QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR.

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Cum luna perpetuo ad terram vrgeatur, quaecunque huius sollicitationis sit causa, necesse est vt terra simili quadam vi versus lunam nitatur. Si enim sol, a cuius vi motus lunae maxime perturbatur, e medio tolleretur, atque terra cum luna tantum in vniuerso relinqueretur, dubium est nullum, quin terrae et lunae commune centrum grauitatis vel quiesceret, vel vniformiter in directum progressurum esset. Hinc dum luna circa terram reuolueretur, vtrumque corpus simili quodam motu circa centrum grauitatis gyraretur; atque, si vires teneant rationem reciprocam duplicatam distantiarum, tam terra quam luna in sectione conica alterum focum in communi grauitatis centro habente, moueretur. Sin autem tam terra quamluna motu omni priuaretur, recta ad se inuicem accederent, et in communi centro grauitatis conuenirent. Vnde sequitur vires accelerantes, quibus terra et luna sollicitantur, ipsis horum corporum massis reciproce fore proportionales, ita vt vis, qua luna ad terram acceleratur, se habitura sit ad vim, qua terra vicissim ad lunam concitatur vti massa seu quantitas materiae in terra contentae

tentae ad maſſam lunae. Quodſi ergo maſſa terrae ſit $=T$, et maſſa lunae $=L$, atque vis acceleratrix, qua luna ad terram incitatur, ponatur $=V$, erit vis acceleratrix, qua terra ad lunam vrgebitur $=\frac{LV}{T}$. Cum igitur vis V ſit cognita, ex ea quoque vis, qua terra ad lunam ſollicitatur, cognoſcetur; ſi modo ratio inter maſſas terrae et lunae fuerit nota.

§. 2. Vis autem acceleratrix V, qua luna ad terram pellitur, facile ad grauitatem naturalem in ſuperficie terrae comparatur. Indicetur enim vis grauitatis naturalis vnitate, ſitque radius terrae $=r$, et diſtantia lunae a terra $=z$, quoniam vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, erit vis, qua luna terram verſus acceleratur, $=\frac{rr}{zz}=V$; hincque ergo vis, qua terra lunam verſus impellitur, erit $=\frac{Lrr}{Tzz}$, ſeu ſe habebit ad grauitatem naturalem vti $\frac{Lrr}{Tzz}$ ad 1. Cum igitur terra continuo tanta vi ad lunam vrgeatur viribus, quibus ad ſolem trahitur, non perfecte obediet, neque idcirco in ellipſi reuoluetur, cuius alter focus ſit in centro ſolis conſtitutus. In ſuperiori quidem diſſertatione, vbi nouas tabulas pro motu ſolis condere ſum conatus, aſſumſi commune centrum grauitatis terrae et lunae in ellipſi circa ſolem in eius foco exiſtentem reuolui, atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab iſta ellipſi ad quoduis tempus aſſignaui. Verum quanquam haec hypotheſis ad veritatem proxime accedit, atque adeo perfecte conueniret, ſi vires diſtantiis directe eſſent proportionales, tamen operae pretium videtur, in hunc ipſum errorem, quo iſta hypotheſis a veritate recedit, diligentius inquire-

 re.

re. Hunc in finem nulla communis centri grauitatis ratione habita, deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigabo, quod negotium ad maxime complicatos calculos deducit, cum illa hyppothesis rem facillime expediuisset.

§. 3. Quo autem vim, qua terra a luna sollicitatur, cognoscamus, necesse est, vt ratio, quam massa lunae ad massam terrae tenet, inuestigetur. Si quidem assumamus corpus lunae ex simili materia esse conflatum, atque terram, ratio illa erit triplicata rationis diametrorum. Quare cum sit diameter terrae ad diametrum lunae vti 365 ad 100, foret massa terrae ad massam lunae vti 4863 ad 100 seu vt 48 ad 1 proxime. Neutonus quidem ex phaenomenis aestus maris terram tricies nouies tantum grauiorem luna constituit, verum Celeb. Daniel Bernoulli in sua eximia de aestu maris dissertatione ostendit vim lunae multo esse minorem, quam Neutonus statuisset, ita vt ratio 48 ad 1 propius ad veritatem accedat, quam ratio 39 ad 1. In hac autem comparatione ad vim solis simul spectatur, quae a distantia solis a terra pendet. Ostendi autem in dissertatione de diminutione motus planetarum, si parallaxis soli horizontalis assumatur 13″, vim solis in distantia 320, 708 r ipsi grauitati fore aequalem; quare si haec distantia 320, 708 r ponatur $=f$, et massa solis $=S$ erit $\frac{S}{ff}=\frac{T}{rr}$; ideoque $S=102854\,T=\frac{ffT}{rr}$. Quod si autem distantia solis a terra ponatur $=c$, et distantia lunae a terra $=b$, ad mare commouendum est vis solis ad vim lunae vt $\frac{S}{c^3}$ ad $\frac{L}{b^3}$ hoc est vt $\frac{Tff}{c^3 rr}$ ad $\frac{L}{b^3}$. Quare si vis lunae fuerit ad ad vim ſolis vt n ad 1, erit $\frac{L}{b^3}$ ad $\frac{Tff}{c^3rr}$ vt n ad 1, hincque $L:T = nffb^3 : c^3rr$ vnde ſi ſit $n = 4$ Neutonus deduxit $L:T = 1:39$ manet enim ratio ff ad c^3 quaecunque parallaxis aſſumatur, perpetuo eadem, ſin autem eſſet, vt Cel. Bernoulli ſtatuit $n = 3$, vel tantum $2\frac{1}{2}$ foret $L:T = 1:52$ ſeu $1:62$; inter quas rationes illa, quam ex mole lunae deduximus, medium quoddam a veritate fortaſſe non multum remotum tenet.

§. 4. Cognita ergo vi lunae motum terrae perturbante ſiue potius ea, quaſi eſſet cognita, aſſumta, ipſum motum terrae inueſtigemus. Quieſcat ergo ſol in S, cuius maſſa ſit $= S$, circa quem reuoluatur terra in orbita ATB, cuius media a ſole diſtantia ſit $= c$: maſſa autem terrae ſit $= T$; ſtatuatur in A terrae aphelium et in B perihelium, quatenus quidem eius motus a luna non perturbaretur. Elapſo iam tempore $= t$, poſtquam terra ex aphelio A eſt egreſſa, peruenerit in locum T, voceturque diſtantia $ST = z$, et angulus $AST = \Phi$. Luna autem nunc verſetur in L, ita vt a coniunctione ſolis diſtet angulo $STL = \theta$, quem angulum cum tempore t vniformiter creſcere aſſumamus, quoniam variationes a motus lunae inaequalitate oriundae ſenſibiles eſſe nequeunt, ob eandemque rationem diſtantiam lunae a terra LT tanquam conſtantem conſiderabimus ſitque $LT = e$; et ipſa lunae maſſa $= L$. Poſito iam radio terrae $= r$, et vi grauitatis $= 1$, terra primum ad ſolem vrgebitur vi $= \frac{Srr}{Tzz}$; tum vero ad lunam vi $= \frac{Lrr}{Tee}$ Ex T ad AB ducatur normalis TP, et TV ipſi AB parallela, viresque ſollicitantes ſecundum has directiones Tab. XVI. Fig. 3.

re-

resoluantur. A vi ergo solis terra in directione TP sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{Srr\,sin.\,\Phi}{Tzz}$, et in directione TV vi $= \frac{Srr\,cos.\,\Phi}{Tzz}$. Deinde ob angulum $LTV = \theta + \Phi$, a vi lunae terra in directione TP vrgebitur vi $= \frac{Lrr\,sin.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et in directione TV vi $= \frac{Lrr\,cos.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$. Omnino ergo terra incitabitur secundum directionem TP vi $= \frac{Srr\,sin.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,sin.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et secundum directionem TV vi $= \frac{Srr\,cos.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,cos.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$.

§. 5. Ponatur $SP = x$ et $PT = y$, vt sit $x = z\,cos.\,\Phi$, et $y = z\,sin.\,\Phi$, atque motus terrae resoluatur secundum directiones Tp et Tt, quae sint coordinatis SP et PT parallelae, eritque ob elementum temporis $= dt$, celeritas terrae secundum directionem $Tp = \frac{dx}{dt}$ seu TV $= -\frac{dx}{dt}$, quia abscissa SP progrediente luna diminuitur: et celeritas terrae secundum directionem $Tt = \frac{dy}{dt}$. Hinc ille motus requirit vim acceleratricem in directione $Tp = \frac{2\,ddx}{dt^2}$ seu in directione $TV = -\frac{2\,ddx}{dt^2}$: iste autem motus requirit vim acceleratricem in directione $Tt = \frac{2\,ddy}{dt^2}$ seu in directione $TP = -\frac{2\,ddy}{dt^2}$, sumto elemento temporis dt constante. His igitur viribus aequales statuantur illae vires, quibus terra secundum has directiones reuera sollicitari inuenta est, sicque prodibunt duae sequentes aequationes

$$-\frac{2\,ddx}{dt^2} = \frac{Srr\,cos.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,cos.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

$$-\frac{2\,ddy}{dt^2} = \frac{Srr\,sin.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,sin.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

At

At cum ſit $x = z\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = z\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit:

$$dx = dz\,\text{coſ.}\,\Phi - z\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi;\ dy = dz\,\text{ſin.}\,\Phi + z\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

$$ddx = ddz\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,dz\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - z\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi$$

$$ddy = ddz\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,dz\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + z\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi$$

qui valores in aequationibus illis ſubſtituti dabunt:

$$ddz\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,dz\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - z\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi = -\frac{rr\,dt^2}{2\,T}\left(\frac{S\,\text{coſ.}\,\Phi}{zz} + \frac{L\,\text{coſ.}(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

$$ddz\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,dz\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + z\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\text{ſin}\,\Phi = -\frac{rr\,dt^2}{2\,T}\left(\frac{S\,\text{ſin}\,\Phi}{zz} + \frac{L\,\text{ſin.}(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

Ex his ergo duabus aequationibus definiri debet relatio inter tres quantitates variabiles z, Φ et t quoniam θ a t pendens aſſumimus.

§. 6. Harum aequationum inuentarum prior multiplicetur per ſin. Φ, poſterior vero per coſ. Φ, haecque ab illa ſubtrahatur quo facto prodibit:

$$-2\,dz\,d\Phi - z\,dd\Phi = \frac{L\,rr\,dt^2\,\text{ſin.}\,\theta}{2\,T\,ee}.$$

eſt enim ſin. $(\theta+\Phi)$ coſ. Φ − coſ. $(\theta+\Phi)$ ſin. Φ = ſin. θ. Deinde quia eſt coſ. $(\theta+\Phi)$ coſ Φ + ſin $(\theta+\Phi)$ ſin. Φ = coſ. θ, ſi aequatio prior per coſ. Φ poſterior vero per ſin. Φ multiplicetur ambaeque inuicem addantur, reperitur.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\frac{rr\,dt^2}{2\,T}\left(\frac{S}{zz} + \frac{L\,\text{coſ.}\,\theta}{ee}\right)$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{S\,rr}{T\,cc} = m$; denotante c diſtantiam mediam terrae a ſole ſeu potius ſemilatus rectum, quod ob excentricitatem valde paruam a diſtantia media non multum diſcrepabit, erit ob $S = \frac{T\,ff}{rr}$, $m = \frac{ff}{cc} = 0,000408587$. Deinde ſit $\frac{L\,rr}{T\,ee} = n$, et, ſi $\frac{L}{T} = \frac{1}{48}$ atque $e = 60\,r$ reperietur $n = 0,00000579$, ita vt ſit,

 $n =$

$n = \frac{m}{70}$ circiter. Secundum mentem Neutoni foret $n = \frac{m}{57}$ et fecundum Bernoullium $n = \frac{m}{88}$. Erit ergo n prae m quantitas fatis parua, vt quantitates multo minores quam n facile reiici queant. Introductis autem his duabus litteris m et n aequationes ante inuentae tranfibunt in fequentes.

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \,\text{fin.}\,\theta \text{ et}$$

$$ddz - zd\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt\left(\frac{mcc}{zz} + n\,\text{cof.}\,\theta\right)$$

in quibus aequationibus differentialibus fecundi gradus differentiale dt affumtum eft conftans; quod in integratione probe eft obferuandum.

§. 7. Si luna prorfus abeffet, aequatio prior fieret:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = 0.$$

quae per z multiplicata et integrata praebet:

$$zzd\Phi = A\,dt$$

denotante A quantitatem quampiam conftantem. Altera autem aequatio hoc cafu quo $n = 0$ abit in hanc

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{mccdt^2}{2zz}.$$

At ex priori eft $d\Phi^2 = \frac{A^2dt^2}{z^4}$, quo valore fubftituto fit

$$ddz = \frac{A^2dt^2}{z^3} - \frac{mccdt^2}{2zz}$$

quae multiplicata per dz et integrata dabit ob dt conftans:

$$\tfrac{1}{2}dz^2 = \frac{mccdt^2}{2z} - \frac{A^2dt^2}{2zz} - \frac{Bdt^2}{2}$$

feu $dt = \frac{zdz}{\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

et $d\Phi = \frac{Adz}{z\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

Ponatur $z = \frac{cc}{u}$ erit $d\Phi = \frac{-Adu}{\sqrt{(mc^4u - AAuu - Bc^2)}}$

Si iam conftantes A et B ita determinentur, vt fit $AA = \frac{mc^3}{2}$ feu $A = c\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$ et $B = \frac{m(cc-kk)}{2c}$ inuenietur $u = c - k\,\text{cof.}\,\Phi$. Pofito ergo $\Phi = 0$, erit $u = c - k$ et diftantia ſtantia aphelii a ſole $AS = \frac{cc}{c-k}$. Verum poſito $\Phi = 180°$, fiet diſtantia perihelii a ſole $BS = \frac{cc}{c+k}$, vnde axis transuerſus $AB = \frac{2c^3}{cc-kk}$, et diſtantia focorum $= \frac{2cck}{cc-kk}$ porroque axis coniugatus $= \frac{2cc}{\sqrt{(cc-kk)}}$ et parameter $= 2c$ vti aſſumſimus.

§. 8. Accedente autem vi lunae, cum ex priori aequatione ſit:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

erit ob n numerum valde paruum proxime ſaltem

$$zzd\Phi = Adt = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}.$$

et quia orbita terrae fere eſt circularis, ſi pro z ponatur c, erit $d\Phi = \frac{dt\sqrt{m}}{\sqrt{2c}}$, cuius aberratio a veritate tam eſt parua, vt in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}ndt^2 \text{ſin.} \theta$ diſcrimen ſenſibile non producat. Simili modo in hoc termino ratio $d\theta$ ad $d\Phi$ cenſeri poteſt conſtans, ſcilicet ratione motus medii lunae a ſole ad motum medium ſolis quae ratio cum ſit 12, 368314 : 1, ponatur compendii cauſa $i = 12,368314$ eritque $d\theta = id\Phi$ proxime. Multiplicetur nunc aequatio per z erit

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\tfrac{1}{2}nzdt^2 \text{ſin.} \theta.$$

Hic autem in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}nzdt^2 \text{ſin.} \theta$ ponatur $z = c$, et loco dt ſcribatur $\frac{d\Phi\sqrt{2c}}{\sqrt{m}} = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ eritque

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\frac{ncdtd\theta \text{ ſin. } \theta}{2i\sqrt{m}}\sqrt{2c}$$

cuius integrale ob dt conſtans eſt:

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{2i}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

ſeu

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{im}\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

 Eſt

Eſt autem area $AST = \frac{1}{2}\int zz\,d\Phi$, vnde ob $dt = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ erit:

Area $AST = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,fin.\,\theta}{2iim}$

ſeu $\frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} = \text{Ar}: AST - \frac{ncc\,fin.\,\theta}{2iim}$.

§. 9. Vi lunae ergo primum efficitur, vt tempora non amplius ſint areis proportionalia. Scilicet tempus quo terra ab aphelio A ad T peruenit non proportionale eſt areae AST, ſed huic areae minutae ſpatiolo quopiam, quod ſit vt ſinus anguli STL. Hinc quamuis orbita terrae nullam haberet excentricitatem, tamen eius motus non foret vniformis, ſed modo citius modo tardius incederet. Ponamus tempus vnius anni eſſe $= \odot = 365,242305$ dierum, tum niſi luna motum perturbaret, tempore t angulum deſcripſiſſet $AST = \frac{t}{\odot}\, 360°$. Ob lunam autem hic angulus AST aliquanto erit maior, qui exceſſus vt pateat, pro area AST ponatur valor $\frac{1}{2}cc\Phi$ et cum, ſi luna abeſſet, foret $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc}$, ſeu $\Phi = t\sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{t}{\odot}\cdot 360°$, nunc luna ſimul vrgente erit $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,fin.\,\theta}{2iim}$, ideoque

ang. $AST = \Phi = \frac{t}{\odot}\cdot 360° + \frac{n\,fin.\,\theta}{iim}$.

Ad angulum ergo $\frac{t}{\odot}\cdot 360°$, quem motus medius praebet inſuper addi debet angulus $\frac{n\,fin.\,\theta}{iim}$; hic ſcilicet angulus ab coniunctione vſque ad oppoſitionem ad locum terrae medium addi, dum autem luna ab oppoſitione ad coniunctionem reuertitur, ſubtrahi debebit. Haec ergo correctio maxima erit in quadraturis, vbi erit $= \frac{n}{iim}$; quae quanta ſit videamus. Cum ſit $i = 12,368314$, et $\frac{m}{n} = 70$: fiet $\frac{n}{iim} = 0,000093385$, quae eſt menſura anguli

anguli: 19″, 15‴. Sin autem Neutoni valore $\frac{m}{n} = 57$ essemus vsi, hic angulus prodiisset $= 23''$, $40'''$, cum tamen consideratio centri grauitatis tantum 15″ pro hac aequatione praebuisset. At si cum Bernoullio sumamus $\frac{m}{n} = 88$ fiet iste angulus $= 15''$, $19'''$, ita vt, si haec hypothesis esset veritati consentanea, tabulae nostrae solares manerent saluae, sin autem Neutoni sententia esset vera, correctiones nostrarum tabularum forent nimis paruae plus quam semisse, etiamsi eae Neutoni hypothesi sint superstructae. Vnde patet considerationem centri grauitatis effectum lunae nimis paruum exhibere.

§. 10. Cum igitur inuenerimus hanc aequationem

$$zz\,d\Phi = c\,dt\left(1 + \frac{n \operatorname{cos}\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,m\,c}$$

atque posito $z = \frac{cc}{u}$ pro altera aequatione

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{mcc}{zz} + n \operatorname{cos}\theta\right)$$

proxime satisfaciat $u = c - k \operatorname{cos}\Phi$, ponamus reuera esse $u = c - k \operatorname{cos}\Phi + P$. Primum ergo pro z substituatur $\frac{cc}{u}$, ac prior aequatio transibit in hanc:

$$c^3\,d\Phi = uu\,dt\left(1 + \frac{n \operatorname{cos}\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

posterior vero in hanc:

$$\frac{-ccddu}{uu} + \frac{2ccdu^2}{u^3} - \frac{cc\,d\Phi^2}{u} + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n \operatorname{cos}\theta\right) = 0$$

seu multiplicando per u^4 erit

$$-cc\,uu\,ddu + 2\,cc\,u\,du^2 - cc\,u^3\,d\Phi^2 + \tfrac{1}{2}u^4\,dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n \operatorname{cos}\theta\right) = 0$$

At ex illa aequatione est:

$$c^6\,d\Phi^2 = \tfrac{1}{2}m\,c\,u^4\,dt^2\left(1 + \frac{n \operatorname{cos}\theta}{im}\right)^2 \text{ ideoque}$$

$$\tfrac{1}{2}u^4\,dt^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} : \left(1 + \frac{n \operatorname{cos}\theta}{im}\right)^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} - \frac{2\,nc^5\,d\Phi^2 \operatorname{cos}\theta}{imm}$$

reiectis sequentibus terminis vtpote nimis paruis; vnde

 fit

fit $-ccuuddu + 2ccudu^2 - ccu^3 d\Phi^2 + c^3 uud\Phi^2 + \frac{nc^3 d\Phi^2 cos.\theta}{m}(cc - \frac{2uu}{i}) = 0$. Cum autem fit $u = c - k\,cos\,\Phi + P$ erit $du = kd\Phi\,fin.\,\Phi + dP$ et $ddu = kdd\Phi\,fin.\,\Phi + kd\Phi^2\,cof.\,\Phi + ddP$. His autem valoribus loco du et ddu fubftitutis et per cc divifis, erit, poftquam in terminis per fe minimis vbique loco u fcriptum fuerit c ob k valde paruum:

$$ddP + Pd\Phi^2 = \frac{ncd\Phi^2 cof.\theta}{m}(1 - \frac{2}{i})$$

in qua aequatione ob pofitum $z = c$, et n valde paruum elementum $d\Phi$ tanquam conftans fpectari poteft. Indeque ergo reperitur $P = \frac{-nc(i-2)cof.\theta}{mi(ii-1)}$

§. 11. Cum igitur inuento valore ipfius P fit:

$u = c - k\,cof.\,\Phi - \frac{nc(i-2)cof.\theta}{mi(ii-1)}$ erit

$z = \frac{cc}{c - k\,cof.\Phi} + \frac{nc(i-2)cof\,\theta}{mi(ii-1)}$.

Ex tabulis ergo pro ellipfi computatis quaeratur more confueto diftantia terrae a fole, tum vero ad eam addatur particula $\frac{nc(i-2)cof.\theta}{mi(ii-1)}$, ficque vera prodibit diftantia folis a terra. A coniunctione ergo vfque ad primam quadraturam diftantia ex tabulis inuenta augeri debet, tum vero a prima quadratura vfque ad alteram minui, atque a quadratura altera ad coniunctionem vfque denuo augeri. Conueniunt haec apprime cum titulis in tabulis folaribus inuentis, vbi etiam correctiones diftantiae cofinui diftantiae lunae a fole repertae funt proportionales; tantum ergo fupereft, vt videamus, quantum vera quantitas harum correctionum ab illis differat. Hunc in finem indagemus aequationem maximam, quae erit $= \frac{nc(i-2)}{mi(1+ii)}$. Pofito ergo $c = 100000$ ob $i = 12,368314$, erit

$i-2$

$i-2=10,368314$, et $ii-1=151,9752$, atque adeo $\frac{c(i-2)}{i(ii-1)}=551,6005$ in hypothesi $\frac{m}{n}=70$ haec correctio est $=7,8800$ et in hypothesi Neut. $\frac{m}{n}=57$ ea est $=9,6772$ et in hypothesi Bernoulliana $\frac{m}{n}=88$ ea fit $=6,2682$. Atque secundum hanc vltimam hypothesin correctio maxima pro logarithmo distantiae solis a terra, qui ad sex figuras decimales exhiberi solet, futura esset 27, cum in tabulis nostris sit 31. ex Neutoniana vero hypothesi haec correctio prodiret $=42$; ita vt tabulae nostrae non multum a veritate abludant, si quidem assumamus veritatem intra hypotheses Neutoni, et Bernoulli, quod quidem est verisimillimum consistere.

§. 12. Facilius valor litterae P, qua correctio distantiae terrae a sole continetur, inueniri potest, si excentricitas orbitae negligatur. Cum enim excentricitas sit valde parua, ea in valore ipsius P nullam mutationem inferet. Quamobrem cum excentricitas pendeat a littera k sumamus $k=0$, eritque si luna non adesset $z=c$, accedente autem luna fit $z=c+\mathrm{P}$, eritque P quantitas minima nullam sensibilem mutationem patiens, etiamsi excentricitas coniungatur. Posito autem $z=c+\mathrm{P}$ ob $zz=cc+2c\mathrm{P}$ reiecto termino PP ob paruitatem, prima aequatio abibit in hanc formam:

$$c\,d\Phi+2\mathrm{P}\,d\Phi=dt\left(1+\frac{n\cos.\theta}{im}\right)V\tfrac{1}{2}mc$$

posterior vero in hanc:

$$dd\mathrm{P}-c\,d\Phi^2-\mathrm{P}\,d\Phi^2=-\tfrac{1}{2}dt^2\left(m-\frac{2m\mathrm{P}}{c}+n\cos.\theta\right)$$

Verum si luna abesset, foret $c\,d\Phi=dt\,V\tfrac{1}{2}mc$, et $\tfrac{1}{2}m\,dt^2=c\,d\Phi^2$, qui valor in terminis per se minimis adhiberi

potest

poteſt, pro maioribus vero erit

$$\tfrac{1}{2} m c dt^2 \left(1 + \frac{2n\cos\theta}{im}\right) = cc d\Phi^2 + 4cP d\Phi^2$$

ſeu $\frac{1}{2} m dt^2 = d\Phi^2 \left(c + 4P - \frac{2nc\cos\theta}{im}\right)$, quo valore in altera aequatione ſubſtituto habebitur.

$$ddP - Pd\Phi^2 = -4Pd\Phi^2 + \frac{2ncd\Phi^2\cos\theta}{im} + 2Pd\Phi^2 - \frac{ncd\Phi^2\cos\theta}{m}$$

ſeu $ddP + Pd\Phi^2 = \frac{2ncd\Phi^2\cos\theta}{im} - \frac{ncd\Phi^2\cos\theta}{m}$

ad cuius integrale inueniendum, quia $d\theta = i d\Phi$, et $d\Phi$ conſtans aſſumi poteſt, ponatur $P = \alpha c \cos\theta$, erit $dP = -\alpha i c d\Phi \sin\theta$ et $ddP = -\alpha ii c d\Phi^2 \cos\theta$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio per $cd\Phi^2 \cos\theta$ diuiſa erit:

$$-\alpha ii + \alpha = \frac{2n}{im} - \frac{n}{m} = \frac{-n(i-2)}{im}$$

ideoque $\alpha = \frac{n(i-2)}{mi(ii-1)}$ et $P = \frac{nc(i-2)\cos\theta}{mi(ii-1)}$

vti ante inuenimus.

§. 13. Cum igitur excentricitas in valorem ipſius P non ingrediatur, atque ſublata luna inuentum ſit $z = \frac{cc}{c-k\cos\Phi}$ erit, ſi vis lunae motum terrae afficiat:

$$z = \frac{cc}{c-k\cos\Phi} + \frac{nc(i-2)}{mi(ii-1)}\cos\theta$$

qui valor in aequatione prius inuenta ſubſtitutus praebebit

$$\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos\Phi)^2} + \frac{2nccd\Phi(i-2)\cos\theta}{mi(ii-1)(c-k\cos\Phi)} = dt\left(1 + \frac{n\cos\theta}{mi}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Quae aequatio reiectis terminis minimis tranſibit in hanc

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} = \frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos\Phi)^2} - \frac{ncd\Phi\cos\theta}{mi} + \frac{2ncd\Phi(i-2)\cos\theta}{mi(ii-1)}$$

Ex qua ad datum tempus t verus angulus AST definietur. Ponamus ſi luna euaneſceret, tempori t reſpondere anomaliam veram v, eritque $dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos v)^2}$ nunc autem accedente luna ſit angulus AST $= \Phi = v + \omega$, erit $\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos\Phi)^2} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos v)^2} + c\,d\omega$ proxime, quia tam k

quam

quam ω sunt quantitates minimae, his ergo valoribus substitutis fiet:

$$0 = d\omega - \frac{nd\Phi cos\theta}{mi}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right)$$

et integrando ob $d\Phi = \frac{d\theta}{i}$ habebitur:

$$\omega = \frac{n sin.\theta}{mii}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right) = \frac{n sin.\theta}{m}.\ 0,00564505.$$

Tantus ergo angulus ad anomaliam veram ex tabulis ellipticis inuentam v addi debet, qui aliquanto minor est eo, quem supra §. 9. nulla ipsius orbitae variationis habita ratione elicuimus. Correctio ergo haec fit maxima dum luna in quadraturis versatur eritque tum, vbi sin. $\theta = 1$, aequalis angulo, cuius mensura est $= \frac{n}{m}$. 0,00564505. Quare pro variis hypothesibus fractionis $\frac{m}{n}$ haec correctio maxima sequenti modo se habebit

si $\frac{m}{n} = 57$ erit $\omega = 20'', 25'''$
si $\frac{m}{n} = 70$ erit $\omega = 16'', 38'''$
si $\frac{m}{n} = 88$ erit $\omega = 13'', 14'''$

§. 14. Propter lunam ergo locus solis ex tabulis ellipticis inuentus duplici modo corrigi debet, quorum alter spectat longitudinem solis in ecliptica, alter distantiam solis a terra. Primo scilicet correctio longitudinis solis ita se habet, vt dum luna a coniunctione solis ad oppositionem progreditur addi contra vero a plenilunio vsque ad nouilunium a loco solis subtrahi debeat; haecque correctio est sinui distantiae lunae a syzygiis proportionalis, vnde innotescit si modo correctio maxima, quae quadraturis respondet, fuerit cognita. Vidimus autem hanc correctionem pro variis hypothesibus sequenti modo se habere;

Hypothesis			Maxima correctio loci solis in ecliptica
Neutoniana $\frac{m}{n}$	=	57	20'', 25'''
ex Volumine $\frac{m}{n}$	=	70	16'', 38'''
Bernoulliana $\frac{m}{n}$	=	88	13'', 14'''

Deinde distantia solis a terra inuenta ex tabulis ita debet corrigi, vt ea ab vltimo quadrante vsque ad priorem, quo tempore minor lunae pars quam semissis est illuminata, augeri, a prima autem quadratura ad alteram, quo tempore maior lunae portio quam semissis illuminata spectatur, minui debeat. Est vero haec correctio cosinui anguli, quo luna a syzygiis distat, proportionalis: maxima ergo est in ipsis syzygiis, vbi logarithmus distantiae solis a terra, qui ad 6 notas post characteristicam sequentes exhiberi solet, sequentibus numeris vel augeri vel diminui debet.

Hypothesis			Maxima Correctio Log. distantiae solis a terra
Neutoniana $\frac{m}{n}$	=	57	42
ex Volumine $\frac{m}{n}$	=	70	34
Bernoulliana $\frac{m}{n}$	=	88	27.

§. 15. In tabulis autem meis solaribus, vbi has correctiones ex consideratione communis centri grauitatis terrae et lunae elicui, quanquam hypothesi Neutoniana sum vsus, tamen eas notabiliter minores obtinui, quam hic prodierunt. Namque maxima correctio loci solis in ecliptica ibi erat 15'', cum hic ex eadem hypothesi 20'', 25''' sit inuenta; atque maxima correctio logarithrithmi diſtantiae ſolis a terra ibi erat 31, hic vero 42 quarum vtraque hic fere triente maior eſt quam ibi. Ex quo intelligitur commune centrum grauitatis terrae et lunae non ſecundum regulas Keplerianas in ellipſi incedere, vti tum aſſumſeram. Quanquam autem iam ibi innueram, hoc principium examen geometricum non ſuſtinere, tamen eius aberratio non tanta videbatur, quanta nunc eſt reperta. Hancobrem tabulae illae ſolares, ſi hypotheſis Neutoniana veritati eſſet conſentanea, vtique emendatione indigerent: at cum Neutonus lunae vim nimis magnam facere videatur, emendatio iſta tabulas magis a veritate abduceret. Si enim has tabulas ad mentem Celeb. Bernoullii, qui vim lunae in ratione 8 ad 5 fere minuit, ſequi vellem, correctiones ibi adhibitas aliquantillum imminuere deberem. Quare ſi veritas intra hos duos quaſi limites contineatur, atque valor $\frac{m}{n}$ aliquantillum maior ſit quam 70, puta 75 tum eae ipſae correctiones prodituræ eſſent, quae in tabulis ſunt vſurpatae. Talis autem hypotheſis propius ad mentem Cel. Bernoullii accederet, atque corpus lunae pauliſper tantum rarius eſſet terra; quae ambae rationes tantum ponderis habere videntur, vt tabulae ante traditae adhuc nulla emendatione indigeant; hancque ob cauſam eas immutatas relinquo.