu}{\nu}\pi} dv (f \cos. A \frac{\mu}{\nu}\pi . \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta) + f \sin. A \frac{\mu}{\nu}\pi . \cos. A (fv \sin. A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta))$, quae expressio, si pro B et $\beta$ substituantur successiue litterae C, D, E etc. et $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc. itemque pro $\mu$ numeri vel 0, 2, 4, 6, etc. vel 1, 3, 5, 7, etc. prout vel prioris vel posterioris aequationis differentialis integrale desideratur, verum elementi $ds$ valorem exhibet.

§. 73. Multiplicetur igitur istud differentiale $ds$ primum per $\sin. Av$, vt prodeat elementum $dx$, reperieturque integrando $x = Be^{fv \cos. A \frac{\mu}{\nu}\pi}$

$$\frac{(f^4 \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta) \sin. Av - f^3 \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta - \frac{\mu}{\nu}\pi) \cos. Av - f \sin. A (fv \sin A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{\mu}{\nu}\pi) \cos. Av + ff \sin. A (fv \sin A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{2\mu}{\nu}\pi) \sin. Av)}{f^4 + 2ff \cos. A \frac{2\mu}{\nu}\pi + 1}$$

Simili modo cum per quantitates exponentiales, tum per sinus cosinusque arcuum circularium applicata $y$ determinabitur idque per eandem variabilem $v$ quae curuae amplitudinem designat, est enim $v = \int \frac{ds}{r}$. Ex quo intelligitur omnes omnino curuas, quae quampiam evolutam sui habeant similem concessis circuli et hyperbolae quadraturis construi posse.

§. 74.

§. 74. His ergo expositis problema initio propositum sensu latissimo acceptum poterimus resoluere, et omnes curvas assignare quae similes sint suis euolutis cuiuscunque gradus. Hocque ipso limites analyseos non parum amplificasse iure mihi videor, cum aequationes differentiales altiorum graduum, ad quas peruenitur, non solum commode tractare sed etiam integrare docuerim. Hac scilicet methodo non solum aequationum $d^\nu s = \pm f^\nu s dv^\nu$ integratio est in potestate, verum etiam earum aequationum, ex quibus hae sunt ortae, quae sunt $\pm ns = r$; $\pm ns = \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$ etc. in infinitum. Quin etiam constructio omnium earum aequationum, quae ex his oriuntur quibuscunque adhibitis substitutionibus consequitur, quae aliis viis omnino frustra tentantur, cuiusmodi aequationes iam nonnullas elicuimus.

§. 75. Quodsi ergo quaeratur curua, quae suae euolutae ordinis cuiuscunque $\nu$ sit similis, eiusque curuae arcus ponatur $= s$, radius osculi $r$, atque elementum amplitudinis $\frac{ds}{r} = dv$, obtinebitur posito $dv$ constante pro curua quaesita vel haec aequatio $d^\nu s = + f^\nu s dv^\nu$ vel haec $d^\nu s = - f^\nu s dv^\nu$ quarum vtraque ita integrari potest, vt valor ipsius $s$ per $v$ definiatur, vti ex praecedentibus apparet. Inuenta autem hac aequatione integrali, innotescit mox radius osculi $r$, qui est $= \frac{ds}{dv}$; ac praeterea relatio inter coordinatas orthogonales poterit definiri; positis enim abscissa $= x$ et applicata $= y$ erit $x = \int ds \sin. v$, et $y = \int ds \cos. v$ quae ambae integrationes adeo actu perfici possunt.

§. 76.

§. 76. Vt igitur natura harum curuarum facile in conſpectum cadat, ſingula problemata breuiter repetere atque aequationes integrales inter $s$ et $v$ exhibere eſt viſum. Hic autem tantum ſimilitudinem directam conſideramus, quoniam ſimilitudo inuerſa ad directam reducitur, vt iam ſupra notauimus. Singula vero haec problemata, quibus curuae deſiderantur, quae ſuis euolutis dati ordinis ſint ſimiles, duplicem admittunt ſolutionem ob aequationem ambiguam $d^{\nu} s = \pm f^{\nu} s dv^{\nu}$. Quanquam enim haec ambiguitas, ſi $\nu$ eſt numerus impar, nullum diſcrimen infert, tamen ſi $\nu$ eſt par, ambo caſus a ſe inuicem maxime ſunt diuerſi, quocirca pro ſingulis problematis vtrumque caſum ſeorſim euoluemus.

## Problema I.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis primis.

Solutio I. $ds = + fsdv$

et integrando

$$s = C e^{fv}$$

Solutio 2. $ds = - fsdv$

et integrando

$$s = C e^{-fv}$$

## Problema II.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis.

Solutio I. $d^2 s = + f^2 s dv^2$

et integrando

$$s = C e^{fv} + D e^{-fv}$$

Solutio

Solutio 2. $d^2 s = -f^2 s\, dv^2$
et integrando
$$s = C \text{ fin. } A\ (fv + \gamma)$$

# Problema III.

Inuenire curuas, quae fimiles fint fuis euolutis tertiis.

Solutio 1. $d^3 s = + f^3 s\, dv^3$
et integrando
$$s = Ce^{fv} + De^{-\frac{1}{2}fv} \text{ fin. } A\ \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta\right)$$

Solutio 2. $d^3 s = -f^3 s\, dv^3$
et integrando
$$s = Ce^{\frac{fv}{2}} \text{ fin } A\ \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \gamma\right) + De^{-fv}$$

# Problema IV.

Inuenire curuas, quae fimiles fint fuis euolutis quartis.

Solutio 1. $d^4 s = + f^4 s\, dv^4$
et integrando
$$s = Ce^{fv} + D \text{ fin } A\ (fv + \delta) + Ee^{-fv}$$

Solutio 2. $d^4 s = -f^4 s\, dv^4$
et integrando
$$s = Ce^{\frac{fv}{\sqrt{2}}} \text{ fin } A\ \left(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \gamma\right) + De^{\frac{-fv}{\sqrt{2}}} \text{ fin. } A\ \left(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \delta\right)$$

# Problema V.

Inuenire curuas, quae fimiles fint fuis euolutis quintis.

 Solutio

Solutio 1. $d^5 s = + f^5 s dv^5$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv(\sqrt{5}-1)}{4}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) + Ee^{\frac{-fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \varepsilon\right)$$

Solutio 2. $d^5 s = - f^5 s dv^5$

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \gamma\right) + De^{\frac{-fv(\sqrt{5}-1)}{4}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) + Ee^{-fv}$$

## Problema VI.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſextis.

Solutio 1. $d^6 s = + f^6 s dv^6$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv}{2}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta\right) + Ee^{\frac{-fv}{2}} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \varepsilon\right) + Fe^{-fv}$$

Solutio 2. $d^6 s = - f^6 s dv^6$

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv\sqrt{3}}{2}} \sin. A \left(\frac{fv}{2} + \gamma\right) + D \sin. A (fv + \delta) + Ee^{\frac{-fv\sqrt{3}}{2}} \sin. A \left(\frac{fv}{2} + \varepsilon\right)$$

§. 77. Conceſſa igitur peripheriae circuli ſectione in partes aequales, problemata huius generis, quousque lubuerit continuari, atque facili negotio reſolui poſſunt. Ita ad curuas

curuas definiendas, quae ſuis euolutis ſeptimis ſint ſimiles, noſſe oportet ſinus et coſinus partium ſeptimarum peripheriae circuli ſeu partium $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, quorum determinatio a reſolutione aequationis cubicae pendet. Cum autem in hoc negotio aequationum algebraicarum cuiusuis gradus reſolutio merito poſtuletur, tota methodus, quam ad huiusmodi problemata reſoluenda exhibuimus, nulla amplius laborat difficultate; neque aequationes differentiales cuiuscunque gradus moleſtiam afferent, ſed omnes aequali fere opera tractabuntur et conſtruentur.

§. 78. Quanquam autem per hanc methodum eae tantum curuae determinantur, quae cuipiam ex ſuis euolutis directe ſint ſimiles, tamen per eandem viam eas curvas quoque aſſignare licet, quae ſuis euolutis dati ordinis inverſe ſint ſimiles. Quodſi enim curua requiratur, quae ſuae euolutae ordinis $\nu$ inuerſe ſit ſimilis, atque aequatio inter $s$ et $v$ eo, quo ſupra vſi ſumus modo eruatur, reperietur ea eſſe $d^{2\nu}s = -f^{2\nu}s\,dv^{2\nu}$. Ita curuae, quae ſuis euolutis primis inuerſe ſunt ſimiles, continentur in aequatione $dds = -f^2 s\,dv^2$, et curuas, quae ſuis euolutis ſecundis inverſe ſimiles ſunt, complectitur aequatio $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ et ita porro: quae aequationes omnes methodo tradita tractari et integrari poſſunt.

§. 79. Denique praeterire non poſſum, quin moneam methodum hanc multo latius patere, quam ad eas tantum aequationes differentiales altiorum graduum, quae ſe in hoc negotio obtulerunt integrandas. Maximum enim eadem methodus praeſtat vſum in integratione infinitarum aliarum aequationum differentialium altiorum graduum; quae



aliis

aliis viis fruſtra tractantur: cuiusmodi eſt aequatio haec $\alpha s = \frac{\beta ds}{dv} + \frac{\gamma dds}{dv^2} + \frac{\delta d^3 s}{dv^3} + \frac{\varepsilon d^4 s}{dv^4} +$ etc. poſito $dv$ conſtante. Quousque enim etiam haec aequatio fuerit continuata, eius integrale ſeu valor finitus ipſius $s$ per $v$ ſemper poteſt exhiberi. Sed quoniam in hac diſſertatione tantum problema propoſitum de euolutarum ſimilitudine euoluere conſtitui, pleniorem huius methodi vſum alia occaſione declarabo.

---

---