



EXAMEN ARTIFICII NAVIS
 A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI
 QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO
 VIRO IACOBO BERNOVLLI
 EST PROPOSITVM

AVCTORE
 L. EVLERO.

§. 1.

In operibus *Iacobi Bernoullii*, quae praeterito Anno Geneuae sunt edita, pag. 1109 reperitur insertum schediasma, cui hic titulus est praefixus: *Artificium impellendi nauem a principio motus intra ipsam nauem conclusō*; in quo Vir Celeberrimus ostendere conatur, etiamsi vulgo naues non nisi a viribus extrinsecus petitis propelli posse putentur, tamen fieri posse, vt nauis a sola vi interna ad motum incitetur. Quod artificium vt maxime paradoxon videtur, ita siquidem optatum effectum praestaret, plerisque aliis modis, quibus naues promoueri solent, merito longe esset praefendum. Cum igitur non constet, vtrum periculum vnquam sit factum atque experimentum ex voto successerit, operae pretium fore videtur, hunc mechanismum diligentius expendere atque ad leges motus examinare.

§. 2. Cum nauta stans in littore firmo nauem possit conto propellere, in ipsa autem naui constitutus idem praestare nequeat, propterea quod quantum nauem prorsum impellat, tantumdem eam pedibus carinae innixus retrorsum vrgeat; recte quidem concludi videtur, nauis non

non posse motum induci a vi, quae tota intra nauem existat. Quantumuis scilicet homines aliaeue machinae in nauis constitutae eandem propellere annuntur, tamen quia reactio actioni perpetuo est aequalis, et vtraque a nauis aequae sustinetur, nullum inde motum adipiscitur. Hinc omnes eorum, qui in nauis versantur, conatus ad nauem promouendam sunt irriti, nisi sese littori aliiue corpori extra nauem sito applicare queant.

§. 3. Hanc veritatem Bernoullius minime ignoravit, eam vero non ad omnis generis vires patere existimauit, sed putauit eam ad illas tantum vires, quae vulgo mortuae vocari solent, restringi oportere, quae solis pressionibus contineantur; alterum autem virium genus quae viuae appellentur atque a percussione oriantur, ab hac lege esse excipiendum. Hinc non dubitat, quin in nauis eiusmodi ictus et percussiones effici queant, a quarum impetu nauis motus inducatur. Quae opinio, si ad mentem plerorumque recentiorum philosophorum, qui inter vires viuas et mortuas summum discrimen statuunt, explicetur, firmissimo fundamento inniti videatur; cum autem ostendissem hoc discrimen omni fundamento carere, nihilque per vires viuas effici posse, quod non idem viribus mortuis praestari queat, maxime erit verendum, ne omnis motus, quem Bernoullius ope percussionum nauibus imprimere conatur, euanescat.

§. 4. Machina autem, quam Iac. Bernoulli in hunc finem proposuit, ita se habet: in nauis DEFG constitui iubet tabulatum firmum AF in situ ad horizontem perpendiculari, quod sit perfecte elasticum puta chalybeum aut reticulatum, eo saltem in loco C vbi ictus recipit.

Tab. IV.
fig. I.

recipit. Huic tabulato in A appensum fit pendulum AB cum annexo pondere B itidem perfecte elastico, quod, dum per quadrantem BC descendit impellet tabulatum, et simul totum nauigium proram G versus promouebit. Post ictum autem ob elasticitatem resiliet, iterumque descendendo similes ictus continuo repetet; ficque naui motum perennem inducet. Ne autem iste penduli motus ob resistentiam aeris sensim languescat, sed pendulum constanter ad quadrantis initium B ascendendo pertingat, hoc ope automati, quemadmodum in horologiis pendulis fieri solet, obtineri posse indicat.

§. 5. Si ad hos ictus succesiuos, quibus tabulatum A F continuo percutitur, solum respiciamus; dubium prorsus est nullum, quin iis naus ad motum incitetur, molesque penduli facile eousque augeri posset, vt naus superata aquae resistentia, quantumuis magnam consequatur celeritatem. Verum hic quoque animaduertendum est pendulum, dum alternatim ascendit et descendit vim contrariam in nauem exerere, qua ea puppim D versus sollicitetur. Quoniam enim pendulum in quouis situ AM tam a pondere, quam a vi centrifuga tenditur, hanc vim punctum suspensionis A sustinet, ab eaque secundum directionem AM trahitur, quae vis cum perpetuo retrorsum dirigatur, naus ab ea retrorsum impelletur. Hinc impulsio naus proram G versus efficietur tantum excessu, quo vires percussiois superant has continuas sollicitationes retro directas, siquidem huiusmodi excessus detur.

§. 6. Hic quidem maxima philosophorum pars, qui Leibizii ideas de viribus fortasse male expositas sequuntur, viresque viuas mortuis quasi infinites maiores putant, asseuerare non dubitabunt, quin nauis hoc modo notabilem motum sit impetratura, neque admodum necessarium putabunt, vt virium illarum nauem retro pellentium ratio habeatur, cum vis percussionis nauem propellens ipsis incomparabiliter maior videatur. Interim tamen Vir sagacissimus Iacobus Bernoullius longe aliter existimauit; atque effectum ab istis viribus mortuis oriundum studiose inuestigauit, eumque ab effectu, quem quilibet ictus producit, subduxit, vt veram nauis propulsionem adipisceretur. Inuenit autem calculo subducto, vires percussionum aliquantum praeualere viribus pendulum continuo tendentibus, hincque demum conclusit, nauem ope huiusmodi penduli propelli debere.

§. 7. Quamquam autem vim, qua nauis a penduli percussionibus propellitur, non multo maiorem apprehendit altera vi a tensionibus orta, tamen nauis ab ea non mediocrem motum imprimi existimat, vt etiam aequae resistentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere posset. Euoluto enim casu, quo penduli pondus centesimae totius nauis parti aequale assumitur, collegit nauem singulis minutis primis per spatium $82\frac{1}{2}$ pedum propelli debere, vbi quidem diminutionis resistentiae ab idonea prorae figura oriundae nullam habuit rationem. Accommodato autem hoc casu ad nauem rostratam, cuius resistentiam decuplo minorem assumit, celeritatem ipsi impressam ultra 260 pe-

des singulis minutis primis, 15649 pedes vna hora confecturam esse contendit, quae celeritas certe tanta est, vt consueta remigatione vix maior obtineri possit.

§. 8. Quod si ergo iste naues propellendi modus tantum valeret, dubium certe esset nullum, quin is non solum remigationi longe esset anteferendus, sed etiam saepe maximo cum fructu loco venti adhiberi posset. Cum enim pro ratione molis naus satis magna vis ad remos vibrandos requiratur, ita in praesente mechanismo nulla fere vi est opus. Postquam enim pendulum semel ad situm summum est eleuatum, post primum ictum sponte ad eandem fere altitudinem ascendit, ob maximam cum ipsius corporis tum tabulati elasticitatem; et, quantum ascensus in quaque vibratione tam a resistentia aeris, quam a defectu perfectae elasticitatis imminuitur, id ab exigua vi facile reparatur, ita vt continuus penduli motus vel a puero conseruari posset. Quin etiam loco vnus penduli, ne nimia eius massa impedimento esset, plura minora adhiberi possent, quae parem vel maiorem effectum praestarent; neque difficile foret modum excogitare, quo huiusmodi mechanismus sine villo nauigationis incommodo ad vsum accommodaretur.

§. 9. Verum haec utilitas in re nautica nimis est magna, quam ut eam tandiu latere potuisse verisimile sit, praesertim cum non admodum abscondito mechanismo contineatur, atque adeo ob ipsam commodorum magnitudinem merito in suspicionem incurrit. Neque etiam mediocriter haec suspicio augetur, quod descriptio huius artificii tantum in opusculis posthumis Iacobi Bernoulli
repe-

reperiatur, eoque viuente nunquam sit diuulgata. Minime autem probabile videtur, Virum beate defunctum tantum inuentum quod certe omnibus reliquis ipsius inuentis, etiamsi sint maxima, palmam longe praeriperet, celaturum fuisse, nisi de felici successu ipse dubitauisset. Quamobrem si demonstraero huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorsus motum imprimi, nihil quicquam de laude ac meritis summi huius Viri detrahetur, cum ipse quoad vixerit, probe cauerit, ne meditatio nondum satis polita in publicum protruderetur.

§. 10. Si igitur effectum huiusmodi penduli ictuum inuestigare velimus, primum dum pendulum per quadrantem BMC descendit, quantum naus ab eo retro vrgeatur, definire debemus, deinde ipse ictus erit considerandus, quo naus propellitur motumque qui naui proram versus inde imprimitur exacte determinari oportebit. Denique cum hic motus a sequente post reflexionem ascensu iterum retardetur, videntum erit, ytrum naus, postquam pendulum ad B vsque est reuersum motum habeat reliquum antrorsum directum, nec ne, et quantus is sit futurus. Quodsi enim naus, cum initio descensus quieuisset, post finitum ascensum iterum in statum quietis redigatur; sicque initio secundi, descensus denuo in quiete versetur, dubium erit nullum, quin naus perpetuo in eodem fere loco sit permansura, ita vt totus penduli effectus in alternis progressionibus et regressionibus, quae se mutuo exacte destruant, consumatur. Determinatio autem huius motus reciproci, si resistentiae aquae rationem habere voluerimus, maxime fieret difficilis, neque sine calculo molestissimo expediri posset.

§. 11.

§. 11. Hancobrem aliam viam faciliorem inire studebo qua effectus a successibus huius modi penduli percussionibus oriundus non minus distincte cognosci et diiudicari queat. Navim scilicet in loco suo penitus fixam contemplantur, atque sollicitationum momentanearum, quibus navis durante quovis penduli descensu et ascensu retro pellitur, summam inuestigabo, deinde simili ratione vim ictus, qua navis propelleretur, seorsim exprimam, ut hoc modo tam tota vis, qua navis a qualibet penduli actione retro impellitur, quam vis propellens innotescat. Absolvitur autem quaelibet penduli actio primum descensu, secundo ictu, ac tertio ascensu. Quodsi ergo summa virium pellentium ex descensu et subsequenti ascensu natarum aequalis fuerit vi ictus ad navem propellendam directae, tuto concludere poterimus, navim, etiamsi esset libera, nullum motum progressivum induci, sin autem vel vis percussiois vel summa virium retrahentium praevalcat, navim liberae quoque vel motus antrosum vel retrorsum imprimetur.

§. 12. Cum igitur navis quovis descensu penduli momento puppim versus sollicitetur, quaeratur huius vis magnitudo pro quovis penduli situ AM , eaque per elementum temporis multiplicetur. Haec expressio differentialis deinceps integretur, quae ad totum descensum adaptata praebebit summam omnium virium retrahentium, similique modo haec virium summa pro ascensu colligatur. Constat autem si navis actioni harum virium libere obsequi possit, tum ab iis ipsi motum inductum iri, cuius quantitas, seu productum ex massa in celeritatem
geni-

genitam illi ipsi integrali exacte futurum sit aequale. Deinde quaeratur quantitas motus quae naui, si libera esset, ab ictu penduli imprimeretur, haecque cum illa compareretur, vt pateat vtrum altera sit maior, an vtraque aequalis. Hocque modo tutissime concludere poterimus, vtrum nauis ab his viribus vllum consecutura sit motum, nec ne?

§. 13. Cum igitur in hac inuestigatione multum interfit, vtrum pendulum sit simplex an compositum; ponamus primo pendulum esse simplex, ita vt tota eius massa in ipsius centro grauitatis M collecta concipi queat. Describat itaque hoc pendulum in quolibet ascensu et descensu integrum quadrantem BMC. Sit longitudo penduli $AM = AC = a$, eius pondus $= M$: atque descendendo ex B elapso tempore t iam peruenerit in situm AM, in quo a recta verticali AC etiamnum distet angulo $CAM = \Phi$: erit celeritas eius in M debita altitudini $LM = a \cos. \Phi$: hincque ipsa celeritas $= \sqrt{a \cos. \Phi}$, qua cum tempusculo dt absoluat arculum $= -a d\Phi$ erit $dt = -\frac{a d\Phi}{\sqrt{a \cos. \Phi}}$. Hanc enim legem constanter obseruabo, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipsis debitis, et temporis elementa per spatiosa interea percursa ad celeritates applicata exprimam.

§. 14. Inuenta altitudine celeritati penduli in M debita $= a \cos. \Phi$, erit vis centrifuga $= \frac{2Ma \cos. \Phi}{a} = 2M \cos. \Phi$, qua filum AM tendetur. Deinde cum pendulum a grauitate $= M$ deorsum vrgeatur secundum directionem verticalem MP, haec vis secundum directiones MQ ad AM normalem, et MR resoluta dabit pro directione MQ vim $= M \sin. \Phi$, et pro directione MR vim $M \cos. \Phi$;

Tom I.

P

Φ ;

Φ ; quarum illa ita tota ad penduli motum accelerandum impenditur, ut filum AM prorsus non tendat. Contra vero altera vis $MR = M \cos. \Phi$ tota in filo AM tendendo infumetur. Hinc ergo et a vi centrifuga coniunctum filum AM tendetur vi $= 3M \cos. \Phi$, a qua punctum suspensionis A in directione AM sollicitabitur. Quare ex huius resolutione nascetur vis navem retro vrgens $= 3M \cos. \Phi \sin. \Phi$.

§. 15. Multiplicetur ergo haec vis $3M \cos. \Phi \sin. \Phi$, qua navis puppim versus impellitur, per elementum temporis $dt = \frac{-ad\Phi}{\sqrt{a \cos. \Phi}} = \frac{-d\Phi \sqrt{a \cos. \Phi}}{\cos. \Phi}$; ac prodibit sollicitatio momentanea $= -3M d\Phi \sin. \Phi \sqrt{a \cos. \Phi}$, cui elementum motus geniti est aequale. Quoniam ergo est $-d\Phi \sin. \Phi = d. \cos. \Phi$, si ponatur $\cos. \Phi = z$ erit sollicitatio momentanea $= 3M dz \sqrt{az}$ cuius integrale est $2Mz \sqrt{az} = 2M \cos. \Phi \sqrt{a \cos. \Phi}$. Haecque expressio praebet summam omnium sollicitationum, quibus navis retro vrgetur, dum pendulum per arcum BM descendit. Fiat ergo $\Phi = 0$, et prodibit summa sollicitationum momentaneorum ex descensu penduli integro ortarum $= 2M \sqrt{a}$, cui cum aequalis sit summa similium sollicitationum ex subsequente ascensu resultans, in qualibet penduli actione navis retro impelletur a viribus, quarum summa est $= 4M \sqrt{a}$; ab hisque navis, si libera esset motus imprimetur, cuius quantitas futura esset $= 4M \sqrt{a}$.

Fig. 3.

§. 16. Quaeramus nunc etiam quantam vim pendulum exerat in navem, dum in tabulatum elasticum AF impingit; ubi quidem tabulatum tanquam immobile spectabimus. Incurrit autem in hoc tabulatum corpus penduli, cuius massa seu pondus est $= M$, cum celeritate

AI

tate
dela
tuer
stru
gitu
iam
gerit
Pon
debi
con:spat
M
ipfa
vale
mus
in
M
debi
V
finit
qua
Gar
to
ortimp
di,
et
gen

tate debita altitudini a , quippe ex qua in descensu est delapsum. Quo autem effectum collisionis distinctius in-
 tueri queamus, tabulato in C annexum statuamus ela-
 strum CD, in quod corpus incurrat, cuius quidem lon-
 gitudinem quantumvis exiguam concipere licet. Tempore
 iam $=t$, postquam collisionis initium in D erat factum, perti-
 gerit corpus in M, et elastrum in statum MC. compresserit.
 Ponatur spatium DM $=x$, celeritas corporis in M residua
 debita altitudini $=v$, et vis elastri CM, qua se expandere
 conatur $=P$.

§. 17. His positis, dum pendulum vltius per
 spatium $=dx$ penetrabit, erit per leges sollicitationum
 $M dv = -P dx$. Sed quoniam tabulatum AF indeque
 ipsa naus in hoc statu antrorsum impellitur vi $=P$,
 valorem $\int P dt$, quamdiu conflictus durat, scrutari debe-
 mus. Cum autem sit $dt = \frac{dx}{v}$; superior aequatio abibit
 in hanc $\frac{M dv}{v} = -P dt$, vnde fit $\int P dt = -\int \frac{M dv}{v} = C - 2$
 $M \sqrt{v}$: quae quantitas cum initio conflictus evanescere
 debeat, erit $C = 2 M \sqrt{a}$ ideoque $\int P dt = 2 M \sqrt{a} - 2 M$
 \sqrt{v} . Cum iam ambo corpora ponantur perfecte elastica,
 finito conflictu corpus habebit celeritatem aequalem illi,
 qua incurerat, et quae erat $=\sqrt{a}$, sed contrarie dire-
 ctam fietque propterea $v = -\sqrt{a}$. Quo valore substitu-
 to prodibit summa virium momentaneorum ex conflictu
 ortarum nauemque propellentium $= 4 M \sqrt{a}$.

§. 18. Motus ergo, quem percussio penduli nauis
 imprimere conatur proram versus praecise aequalis est il-
 li, quem vires pendulum tendentes, quamdiu descensus
 et ascensus vnus absoluitur, in contrariam directionem
 generare valent. Ex quo manifestum est, etiamsi na-

vis ab ictu penduli propulsionem proram versus accipiat, tamen hunc totum motum deinceps ab ascensu penduli subsequenteque descensu omnino sublaturum iri, quae destructio cum post singulos ictus eueniat, nauis nullum motum progressiuum consequi poterit, vti Celeb. Iacobus Bernoulli est suspicatus. Quamquam enim idem fere ratiocinium, quo hic usus sum instituit, viresque nauem retrahentes simili modo aestimauit, tamen in determinatione vis propellentis a percussione oriundae, errorem quendam commisit, quem Cl. Cramerus eius Commentator probe animaduertit, neque tamen ob calculi, qui ipsi subeundus videbatur, molestiam correxit.

§. 19. Neque vero haec perfecta virium propellentium et repellentium compensatio tantum locum habet, cum pendulum per integrum quadrantem mouetur; sed etiam si minores arcus oscillando absoluat, perinde obseruabitur, id quod ostendisse operae erit pretium. Descendat ergo pendulum ante consideratum simplex AM per arcum quadrante minorem HMC , sitque positus vt ante longitudine $AM = a$, et pondere corporis $M = M$, angulus $HAC = \theta$: et elapso tempore $= t$ descriperit arcum HM , sitque angulus $MAC = \Phi$; erit ductis horizontalibus HI et MK , altitudo $AI = a \cos. \theta$ et $AK = a \cos. \Phi$. Hinc ergo erit $IK = a(\cos. \Phi - \cos. \theta)$ quae est altitudo celeritati corporis in M debita: quare eius vis centrifuga erit $= 2M(\cos. \Phi - \cos. \theta)$, qua filum penduli AM tendetur. Cum autem tempusculo dt pendulum per arcum $= -ad\Phi$ descendat cum celeritate $= \sqrt{a(\cos. \Phi - \cos. \theta)}$, erit $dt = \frac{-d\Phi \sqrt{a}}{\sqrt{\cos. \Phi - \cos. \theta}}$.

§. 20. Consideretur nunc etiam vis grauitatis, qua pendulum in M secundum MP deorsum vrgetur vi = M; hinc per resolutionem nascetur vis pendulum tendens MR = M cos. Φ. Quamobrem filum AM omnino tendetur vi = 3 M cos. Φ - 2 M cos. θ; quae cum habeat directionem obliquam, pro directione horizontali dabit vim = 3 M cos. Φ sin. Φ - 2 M cos. θ sin. Φ. Haec ergo per elementum temporis $dt = \frac{-d\Phi\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos.\Phi - \cos.\theta)}}$ multiplicetur, vt procedat sollicitatio momentanea = $\frac{-M d\Phi \sin.\Phi (3 \cos.\Phi - 2 \cos.\theta)\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos.\Phi - \cos.\theta)}}$. Ponatur cos. Φ = z, et cos. θ = b erit -dΦ sin. Φ = dz, et sollicitatio momentanea erit = $\frac{+M dz (3z - 2b)\sqrt{a}}{\sqrt{(z - b)}}$; cuius integrale est = (+ 2 M z √ a (z - b)) = (+ 2 M cos. Φ √ a (cos. Φ - cos. θ)); quod quia initio vbi Φ = θ euanescere debet, erit C = 0, ita vt summa omnium virium momentanearum descensui per arcum HM respondentium sit = 2 M cos. Φ √ a (cos. Φ - cos. θ).

§. 21. Ponatur iam Φ = 0, ac pro toto penduli descensu erit summa sollicitationum momentanearum = 2 M √ a (1 - cos. θ) = 2 M √ CI; seu cum √ CI exprimat celeritatem penduli in imo puncto C, ista summa aequabitur duplae quantitati motus, quem pendulum in C acquirit. Cum iam ascensus similis sit descensui, summa virium nauem retro pellentium, quae tam ex ascensu quam descensu originem trahunt, erit = 4 M √ CI. Ex §. 17 autem obtinebimus vim, quae ex ictu resultat, si loco celeritatis ibi consideratae √ a substituamus hanc, qua pendulum in tabulatum incurret, quae est = √ CI. Quo facto reperietur quoque vis ex percussione orta = 4 M √ CI; atque adeo etiam hoc casu vires in descensu

et ascensu retro pellentes simul sumtae aequales erunt vi, qua naus ab ictu antrorsum propellitur. Neque ergo hoc quoque casu ab impulsione penduli naui motus progressus induci poterit.

§. 22. Quae haecenus de pendulis simplicibus sunt demonstrata, ita cum lege quadam constantissima naturae coniuncta videntur, ut iam pro certo affirmare possimus, in pendulis quoque quibusvis compositis eandem perfectam aequalitatem inter vires propellentes ac repellentes deprehensum iri. Quod etsi ex natura centri oscillationis facile ostendi posset, tamen ceteris naturae legibus tam videtur consentaneum, ut primis mechanicae principis merito sit annumerandum. Quemadmodum ergo in pressionibus, seu viribus mortuis actioni semper aequalis et contraria reactio, ita quoque in percussionebus similis aequalitas locum habet, quod eo minus est mirandum, cum quaelibet percussio ad pressionem reuocari queat. Plus itaque virium quilibet ictus praestare nequit, quam ad motum corporum collidentium generandum requiritur, atque hancobrem naues non solum hoc modo Bernoulliano propelli non possunt, sed quaecumque aliae machinationes, quae totae naui sunt inclusae nullique principio externo innituntur, aequae erunt inutilis, neque nauibus vllum motum imprimere valebunt.

§. 23. Stabilito igitur hoc principio vicissim eiusmodi problemata resolnere poterimus, quae alias soluta longe futura essent difficillima. Vti si pendulum superius praeterea fuerit flexile, atque non in circulo sed alia quacumque linea curua moueatur, praetereaue resistentia aliaque motus impedimenta affuerint, quae res calculum insuperabilem redderent; vel si alia quaecumque machina in naui

con-

constituatur, quae partim pressionibus partim percussionibus in nauim agat; nihilominus certissime affirmare poterimus, perfectam continuo existere aequalitatem inter vires nauem propellentes et eas, quae in regionem oppositam effectum exerant. Ac si vires quidem sint omnes prementes seu mortuae, istud aequilibrium quolibet instanti existit, sin autem machina insuper percussiones complectatur, tum quidem non quouis momento aequilibrium ceruetur, sed fieri potest vt nauis per aliquod temporis interuallum a viribus prementibus propellatur; qui autem effectus deinceps subito ab insequente percussione penitus destruat. Quamdiu scilicet ipsa machina in motu versatur, et extra aequilibrii statum est posita, nauis motus imprimetur, quam primum autem machina in pristinum statum restituitur, simul nauis in situm primum rediget.

§. 2. Ratio autem huius principii multo clarius perspicitur, si primum aquam omni resistentia carentem assumamus, ita vt nauis perpetuo motum impressum sine vilo impedimento profequi possit. In hac hypothesis, si super nauis huiusmodi pendulum aliaue quaecunque machina agitetur, quae nullum recipiat motus principium externum, ex legibus motus manifestum est commune grauitatis centrum ipsius nauis ac machinae quiescere debere; nisi quatenus verticaliter vel ascendit vel descendit. Haec enim lex non solum obseruatur, cum machina per pressionem in nauem agit, quo casu tam in nauem quam in machinam aequales vires exeruntur: sed etiam si ictus seu percussiones peraguntur, centri grauitatis status non secus perturbabitur. Quomocunque ergo machina intra nauem existens fuerit comparata, eiusque actio, tum ex
pressio.

pressionibus quam percussionibus composita, centrum commune grauitatis secundum horizontem nullum motum consequi poterit, neque idcirco vlla huiusmodi machina apta erit ad nauem promouendam.

§. 25. Quodsi vero resistentia aquae simul consideretur, tum lex ante memorata de centro grauitatis aliquantum infringitur, dum nauis a machina sollicitata tantum non cedit, quantum per illam legem cedere deberet, similique modo in collisionibus ob resistentiam aquae commune centrum grauitatis non perfecte quiescet. Difficillimo etiam calculo opus esset, si quis singulos hos effectus secundum praecepta mechanica euoluere vellet. Cum autem totus resistentiae effectus in motu minuendo consumatur, neque ab ea vllus motus produci possit: resistentia aquae certe in causa esse non poterit, vt navi motus imprimatur, cum eadem nauis resistentia sublata quiescere deberet. Vnde summo iure concludimus, quemadmodum nauis remota aquae resistentia a viribus internis nullum motum progressuum adipisci potest, ei multo minus, si resistentia aquae accedat, ab huiusmodi viribus vllum motum imprimi posse.

Fig. 1. §. 26. Quamquam hoc ratiocinium omni exceptione maius videtur, tamen dantur casus, quibus ob ipsam resistentiam motus producitur, cum nullus ea remota oriretur. Si enim nauis DEFG basi sua EF in plano aspero incumberet, super quo sine sensibili frictione promoueri nequeat, perspicuum est frictionem tantam esse posse, vt a viribus pendulum tendentibus superari nequeat, sicque ab iis navi nullus motus retrorsum imprimatur. Nihilo tamen minus ab ictu penduli contra tabel-

bellatum AF frictio vinci poterit, quo fiet vt nauis a singulis percussionibus penduli aliquantum prorsum protrudatur, quae promotio cum a viribus contrariis non destruat, nauis vtique promouebitur, qui effectus nullo modo obtineretur, si nulla frictio adesset. In quo memorabile paradoxon mechanicum continetur, quod ipsa frictio motus cuiuspiam causa esse queat, ita vt frictione sublata nullus plane motus sequeretur.

§. 27. Eo maior igitur hinc causa dubitandi suboritur, vtrum ob aquae resistentiam nauis ab huiusmodi penduli ictibus nullus motus induci queat, etiamsi certum sit, si resistentia abesset, ipsi hoc modo nullum motum imprimi posse. Quod dubium vt tollamus, consideremus nauem alternatim a duabus viribus; p et P sollicitari, a quarum altera p tempore $= t$ proram versus, ab altera autem P tempore $= T$ puppim versus vrgeatur, hae autem vires p et P ratione temporum t et T ita sint comparatae, vt sit $pt = PT$, quam aequalitatem determinatio virium tam propellentium quam repellentium ante instituta suppeditauit. Quamuis autem neque vis p neque P , quamdiu vtraque agit, inuenta sit constans, tamen commoditatis calculi gratia vtramque constantem sine errore assumere poterimus, cum leuis inaequalitas nullius motus causa esse queat, qui ex aequalitate non aequae sequeretur.

§. 28. Ponamus igitur vim p prius agere, qua nauis propellatur, atque initio nauem fuisse in A , vbi celeritatem habuerit proram versus $= Vb$, iamque confecisse spatium $AP = x$ atque in P celeritatem habere de-

bitam altitudini $=v$. Cum igitur resistentia sit vt quadratum celeritatis, ponatur ea $=\frac{v}{k}$; fietque $dv = p dx - \frac{v dx}{k}$. Ponatur tempus quo ex A in P peruenierit $=t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ et $dx = dt \sqrt{v}$ quo valore loco dx substituto habebimus $k dv = (kp - v) dt \sqrt{v}$. Sit $\sqrt{b} = c$ et $\sqrt{v} = u$, vt irrationalitas tollatur, erit $2kdu = (kp - uu) dt$. Quia igitur si $t = 0$ fit $u = c$, integrale huius aequationis etiam si per logarithmos exhiberi posset, tamen expediet per seriem sequenti modo exprimere:

$$u = c + At + Btt + Ct^3 + Dt^4 + \text{etc.}$$

ex qua fit:

$$\frac{2kdu}{dt} = 2Ak + 4Bkt + 6Ckt^2 + 4Dkt^3 + \text{etc.}$$

$$kp - uu = kp - 2Act - 2Bctt - 2Cct^3 - cc - AA tt - 2ABt^3 \text{ etc.}$$

Coaequatio coefficientium igitur dabit:

$$A = \frac{1}{2}p - \frac{cc}{2k}, \quad B = \frac{-cp}{4k} + \frac{c^3}{4k^2}:$$

$$6Ck = \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{2kk} - \frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{4kk} = -\frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{k} - \frac{3c^4}{4kk}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{-pp}{24k} + \frac{ccp}{6kk} - \frac{c^4}{8k^3}$$

$$8Dk = \frac{cpp}{12k} - \frac{c^3p}{3kk} + \frac{c^5}{4k^3} + \frac{cpp}{4k} - \frac{c^3p}{2kk} + \frac{c^5}{4k^3}$$

$$\text{seu } D = \frac{cpp}{24kk} - \frac{5c^3p}{48k^3} + \frac{c^5}{16k^4} \text{ etc.}$$

Ex his ergo oritur celeritas navis quaesita finito tempore t :

$$u = c + \frac{1}{2}t \left(p - \frac{cc}{k} \right) - \frac{ctt}{4k} \left(p - \frac{cc}{k} \right) - \frac{t^3}{24k} \left(pp - \frac{4ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk} \right) + \frac{ct^4}{48kk} \left(2pp - \frac{5ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk} \right) + \text{etc.}$$

§. 29. Simili modo si finito hoc tempore t celeritas navis antrorsum ponatur $=C$ vt fit $C = u$, tumque vis P nauem retrahat tempore T , si elapso hoc tempore T celeritas navis residua ponatur $=U$, reperietur

U

$$U = C - \frac{1}{2} T \left(P + \frac{CC}{k} + \frac{CTT}{4k} \left(P + \frac{CC}{k} \right) - \frac{T^2}{24k} \right. \\ \left. \left(PP + \frac{4CCP}{k} + \frac{3C^2}{kk} + \frac{CT^2}{4kk} \left(2PP + \frac{5CCP}{k} + \frac{3C^2}{kk} \right) - \text{etc.} \right)$$

Quia vero est $pt = PT$ ponamus $pt = PT = Q$ erit $p = \frac{Q}{t}$ et $P = \frac{Q}{1}$, quibus valoribus loco p et P substitutis, erit

$$u = c + \frac{1}{2} Q - \frac{cct}{4k} - \frac{cQt}{4k} - \frac{QQt}{24k} + \frac{c^2tt}{4kk} + \frac{ccQtt}{6kk} + \frac{cQQt}{24kk} - \text{etc.}$$

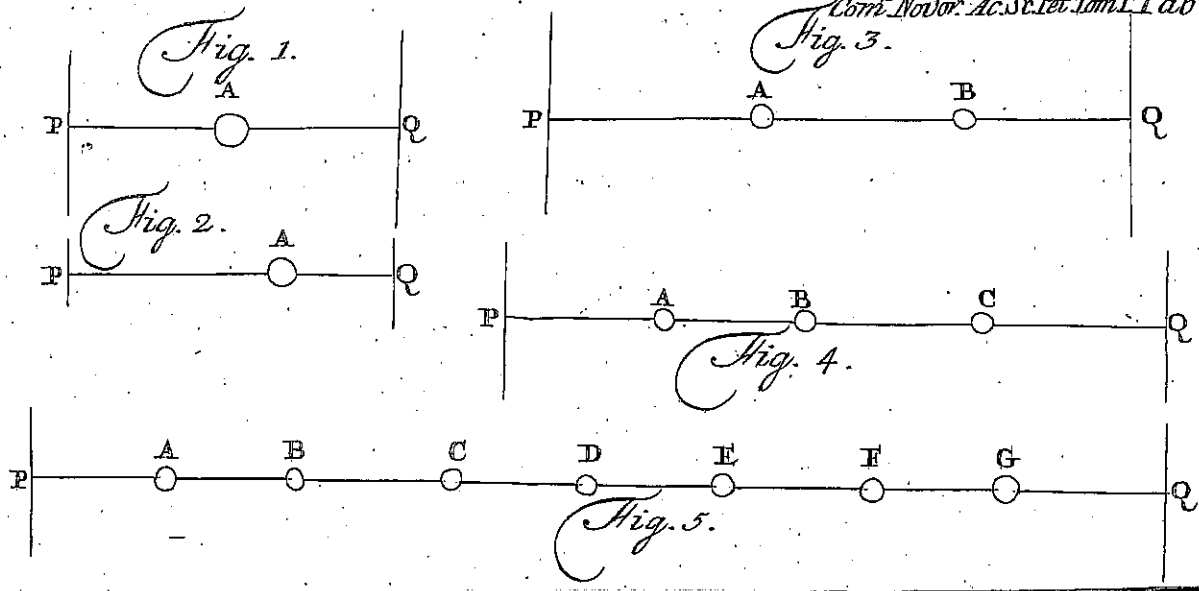
$$U = C - \frac{1}{2} Q - \frac{CCt}{2k} + \frac{CQT}{4k} - \frac{QQT}{24k} + \frac{C^2tt}{4kk} - \frac{CCQtt}{6kk} + \frac{CQQt}{24kk} - \text{etc.}$$

Cum autem tempus percussionis t fit quasi infinite parvum posito $t = 0$, erit $u = c + \frac{1}{2} Q = C$, vnde ab subsequente penduli actione ab eius tensione oriunda fiet:

$$U = c - \frac{T}{24k} (12cc + 6cQ + QQ) - \text{etc.}$$

vbi reliquos terminos negligimus, quia prae his duobus sunt valde parui.

§. 30. Hinc ergo manifestum est fore $U < c$, ideoque celeritatem navis a quavis penduli actione, quae primum ex ictu tum vero ex tensione penduli componitur, diminui debere. Etiam si ergo navis iam habeat celeritatem quamquam antrorsum directam, eam tamen ab actione penduli mox amittet, vnde multo minus cum quieverit, a pendulo vllum motum adipisci poterit. Quod si vero obiiciatur nauem forte a pendulo retrorsum repelli permutandis velocitatibus u et U , simili modo ostendetur, celeritatem quoque retrorsum directam, si quam navis habuerit, ab actione penduli continuo imminui debere, atque adeo nullo modo naui ab huiusmodi pendulo imprimi posse.



Tab. IV.

