DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATIONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quanquam luna inter omnia corpora coelestia nobis est proxima, eiusque adeo distantia a terra ope parallaxeos satis notabilis quouis tempore sine sensibili errore assignari potest, quo subsidio astronomia ratione solis ac planetarum, imprimis vero ratione stellarum fixarum etiamnunc caret: tamen motus lunae tantopere est implicatus, totque perturbationibus obnoxius, vt nullo adhuc modo certis legibus circumscribi, atque ope tabularum exacte definiri potuerit. Cum enim quilibet planeta primarius in eodem plano motum suum absoluat, atque per perimetrum ellipsis secundum leges a Keplero obseruatas circa solem circumferatur, ex loco medio ope vnicae aequationis ab excentricitate orbitae pendentis, eius locus verus ad quoduis tempus definiri potest. Luna vero ab ista motus vniformitate maxime recedit: primum enim motum suum non in eadem planitie perficit, et, si quouis tempore planum per centrum terrae ductum concipiatur, in quo via a luna descripta sit sita, non solum intersectio huius plani cum ecliptica, quae linea nodorum appellari solet, continuo mutatur, atque modo antrorsum modo retrorsum procedit, sed etiam ipsa Tab. XVI.

Ccc 2 istius

iſtius plani inclinatio ad eclipticam eſt variabilis, alioque tempore maior alio minor obſeruatur. Tum vero luna in iſta mutabili ſemita neque motu vniformi progreditur, neque eandem a centro terrae ſeruat diſtantiam, quae quidem inaequalitas quoque in planetas primarios cadit; verum cum in planetarum orbitis ea puncta, in quibus ſoli ſunt vel proximi, vel ab eo maxime remoti, conſtanter in easdem coeli regiones dirigantur: ita ratione longe diuerſa ea puncta orbitae lunaris, quae a terra vel maxime vel minime ſunt diſſita, non quieſcunt, neque etiam minimae eius a terra diſtantiae, quibus locis luna in perigaeo verſari dicitur, omnes ſunt inter ſe aequales, neque maximae, quibus locis luna in apogaeo verſari dicitur, hincque tam diſtantia perigaei ſeu apogaei a terra, quam eius locus in coelo eſt variabilis; cuiusmodi inconſtantia in nullo planeta primario deprehenditur. Praeterea quoque motus lunae ab apogaeo vel perigaeo mobili nulli tali conſtanti legi adſtringitur, vti fit in planetis, ſed pro eadem ab apogaeo elongatione locus verus a loco medio modo magis modo minus diſcrepat. Quare cum aſtronomi ad ſimilitudinem planetarum primariorum lunae motum per ellipſin repraeſentare velint, in cuius alterutro foco centrum terrae verſetur, non ſolum poſitionem huius ellipſis ſeu lineam apſidum continuo mutare, ſed etiam eius magnitudinem et excentricitatem variabilem ſtatuere ſunt coacti. Neque vero etiam hoc modo inaequalitatem motus ad vnicam correctionem, quae a ſola excentricitate et quantitate fictae iſtius ellipſis penderet, revocare licuit, ſed plures inſuper tabulas aequatio-

num

num condere oportuit: quae quamuis calculum lunae molestissimum efficiant, tamen neutiquam cum veritate perfecte consentiunt.

§. 2. Quo magis autem motus lunae perturbatus obseruatur, eo magis theoriam motuum coelestium, quam Vir summus Neutonus primus in lucem produxit, confirmat et corrobarat. Postquam enim Neutonus leges a Keplero ex obseruationibus erutas calculo subiecisset, atque secundum veras motus regulas examinasset: omnes planetas perinde moueri demonstrauit, ac moveri deberent, si ad solem vrgerentur viribus, quae quadratis distantiarum a sole reciproce essent proportionales. Hinc enim ostendit, planetas in ellipsibus moueri, quarum alterum focum sol occupet, hocque motu areas temporibus proportionales circa solem emetiri debere: praeterea vero quadrata temporum periodicorum cubis axium transversorum cuiusque ellipsis proportionalia fore. Quae conclusiones cum phaenomenis accuratissime satisfaciant, non dubitauit Neutonus tanquam principium certissimum stabilire, omnes planetas perpetuo ad solem vrgeri viribus, quae quadratis distantiarum reciproce sint proportionales, et cum deinceps inuenisset, motum cometarum ad eandem legem esse comparatum, eo magis veritas principii assumti ipsi confirmabatur. Quoniam porro omne coeli spatium omni materia vacuum statuit, ne a resistentia medii motus planetarum retardarentur, huius vis, qua planetae ad solem sollicitentur, nullam causam physicam admittere valuit. Hancque ob causam ipse quidem tacite, at sectatores eius aperte profiteri sunt ausi, solem ista vi immediate a Creatore esse donatum, eaque omnia coeli corpora ad se allicere atque attrahere. Cum autem nullum corpus ab alio attrahi posse agnoscerent, nisi hoc simul ab illo pari vi attrahatur, similem vim attrahendi singulis planetis et cometis attribuerunt, quia vero non constabat, ipsum solem ab istis planetarum viribus sensibiliter impelli, inertiam atque adeo materiam, qua sol constat, multo maximam statuerunt, vt effectus a viribus illis ortus produceretur quam minimus. Hanc opinionem comprobabat quoque stupenda solis magnitudo, qua omnes planetas longissime superat. Praeterea vero ipsa grauitas, qua omnia corpora ad terram vrgeri sentimus, atque nisus, quo luna manifesto terram versus impellitur, talem vim attractiuam in terra euincebat: similique modo motus satellitum Iouis et Saturni, hos planetas vi attractiua praeditos esse docebant. Denique ex phaenomenis aestus marini clarissime apparebat, vti terra lunam ad se attraheret, ita vicissim terram cunctasque eius partes a luna attrahi. Cum igitur hoc modo euicissent omnia corpora mundi se mutuo attrahere, eandem vim ad omnia prorsus corpora extendere sunt conati, atque adeo attractionem proprietatibus materiae adnumerauerunt; quae vltima conclusio, vti nimis est temeraria, ita quoque praecedentis ratiocinii vim non infringit, neque summum vsum, quem Philosophia Neutoni Astronomiae affert, suspectum reddere debet. Cum enim reliqua omnia obseruationibus et indubitatis argumentis sint confirmata, hoc solo excepto, quod attractio sit proprietas materiae essentialis, dubitare profecto non licet, quin omnia corpora mundi reuera ad

se

ſe mutuo impellantur, etiamſi cauſa huius vis ignoretur. Pro vſu autem aſtronomico ſufficit noſſe eiusmodi vires in mundo reipſa exiſtere, quarum effectus cum ſolus ſpectetur, perinde eſt, quaecunque earum ſit cauſa ſiue cognita ſiue incognita, neque in ipſam aſtronomiam multum inde incrementi redundaret, licet huius phaenomeni cauſa abſcondita innoteſceret.

§. 3. Stabilito ergo hoc principio, quo omnia corpora coeleſtia ſe mutuo attrahere ſtatuuntur, determinatio omnium motuum qui in coelo fiunt, ad reſolutionem problematum mechanicorum reducitur: mechanica enim eſt quaeſtio, qua ex cognitis viribus, quibus duo pluraue corpora in ſe inuicem agunt, variatio vnius cuiusque motus inde oriunda definiri debet. Ac pro motu planetarum primariorum quidem determinando, etſi ii non ſolum ad ſolem vrgentur, ſed etiam quilibet a reliquis trahitur, tamen vires a planetis ortae tam ſunt exiguae ratione vis, quae ad ſolem tendit, vt in hoc negotio ſine errore ſenſibili praetermitti queant. Hancob cauſam inueſtigatio motus cuiuſque planetae primarii ad ſolutionem huius problematis perducitur, vt duorum corporum, quae ſe mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, motus ac ſitus ad quoduis tempus aſſignetur. Quod problema vti non eſt difficile ſolutu, ita quoque planetarum primariorum motus facile ope calculi definiuntur, ac tabulae in vſum aſtronomicum conſtruuntur. Pro luna autem calculus, ad quem haec theoria deducit, tantopere fit moleſtus, totque difficultatibus implicatus, vt vix quicquam certi ad eius motum determiminandum ex eo elici possit. Cum enim luna non solum ad terram attrahatur, sed etiam ad solem, harumque virium neutra tam sit parua, vt respectu ad alteram habito pro nulla haberi queat, problema hinc occurrit longe difficillimum, quo motus trium corporum se mutuo attrahentium inuestigandi proponuntur: hicque trium virium ratio haberi debet, vnius, qua ipsa terra ad solem vrgetur, secundae, qua luna ad terram, et tertiae, qua luna ad solem sollicitatur. Hoc igitur problema, si commode solui posset, determinatio motus lunae in promtu esset, verum hoc casu defectu analyseos, certaeque methodi huiusmodi intricatos calculos euoluendi, fit vt theoria vix plus circa motum lunae patefaciat, quam ex obseruationibus colligere licuit. Quicquid autem adhuc astronomi ex his theoriae tenebris deducere, et quasi per transennam dignoscere potuerunt, tam accurate cum experientia conspirat, vt nullum prorsus dubium supersit, quin vniuersus lunae motus, cunctis conclusionibus, quae vnquam ex calculo formari queant, exactissime sit responsurus. Neutonus, qui ipse primus hoc negotium est adgressus, incredibile studium in hac quaestione enodanda collocasse videtur, hocque ipso non parum adiumenti in Astronomiam attulisse merito indicatur: tabulae enim astronomicae, quae ad eius mentem sunt conditae multo propius verum lunae locum quouis tempore exhibent, quam reliquae. Interim tamen tantum abest, vt Neutonus opus quod suscepit, confecerit, vt potius summas difficultates, quibus iste calculus etiamnunc laborat, luculenter ob oculos ponat, atque cum cetera sit obscurissima atque ma-

xima

xima caligine inuoluta, tum imprimis ea, quae de motu lineae nodorum et de variatione inclinationis ad eclipticam differuit, non vbique rigorem geometricum prae ſe ferre videntur. Qui autem poſt Neutonum huic eidem negotio ſe applicuerunt, non ſolum non vlterius ſunt progreſſi, ſed ne id quidem fere praeſtiterunt, in quo Neutonum ſatis feliciter praeuntem habuerunt.

§. 4. Saepenumero quoque ipſe iſtum laborem tentaui, ſemper autem calculi taedioſiſſimi difficultates me vel deterruerunt vel impediuerunt, quo minus ſaltem Neutonum aſſequerer. Neque vero tum adhuc ad diſcrepantiam orbitae lunaris ab ecliptica reſpexeram, ne ſtatim ab initio obſtacula nimis augerem, hincque mihi quidem recte colligere viſus ſum, ſi ipſius plani, in quo luna fertur, mutabilitatis rationem in calculum introducere voluiſſem, laborem penitus inſuperabilem prodituram fuiſſe. Methodus autem, qua tum temporis eram vſus, impedimenta non mediocriter multiplicabat, reſolutis enim viribus lunam vrgentibus, quemadmodum vulgo fieri ſolet, in tangentiales et normales, ex illis celeritatis lunae vel incrementum vel decrementum, ex his vero curuaturam orbitae inueſtigaui; ſicque ad aequationes ſum deductus differentiales, quae non ſolum integratu erant difficillimae, ſed etiamſi integrari facile potuiſſent, tamen adhuc longiſſime a perfecta et commoda motus determinatione fuiſſent remotae. In aſtronomia enim neque ipſa lunae celeritas, neque curuatura viae, in qua incedit, per ſe deſideratur, ſed calculum ita accommodari oportet, vt ad quoduis tempus, punctum coeli, in quo luna verſari videtur, eiuſque vera a terra diſtantia aſſignari poſſit; quae res ex illis, quas methodus immediate ſuppeditat, non niſi moleſtiſſimo computo deriuari poſſunt. His impedimentis probe perpenſis in eam cogitationem incidi, vtrum determinatio huiusmodi motuum non alia methodo tractari poſſet, quae non per memoratas celeritatis et curauturae ambages ad optatum finem perduceret? et, cum iam nonnullis problematibus mechanicis alias difficillimis ſingularem modum ea reſoluendi detexiſſem, quo ſimilia impedimenta maximam partem remouerentur, eandem methodum non ſine ingenti calculi contractione ad praeſens inſtitutum adhiberi poſſe perſpexi. Imprimis autem hoc modo lineae nodorum motum et inclinationis ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi poſſunt, mihi ſatis commode definire licuit, neque dubito, quin eandem viam perſequendo reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. Quo autem vis et vſus huius methodi clarius perſpiciatur, expediet primo eius periculum in reſolutione problematis facilioris, quo duorum tantum corporum ſe mutuo attrahentium motus requiritur, feciſſe: cum enim hoc caſu reliquae methodi ſine difficultate in vſum vocari poſſint, eo facilius patebit, quantum ſubſidii a noua methodo in problemate multo abſtruſiori expectare queamus. Praeterea vero, quia motus lunae ſine motu ſolis cognoſci non poteſt, ob hoc ipſum neceſſe erit, vt ſolis motum eadem methodo ante definiam, quam complicatiſſimos lunae motus aggrediar: hocque modo non ſolum iſtius methodi ſpeci-

ſpecimen, ex quo eius indoles intelligi poterit, exhibebitur, ſed etiam determinatio motus ſolis viam praeparabit ad motum lunae definiendum. Quanquam autem reuera terra circa ſolem circumfertur; tamen quoniam in aſtronomia non tam motus veri, quam apparentes ſpectantur, quaeſtionem ita proponamus, vt motus relatiuus determinari debeat, quo ſol ex terra, quae tanquam quieſcens ſpectatur, moueri cernitur. Hoc ergo caſu ſecundum praecepta mechanicae neceſſe eſt, vt primo motum, quo terra reuera progreditur, in oppoſita directione in ſolem transferamus: ſeu vt toti ſpatio, in quo ſol et terra continetur, motum aequalem et contrarium ei quo terra mouetur, imprimi concipiamus: quo pacto terra ad quietem redigetur. Deinde vero ne a viribus continuo ſollicitantibus terra ex hoc ſtatu deturbetur, ſimili modo requiritur, vt totum illud ſpatium quouis momento a viribus contrariis et aequalibus ſollicitari imaginemur; ſiue vt perpetuo in ipſum ſolem easdem vires, quibus terram impelli nouimus, ſed in directionibus contrariis mente transferamus. Haec eadem praecepta erunt obſeruanda, ſi deinceps noſtras inueſtigationes ad lunam quoque extendemus; ſemper ſcilicet, quia ſpectatorem in terra concipimus, eiusque reſpectu motus omnes diiudicamus, motum terrae tam in ſolem, quam lunam contrario modo inducere oportet; tum vero ſingulae vires, quibus terra ſollicitatur, pariter in contrariis directionibus tam ſoli quam lunae affingi debebunt. Hacque ratione tam in ſole, quam in luna eos ipſos motus obtinebimus, non quibus reuera mouentur, ſed quibus ſpectatori in centro terrae poſito et tanquam immobili conſiderato, moueri appariturі eſſent.

 §. 6.

Fig. 1.

§. 6. Sit igitur centrum terrae in G positum, eoque tanquam immobili spectato sol moueatur in linea curva AFf, ita vt planum tabulae planum eclipticae repraesentet. Sumatur in hoc plano linea fixa GA, ad quam quouis tempore locus solis, qui sit in F, per angulum AGF referatur; quem in finem linea GA vel ad apogaeum vel ad perigaeum solis commodissime ducetur. Elapso igitur tempore $=T$ peruenerit sol ex A in F, ponaturque angulus $AGF=r$, qui erit anomalia vera, dum anomalia media est angulus, qui se habet ad $360°$, vti est tempus T ad totum tempus periodicum, seu ad annum sidereum, qui est 365^d, 6^h, $8'$, $30''$. Ponatur porro distantia solis a terra $FG=v$, ductoque ex F ad rectam GA perpendiculo FP, si sinus totus vnitate designetur, erit $FP=v\,\text{sin.}\,r$, et $GP=v\,\text{cos.}\,r$. Vocetur autem breuitatis gratia $FP=v\,\text{sin.}\,r=y$ et $GP=v\,\text{cos.}\,r=x$. Quod si iam tempusculo infinite paruo dT sol elementum Ff conficiat, atque ex f ad AG pariter perpendicularis fp ducatur, et Fr atque fs rectae AG parallelae constituantur, habebitur $Pp=-dx=-dv\,\text{cos.}\,r+vdr\,\text{sin.}\,r$ et $fr=dy=dv\,\text{sin.}\,r+vdr\,\text{cos.}\,r$; hincque erit $Ff^2=dx^2+dy^2=dv^2+v^2dr^2$: atque si recta Gf ducta concipiatur, erit trianguli minimi FGf area $=\frac{1}{2}vvdr$.

§. 7 Nunc vires sunt perpendendae, quibus motus solis in quouis puncto F perturbatur, ac primo quidem occurrit vis attractiua terrae, quae cum in superficie abeat in grauitatem naturalem, cuius effectus sunt notissimi, merito instar mensurae reliquarum virium attractiuarum assumitur. Posito ergo radio terrae $=g$, quia vis attracti-

va

va terrae in distantia a centro $= g$, aequalis est grauitati, quam vnitate designemus, in quacunque alia distantia puta $= v$, erit vis attractiua terrae $= \frac{gg}{vv}$; propterea quod haec vis quadratis distantiarum a centro reciproce est proportionalis; sicque in proposito casu sol in F ad terram in G secundum directionem FG sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{gg}{vv}$. Vis autem solis se habet ad vim terrae, si distantiae sint aequales, vt massa solis ad massam terrae: vnde si ponamus massam terrae $= G$, et massam solis $= F$, erit in distantia $= v$ vis attractiva solis $= \frac{Fgg}{Gvv}$, hacque ipsa vi terra in G solem versus in F pelletur. Quoniam igitur ob terram in quiete consideratam, vis qua terra sollicitatur in solem sub directione contraria transferri debet, sol hinc in directione FG vrgebitur vi acceleratrice $= \frac{Fgg}{Gvv}$; et cum ante in eadem directione sollicitari sit repertus vi $= \frac{gg}{vv}$, nunc omnino in directione FG sollicitabitur vi $= \frac{(F+G)gg}{Gvv}$. Ceterum hic notandum est, in hac disquisitione, quoties virium mentio occurrit, id semper de viribus acceleratricibus intelligendum esse; atque vim grauitatis acceleratricem perpetuo vnitate indicari, quod ideo monendum est, ne istae vires pro motricibus habeantur, quae ante per massam corporis mouendi diuidi debent, quam vis acceleratrix prodeat. Hic igitur quoniam statim vires acceleratrices obtinemus, non opus est massas corporum mouendorum nosse; cum omnia corpora, quantumuis fuerint magna vel parua, ab eadem vi acceleratrice aequaliter accelerentur.

 §. 8.

§. 8. Quantus autem cuiusque vis acceleratricis sit effectus in alterando corporum motu ex primis mechanicae principiis facile intelligitur. Si enim corpus moueatur celeritate tanta, quantam acquirit corpus cadendo ex altitudine $= V$, atque interea, dum spatii elementum $= dX$ percurrit, sollicitetur in eadem directione, secundum quam mouetur vi acceleratrice $= P$ seu quae se habeat ad vim grauitatis vt P ad 1, tum vtique erit $dV = PdX$. Verum si praeterea temporis ratio sit habenda, atque tempusculum, quo spatiolum dX percurritur ponatur $= dT$, erit $\frac{dX}{dT}$ celeritati corporis proportionale, quae per radicem quadratam ex altitudine V exprimi potest. Cum autem vnitas, ad quam tempus referatur, sit arbitraria, ea ita assumi potest, vt fiat $\frac{dX}{dT} = \sqrt{V}$, sicque elementum temporis dT exprimatur per fractionem $\frac{dX}{\sqrt{V}}$ et ipsum tempus T per integrale $\int \frac{dX}{\sqrt{V}}$. Ostendi autem in meo tractatu de motu, si in expressione $\int \frac{dX}{\sqrt{V}}$ longitudines exhibeantur in partibus millesimis pedis rhenani, tum istam expressionem in numeris expositam, atque per 125 diuisam, praebituram esse tempus in minutis secundis. Quodsi ergo iste modus tempus exprimendi recipiatur, erit $dT = \frac{dX}{\sqrt{V}}$, ac propterea $\sqrt{V} = \frac{dX}{dT}$, vnde fit $V = \frac{dX^2}{dT^2}$, et si elementum temporis dT constans assumatur, erit $dV = \frac{2dXddX}{dT^2}$: quo valore in aequatione $dV = PdX$ substituto, habebitur $\frac{2dXddX}{dT^2} = PdX$, ideoque $2ddX = PdT^2$: seu differentiale secundum spatii emensi bis sumtum aequabitur producto ex vi acceleratrice P in quadratum elementi temporis interea elapsi. Hoc ita se ſe habet, ſi corpus ſecundum eandem directionem in qua mouetur, ſollicitetur, ſin autem ſollicitatio ſecundum directionem contrariam agat, tum erit $2\,d\,dX = -P\,dT^2$: vtroque autem caſu directio corporis a vi ſollicitante non variatur. Verum ſi vis oblique ageret in corpus, tum non ſolum celeritas, ſed etiam directio motus afficeretur. Hoc autem caſu in praeſente inſtituto non indigemus, quoniam tam motum corporis, quam ipſas vires ſollicitantes perpetuo ſecundum conſtantes directiones ſum reſoluturus, ita vt quiuis motus a nullis aliis viribus vnquam afficiatur, niſi quae eandem habeant directionem.

§. 9. Cum igitur ſol in directione Ff moueatur celeritate $= \frac{Ff}{dT}$, reſoluatur iſte motus in binos ſecundum directiones Fr et Fs, eritque illius celeritas $= \frac{Fr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$ huius vero $= \frac{Fs}{dT} = \frac{dy}{dT}$. Nempe tempuſculo dT ſol per motum priorem abſoluet ſpatiolum $Fr = -dx$, per poſteriorem vero ſpatiolum $Fs = dy$. Nunc ſimili modo vis ſollicitans $\frac{(F+G)gg}{Gv^2}$ ſecundum directiones Fr et FP reſoluatur, eritque vis ſecundum $Fr = \frac{(F+G)ggx}{Gv^3}$ et vis ſecundum $FP = \frac{-(F+G)ggy}{Gv^3}$ ex quibus per lemma praeced. §. praemiſſum ſequentes prodeunt aequationes.

$-2\,ddx - \frac{(F+G)ggx\,dT^2}{Gv^3}$ et $2\,ddy = -\frac{(F+G)ggy\,dT^2}{Gv^3}$

quarum ſi illa per y, haec vero per x multiplicetur, ambaeque aequationes addantur, habebitur $y\,ddx - x\,ddy = 0$, cuius integrale eſt $y\,dx - x\,dy = C\,dT$. At vero ob $y = v$ ſin. r et $x = v$ coſ. r erit $y\,dx - x\,dy = -v^2\,dr$ ob ſin. $r^2 +$ coſ. $r^2 = 1$, ideoque nacti ſumus hanc primam aequationem:

$$vv\,dr = C\,dT.$$

Dein-

Deinde binarum inuentarum aequationum multiplicetur prior per dx, posterior per dy, alteraque ab altera subtracta remanebit:

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)gg}{Gv^3}\,(xdx + ydy)$$

Cum autem sit $vv = xx + yy$ erit $xdx + ydy = vdv$ ideoque

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)ggdv}{Gv^2}$$

cuius integrale est: $\frac{dx^2 + dy^2}{dT^2} = \frac{(F+G)gg}{Gv} + a$. Supra autem notauimus esse $dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2dr^2$, vnde fiet haec altera aequatio:

$$dv^2 + v^2dr^2 = adT^2 + \frac{(F+G)ggdT^2}{Gv}$$

quae cum priori $vvdr = CdT$ coniuncta ad datum quodvis tempus T determinabit ambas incognitas v et r, quae solae in astronomia desiderantur. Quia autem $\frac{1}{2}vvdr$ exprimit elementum areae AGF, fiet ipsa area AGF $= \frac{1}{2}\int vvdr = \frac{1}{2}CT$; vnde patet areas, quas sol circa terram emetiri videtur, temporibus esse proportionales, quam proprietatem Keplerus primus pro sole circa terram, ac pro omnibus planetis primariis circa solem obseruauit.

§. 10. Inuentis ergo his duabus aequationibus.

$$vvdr = CdT \text{ et } dv^2 + v^2dr^2 = \left(a + \frac{(F+G)gg}{Gv}\right)dT^2$$

prior dat $dr = \frac{CdT}{vv}$, qui valor in altera substitutus praebebit:

$$dv^2 + \frac{C^2dT^2}{v^2} = adT^2 + \frac{(F+G)gg}{Gv}dT^2$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$ eritque

$$v^2dv^2 + C^2dT^2 = av^2dT^2 + ccvdT^2 \text{ siue}$$

$$dT = \frac{vdv}{\sqrt{(-C^2 + ccv + av^2)}}$$

hincque $dr = \frac{Cdv}{v\sqrt{(-C^2 + ccv + av^2)}}$

Ad

Ad conſtantes definiendas, perpendantur caſus, quibus fit $dv = 0$, id quod in apogaeo ac perigaeo euenire oportet. Erit autem his caſibus $av^2 + ccv - C^2 = 0$, cuius aequationis, cum altera radix ſit affirmatiua, altera negatiua diſtantia autem v reuera nunquam negatiua fieri poſſit: perſpicuum eſt, ſi radix affirmatiua perigaeum denotet, ſolem nunquam ad apogaeum peruenturum eſſe, vnde conſtat, orbitam hoc caſu hyperbolam fore. Hoc autem accidit, ſi a fuerit quantitas affirmatiua; quare vt ellipſin obtineamus, neceſſe eſt, vt a ſit quantitas negatiua: namque reliqui coefficientes cc et C^2, quia ſunt quadrata, negatiui fieri nequeunt. Sit igitur $a = -a$, et aequatio $avv = ccv - CC$ hos dabit valores $v = \frac{cc \pm \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$; quorum minor dabit diſtantiam perigaei ſolis a terra, quae erit $= \frac{cc - \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ maior vero dabit $\frac{cc + \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ diſtantiam apogaei: ſumma ergo $\frac{cc}{a}$ erit axis transuerſus, et differentia $\frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{a}$ erit diſtantia focorum, ita vt excentricitas futura ſit $= \frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{cc}$; et axis coniugatus $= \frac{2C}{\sqrt{a}}$, ideoque parameter ſeu latus rectum $= \frac{4CC}{cc}$. Ponamus axem transuerſum $= 2a$, et latus rectum $= 2b$; fiet littera ante adhibita $a = \frac{cc}{2a}$ et $4CC = 2bcc$, atque $C = c\sqrt{\frac{b}{2}}$. Aequationes ergo differentiales primum inuentae erunt:

$vvdr = cdT\sqrt{\frac{b}{2}}$ et $dv^2 + v^2dr^2 = \frac{-ccdT^2}{2a} + \frac{ccdT^2}{v}$.

Aequationes vero ex his erutae erunt:

$$dT = \frac{vdv\sqrt{2a}}{c\sqrt{(-ab + 2av - vv)}} \text{ et } dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-ab + 2av - vv)}}$$

exiſtente $cc = \frac{(F+G)gg}{G}$; excentricitas vero erit $= \sqrt{\frac{a-b}{a}}$

§. 11. Aequatio autem $dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-ab+2av-vv)}}$, ſi integretur, dabit $r = \text{A cof.} \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, vnde fit cof. $r = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, eritque r angulus, quem ſol circa terram iam a perigaeo deſcripſit, ſi enim ponatur angulus $r = 0$, fiet cof. $r = 1 = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$; et $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-b)}} = a - \sqrt{(aa-ab)}$, quae eſt diſtantia perigaei a terra. Quare ſi punctum A orbitae ſolaris denotet perigaeum, ex angulo AGF $= r$ ſeu anomalia vera inuenietur hinc diſtantia ſolis a terra $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\text{cof.}\,r\sqrt{(a-b)}}$ atque ſi excentricitas $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ ſtatuatur $= n$; fiet $v = \frac{b}{1+n\,\text{cof.}\,r}$. Maneat $\sqrt{\frac{a-b}{a}} = n$, erit $a = \frac{b}{1-nn}$, atque altera aequatio tranſibit in hanc

$$dT = \frac{vdv\sqrt{2b}}{c\sqrt{(-bb+2bv-vv+nnvv)}}$$

vnde fit:

$$T = \frac{-\sqrt{2b}}{c(1-nn)}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)} + \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)c}$$

$\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}}$ at $\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\text{A fin.}\frac{v(1-nn)-b}{nb}$ ſeu $\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\text{A cof.}\frac{\sqrt{(1-nn)}}{nb}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}$. Sit $\text{A fin.}\frac{v(1-nn)-b}{nb} = \omega$ erit $v = \frac{nbv+b}{1-nn}$ et $\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)} = \frac{nb\,\text{cof.}\,\omega}{\sqrt{(1-nn)}}$, vnde fit $T = \frac{b\omega\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} - \frac{nb\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\,\text{cof.}\,\omega$ ſiue $T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\omega - n\,\text{cof.}\,\omega)$, conſtans autem addi debet, vt poſito $r = 0$ ſeu $v = \frac{b}{1+n}$ tempus euaneſcat, facto autem $v = \frac{b}{1+n}$ fit $\omega = \text{A fin.} - 1 = -\frac{\pi}{2}$, vnde oritur

$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\frac{\pi}{2} + \omega - n\,\text{cof.}\,\omega)$ fit $\frac{\pi}{2} + \omega = \Phi$, erit

ω

$\omega = -\frac{\pi}{2} + \Phi$ et cof. $\omega =$ fin. Φ, ita vt fit:
$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} (\Phi - n \text{ fin. } \Phi) = \frac{a\sqrt{2a}}{c} (\Phi - n \text{ fin. } \Phi)$
Cum vero fit fin. $\omega = -$ cof. Φ, fiet $v = \frac{b - nb \text{ cof. } \Phi}{1-nn}$ $= a(1 - n \text{ cof. } \Phi)$ atque cof $r = \frac{\text{cof. } \Phi - n}{1 - n \text{ cof. } \Phi}$: vnde ratio tabularum folarium facile colligitur.

§. 12. Expeditis hoc modo, quae ad motum folis fpectant, et vnde vis methodi, qua vtor, clare perfpicitur, ad lunam progrediar. Repraefentetur vt ante planum eclipticae ipfo tabulae plano, in eoque fit G centrum terrae, quod tanquam fixum maneret, fpectatur, et GA recta pro lubitu affumta fixa. Tempore quocunque T, ab initio quodam ftato, elapfo verfetur fol in F, luna vero extra eclipticam in E, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum EM, atque ex M in GA porro normalis MP, iunganturque rectae GE et GM. Quibus factis angulus MGE dabit latitudinem lunae, anguli vero AGF et AGM funt longitudines folis et lunae a puncto eclipticae fixo A computatae. Vocentur nunc diftantia folis a terra GF $= f$ diftantiae lunae a terra GE $= v$, et anguli AGF $= r$, AGM $= q$; et EGM $= p$, eritque EM $= v$ fin. p; GM $= v$ cof. p; hincque porro PM $= v$ cof. p fin. q et GP $= v$ cof. p cof. q. Vocentur autem quoque lineae rectae, quae tanquam coordinatae fpectantur, GP $= v$ cof. p cof. $q = x$; PM $= v$ cof. p fin. $q = y$ et ME $= v$ fin. $p = z$ vt fit $xx + yy + zz = vv$. Promoueatur porro luna tempufculo infinite paruo $= dT$ per orbitae fuae elementum Ee, demiffoque ex e in planum eclipticae perpendiculo em, et ex m in GA Fig. 2.

 normali

normali mp, compleantur rectangula $Mtem$; $Psmp$; ductaque Mr parallela ipſi GA, motus lunae reſoluetur ſponte in tres laterales, quorum duo erunt in plano eclipticae alter ſecundum Mr celeritate $= \frac{Mr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$, alter ſecundum Ms celeritate $= \frac{Ms}{dT} = \frac{dy}{dT}$ tertii autem motus, quo luna a plano eclipticae recedit, directio erit Et, et celeritas $= \frac{Et}{dT} = \frac{dz}{dT}$.

§. 13. Conſideremus nunc quoque vires, quibus luna ſollicitatur. Ac primo quidem a terra vrgebitur ſol in directione FG vi $= \frac{gg}{ff}$; et luna in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$; vti ex ante expoſitis patet. Deinde poſita maſſa terrae $= G$, ſi ſolis maſſa ſtatuatur $= F$, a ſole vrgebitur terra in directione GF $= \frac{Fgg}{Gff}$; et ducta recta EF poſitaque EF $= u$, luna ad ſolem ſollicitabitur in directione EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$. Denique ſi maſſa lunae ponatur $= E$, a luna trahetur terra ſecundum directionem GE vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, ſol vero a luna trahetur in directione EF vi $= \frac{Egg}{Guu}$; ſicque habentur vires, quibus ſol, terra et luna in ſe mutuo agunt, ex quibus hic eas, quae ſolem afficiunt, negligimus, propterea quod motum ſolis tanquam cognitum neque a luna perturbari aſſumimus. Vires autem, quibus terra incitatur, quoniam terram, tanquam in G quieſceret, ſpectamus, in directionibus contrariis in lunam ſunt transferendae, quemadmodum ſupra oſtendimus ſicque fiet, vt luna reuera a quatuor viribus impelli ſit conſideranda. Primo ſcilicet luna vrgebitur in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$, ſecundo in directione EF

EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$, quae ſunt vires proprie in lunam agentes, tertio luna ſollicitabitur in directione EG vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, et quarto ſi per E ducatur recta HEI ipſi FG parallela, luna ſollicitabitur in directione EI vi $= \frac{Fgg}{Gff}$. Hoc modo vires quae in lunam agunt ad tres directiones reducuntur; prima erit in directione EG $= \frac{(E+G)gg}{Gvv}$. Secunda in directione EF $= \frac{Fgg}{Guu}$; et tertia in directione EI $= \frac{Fgg}{Gff}$. Media vero in directione EF denuo reſolui poteſt ſecundum directiones EG et EH, eritque illa ſecundum EG $= \frac{Fggv}{Gu^3}$, et haec ſecundum EH $= \frac{Fggf}{Gu^3}$; vnde vires lunam afficientes ad duas directiones perducuntur. Primo ſcilicet luna trahetur in directione EG vi $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$; praeterea vero in directione EH vi $= \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff} = \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$.

§. 14. Cum ſit angulus $AGM = q$, et angulus $AGF = r$, ponamus breuitatis gratia angulum $FGM = q - r = s$, qui diſtantiam lunae a ſole ſecundum longitudinem exhibebit, et quoniam angulus $EGM = p$, erit ex trigonometricis coſinus anguli $EGF = \text{coſ.}\,p \,.\, \text{coſ.}\,s$; hincque in triangulo FGE prodibit ex lateribus FG, EG cum angulo intercepto FGE tertium latus $FE = u = \sqrt{(ff - 2fv\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s + vv)}$. Quare cum linea f reſpectu v ſit vehementer magna, erit proxime $\frac{1}{u^3} = (ff - 2fv\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s + vv)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s}{f^4} + \frac{3vv(5\,\text{coſ.}\,p^2 \,.\, \text{coſ.}\,s^2 - 1)}{2f^5}$, cuius expreſſionis vltimus terminus iam eſt tantopere exiguus, vt in computo lunae ſine erro-

 re

re praetermitti possit, si enim ponamus parallaxin solis horizontalem $= 12''$, fiet distantia terrae a sole media $= 17189 g$ et cum distantia lunae a terra media sit circiter $= 60 g$; fiet $v : f = 1 : 286$, quae ratio est tam parua, vt eius potestates superiores tuto reiici queant. Hancobrem erit vis qua luna in directione EG vrgetur $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gf^3}$, et vis qua luna in directione EH vrgetur $= \frac{3Fggv\,cos.\,p\,cos.\,s}{Gf^3}$. Ne autem, antequam necessitas postulet, quicquam negligamus, tantisper priores expressiones, in quibus littera u inest, retineamus.

§. 15. Resoluamus nunc porro has vires secundum directiones, in quas motum lunae iam dissoluimus, et vis in directione $EG = \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$ tres sequentes vires suppeditabit; quarum

prima in directione $Mr = \frac{(E+G)ggx}{Gv^3} + \frac{Fggx}{Gu^3}$

secunda in directione $MP = \frac{(E+G)ggy}{Gv^3} + \frac{Fggy}{Gu^3}$

tertia in directione $EM = \frac{(E+G)ggz}{Gv^3} + \frac{Fggz}{Gu^3}$

Altera vis in directione $EH = \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff}$, quia plano eclipticae est parallela, tertium motum in directione EM non afficit: transferatur ergo in planum eclipticae, et habebit directionem ML parallelam ipsi GF, ex qua resultabit vis

in directione $Mr = \frac{-Fggf\,cos.\,r}{Gu^3} + \frac{Fgg\,cos.\,r}{Gff}$

in directione $Ms = \frac{Fggf\,sin.\,r}{Gu^3} - \frac{Fgg\,sin.\,r}{Gff}$.

His ergo viribus coniunctis terni lunae motus ita mutabuntur, vt secundum praecepta supra tradita oriantur tres istae aequationes:

2 ddx

$$\frac{2\,ddx}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggx}{Gv^3} - \frac{Fggx}{Gu^3} + \frac{Fggf\cos. r}{Gu^3} - \frac{Fgg\cos. r}{Gff}$$
$$\frac{2\,ddy}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggy}{Gv^3} - \frac{Fggy}{Gu^3} + \frac{Fggf\sin. r}{Gu^3} - \frac{Fgg\sin. r}{Gff}$$
$$\frac{2\,ddz}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggz}{Gv^3} - \frac{Fggz}{Gu^3}.$$

Ex quibus eliminando terminos $\frac{(E+G)gg}{Gv^3}$ nascuntur tres sequentes aequationes.

$$\frac{2(zddx - xddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\cos. r}{Gu^3} - \frac{Fggz\cos. r}{Gff}$$
$$\frac{2(zddy - yddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\sin. r}{Gu^3} - \frac{Fggz\sin. r}{Gff}$$
$$\frac{2(yddx - xddy)}{dT^2} = \frac{Fggf(y\cos. r - x\sin. r)}{Gu^3} - \frac{Fgg(y\cos. r - x\sin. r)}{Gff}$$

Cum autem sit $x = v\cos. p\cos. q$ et $y = v\cos. p\sin. q$ erit $y\cos. r - x\sin. r = v\cos. p(\sin. q\cos. r - \cos. q\sin. r) = v\cos. p \sin. s$ ob $q - r = s$. Atque ob $z = v\sin. p$, erit $z\cos. r = v\sin. p\cos. r$ et $z\sin. r = v\sin. p\sin. r$. Ex quo inuentae aequationes transmutabuntur in has:

$$\frac{2d.(zdx - xdz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin. p\cos. r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(zdy - ydz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin. p\sin. r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(ydx - xdy)}{dT^2} = \frac{Fggv\cos. p\sin. s}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$

§. 16. Cum autem sit $x = v\cos. p\cos. q$; $y = v\cos. p\sin. q$ et $z = v\sin. p$ erit vt sequitur:

$$dx = dv\cos. p\cos. q - vdp\sin. p\cos. q - vdq\cos. p\sin. q$$
$$dy = dv\cos. p\sin. q - vdp\sin. p\sin. q + vdq\cos. p\cos. q$$
$$dz = dv\sin. p + vdp\cos. p$$

Hinc itaque efficietur

$$zdx - xdz = -vvdp\cos. q - vvdq\sin. p\cos. p\sin. q$$
$$zdy - ydz = -vvdp\sin. q + vvdq\sin. p\cos. p\cos. q$$
$$ydx - xdy = -vvdq\cos. p^2$$

Quae expressiones si in aequationibus ante inuentis substituantur

tuantur, prodibunt tres aequationes inter quatuor variabiles T. v. p et q. quarum ope ternae ex quarta definiri poterunt. Praeterea autem ex his elementorum dx, dy et dz valoribus notari oportet, fore ſummam quadratorum eorundem $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \operatorname{coſ.} p^2$; quae formula nouae aequationi ex primo inuentis tribus aequationibus eruendae inſeruit. Si enim prima per dx ſecunda per dy et tertia per dz multiplicetur ob $x dx + y dy + z dz = v dv$ habebimus hanc aequationem

$$\frac{2 dx ddx + 2 dy ddy + 2 dz ddz}{dT^2} = \frac{d.(dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \operatorname{coſ.} p^2)}{dT^2} =$$
$$- \frac{(E+G) gg dv}{G v^2} - \frac{F gg v dv}{G u^3} + \frac{Fgg}{G} \left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)(dx \operatorname{coſ.} r + dy \operatorname{ſin.} r).$$

Eſt vero $dx \operatorname{coſ.} r + dy \operatorname{ſin.} r = dv \operatorname{coſ.} p \operatorname{coſ.} s - v dp \operatorname{ſin.} p \operatorname{coſ.} s - v dq \operatorname{coſ.} p \operatorname{ſin.} s$ quae cum ſuperioribus coniuncta inveſtigationem orbitae lunaris faciliorem reddet.

17 Quoniam vero hic non tam motus lunae ipſos, quam lineae nodorum motionem et inclinationis ad eclipticam variationem indagare conſtitui, hae duae res imprimis mihi erunt conſiderandae. Dum igitur luna orbitae ſuae elementum E e percurrit, ſit recta G ☊ linea nodorum, ſeu interſectio plani eclipticae et plani per punctum G et elementum Ee producti: voceturque angulus A G ☊ $= \Phi$. Porro ex M ad G ☊ ducatur normalis M Q iunctaque E Q erit angulus E Q M inclinationi orbitae lunaris ad eclipticam aequalis. Sit igitur iſte angulus EGM $= \theta$; atque ob angulum ☊ GM $= q - \Phi$, erit M Q $= v \operatorname{coſ.} p \operatorname{ſin.} (q - \Phi)$ et G Q $= v \operatorname{coſ.} p \operatorname{coſ.} (q - \Phi)$: vnde fit $\frac{ME}{MQ} = \frac{v \operatorname{ſin.} p}{v \operatorname{coſ.} p \operatorname{ſin.} (q - \Phi)} = \operatorname{tang.} \theta$, ſeu $\operatorname{tang.} \theta = \frac{\operatorname{tang.} p}{\operatorname{ſin.} (q - \Phi)}$. Quoniam vero poſitio lineae nodo-

nodorum et inclinatio ad ambo puncta E et e aeque pertinent, manifestum est, differentiatis p et q angulos Φ et θ inuariatos manere debere: hinc obtinetur ex aequatione tang. $\theta = \frac{\text{tang.}\, p}{\text{sin.}\,(q - \Phi)}$ differentiando.

$$0 = \frac{dp}{\text{cos.}\, p^2 \,\text{sin.}\,(q - \Phi)} - \frac{dq\, \text{tang.}\, p\, \text{cos.}\,(q - \Phi)}{\text{sin.}\,(q - \Phi)^2}$$

vnde oritur $dp = \frac{dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\,(q - \Phi)}{\text{sin.}\,(q - \Phi)}$ quo valore supra substituto fit

$$z\,dx - x\,dz = -\frac{vv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)}$$

$$z\,dy - y\,dz = -\frac{vv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)}$$

$$y\,dx - x\,dy = -vv\,dq\, \text{cos.}\, p$$

§. 18. Substituantur iam hi valores in aequationibus supra inuentis eritque:

$$d.\, \frac{vv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,v\,dT^2\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$d.\, \frac{vv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,v\,dT^2\, \text{sin.}\, p\, \text{sin.}\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$d.\, vv\,dq\, \text{cos.}\, p^2 = \frac{Fgg\,v\,dT^2\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Vel differentialibus expeditis, et per v vbique diuisione instituta

$$\frac{2\,dv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} + v\,d.\, \frac{dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,T^2\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2\,dv\,dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \psi)} + v\,d.\, \frac{dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\, \text{sin.}\, p\, \text{sin.}\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$2\,dv\,dq\, \text{cos.}\, p^2 + v\,d.\,dq\, \text{cos.}\, p^2 = \frac{Fgg\,dT^2\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

quae transformantur in has:

$$\frac{2\,dv}{v} + d.\, l\, \frac{dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,d\,T^2\, \text{cos.}\, r\, \text{sin.}\,(q - \Phi)}{2G\,v\,dq\, \text{cos.}\, p\, \text{cos.}\, \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2\,dv}{v} + d.\, l\, \frac{dq\, \text{sin.}\, p\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\,(q - \Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\, \text{sin.}\, r\, \text{sin.}\,(q - \Phi)}{2G\,v\,dq\, \text{cos.}\, p\, \text{sin.}\, \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2\,dv}{v} + d\,l\,dq\, \text{cos.}\, p^2 = \frac{Fgg\,dT^2\, \text{sin.}\, s}{2G\,v\,dq\, \text{cos.}\, p}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Harum ſi binae a ſe inuicem ſubtrahantur, remanebunt:

$$d\,.\,l\ \text{tang}\ \Phi = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)}{2Gv\,dq\,\text{coſ.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

$$d\,.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,(\text{ſin.}\,r\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)-\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,\Phi)}{2Gv\,dq\,\text{coſ.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

Cum autem ſit ſin. A . ſin. B $= \frac{1}{2}$ coſ. (A − B) − $\frac{1}{2}$ coſ. (A + B) erit, ſin. r ſin. $(q-\Phi) = \frac{1}{2}$ coſ. $(s-\Phi) - \frac{1}{2}$ coſ. $(q+r-\Phi)$ et ſin. s − ſin. $\Phi = \frac{1}{2}$ coſ. $(s-\Phi - \frac{1}{2}$ coſ. $(q-r+\Phi)$ ob $s = q-r$: ideoque ſin. r ſin. $(q-\Phi)$ − ſin. s ſin. $\Phi = \frac{1}{2}$ coſ. $(q-r+\Phi) - \frac{1}{2}$ coſ. $(q+r-\Phi)$ = ſin. q ſin. $(r-\Phi)$; quia viciſſim eſt $\frac{1}{2}$ coſ A − $\frac{1}{2}$ coſ. B = ſin. $\frac{A+B}{2}$. ſin. $\frac{B-A}{2}$ Quocirca poſterior aequatio transmutabitur in hanc:

$$d\,.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,q\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{2Gv\,dq\,\text{coſ.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

§. 19. Cum igitur ſit $d\,.\,l$ tang. $\Phi = \frac{d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}$ prior ambarum aequationum inuentarum abibit in hanc,

$$d\Phi = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)}{2Gv\,dq\,\text{coſ.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

Hucusque ergo aequatione perducta conſideremus quod jam ſupra inuenimus, eſſe proxime $\frac{1}{u^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s}{f^4}$, ideoque $\frac{1}{ff} = -\frac{f}{u^3} = -\frac{3v\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s}{f^3}$, quo valore introducto habebimus: $d\Phi = -\frac{3Fgg\,dT^2\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)}{2Gf^3\,dq}$

quia ergo celeritas lineae nodorum exprimitur per $\frac{d\Phi}{dT}$. erit $\frac{d\Phi}{dT} = -\frac{3Fgg\,dT\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)}{2Gf^2\,dq}$

vbi notandum eſt, eſſe $\frac{dq}{dT}$ celeritatem lunae ſecundum longitudinem. Hinc igitur erit celeritas lineae nodorum retrograda directe, vt coſinus diſtantiae lunae a ſole, ſinus diſtantiae ſolis a nodo, et ſinus diſtantiae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero, vt cubus diſtantiae

ſolis

ſolis a terra, et celeritas lunae ſecundum longitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque rebus memoratis pendeat. Haec expreſſio mirifice congruit cum determinatione Neutoni, quam tradit prop. XXX. lib. III. Princip. et quia hinc quouis momento celeritas lineae nodorum aſſignari poteſt, ſimul patebit motus horarius nodorum; propterea quod tempus vnius horae ſine errore pro elemento temporis $d\mathrm{T}$ ſumi poteſt. Si enim ponamus, ſolem motu medio in diſtantia a terra mediocri reuolui, quae diſtantia mediocris ſit $= a$, ponamusque $\frac{(\mathrm{F}+\mathrm{G})gg}{\mathrm{G}} = cc$, et tempuſculo $= d\mathrm{T}$ ſolem angulum conficere $= d\omega$ erit per §. 11: $d\mathrm{T} = \frac{a\,d\omega\sqrt{2a}}{c}$ et $d\mathrm{T}^2 = \frac{2a^3 d\omega^2}{cc} = \frac{2\mathrm{G}a^3 d\omega^2}{(\mathrm{F}+\mathrm{G})gg}$, qui valor in ſuperiori aequatione ſubſtitutus dabit $d\Phi = -\frac{3\mathrm{F}c^3 d\omega^2}{(\mathrm{F}+\mathrm{G})f^3 dq}$ coſ. s. ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$ ex qua expreſſione, ſi $d\omega$ ſumatur pro motu horario medio ſolis nempe $2', 27'', 50''', 37''''$ et dq pro motu horario lunae vero ſecundum longitudinem, tum $d\Phi$ dabit motum horarium verum nodorum lunae.

§. 20. Secundum Neutonum eſt ratio F ad G $=$ 227512 : 1 vnde pro fractione $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}+\mathrm{G}}$ tuto vnitas ſcribi poterit: eritque ergo $d\Phi = -\frac{3a^3 d\omega^2}{f^3 dq}$ coſ. s ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$, Quo hinc facilius motum nodorum eruamus, ponamus primum tam ſolem quam lunam circa terram motu vniformi moueri, eritque $f = a$; et dq denotabit motum medium horarium lunae ſecundum longitudinem, eritque $dq = 32', 56'', 27''', 13^{\mathrm{IV}}$, vnde ob $d\omega = 2', 27'', 50''', 37''''$, fiet $d\omega = 532237^{\mathrm{IV}}$ et $dq = 7115233^{\mathrm{IV}}$ ideoque $\frac{3\,d\omega^2}{dq} = 119437^{\mathrm{IV}} = 33'', 10''', 37^{\mathrm{IV}}$

 ita

ita vt ſit motus horarius nodorum. $d\Phi = -\cos. s \sin. (r-\Phi) \sin. (q-\Phi)$, $33''$, $10'''$, 37^{IV}. Nodi ergo celerrime mouentur, ſi ſinguli iſti ſinus ſinui toti fiant aequales, quod primum euenit, ſi luminaria fuerint in coniunctione, et linea nodorum cum recta ad ſolem ducta GF angulum rectum conſtituat; tum vero idem contingit, ſi luminaria fuerint in oppoſitione, et linea nodorum ad GF pariter normalis: vtroque caſu linea nodorum regreditur ſingulis horis $33''$, $10'''$, 37^{IV}; hicque eſt motus celerrimus retrogradus lineae nodorum. Tum vero motus nodorum prorſus euaneſcit tribus caſibus, primo ſi luminaria quadrato aſpectu ſe mutuo aſpiciant, ſecundo ſi ſol, et tertio, ſi luna in ipſa linea nodorum verſetur. Fieri vero etiam poteſt, vt nodi in conſequentia progrediantur, quod euenit, ſi $\cos. s \sin. (r-\Phi) \sin. (q-\Phi)$ negatiuum induit valorem; qui, quantus euadere poſſit, dum fit maximus, per methodum maximorum et minimorum inuenietur. Apparebit autem hoc euenire, primo ſi ambo luminaria ſextilem aſpectum teneant, et linea nodorum angulum FGE biſariam ſecet, ſecundo ſi luminaria in trigono fuerint conſtituta, et linea nodorum complementum anguli FGE ad duos rectos biſecet: vtroque caſu celeritas nodorum in conſequentia fiet maxima, et quia ſinguli ſinus ſemiſſi radii fuerint aequales, motus horarius maximus in conſequentia erit octaua pars motus celerrimi in antecedentia, atque id circo $= 4''$, $8'''$, $59''''$.

§. 21. Cum igitur nodi multo celerius et ſaepius in antecedentia regrediantur, quam motu contrario in

con-

conſequentia, hinc efficietur motus nodorum retrogradus; ad quem accurate definiendum neceſſe eſt, vt aequationis ſupra inuentae integrale inueſtigemus, hoc enim reperto facile erit ad quoduis tempus poſitionem lineae nodorum aſſignare. Hunc in finem tam motum verum ſolis quam lunae in calculum introduci oportet. Sit ergo diſtantia media ſolis a terra $= a$, excentricitas $= n$, et tempore propoſito anomalia excentrica ſolis $= \varrho$; quoniam angulus ω ſupra ad motum ſolis medium deſignandum eſt aſſumtus, erit primo $d\varrho\,(1 - n\,\text{coſ.}\,\varrho) = d\omega$ ideoque $d\varrho = d\omega\,(1 + n\,\text{coſ.}\,\varrho)$ neglectis terminis, in quibus fractio n plures obtinet dimenſiones, porro cum ſit anomalia vera proxime $= \varrho + n\,\text{ſin.}\,\varrho$ erit $dr = d\varrho\,(1 + n\,\text{coſ.}\,\varrho)$ ideoque $dr = d\omega\,(1 + 2n\,\text{coſ.}\,\varrho)$ atque $f = a\,(1 - n\,\text{coſ.}\,\varrho)$. Deinde quamuis motus lunae non ſit adeo certus, ponamus eam in ellipſi vniformiter mobili circa terram ferri, diſcrepantia enim huius hypotheſis a veritate in praeſenti negotio non niſi minimum et prorſus inſenſibilem errorem parere poteſt. Sit ergo diſtantia lunae a terra media $= \alpha$; excentricitas $= m$, anomalia excentrica $= \xi$, et diſtantia vera a terra $= v$; ſit porro motus medius lunae ad motum medium terrae ſeu ſolis vt λ ad 1, erit vti ex obſeruationibus conſtat $\lambda = 13,3685$. Hinc orietur $d\xi\,(1 - m\,\text{coſ.}\,\xi) = \lambda d\omega$ ideoque $d\xi = \lambda d\omega\,(1 + m\,\text{coſ.}\,\xi)$, et anomalia vera $= \xi + m\,\text{ſin.}\,\xi$; vnde ſi motus abſidum medium ſtatuatur ad motum medium ſolis vt x ad 1, vbi ex motu apogaei medio ſit $x = 0,112996$, cuius motus ſi ratio habeatur, fiet $dq = \lambda d\omega + 2\,(\lambda - x)\,m d\omega\,\text{coſ.}\,\xi$. His ergo valoribus in fuperiori aequatione fubftitutis fit

$$d\,\Phi \frac{-3\,d\omega}{(1-n\,\mathrm{cof.}\,\varrho)^3\,(\lambda+2(\lambda-\varkappa)m\,\mathrm{cof.}\,\xi)}\,\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{fin.}\,(r-\Phi)\,\mathrm{fin.}\,(q-\Phi)$$

vbi notandum eft anomalias excentricas ϱ et ξ non ab apogaeo vt vulgo fieri folet, fed a perigaeo effe acceptas.

§. 22. Sublatis autem fractionibus et neglectis terminis, in quibus excentricitates m et n vtpote valde paruae, plures habent dimenfiones, habebitur:

$$d\Phi = \frac{3\,d\omega}{\lambda}\,(1+3\,n\,\mathrm{cof.}\,\varrho)\,(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cof.}\,\xi)\,\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{fin.}\,(r-\Phi)\,\mathrm{fin.}\,(q-\Phi)$$

cuius integrale vt indagemus, confideremus quantitatem $(1+3\,n\,\mathrm{cof.}\,\varrho)\,(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cof.}\,\xi)$ tanquam conftantem, quoniam nunquam fenfibiliter ab vnitate difcrepat, fitque breuitatis gratia:

$$(1+3\,n\,\mathrm{cof.}\,\varrho)\,(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cof.}\,\varrho) = i \text{ erit}$$

$$d\,\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{\lambda}\,\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{fin.}\,(r-\Phi)\,\mathrm{fin.}\,(q-\Phi)$$

Quoniam vero, vt fupra vidimus, eft fin. A fin. B $= \frac{1}{2}$ cof. (B$-$A$-\frac{1}{2}$ cof. (A$+$B) erit $\mathrm{fin.}\,(r-\Phi)\,\mathrm{fin.}\,(q-\Phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{cof.}\,(q-r) - \frac{1}{2}\,\mathrm{cof.}\,(q+r-2\,\Phi)$, quo valore fubftituto erit

$$d\,\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{2\lambda}(\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{cof.}\,(q-r) - \mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{cof.}\,(q+r-2\Phi))$$

Porro cum fit cof. A cof B $= \frac{1}{2}$ cof. (B$-$A) $+ \frac{1}{2}$ cof. (B$+$A) fiet:

$$\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{cof.}\,(q-r) = \tfrac{1}{2} + \mathrm{cof.}\,2\,(q-r)$$

$$\mathrm{cof.}\,(q-r)\,\mathrm{cof.}\,(q+r-2\,\Phi) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cof.}\,2\,(r-\Phi) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cof.}\,2\,(q-\Phi)$$

ideoque habebimus:

$$d\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{4\lambda}\,(1+\mathrm{cof.}\,2\,(q-r) - \mathrm{cof.}\,2\,(r-\Phi) - \mathrm{cof.}\,2\,(q-\Phi)).$$

Quoniam nouimus, variabilitatem ipfius Φ longe minorem effe, quam ipforum q et r, fingamus initio angu-

lum

lum Φ esse constantem in his cosinibus, et cum proximè sit $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ prodibit hoc integrale:

$$\Phi = C - \tfrac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \tfrac{\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \tfrac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \tfrac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$$

quod autem adhuc multiplici correctione indiget, primo quod angulum Φ constantem assumsimus, deinde quod sumsimus $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ cum reuera sit $dq = \lambda d\omega + 2(\lambda - \varkappa) m d\omega \cos. \xi$ et $dr = d\omega + 2 n d\omega \cos. \varrho$ tertio vero quod assumsimus quantitatem i constantem quae reuera est variabilis.

§. 23. Sit valor iste pro Φ inuentus veritati iam satis propinquus $= P$ ita vt sit

$$P = C - \tfrac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \tfrac{\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \tfrac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \tfrac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}\right).$$

Quo iam correctio a variabilitate ipsius Φ oriunda inueniatur, differentietur P posito solo Φ variabili, sitque differentiale $= Q d\Phi$, erit vti ex natura integralium patet $\Phi = P - \int Q\, d\Phi$. At facta hac differentiatione fiet:

$$Q d\Phi = \tfrac{3 i d\Phi}{4\lambda}\left(\cos. 2(r-\Phi) - \tfrac{\cos.2(q-\Phi)}{\lambda}\right).$$

Substituatur hic loco $d\Phi$ valor ante inuentus; eritque

$$\begin{aligned} Q d\Phi = {} & \tfrac{-9ii}{16\lambda^2} d\omega \big(\cos.2(r-\Phi) + \cos.2(r-\Phi)\cos.2(q-r) - \cos.2(r-\Phi)\cos.2(r-\Phi) \\ & \qquad - \cos.2(r-\Phi)\cos.2(q-\Phi)\big) \\ & + \tfrac{9ii}{16\lambda^3} d\omega \big(\cos.2(q-\Phi) + \cos.2(q-\Phi)\cos.2(q-r) - \cos.2(q-\Phi)\cos.2(r-\Phi) \\ & \qquad - \cos.2(q-\Phi)\cos.2(q-\Phi)\big) \end{aligned}$$

At per reductionem supra adhibitam, qua erat $\cos. A \cos. B = \tfrac{1}{2}\cos.(B-A) + \tfrac{1}{2}\cos.(B+A)$ fiet:

$$\begin{aligned} Q d\Phi = {} & \tfrac{+9ii}{16\lambda^2} d\omega \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.4(r-\Phi) - \cos.2(r-\Phi) - \tfrac{1}{2}\cos.2(q-2r+\Phi) - \tfrac{1}{2}\cos.2(q-\Phi) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2}\cos.2(q-r) + \tfrac{1}{2}\cos.2(q+r-2\Phi)\big) \\ & \tfrac{-9ii}{16\lambda^3} d\omega \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.4(q-\Phi) - \cos.2(q-\Phi) - \tfrac{1}{2}\cos.2(r-\Phi) - \tfrac{1}{2}\cos.2(2q-r-\Phi) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2}\cos.2(q-r) + \tfrac{1}{2}\cos.2(q+r-2\Phi)\big) \end{aligned}$$

Si

Si nunc iterum vt ante in his angulis, quorum coſinus occurrunt, Φ tanquam conſtans ſpectetur ac ſumatur $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ fiet integrando:

$$+\int Q d\Phi = \frac{9ii}{16\lambda^3}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(r-\Phi)}{8} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-2r+\Phi)}{4(\lambda-2)} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$

$$\frac{-9ii}{16\lambda^5}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(q-\Phi)}{8\lambda} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{4} - \frac{\sin.2(2q-r-\Phi)}{4(2\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$

quae quantitas ad ſuperiorem valorem ipſius P addi debet, vt prodeat valor ipſius Φ per variabilitatem ipſius Φ correctus. Perſpicuum autem hic eſt pleroſque terminos ob λ numerum $= 13,3685$ fieri vehementer parvos. Maximus enim inter ſinus nempe $\frac{9ii}{32\lambda^2}$ ſin $2(r-\Phi)$ quando iſte ſinus fit radio aequalis, praebet tantum circiter $5'$. Quia vero ω data quantitate maius fieri poteſt, iſti termini negligi nequeunt. Hinc itaque neglectis terminis nimis paruis fiet:

$$\Phi = C - \frac{3i\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$- \frac{3i\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right) + \frac{9}{128\lambda^2}\sin.4(r-\Phi)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda^2}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda^2}\right)$$

poſito ſcilicet in terminis exiguis $i = 1$.

§. 24. Quia autem differentialia ipſorum q et r hactenus non ſunt aſſumta completa, inquiramus, quanta correctio exinde oriatur. Hancobrem differentiemus primo quantitatem P poſito ſolo q variabili, et loco dq ſcribamus $2(\lambda-\varkappa)m\,d\omega\,\text{coſ.}\,\xi$ ſeu ob $\varkappa$ reſpectu λ ſatis parvum

vum ponamus $dq = 2\lambda m d\omega \operatorname{cof.} \xi$, eritque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda} d\omega \left(\frac{2\lambda m \operatorname{cof.} \xi}{\lambda - 1} \operatorname{cof.} 2(q-r) + 2m \operatorname{cof.} \xi \operatorname{cof.} 2(q-\Phi)\right)$$

cuius integrale fubtrahi debet a iam inuento. Productis autem his cofinuum ad fimplices cofinus reductis fiet

$$dP = \frac{-3imd\omega}{4\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\operatorname{cof.}(2q-2r-\xi) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\operatorname{cof}(2q-2r+\xi) + \operatorname{cof}(2q-\xi-2\Phi) + \operatorname{cof}(2q+\xi-2\Phi)\right)$$

Cum iam proxime fit $dq = \lambda d\omega$ et $d\xi = \lambda d\omega$ fiet integrale $=$

$$\frac{-3im}{4\lambda}\left(\frac{\operatorname{fin.}(2q-2r-\xi)}{\lambda-1} + \frac{\operatorname{fin.}(2q-2r+\xi)}{3(\lambda-1)} + \frac{\operatorname{fin.}(2q-\xi-2\Phi)}{\lambda} + \frac{\operatorname{fin.}(2q+\xi-2\Phi)}{3\lambda}\right).$$

quae expreffiones, cum fit $m = 0,1414$, dum fiunt maximae vix duo minuta producunt. Pofito ergo $i = 1$, ad expreffionem fupra inuentam infuper addi debet.

$$\frac{3m}{4\lambda}\left(\frac{4\operatorname{fin.} 2(q-r)\operatorname{cof.}\xi - 2\operatorname{cof.} 2(q-r)\operatorname{fin.}\xi}{3(\lambda-1)} + \frac{4\operatorname{fin.} 2(q-\Phi)\operatorname{cof.}\xi - 2\operatorname{cof.} 2(q-\Phi)\operatorname{fin.}\xi}{3\lambda}\right)$$

Simili modo differentietur P pofito tantum r variabili, at pro dr ponatur $2nd\omega \operatorname{cof.} \varrho$; prodibitque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda}\left(\frac{-2nd\omega\operatorname{cof.}\varrho}{\lambda-1}\operatorname{cof.} 2(q-r) + 2nd\omega \operatorname{cof.}\varrho \operatorname{cof.} 2(r-\Phi)\right) \text{ feu}$$

$$dP = \frac{-3ind\omega}{4\lambda}\left(\frac{-\operatorname{cof.}(2q-2r-\varrho) - \operatorname{cof.}(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \operatorname{cof}(2r-\varrho-2\Phi) + \operatorname{cof}(2r+\varrho-2\Phi)\right)$$

cuius integrale ob $dr = d\omega$ et $d\varrho = d\omega$ erit.

$$-\frac{3in}{4\lambda}\left(\frac{\operatorname{fin.}(2q-2r-\varrho)}{3(\lambda-1)} + \frac{\operatorname{fin.}(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \operatorname{fin.}(2r-\varrho-2\Phi) + \frac{\operatorname{fin.}(2r+\varrho-2\Phi)}{3}\right)$$

Ergo ex hoc capite ad valorem ipfius Φ ante inuentum infuper addi debebit

$$\frac{3n}{4\lambda}\left(\frac{4\operatorname{fin.} 2(q-r)\operatorname{cof.}\varrho + 2\operatorname{cof.} 2(q-r)\operatorname{fin.}\varrho}{3(\lambda-1)} + \frac{4\operatorname{fin.} 2(r-\Phi)\operatorname{cof.}\varrho - 2\operatorname{cof.} 2(r-\Phi)\operatorname{fin.}\varrho}{3}\right)$$

§. 25. Reftat denique vt correctionem ex variabilitate ipfius i oriundam inueftigemus. Quoniam ergo eft $i = 1 + 3n\operatorname{cof.}\varrho - \frac{2(\lambda-\varkappa)}{\lambda} m \operatorname{cof.} \xi$ erit $di = -3nd\omega \operatorname{fin.} \varrho + 2(\lambda-\varkappa)md\omega \operatorname{fin.} \xi$. Differentiato ergo ipfo P pofito tantum i variabili, proueniet

$$dP = + \frac{3\,d\omega}{4\lambda}\left(+ 3 n \omega \sin.\varrho - \frac{3 n \sin.\varrho \sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} + \frac{3 n \sin.\varrho \sin.2(r-\Phi)}{2} + \frac{3 n \sin.\varrho \sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$$

$$- \frac{3(\lambda-\kappa) m\, d\omega}{4\lambda}\left(2\omega \sin.\xi \frac{\sin.\xi \sin.2(q-r)}{\lambda-1} + \sin\xi \sin 2(r-\Phi) + \frac{\sin.\xi \sin.2(q-\Phi)}{\lambda}\right)$$

cuius integrale quoque a valore ipſius Φ ſupra inuento ſubtrahi debet. Eſt autem ob $d\varrho = d\omega$: $\int \omega\, d\omega \sin.\varrho = -\omega \cos.\varrho + \sin.\varrho$ et $\int \omega\, d\omega \sin\xi - \frac{\omega}{\lambda} \cos.\xi + \frac{\sin\xi}{\lambda\lambda}$. Cum igitur ſit

$$dP = \frac{9 n\, d\omega}{4\lambda}\left(\omega \sin\varrho + \frac{\cos.(2q-2r-\varrho) - \cos.(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)} + \frac{\cos.(2r-\varrho-2\Phi) - \cos.(2r+\varrho-2\Phi)}{4} + \frac{\cos.(2q-\varrho-2\Phi) - \cos.(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda}\right)$$

$$- \frac{3(\lambda-\kappa) m\, d\omega}{2\lambda}\left(\omega \sin\xi + \frac{\cos(2q-2r-\xi) - \cos(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)} + \frac{\cos(2r-\xi-2\Phi) - \cos(2r+\xi-2\Phi)}{4} + \frac{\cos(2q-\xi-2\Phi) - \cos(2q+\xi-2\Phi)}{4\lambda}\right)$$

Huius integrale erit:

$$\frac{9n}{4\lambda}\left(-\omega\cos\varrho + \sin\varrho + \frac{\sin(2q-2r-\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-3)} - \frac{\sin(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-1)} + \frac{\sin(2r-\varrho-2\Phi)}{4} - \frac{\sin(2r+\varrho-2\Phi)}{12} + \frac{\sin(2q-\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda-1)} - \frac{\sin(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda+1)}\right)$$

$$\frac{-3(\lambda-\kappa) m}{2\lambda}\left(\frac{-\omega\cos\xi}{\kappa} + \frac{\sin\xi}{\lambda\lambda} + \frac{\sin(2q-2r-\xi)}{4(\lambda-1)(\lambda-2)} - \frac{\sin(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)(3\lambda-2)} + \frac{\sin(2r-\xi-2\Phi)}{4(2-\lambda)} - \frac{\sin(2r+\xi-2\Phi)}{4(2+\lambda)} + \frac{\sin(2q-\xi-2\Phi)}{4\lambda\lambda} - \frac{\sin(2q+\xi-2\Phi)}{12\lambda\lambda}\right)$$

His autem debite diſpoſitis et terminis nimis paruis reiectis reperietur

$$\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right) - \frac{9 n \sin.\varrho}{4\lambda} + \frac{3 m \sin.\xi}{2\lambda^3}$$
$$- \frac{3 \sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(-\frac{5}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+ \frac{3 \sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right) + \frac{9}{128\lambda^2} \sin.4(r-\Phi)$$
$$+ \frac{3 \sin.2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\right).$$

§. 26. Huius expreſſionis pars prior $C - \frac{3\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$ pendet a ſolo tempore a data epocha iam elapſo; ideoque

eoque dat motum nodorum medium; reliqui termini, qui pendent ab anomaliis solis et lunae, itemque horum corporum situ tum inter se tum respectu lineae nodorum, exhibebunt correctiones loci nodorum medii seu eius aequationes, quas perpendemus, postquam, motum medium definiuerimus. Primum autem posito $\omega = 360°$, prodibit motus nodorum medius tempore vnius anni siderei: cum autem sit $\lambda = 13,3685$ erit $1 - \frac{5}{8\lambda} - \frac{5}{8\lambda\lambda} = 0,9698506$ fiet motus nodorum annuus $= 19,5878$ graduum in antecedentia, quod est $= 19°, 35', 16''$. Tabulae autem astronomicae pro hoc tempore plus non exhibent quam $19°, 20', 32''$, ideoque motus ex theoria definitus superat obseruatum $14', 44''$, seu eius parte $\frac{1}{71}$ fere. Differentia haec nimis quidem exigua est, quam vt theoriam in suspicionem adducere possit; interim tamen eo magis operae pretium est hanc discrepantiam perpendere, quod Neutonus suo, quo vtitur ratiocinio, eum ipsum motum nodorum medium adipiscitur, quem obseruationes exhibent. Considerat autem primum orbitam lunae tanquam circularem, hincque fere eundem motum medium nimis magnum deducit, quem hic inuenimus, vti patet ex eius prop. XXX. lib. III. propositione vero sequente vbi ellipsin in locum circuli substituit, motum priorem diminuit in ratione axis transuersi ad coniugatum nempe 70 ad 69, sicque ad consensum cum experientia proxime accedit. Praeterquam autem quod lunam in ellipsi, in cuius centro, non foco alterutro, posita sit terra, moueri assumit, in quo ipso ab experientia recedit, integratio nostra clare euincit motum medium ab ellipticitate orbitae lunaris non affici; si quidem terra in foco ellipsis collocetur. Neque vero etiam termini in integratione omissi hunc motum medium diminuerent, quin potius si quantitas superior $\int Q d\Phi$ accuratius inuestigetur, accederent termini motum nodorum medium adhuc aliquantillum, sed insensibiliter, adaugentes. Quare in nulla alia re causa dissensus calculi nostri ab obseruationibus situs esse potest, nisi in valore ipsius dq, quem contra indolem motus lunae ex ellipsi deduximus. Hinc iste defectus perfecte suppleri ante non poterit, quam ipse motus lunae in sua orbita ad calculum fuerit reuocatus. Sufficiat ergo hic annotasse, motum nodorum medium hic inuentum parte sua $\frac{1}{79}$ diminui oportere, quo cum veritate conspirans reddatur. Coefficiens ergo $1 - \frac{5}{8\lambda} - \frac{1}{8\lambda\lambda}$, qui erat $= 0,9698506$, sua parte $\frac{1}{79}$ minui debebit, eritque propterea $= 0,957693$; cuius logarithmus est $= 9,9812263$.

§. 27. Inuento ergo loco medio lineae nodorum ad quoduis tempus propositum ex aequatione $\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}(1 - \frac{5}{8\lambda} - \frac{5}{8\lambda\lambda})$, ad quod negotium tabula mediorum motuum lineae nodorum est accommodata; iste locus pluribus aequationibus corrigi debet, quo verus obtineatur. Prima scilicet aequatio oritur ex termino $\frac{-n\, g \sin. \varrho}{4\lambda}$, pendetque ab anomalia excentrica solis, quae est medium arithmeticum proxime inter anomaliam mediam et veram. Quia autem discrimen inter anomaliam mediam et veram solis est vehementer exiguum, pro ϱ sine errore adhiberi poterit anomalia media solis a perigaeo computata. Quodsi autem more consueto anomalia media ab apogaeo sumatur, eius sinus negatiue sumi debet. Hinc si ϱ denotet

tet anomaliam mediam ſolis ad locum nodi medium, addi debet angulus ex iſta expreſſione $\frac{9n\,\mathrm{ſin.}\,\varrho}{4\lambda}$ oriundus; ſicque haec aequatio ab apogaeo ſolis vsque ad perigaeum ſit addenda, a perigaeo autem ad apogaeum ſubtrahenda. Haec aequatio ergo fit maxima, ſi anomalia media ſolis ſit 90°, vel 270°, tumque ob $n = 0,01690$ et $\lambda = 13,3685$, valebit 586″ ſeu 9′, 46″ pro aliis autem anomaliis decreſcit in ratione earum ſinuum. In tabulis Leadbetteri haec aequatio ſinui anomaliae mediae ſolis proportionalis quoque occurrit, maxima vero aequatio ibi eſt tantum 9′, 30″, a noſtra deficiens 16″.

§. 28. Secunda aequatio $\frac{3m\,\mathrm{ſin.}\,\xi}{2\lambda^3}$ proportionalis eſt ſinui anomaliae excentricae ſeu mediae lunae, quae ſi ab apogaeo computetur, ſubtrahi debet a loco nodi dum luna ab apogaeo ad perigaeum progreditur, dum autem a perigaeo ad apogaeum reuertitur, addi debet. Maxima aequatio hinc oriunda eſt tantum 18″, et hancobrem in calculo aſtronomico ſine ſenſibili errore praetermittitur, neque etiam eius mentio in vllis tabulis aſtronomicis occurrit.

§. 29. Tertia aequatio oritur ex termino $\frac{-3\,\mathrm{ſin.}\,2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}$ $(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda})$ ac propterea proportionalis eſt ſinui duplae diſtantiae lunae a ſole, ſubtrahatur ſcilicet locus ſolis a loco lunae, et differentia duplicata dabit eum angulum, cuius ſinui haec aequatio eſt proportionalis. Haec ergo aequatio erit maxima in octantibus, atque tum valebit 475 ſeu 7′, 55″, ex qua pro reliquis aſpectibus aequationes facile definiuntur. Ceterum a nouilunio vsque ad primam quadraturam haec aequatio debet ſubtrahi, indeque ad oppoſitionem addi, porro transeundo ab oppoſitione ad

 quadra-

quadraturam iterum debet ſubtrahi, et ab vltima quadratura ad coniunctionem addi. Vel breuius hoc modo: dum luna a ſyzygiis ad quadraturas procedit, haec aequatio debet ſubtrahi, dum autem luna a quadraturis ad ſyzygias tranſit, debet addi. Occurrit quidem in tabulis Leadbetteri aequatio ſub hoc nomine, quae ſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, cuius maxima correctio eſt 1°, 45′, 0″. Verum haec aequatio confundi videtur cum ſequente, quae a diſtantia ſolis a nodo pendet; vt mox videbimus. Praetermittitur ergo vulgo haec aequatio, etſi ea locum nodi ad 8′ fere mutare poſſit. Verum quoniam haec aequatio in ſyzygiis, vbi locum nodi quam accuratiſſime noſſe oportet, euaneſcit, in reliquis autem occaſionibus locum lunae non ſenſibiliter afficit, error ex eius praetermiſſione oriundus non ſentitur.

§. 30. Quartam aequationem nodi lunae ſuppeditat iſte terminus, $\frac{\pm 3\,\text{ſin.}\,2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1-\frac{3}{4\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$, cum quo ob ſimilitudinem nominis iſte $\frac{9}{128\lambda^2}\,\text{ſin.}\,4(r-\Phi)$ coniungi poteſt: quia ambo a diſtantia ſolis a nodo pendent, prior quidem ab eius duplo, alter ab eius quadruplo. Huius aequationis pars prior, poſtquam ſol a nodo eſt progreſſus vsque ad nonageſimum gradum, debet addi, a nonageſimo vero gradu vsque ad ſequentem nodum, aequatio debet ſubtrahi, maxima autem fit aequatio dum ſol a linea nodorum angulo 45° diſtat; tumque eſt 5449″ ſeu 1°, 30′, 49″, cum qua aequatione ſine dubio confunditur ea, quam Leadbetter refert ad diſtantiam lunae a ſole. Altera pars huius aequationis, quae cum priori in

eadem

eadem tabula comprehendi poteſt, addi debet a tranſitu ſolis vel a nodo vel a quadrato nodi vsque ad 45°, reliquis caſibus ſubtrahi: maxima autem eſt dum ſol vel a linea nodorum vel a recta illam normaliter ſecante diſtat angulo 22°, 30′, hocque caſu eſt 1′, 21″.

§. 31. Quinta aequatio petenda eſt ex termino $\frac{+3\,\mathrm{ſin.}\,2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{4\lambda\lambda}\right)$ ideoque pendet a diſtantia lunae a nodo et quia ſinui huius duplae diſtantiae eſt proportionalis, dum luna a nodo recedit vsque ad maximam inclinationem, ad locum medium addi debet, a quadrato autem nodi vsque ad ipſam lineam nodorum debet ſubtrahi. Maxima autem fit haec aequatio, dum luna a linea nodorum angulo ſemirecto diſtat, quo caſu eſt: 6′, 58″. Cum igitur hae tres vltimae aequationes, ſi ſingulae fiant maximae, coniunctim conſtituant 1°, 45′, 42″, veriſimile eſt eas in tabulis Leadbetteri, in vnicam ſub titulo duplae diſtantiae ſolis a luna eſſe collectas, qui error tolerari poſſet, ſi modo iſti tabulae titulus duplae diſtantiae ſolis a nodo praefigeretur; quoniam aequatio hinc oriunda eſt maxima. Ceterum plures aliae aequationes inſuper huc adduci poſſent, quae autem, quoniam tantum in minutis ſecundis, merito praetermittuntur: cum ipſa formula differentialis et integratio iam ſit ita comparata, vt ad veritatem tantum proxime accedat, ibique iam minuta ſecunda ſint neglecta. Hancobrationem hic quoque correctio ex anomalia media lunae reſultans tuto omittitur, reliquae autem quatuor aequationes neceſſario retinentur; quoniam locum nodorum ad plura minuta prima mutare valent. Ex his quatuor correctioni-

bus

bus duae tantum vt iam notauimus, in tabulis aſtronomicis recentiſſimis reperiuntur inſertae, hincque ex hoc capite tabulae aſtronomicae non mediocri emendatione indigent.

§. 32. Determinato loco nodi ſupereſt, vt variationem inclinationis orbitae lunae ad eclipticam, quam vocauimus $= \theta$, inueſtigemus. Ad hoc in ſubſidium vocanda eſt poſterior aequatio, quae §. 18 erat inuenta:

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p.\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{2\,Gv\,dq\,\text{coſ.}\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

ſeu cum proxime ſit $\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3} = \frac{-3\,v\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s}{f^3}$, erit

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p.\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,(q-\Phi)} = \frac{-3\,Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{2\,Gf^3\,dq\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

At ante oſtendimus eſſe $\frac{\text{tang.}\,p}{\text{ſin.}\,(q-\Phi)} = \text{tang}\,\theta$, vnde fiet

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta.\,\text{ſin.}\,\Phi = d.\,l\,\text{tang.}\,\theta + \frac{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{-3\,Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{2\,Gf^3\,dq\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

Quod ſi autem ponamus ſolem ſecundum motum medium circa terram in diſtantia $= a$, tempore dT angulum $d\omega$ abſoluere, fiet $dT^2 = \frac{2Ga^3\,d\omega^2}{Fgg}$; ideoque

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{3\,a^3\,d\omega^2\,\text{ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

At in §. 20 erat:

$$d\Phi = \frac{-3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$ hincque obtinebitur

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{ſin.}\,\Phi}(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(q-\Phi) - \text{ſin.}\,q)$$

at eſt $\text{ſin.}\,q = \text{ſin.}\,(q-\Phi)\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,(q-\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$, quo ſubſtituto fit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{coſ.}\,(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$

Quia vero eſt $\text{ſin.}\,A\,\text{coſ.}\,B = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A+B) - \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(B-A)$ erit $\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{coſ.}\,(q-\Phi) = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(q+r-2\Phi) - \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(q-r)$ quod per $\text{coſ.}\,s = \text{coſ.}\,(q-r)$ multiplicatum

dat

dat: $\frac{1}{4}\text{ſin.}\,2(q-\Phi)+\frac{1}{4}\text{ſin.}\,2(r-\Phi)-\frac{1}{4}\text{ſin.}\,2(q-r)$: hincque erit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta=\frac{-3a^3\,d\omega^2}{4y^3\,dq}\left(\text{ſin.}\,2(q-\Phi)+\text{ſin.}\,2(r-\Phi)-\text{ſin.}\,2(q-r)\right)$$

Cuius formulae integrale ſi fuerit $=R$ erit l tang. $\theta=C+R$ et tang. $\theta=Ce^{R}$, et quia R erit quantitas valde parua, erit proxime tang. $\theta=C(1+R)$

§. 33. Si ponamus vt ſupra $\lambda:1$ pro ratione medii motus lunae ad medium motum ſolis, atque ſtatuamus $dr=d\omega$ et $dq=\lambda d\omega$ neglectis aberrationibus exiguis ab his valoribus, erit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta=\frac{-3d\omega}{4\lambda}\left(\text{ſin.}\,2(q-\Phi)+\text{ſin.}\,2(r-\Phi)-\text{ſin.}\,2(q-r)\right)$$

cuius integrale, ſi Φ tanquam conſtans conſideretur erit.

$$l\,\text{tang.}\,\theta=lC+\frac{3}{8\lambda}\left(\frac{\text{coſ.}\,2(q-\Phi)}{\lambda}+\text{coſ.}\,2(r-\Phi)-\frac{\text{coſ.}\,2(q-r)}{\lambda-1}\right)$$

Variabilitas autem ipſius Φ hic parum mutat, quia angulus θ ipſe eſt ſatis paruus, interim tamen ſi eius rationem habere velimus, differentiemus expreſſionem inuentam poſito Φ tantum variabili, eritque

$\frac{3d\Phi}{4\lambda}\left(\frac{\text{ſin.}\,2(q-\Phi)}{\lambda}+\text{ſin.}\,2(r-\Phi)\right)$. Cum autem ſit

$$d\Phi=\frac{3d\omega}{4\lambda}\left(1+\text{coſ.}\,2(q-r)+\text{coſ.}\,2(q-\Phi)+\text{coſ.}\,2(r-\Phi)\right)$$

abibit illud differentiale in hanc formam:

$$\frac{9d\omega}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\text{ſin.}\,2(q-\Phi)}{\lambda}+\text{ſin.}\,2(r-\Phi)+\frac{\text{ſin.}\,2(2q-r-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\text{ſin.}\,2\,r-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\text{ſin.}\,2(q-\Phi)}{2}\right.$$
$$-\frac{\text{ſin.}\,2(q-2r+\Phi)}{2}+\frac{\text{ſin.}\,4(q-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\text{ſin.}\,2(q+r-2\Phi)}{2}-\frac{\text{ſin.}\,2(q-r)}{2}$$
$$\left.+\frac{\text{ſin.}\,2(q+r-2\Phi)}{2\lambda}+\frac{\text{ſin.}\,2(q-r)}{2\lambda}+\frac{\text{ſin.}\,4(r-\Phi)}{2}\right)$$

Cuins integrale, quod a ſuperiore valore ipſius l tang. θ ſubtrahi debet eſt

$$\frac{-9}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\text{coſ.}\,2(q-\Phi)}{4\lambda}+\frac{\text{coſ.}\,2(q-\Phi)}{2\lambda\lambda}+\frac{\text{coſ.}\,2(r-\Phi)}{2}+\frac{\text{coſ.}\,2(r-\Phi)}{4\lambda}-\frac{\text{coſ.}\,2(q-1)}{4(\lambda-1)}+\frac{\text{coſ.}\,2(q-r)}{4\lambda(\lambda-1)}\right)$$

neglectis reliquis terminis vtpote vehementer exiguis.

 Hinc

Hinc ergo erit

$$l\,\text{tang.}\ \theta = l\,C + \tfrac{5}{8\lambda}\,\text{cos.}\,2(r\text{-}\Phi)\left(1+\tfrac{7}{4\lambda}+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)$$
$$+ \tfrac{5}{8\lambda\lambda}\,\text{cos.}\,2(q\text{-}\Phi)\left(1+\tfrac{7}{8\lambda}+\tfrac{2}{4\lambda\lambda}\right)$$
$$- \tfrac{3}{8\lambda(\lambda-1)}\,\text{cos.}\,2(q\text{-}r)\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}-\tfrac{7}{8\lambda\lambda}\right)$$

Posito ergo breuitatis gratia l tang. $\theta = lC + R$ erit ob R valde paruum tang. $\theta = C(1+R)$. Si $R = 0$ fiat inclinatio $\theta = k$, reliquis casibus fit $\theta = k + u$, erit $C =$ tang. k et tang. $\theta =$ tang. $k + \frac{u}{\text{cos.}\,k^2} =$ tang. $k + R$ tang. k; vnde fit $u = R$ sin. k cos. $k = \frac{1}{2} R$ sin. $2k$. Cognito ergo valore medio inclinationis k ad quoduis tempus correctio, quae ad eam vel addi vel ab ea subtrahi debet inuenietur: quae aequatio addenda si ponatur $= u$, erit

$$u = \tfrac{5}{16\lambda}\left(1+\tfrac{5}{4\lambda}+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(r\text{-}\Phi) = 0{,}014831\,\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(r\text{-}\Phi)$$
$$+ \tfrac{15}{16\lambda\lambda}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}+\tfrac{3}{4\lambda\lambda}\right)\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(q\text{-}\Phi) + 0{,}001082\,\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(q\text{-}\Phi)$$
$$- \tfrac{3}{16\lambda(\lambda-1)}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}-\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(q\text{-}r) - 0{,}001164\,\text{sin}\,2k\,\text{cos}\,2(q\text{-}r)$$

§. 34. Si et sol et luna versentur in linea nodorum, omnes hi anguli euanescunt, fitque $u = 0{,}014749$ sin. $2k$, hocque casu inclinatio orbitae ad eclipticam erit maxima. Sin autem et sol et luna a linea nodorum distent angulo recto, ita vt sit $q - \Phi = 90°$ et $r - \Phi = 90°$, et $q - r = 0$, inclinatio omnium erit minima, fit autem $u = -0{,}017077$ sin. $2k$. Differentia ergo inter inclinationem maximam et minimam erit $0{,}031826$ sin. $2k$. In plerisque autem tabulis astronomicis statuitur minima lunae inclinatio $= 4°, 59', 35''$; vnde fit $k - 0{,}017077$ sin. $2k = 4°, 59', 35''$, hincque $k = 5°, 10', 7''$, et l sin. $2k = 9{,}253934$. Maxima ergo

ergo inclinatio, dum ambo luminaria in linea nodorum verſantur erit $= 5°, 19', 13''$. Ceterum ad inclinationem quouis tempore definiendam triplici aequatione erit opus, quae vel addi debent vel ſubtrahi ab inclinatione media $5°, 10', 7''$. Harum aequationum prima, quae reliquas binas magnitudine multum excedit, pendet a diſtantia ſolis a nodo, huiuſque duplae diſtantiae coſinui eſt proportionalis, quae aequatio dum fit maxima erit $9', 9''$. Secunda aequatio proportionalis eſt coſinui duplae diſtantiae lunae a nodo, et dum fit maxima praebet $40''$. Tertia aequatio coſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, et dum fit maxima, erit $43''$, vnde patet has duas poſteriores aequationes ſine ſenſibili errore in praxi omitti poſſe, ita vt prima ſola a diſtantia ſolis a nodo pendens ſufficere poſſit. Cum autem tabulae maximam inclinationem orbitae lunaris tantum $5°, 17', 20''$ conſtituant, valor ipſius k diminui debet, ſtatuamus ergo $k = 5°, 8', 45''$, vt ſit l ſin. $2k = 9,2520250$, eritque inclinatio maxima $= 5°, 17', 48''$, et minima $= 4°, 58', 16''$. Quamuis autem haec differentia inter inclinationem maximam ac minimam ſit maior quam tabulae exhibent, duobus fere minutis primis, tamen ideo non in ſuſpicionem cadit, cum quoniam in tabulis binae reliquae aequationes negliguntur, tum quia per obſeruationes vehementer eſt difficile hos limites exactiſſime conſtituere.

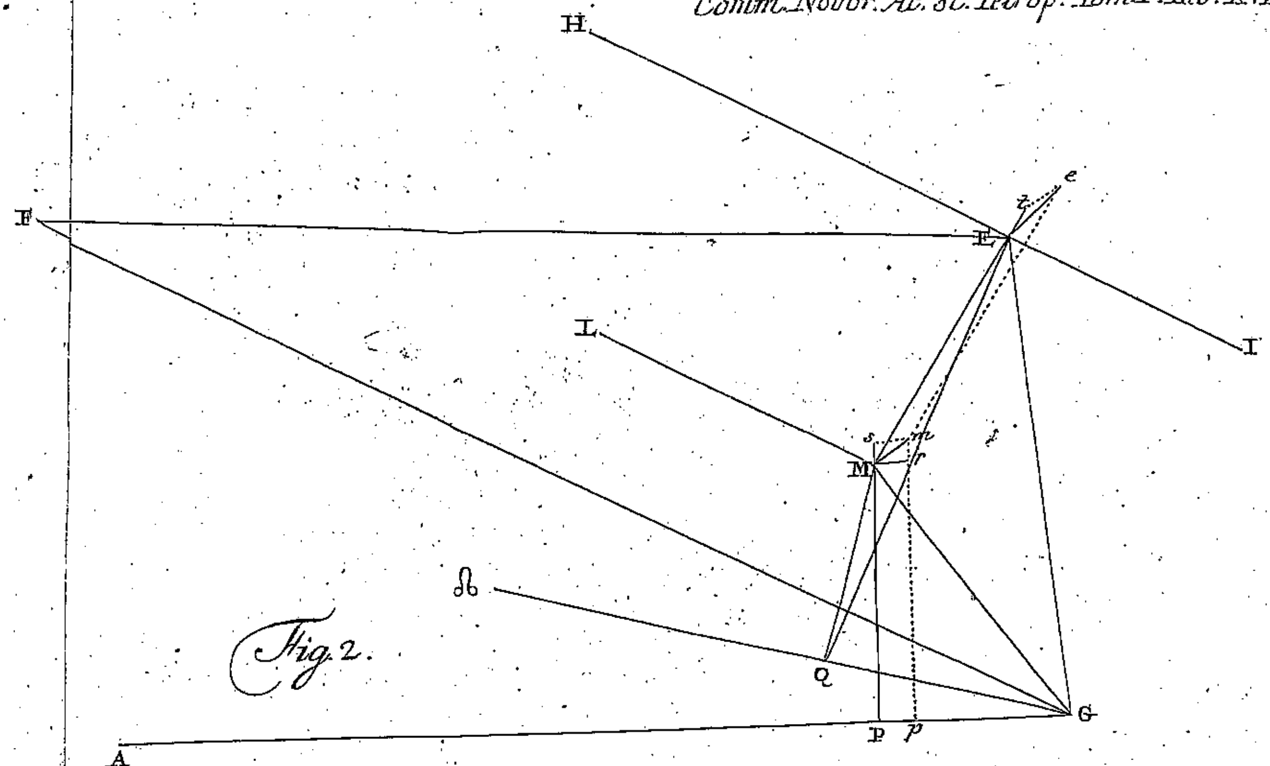


Fig. 2.

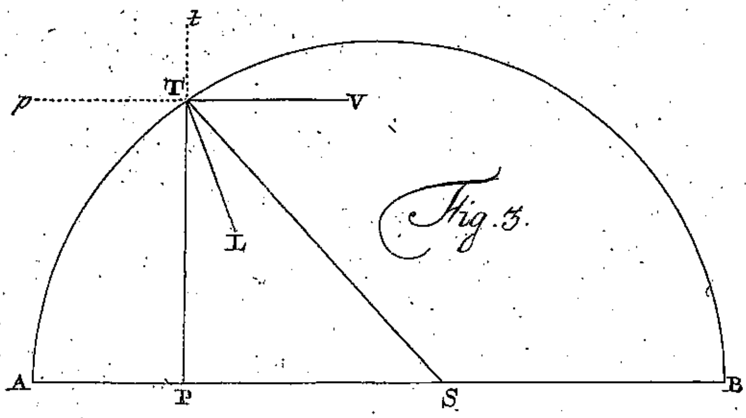


Fig. 3.

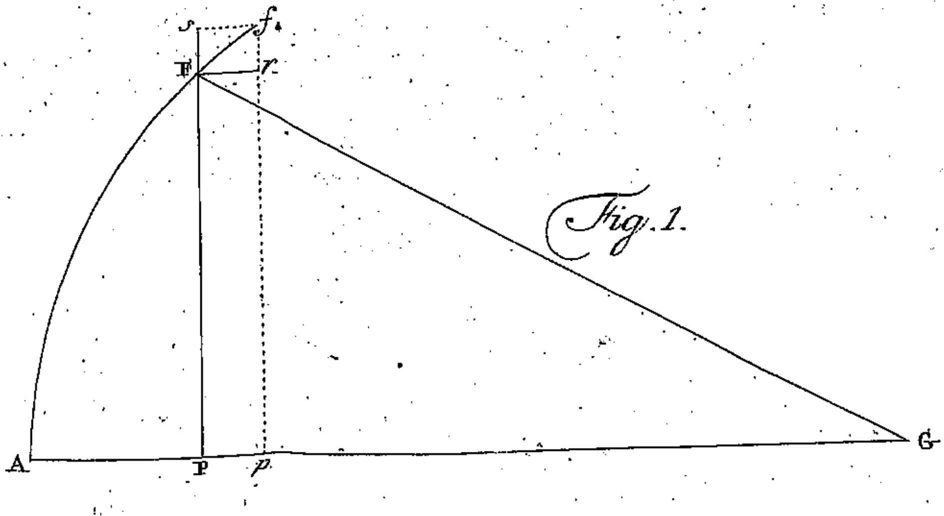
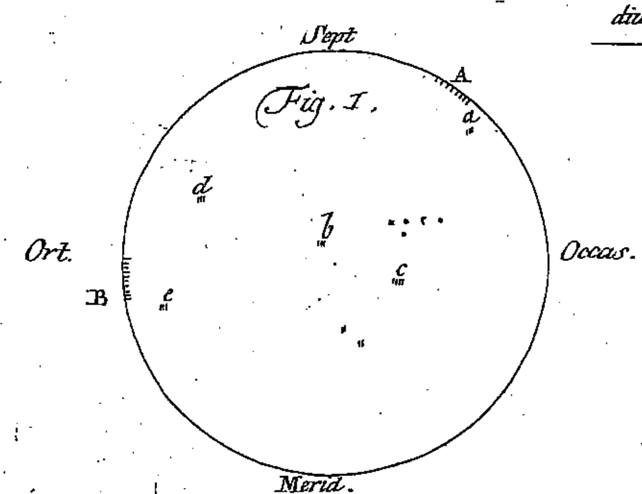
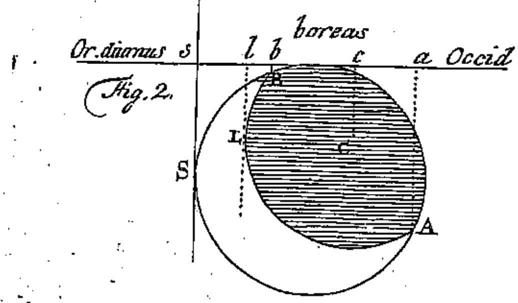
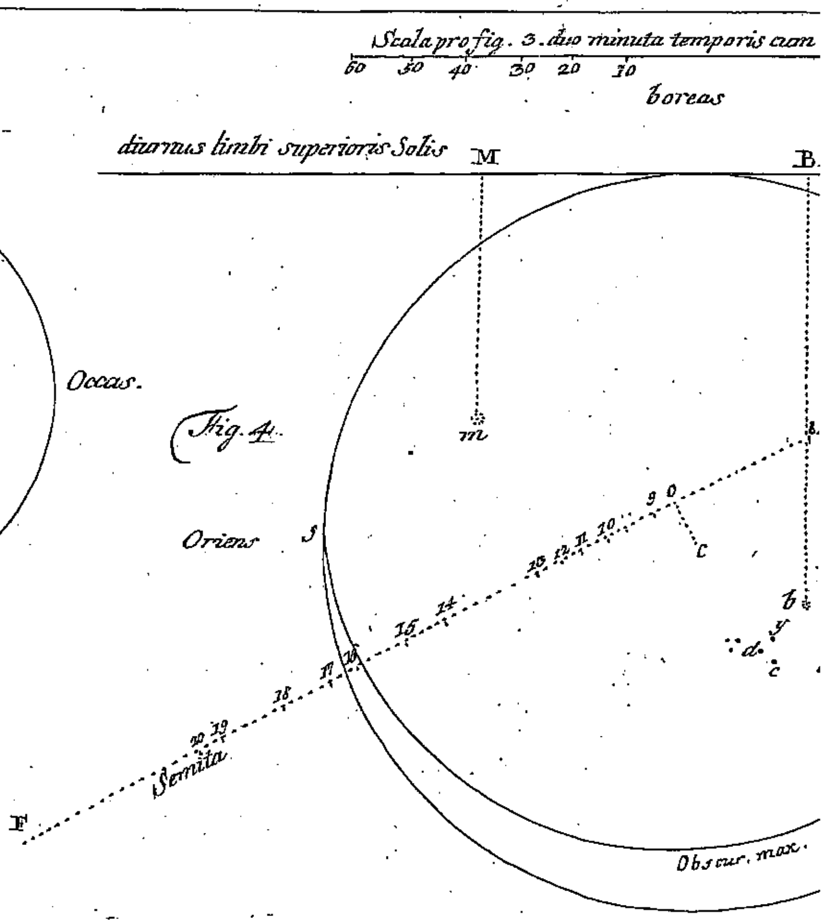


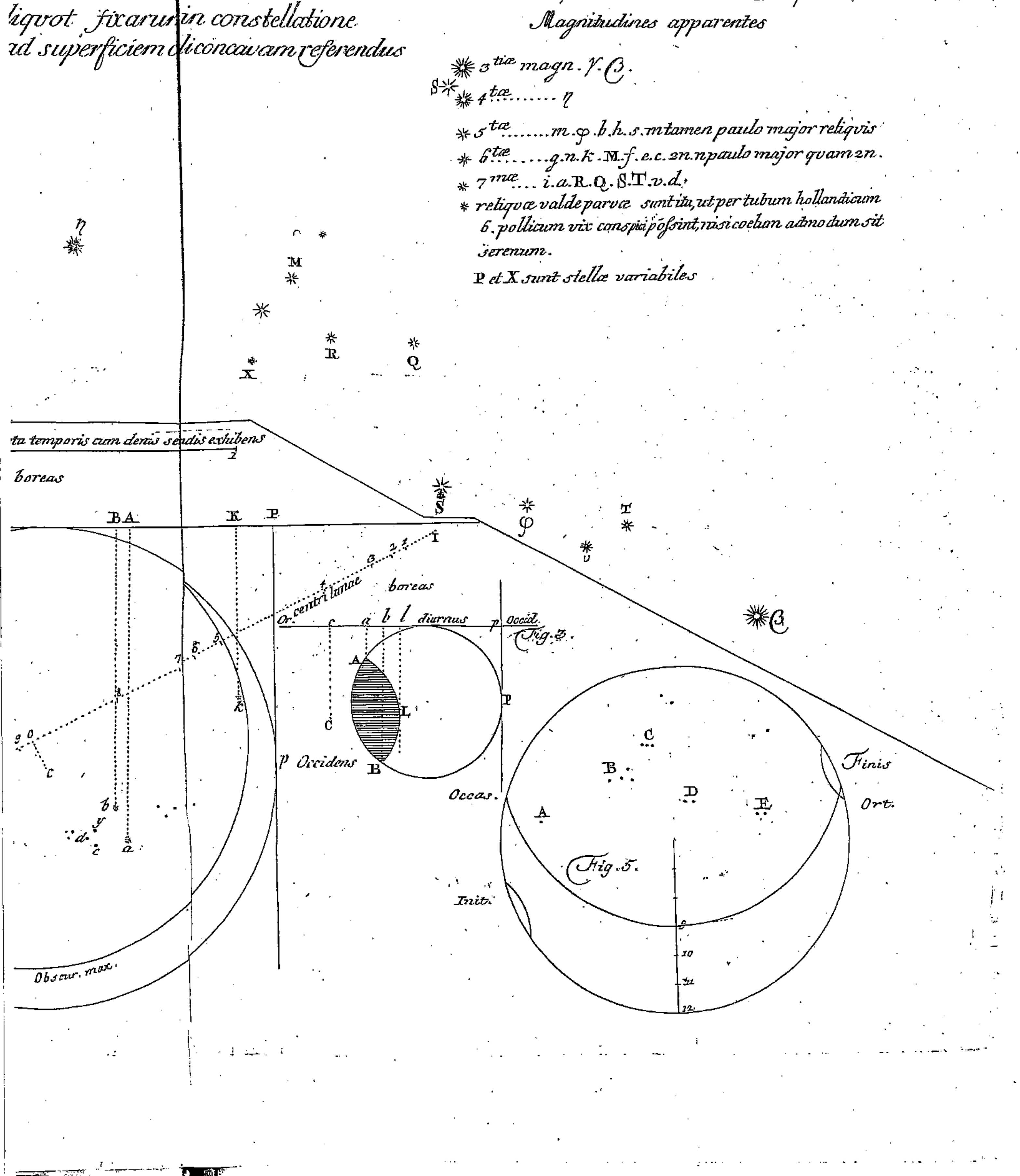
Fig. 1.

Situs aliquot fix
Cygni ad superfic









...liquot fixarum in constellatione
...ad superficiem concavam referendus
Magnitudines apparentes
3tiæ magn. γ. C.
4tæ ...... η
5tæ ...... m. φ. b. h. s. m tamen paulo major reliquis
6tæ ...... g. n. k. M. f. e. c. 2n. n paulo major quam 2n.
7mæ ... i. a. R. Q. S. T. v. d.
reliquæ valde parvæ sunt ita, ut per tubum hollandicum 6. pollicum vix conspici possint, nisi coelum admodum sit serenum.
P et X sunt stellæ variabiles
...ta temporis cum denis secundis exhibens
boreas
Or. centri lunae
boreas
diurnus
Occid.
Fig. 3.
P Occidens
Occas.
Finis
Ort.
Fig. 5.
Init.
Obscur. max.