DE EXTRACTIONE RADICVM EX QVANTITATIBVS IRRATIONALIBVS.

AVCTORE

LEONH. EVLERO.

§. 1.

Veteres Analyſtae ingens ſtudium impendere ſunt ſoliti in doctrinam quantitatum irrationalium ſeu ſurdarum; atque in hoc genere potiſſimum occupati fuerant, quemadmodum ex dato binomio vel reſiduo radicem tam cubicam altioriſue gradus quam quadraticam extrahere queant. Cum enim extractio radicum ex numeris rationalibus nulla amplius difficultate laboraret, numeri irrationales eo maiorem moleſtiam pepererunt, quo minus nexus patebat inter radicem irrationalem ipſum eiusque poteſtates cuiusuis gradus. Maxima autem difficultas in hoc verſabatur, vt dignoſcere poſſent, vtrum propoſitum binomium admittat radicem pariter binomiam eius poteſtatis, quae quaeritur, an non? quod ſi enim compertum fuerit, dari eiusmodi radicem, ipſa huius radicis inuentio non amplius erit difficilis; Sin autem conſtiterit talem radicem omnino non dari, praefixione ſigni radicalis, vti in numeris rationalibus vſu venire ſolet, totum negotium abſoluetur.

§. 2. In hac disquiſitione potiſſimum conſiderari ſolent quantitates binomiae huius formae $A + B$, denotantibus litterarum A et B altera numerum rationalem al-

te-

tera irrationalem, signo radicis quadratae contentum. Duplicis vero huius formae $A \pm B$ altera $A + B$ nomen binomii altera $A - B$ nomen residui obtinuit. Inter vtramque formam tam arctus intercedit nexus, vt inuenta alterius formae radice cuiusvis gradus, ex ea simul radix alterius formae facillime formari queat. Si enim radix cuiusque Potestatis ex binomio $A + B$ fuerit $x + y$, tum respondentis residui $A - B$ radix eiusdem potestatis erit $x - y$. Cuius nexus ratio ex formis, quas potestates quaecunque binomiorum ac residuorum induunt, facile perspicitur.

§. 3. Vtrum huiusmodi binomium $A + B$, vel residuum $A - B$ admittat radicem quadratam an secus, discerni solet ex differentia quadratorum vtriusque partis, quae est $AA - BB$, quae si fuerit numerus quadratus, puta $= CC$, erit radix quadrata ex binomio $A + B = \sqrt{\frac{A+B}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$; residui autem $A - B$ radix quadrata erit $= \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Haec ergo radicis quadratae extractio ex forma $A \pm B$ succedit, si quantitas A, quae maior censetur altera quantitate B, simul fuerit rationalis. Namque si A esset quantitas irrationalis, tum in radice $\sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ post signa radicalia adhuc numeri surdi continerentur, foretque ista radicis expressio magis perplexa, quam si radix more solito hoc modo $\sqrt{(A \pm B)}$ exprimeretur.

§. 4. Regula haec pro extrahenda radice quadrata ex binomiis et residuis data, cum facilis est, tum etiam eius demonstratio ex sola inspectione perspicitur. Cum enim sit $\sqrt{(A \pm B)} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, fiet vtrinque quadratis sumendis $A \pm B = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} \pm 2\sqrt{\frac{AA-CC}{4}} = A \pm \sqrt{(AA - CC)}$. At cum sit $CC = AA - BB$,

erit $\sqrt{(AA-CC)}=B$, hincque prodit aequatio identica $A \pm B = A \pm B$. Sit exempli causa propositum sequens binomium $54 \pm \sqrt{980}$ seu $54 \pm 14\sqrt{5}$, ex quo oporteat radicem quadratam extrahere. Ac primo quidem constat partem rationalem 54 maiorem esse parte irrationali $\sqrt{980}$, quod est primum requisitum. Ponatur ergo $A=54$ et $B=\sqrt{980}$, et quaeratur differentia quadratorum $AA-BB$, quae fit $=1936$, qui numerus, cum sit quadratus, certo indicat desideratam radicis extractionem succedere debere. Posito ergo $1936 = CC$ fiet $C=44$, hincque $\frac{A+C}{2}=49$ et $\frac{A-C}{2}=5$. Consequenter radix quadrata ex proposito numero $54 \pm \sqrt{980}$ erit $=7 \pm \sqrt{5}$. Prodit hic radicis altera pars rationalis; saepenumero autem inuenitur radix quae ex duabus partibus irrationalibus constat. Quod si autem in radice signa radicalia potestatis quartae admittantur, in multo pluribus casibus radices inueniri possunt, quibus regula hic data non commode applicari potest.

§. 5. Regulae igitur datae aliam substituamus, quae perpetuo, quoties quidem radix quadrata ex binomio datur, hanc radicem in forma simplicissima suppeditet. Sit binomium $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, ex quo radicem quadratam extrahi oporteat, in quo vel vtrumque membrum sit rationale vel alterutrum tantum. Ex tali binomio, quod regulam praecedentem effugit, dico primo radicem extrahi posse si fuerit $a(a-b)$ quadratum; perpetuo ergo $\sqrt{a}$ nobis partem maiorem denotabit et $\sqrt{b}$ minorem. Sit igitur $a(a-b)=cc$, ac ponatur differentia $a-b=d$. His valoribus inuentis erit radix quadrata ex binomio $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ haec $= \frac{\sqrt{\frac{c+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{c-d}{2}}}{\sqrt{d}}$. Sic si propona-

natur hoc binomium $\sqrt{12}+3$, in quo pars irrationalis $\sqrt{12}$, maior sit parte rationali 3, fiet $a=12$ et $b=9$ eritque $a-b=3=d$ et $a(a-b)=36=cc$, vnde $c=6$; Ex his definietur radix quadrata ex binomio proposito haec $\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$. Ex quo intelligitur, hanc regulam non solum praecedentem in se complecti, sed etiam in innumerabilibus casibus vtilitatem afferre, in quibus praecedens frustra adhibetur.

§. 6. Sit nunc binomium propositum hoc $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ cuius vtraque pars est irrationalis, ex quo radix quadrata debeat extrahi. Posita parte maiore $4\sqrt{3}=\sqrt{a}$, et minore $3\sqrt{5}=\sqrt{b}$, fiet $a=48$ et $b=45$, ex quo erit $a-b=3=d$. Nunc igitur videndum est, an sit $a(a-b)$ quadratum, quod nisi fuerit, omnis opera in radice assignanda frustra collocaretur. Fit autem $a(a-b)=48.3=144$, qui numerus quadratus si ponatur $=cc$, erit $c=12$, atque $\frac{c+d}{2}=\frac{15}{2}$, et $c-d=\frac{9}{2}$. Quamobrem radix quadrata quaesita erit $=\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt[4]{12}}$

Hinc porro residui $4\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ radix quadrata erit $=\frac{\sqrt{15}-3}{\sqrt[4]{12}}$. Quanquam autem in his radicibus radix biquadrata $\sqrt[4]{12}$ inest, tamen ea merito tolerari solet, eo quod ea numero integro est praefixa, hincque facile euolui potest. Habet autem vtique ista forma $\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt[4]{12}}$ magnam praerogatiuam prae illa forma, quae oritur, si

 signum

ſignum radicale binomio propoſito $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ ſimpliciter praefigatur; facilius enim valor expreſſionis $\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt[4]{12}}$ intelligitur quam huius $\sqrt{(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$, ob irrationalitatem poſt ſignum radicale complicatam.

§. 7. Multo maiore difficultate laborat extractio radicis cubicae altioriſue poteſtatis ex huiusmodi binomiis; neque enim pro his certa criteria aſſignari poſſunt, ex quibus dignoſci queat, vtrum radix in tali forma binomia detur an non? Quocirca eiusmodi operatione negotium perfici conueniet, quae manuducat ad veram radicem. Si quidem talis detur; contra autem radicem falſam exhibeat. Eiusmodi igitur operatione peracta diſpiciendum erit, vtrum expreſſio reſultans ſit vera binomii propoſiti radix quaeſita, an ſecus: id quod plerumque primo intuitu ſeſe prodere ſolet. Quod ſi enim in expreſſione inuenta eiusmodi quantitates ſurdae inſint quae omnino diſcrepent, ab iis, quae in binomio propoſito continentur, id certo erit indicio radicem veram non reſultaſſe. Sin autem forma expreſſionis inuentae ita ſit comparata, vt poſſit eſſe vera radix, tum demum examen inſtitui oportebit, ad diiudicandum, vtrum ea ſit vera radix an minus. Hanc ob cauſam plus in hoc negotio praeſtari non poteſt, niſi vt regula tradatur, quae certo praebeat veram radicem, ſi talis detur in forma binomia; etiamſi eadem regula in caſu contrario perpetuo falſum exhibeat. Quae cum ab analyſeos principiis vehementer abhorreant, quippe quae in ſola veritate inveſtiganda verſantur; perſpicuum eſt, inuentionem eiusmodi regulae ex alio fonte peti debere.

§. 8.

§. 8. In eiusmodi regula inuenienda, quae tantum radici cubicae extrahendae inseruiat, veteres multum erant occupati, neque tamen quisquam talem regulam protulit, quae certo veram radicem suppeditaret, siquidem talis detur. Newtonus vero hoc negotium penitus confecisse videtur in Arithmetica vniuersali, vbi tradit regulam pro radice cuiuscunque potestatis ex proposito binomio inuenienda; eamque eius indolis esse perhibet, vt, si binomium admittat radicem istius potestatis, regula illa hanc radicem certissime sit patefactura. Regula haec Newtoni ita se habet: Sit $A \pm B$ binomium propositum, ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $= c$ extrahi oporteat. Quaeratur primo minimus numerus integer n, cuius potestas exponentis c nempe n^c diuisibilis sit per $AA - BB$, quotusque qui oritur ex diuisione potestatis n^c per $AA - BB$ ponatur $= Q$. Deinde quaeratur valor huic expressioni $\sqrt[c]{(A \pm B)}\sqrt{Q}$ proxime conueniens in numeris integris, qui ponatur $= r$. Tertio diuidatur expressio $A\sqrt{Q}$ per maximum diuisorem rationalem integrum, vt supersit quotus irrationalis vlterius non reducibilis, qui ponatur $= s$. Quarto definiatur numerus integer, qui proxime accedat ad valorem huius expressionis, $\frac{rr+n}{2rs}$ qui sit $= t$. His praeparatis Newtonus asserit radicem desideratam, si quidem binomium propositum $A \pm B$ talem admittat, fore $= \frac{t \pm \sqrt{(ttss+n)}}{\sqrt[2c]{Q}}$: vbi notandum est in binomio $A \pm B$ nullas inesse debere fractiones; et si tales insint, eas prius more solito tolli oportere.

§. 9. Bonitatem huius regulae, ſatis complicatae et analyſeos principiis admodum aduerſantis, pluribus exemplis pro variis radicibus allatis confirmare eſt conatus Newtonus; atque eius ope perpetuo in aſſumtis exemplis veram elicuit radicem, quod ſi ſemper vſu veniret, regula eius nulla amplius correctione egeret. Incidi autem nuper in binomium hoc $5\sqrt{5}+11$ cuius radix ſurdeſolida mihi conſtabat eſſe $\sqrt[5]{16}^{\sqrt{5}+1}$; periculum igitur mihi facere viſum eſt, an Newtoni regula hanc radicem praeberet. Erit igitur $5\sqrt{5}=A$; $11=B$; et quia radix poteſtatis quintae deſideratur, fiet $c=5$. Iam erit $AA-BB=4$; ex quo minima poteſtas quinta diuiſibilis per $AA-BB=4$ prodit $=32$, vnde fit $n=2$, et $\frac{1}{AA-BB}^{\frac{c}{n}}=\frac{32}{4}=8=Q$. Deinde abibit $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ in $\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)\sqrt{8}}$ ſeu in $\sqrt[5]{(5\sqrt{40}+11\sqrt{8})}$, ad cuius valorem in numeris integris proximum inueniendum fit $5\sqrt{40}=31,622$, et $11\sqrt{8}=31,112$, ideoque $5\sqrt{40}+11\sqrt{8}=62,734$, cuius radix ſurdeſolida eſt $=2,288$, hincque numerus integer proxime conueniens $r=2$. Tertio fit $A\sqrt{Q}=5\sqrt{40}=10\sqrt{10}$, cuius maximus diuiſor rationalis eſt 10, et quotus $\sqrt{10}$, ex quo erit $s=\sqrt{10}$. Quarto fit $\frac{rr+n}{2rs}=\frac{6}{4\sqrt{10}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}$, ad quam fractionem proxime accedit numerus integer $t=1$; ita vt ſit $ts=\sqrt{10}$ et $\sqrt{(ttss+n)}=\sqrt{12}$, vnde radix quaeſita, quia datur, eſſe deberet $=\sqrt[10]{8}^{\sqrt{10}+\sqrt{12}}$ quae vehementer differt a vera quae eſt $=\sqrt[5]{16}^{\sqrt{5}+1}$

Hoc-

Hocque adeo casu Newtoni regula ostenderet binomium propositum $5\sqrt{5}+11$ omnino non admittere radicem surdesolidam binomialem, eo quod in radice inuenta $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ seu $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt[10]{8}}$ inest $\sqrt{3}$, quae in potestatem quintam necessario ingredi deberet.

§. 10. Regula ergo Newtoni hoc vitio, quod in isto negotio maximum est, laborat, vt saepe numero radicem veram, et si talis in forma binomia datur, non exhibeat: quamobrem in aliam regulam vitio hoc carentem inquirens sequentem inueni ex ipsa rei natura petitam, quae simul non solum perpetuo feliciori cum successu, sed etiam minori opera adhiberi queat. Ipsaque regula, cum modo, quo eam sum nactus, ita se habet. Sit $A \pm B$ binomium seu residuum ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $= n$ extrahere oporteat, in A vero et B nullae insint fractiones, ita vt sint A et B numeri integri siue ambo irrationales siue vnus duntaxat. Aliam vero irrationalitatem non inesse pono praeter simplicem signo radicali quadrato contentam. Ex quo vtriusque binomii $A \pm B$ partis quadratum erit numerus rationalis integer; scilicet AA erit numerus rationalis integer atque etiam BB; pono autem esse $AA > BB$.

§. 11. Quodsi iam hoc binomium vel residuum $A \pm B$ habeat radicem potestatis n binomiam, ea necesse est habeat huiusmodi formam $\frac{x \pm y}{\sqrt[2m]{p}}$. Huius enim formae potestas exponentis n talis erit $\frac{M \pm N}{\sqrt{p}}$, quae vtique si M et N sint diuisibiles per $\sqrt{p}$ abire potest in formam

mam integram $A + B$. In radice ergo assumta $\sqrt[2n]{p}^{x+y}$ debebit esse p numerus integer rationalis, atque x et y siue ambo sint numeri irrationales siue alteruter tantum eorum quadrata xx et yy numeros rationales fieri oportet. Quare ob affinitatem binomii cum residuo emergent statim hae duae aequationes:

$$\sqrt[n]{(A+B)} = \sqrt[2n]{p}^{x+y}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)} = \sqrt[2n]{p}^{x-y}$$

His duabus aequationibus in se mutuo ductis prodibit $\sqrt[n]{(AA-BB)} = \sqrt[n]{p}^{xx-yy}$ hincque $xx - yy = \sqrt{(AA-BB)p}$. Cum igitur tam $xx - yy$ quam $AA - BB$ et p sint numeri integri rationales, pro p talem numerum accipi oportet, vt productum $(AA-BB)p$ fiat potestas exponentis n. Quocirca quaeri debet eiusmodi potestas n puta r^n, quae sit diuisibilis per $AA-BB$, eaque minima, quae exhiberi queat, vt calculus ad minimos numeros redigatur. Cognoscentur ergo numeri p et r ex aequatione $p = \frac{r^n}{AA-BB}$ quibus inuentis erit $xx - yy = r$; ideoque iam differentia quadratorum partium x et y quibus radix constat, innotescit. Atque hucvsque conuenit operatio, cum ea, quam Newtonus in sua regula instituere iubet.

§. 12. Cognita differentia quadratorum radicis partium $xx - yy$, quae est rationalis, quaero summam quadratorum earumdem partium, quae pariter esse debet numerus rationalis integer. Fiet autem addendis quadratis binarum

binarum aequationum propositarum :

$$\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2} = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{\sqrt[n]{p}}$$

hincque

$$xx+yy = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A-B)^2 p}$$

Aequatur ergo $xx+yy$ summae duarum quantitatum irrationalium ; vnde si radix exhiberi potest , necesse est vt summa binarum illarum quantitatum irrationalium fiat numerus rationalis integer. Hic itaque prodibit, si numeri integri quaerantur proxime accedentes ad valores irrationales:

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} \text{ et } \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$$

sumendo alterum iusto maiorem , alterum iusto minorem. Sit igitur proxime

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} = s \pm \text{fractione}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)^2 p} = t \mp \text{fractione}$$

hincque numeri integri s et t ope consuetae radicum extractionionis reperientur , quibus inuentis , erit

$$xx+yy = \frac{s+t}{2}.$$

Ex hisque tandem resultabit

$$xx = \frac{2r+s+t}{4} \text{ et } yy = \frac{s+t-2r}{4},$$

atque radix quaesita tandem erit haec :

$$\frac{\sqrt{(2r+s+t)} \pm \sqrt{(s+t-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$$

§. 13. Non solum regula haec minori opera quam Newtoniana ad calculum reuocatur. Sed etiam tutius operatur ; nam cum secundum Newtoni regulam aliquoties valor alicuius quantitatis irrationalis proxime in numeris inte-

Cum iam sit $B = 139\sqrt{3} = \sqrt{57963}$
atque $A = 91\sqrt{7} = \sqrt{57967}$
erit $AA - BB = 4$, et $p = \frac{77}{4}$. Ex quo fiet $r = 2$, et $p = 3^2$; ideoque $xx - yy = 2$.
Porro est $(A+B)^2 = 115930 + 25298\sqrt{21}$
atque $(A-B)^2 = 115930 - 25298\sqrt{21}$
Hinc quantitatibus surdis in fractionibus decimalibus proxime exprimendis prodibit

$$(A+B)^2 p = 74195,19,99760$$
$$(A-B)^2 p = 0,00240$$

ex quibus radices septimae potestatis erunt

$$\sqrt[7]{(A+B)^2 p} = 9,58;\ s = 9$$
$$\sqrt[7]{(A-B)^2 p} = 0,42;\ t = 1.$$

Quamobrem erit $xx + yy = 5$, hincque $xx = \frac{7}{2}$ et $yy = \frac{3}{2}$, ita vt radix quaesita futura sit $= \frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$ quam ex ipsa operatione iam veram esse radicem affirmare possumus, eo quod vidimus valorem $s + t$ reuera numero integro esse aequalem; neque tantum proxime sed reuera fieri $s + t = 10$.

§. 16. Quamuis haec methodus latissime patere videatur, ita vt perpetuo felici successu adhiberi queat, tamen vno laborat defectu, quod ea ad eiusmodi binomia, in quibus quantitates imaginariae insunt, adcommodari nequeat. Cum enim approximatione sit vtendum facile intelligitur, hanc operationis partem in imaginariis locum habere non posse. Idem hoc incommodum multo magis impedit regulam Newtonianam, in qua id tolli nullo modo potest; verum in nostra methodo huic in-

incommodo medela afferri poterit. Ope approximationis ſcilicet valorem huius expreſſionis

$$\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \sqrt[n]{(A-B)^2 p}}{2}$$

inueſtigauimus; quare alia via erit tentanda ad hunc valorem inueniendum, ſi quantitates affuerint imaginariae in alterutra quantitatum A vel B. Ad hoc efficiendum pono $z = \sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ atque hanc quantitatem z, cuius valor indagatur, conſidero tanquam radicem cuiusdam aequationis algebraicae, quae habebit n dimenſiones. Neque vero hancobrem determinatio quantitatis z reſolutionem aequationis n dimenſionum requirere cenſenda eſt, quia enim quaeſtio in hoc tantum verſatur, vtrum z hubeat valorem in numeris integris, et ſi habet, quis ille ſit, haec inueſtigatio per regulas notas in aequatione quotcunque dimenſionum inſtitui poterit.

§. 17. Ex reſolutione aequationum altiorum graduum, quam Cel. Moiuraeus primus docuit, conſtat huius aequationis:

$$\alpha = z^n - n z^{n-2} \sqrt[n]{\beta} + n\frac{(n-3)}{1.2} z^{n-4} \sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} z^{n-6} \sqrt[n]{\beta^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} z^{n-8} \sqrt[n]{\beta^4} - \text{etc.}$$

radicem eſſe $z = \sqrt[n]{\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}} + \sqrt[n]{\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}}$. Cum iam in noſtro caſu ſit $z = \sqrt[n]{((A^2 + B^2)p + 2pAB)} + \sqrt[n]{((A^2 + B^2)p - 2pAB)}$ fiet $\alpha = 2p(AA + BB)$ et $\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = 4pAB$, vnde $\beta = pp(AA - BB)^2 = p^{2n}$

ob $p(AA-BB)=r^n$. Obtinebitur ergo ista aequatio: $z^n - nr^2 z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} r^4 z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} r^6 z^{n-6} + \text{etc.} = 2p(AA+BB)$. Ex qua si valor ipsius z innotuerit, erit $xx+yy=\frac{1}{2}z$, et cum sit $xx-yy=r$ fiet $x=\frac{\sqrt{(z+2r)}}{2}$ et $y=\frac{\sqrt{(z-2r)}}{2}$; adeoque radix potestatis n ex binomio $A \pm B$ erit $= \frac{\sqrt{(z+2r)} \pm \sqrt{(z-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$. Valores hi p et r cognoscuntur ex aequatione $p(AA-BB)=r^n$ atque valor litterae z ex aequatione supra data n dimensionum. Ad hunc autem inueniendum tantum inquiri oportet, vtrum illa aequatio habeat radicem in numeris integris, et si habet, ea pro valore ipsius z capiatur.

§. 18. Inseruit hic modus non solum radicibus ex binomiis imaginariis inueniendis, sed etiam commode adhiberi potest ad radices ex binomiis realibus inuestigandas. Quodsi enim isto modo vti velimus tum citra approximationem primum dignoscere poterimus, vtrum radix detur in forma binomii, et si detur, quaenam ea sit: prius scilicet patebit, si aequatio n dimensionum habeat radicem realem, deinde ipsa radix inuenietur, si loco z scribatur illa aequationis radix. Vt si extrahenda sit radix potestatis quintae ex binomio $5\sqrt{5}+11$, quod exemplum iam supra tractatum est fiet $n=5$ et $A=5\sqrt{5}$ et $B=11$; hincque porro $AA-BB=4$ et $AA+BB=246$. Quare cum esse debeat $r^5=4p$, prodibit $p=8$ et $r=2$; aequatio vero resoluenda habebitur haec:

$$z^5 - 20z^3 + 80z = 16.\ 246.$$

Pona-

Ponatur $z = 2u$, atque aequatio orietur haec: $u^5 - 5u^3 + 5u = 123$. quae si habet radicem realem, ea erit vel 3 vel 41: erit ea autem $= 3$, vnde fit $z = 6$, atque radix potestatis quintae ex binomio erit $= \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$, omnino vt ea supra est inuenta.

§. 19. Quemadmodum hic aequatio resoluenda simplicior est reddita posito $z = 2u$, ita generaliter poni potest $z = ru$, hocque pacto aequatio illa quae incognitam z inuoluebat transmutabitur in hanc incognitam u continentem:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} + \text{etc.} = \frac{2(AA+BB)}{AA-BB}$$

ob $r^n = p(AA - BB)$. Plerumque autem terminus vltimus absolutus fiet numerus integer, si quidem extractio radicis succedit. Inuento autem valore ipsius u erit binomii $A + B$ radix potestatis n haec $\frac{\sqrt{r(u+2)}+\sqrt{r(u+2)}}{2\sqrt[2n]{p}}$

$$= \frac{(AA-BB)^{\frac{1}{2n}}}{2}(\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u2)}) = \sqrt[2n]{\frac{\frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{2^{2n}}}{AA-BB}}$$

Sic cum pro binomio $5\sqrt{5} + 11$, ex quo radix surdesolida extrahi debet, sit $n = 5$, $AA - BB = 4$, atque inueniatur $u = 3$, statim prodibit radix quaesita $= \sqrt[10]{\frac{\sqrt{5}+1}{2^{10}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$. Atque ita huius regulae beneficio facillime eruetur radix cuiuscunque potestatis ex dato binomio; dummodo radix datur habens formam binomialem.

§. 20.

§. 20 Alterum exemplum, quod ſupra attulimus, in radice poteſtatis ſeptimae ex hoc binomio $139\sqrt{3} + 91\sqrt{7}$, verſabatur; quod ergo ſecundum regulam modo datam ita tractabitur. Erit nempe $n = 7$, $A = 91\sqrt{7}$ et $B = 139\sqrt{3}$. Hinc fiet $AA - BB = 4$, atque $AA + BB = 115930$, vnde emergit $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = 57965 = 5.11593$. Hancobrem habebitur iſta aequatio $u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = 5.11593$ cuius radix, ſi quam habet, erit vel 5 vel 11593. Reperietur autem 5 eſſe vera radix iſtius aequationis, ex quo radix poteſtatis ſeptimae ex propoſito binomio erit $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[10]{\frac{2^{14}}{4}}}$ $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$, plane vt ſupra.

§. 21. Valebit igitur pariter haec methodus ad radices extrahendas ex binomiis imaginariis, eo quod aequatio reſoluenda in §. 19 data perpetuo fit realis, propter quadrata AA et BB quantitates reales, etiamſi vel A vel B ſit quantitas imaginaria. Attamen ſaepenumero vſu veniet incommodum parui quidem momenti, quod in hoc conſiſtet, vt ambigere debeamus vtrum ſigna radicalia in radice:
$\sqrt{(u+2)}$ et $\sqrt{(u-2)}$, quae per ſe ſunt ambigua, affirmatiue an negatiue aſſumere debeamus, quae dubitatio in quantitatibus affirmatiuis facile tollitur, non autem in imaginariis. Quare his caſibus ipſa eleuatio inuentae radicis inſtitui debebit, vt pateat, quaenam ſigna cum ſingulis radicalibus ſint coniungenda. Ratio difficultatis in hoc potiſſimum eſt ſita, quod quadrata partium radicis

A et

A et B tantum in calculum ingrediantur, quae a negatiuis aeque ac affirmatiuis oriri possunt. Interim tamen hoc constat, quod si fuerit $\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ fore $\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ hincque $\sqrt[n]{(-A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ et $\sqrt[n]{(-A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ ex quibus diiudicatio dubii saepe facilis reddetur. Saltem si radix ex vna harum formarum $A+B$; $A-B$; $-A+B$; $-A-B$ fuerit inuenta, reliquarum formarum radices in promtu erunt; Dabitur tamen postea modus, qui hac dubitatione prorsus carebit.

§. 22. Sit nobis propositum hoc binonium imaginarium $+1-\sqrt{-3}$, ex quo radicem potestatis quintae extrahi oporteat. Erit ergo $n=5$; $A=-1$; $B=\sqrt{-3}$ hincque $AA+BB=-2$ et $AA+BB=4$; habebitur ergo haec aequatio: $u^5-5u^3+5u=-1$, ex qua prodit $u=-1$, ita vt radix quaesita futura sit $\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[10]{2^{10}:2^2}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt{16}}$; quae est vera radix. At si quaereretur radix potestatis quintae ex $+1+\sqrt{-3}$, pariter

reperiretur $\frac{\sqrt{1+\sqrt{-3}}}{\sqrt[5]{16}}$, verum hoc casu signum ipsius $\sqrt{-3}$ inuerti debet, vt vera radix sit $\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$

Quamobrem erit vt sequitur

$$\sqrt[5]{(1+\sqrt{-3})} = \frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(1-\sqrt{-3})} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(-1+\sqrt{-3})} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(-1-\sqrt{-3})} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

similitudo radicum cum ipsis potestatibus hoc modo magis fiet manifesta

$$\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}; \quad \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}; \quad \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

§. 23. Quaeratur radix potestatis septimae ex hoc binomio imaginario $13\sqrt{3}+\sqrt{-5}$. Erit ergo $n=7$, $A=13\sqrt{3}$ et $B=\sqrt{-5}$; vnde $AA+BB=502$ atque $AA-BB=512$; ex quibus conficitur $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = \frac{251}{128}$. Proueniet ergo sequens aequatio:

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = \frac{251}{128}$$

quae

quae si habet radicem rationalem erit ea vel $\pm \frac{1}{2}$ vel $\pm \frac{251}{2}$: reperitur autem rudix $u = -\frac{1}{2}$, vnde radix quaesita habetur $= \frac{\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{5}{2}}}}{\sqrt[14]{2^5}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{-5}}}{\sqrt[7]{64}}$

Neque circa hanc radicem vllum dubium manere potest, praeter signa radicalium vtrum ea debeant affirmatiue capi an negatiue; inquirenti autem patebit signa haec inventa recte se habere

§. 24. Haec radicum extractio, si binomium propositum fuerit imaginarium, absolui etiam potest ope multi sectionis angulorum, quippe quae in locum aequationis illius resoluendae substitui potest. Efficietur hoc autem ope sequentium lemmatum:

I. Si fuerit $u = \text{cos.}\frac{1}{n} A \text{ sin.} a$ erit

$$u = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2}$$

II. Si fuerit $v = \text{sin.}\frac{1}{n} A \text{ sin.} a$ erit

$$v = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$$

Ponatur iam $a\sqrt{-1} = \frac{2AB}{AA-BB}$, fiet $\sqrt{(1-aa)} = \frac{AA+BB}{AA-BB}$

Hincque superiora lemmata sequentes praebebunt aequationes

$$\text{I. cos.}\frac{1}{n} A \text{ sin.} \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

$$\text{II. sin.}\frac{1}{n} A \text{ sin.} \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt{-1}.\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

Quod ſi iam habeatur binomium $A \pm B$ ex quo radicem poteſtatis n extrahi oporteat, quae ſit $= \sqrt[2n]{p}^{x \pm y}$; atque facto $p = \frac{r^n}{AA - BB}$, erit primo $xx - yy = r$. Deinde cum ſit $\frac{2(xx + yy)}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2}$ fiet

$xx + yy = \sqrt[n]{p}(AA - BB).\ \text{cof.}\ \frac{1}{n} A\ \text{ſin.}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$

ſeu $xx + yy = r\ \text{cof.}\ \frac{1}{n} A\ \text{ſin.}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$. Porro eſt: $\frac{4xy}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2}$ vnde fit $2xy = r\sqrt{-1}.\text{ſin.}\frac{1}{n}A.\text{ſin.}\frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$. Sit arcus cuius ſinus eſt $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius coſ. $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$; Sit inquam hic arcus $= \alpha$: fietque $x + y = \sqrt{r}(\text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\ \frac{\alpha}{n})$ et $x - y = \sqrt{r}(\text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n} - \sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\ \frac{\alpha}{n})$. Hinc porro reperietur

$$x + y = \frac{\sqrt{r}(1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n}) + \sqrt{r}(-1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n})}{\sqrt{2}}$$

atque $\frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}} = \frac{x+y}{\sqrt{r} : \sqrt[2n]{(AA - BB)}} =$

$$\frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n})} + \sqrt{(-1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n})}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA - BB}}}.$$

Ex his itaque elicitur binomii $A \pm B$ radix poteſtatis $n =$

$$\frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n})} + \sqrt{-1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{2n})}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA - BB}}}$$

Cum autem ſit $\sqrt{(1 + \text{coſ.}\ \frac{\alpha}{n})} = \sqrt{2}.\text{coſ.}\ \frac{\alpha}{2n}$ et $\sqrt{(-1 + \text{coſ.}}$

$+ \cos. \frac{\alpha}{n}) = \sqrt{-2} . \sin. \frac{\alpha}{2n}$. Atque tandem emerget binomii $A \pm B$ radix quaesita $= (\cos. \frac{\alpha}{2n} \pm \sin. \frac{\alpha}{2n} . \sqrt{-1})$ $\sqrt[2n]{(AA-BB)}$, existente α arcu cuius sinus est $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius cosinus est $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$. Hoc tantum est notandum subinde $\sqrt[2n]{(AA-BB)}$, cuius valor vtique est ambiguus, negatiue accipi debere, qua de re facile erit quouis casu iudicare. Huius igitur modi vsus erit potissimum quando A et B eiusmodi fuerit quantitates, vt angulus assignari queat, cuius cosinus $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$.

§. 25. His expositis, quae spectant ad extractionem radicum ex proposito binomio, pergo ad negotium multo latius patens, methodumque tradam, cuius ope non solum ex quantitatibus surdis, binomii forma contentis, sed ex quantitatibus vtcunque irrationalibus radices dati ordinis extrahi queant. Hactenus enim tantum huiusmodi formas $A \pm B$, ex duabus partibus constantes sumus contemplati atque irrationalitatem ita comparatam posuimus, vt partium quadrata fiant numeri rationales. Nunc igitur ipsum fontem aperiemus, quo non solum praecedens methodus vniuersa contineatur, sed ex quo etiam modum haurire liceat, ex quantitate irrationali quacunque proposita radicem dati gradus extrahendi. Quo autem vis huius methodi quam sum expositurus, clarius pateat, sequens specimen eius vsum declarare poterit. Inueni scilicet istius methodi beneficio, sequentis quantitatis tam irrationalis quam imaginariae:

$-\frac{7}{3} + \frac{1+\sqrt{-1}}{6} \sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1-3\sqrt{-3})} + \frac{1-\sqrt{-3}}{6} \sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1+3\sqrt{-3})}$ radicem quadratam esse hanc:

$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}}(-1+3\sqrt{-3})^2+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}}(-1-3\sqrt{-3})^2$

Ex quo exemplo satis intelligere licet, methodum hanc non solum esse nouam, verum etiam in abbreuiandis calculis saepe magnam habere vtilitatem.

§. 26. Pro quantitate igitur irrationali quacunque proposita, ex qua radicem potestatis n extrahi oporteat, scribo litteram x; eritque haec littera x radix aequationis cuiusdam algebraicae, quae ex natura quantitatis x facile assignabitur. Sit ista aequatio huius formae:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0.$$

Quaestio ergo huc reuocatur, vt ex valore ipsius x, qui ipsi vi huius aequationis conuenit, extrahatur radix potestatis n. Ponatur haec radix quaesita $= y$, erit $y = \sqrt[n]{x}$, ideoque $x = y^n$; qui valor in illa aequatione substitutus, dabit hanc aequationem:

$$y^{mn} + ay^{mn-n} + by^{mn-2n} + cy^{mn-3n} + \text{etc.} = 0.$$

Quare si ex hac aequatione valor ipsius y assignari poterit, habebitur ipsa radix potestatis n ex quantitate proposita x, quae quaeritur. Peruenitur quidem hoc modo ad resolutionem aequationis multo plurium dimensionum, quam est ea, per quam x definitur: verum quia in vtraque aequatione idem adest terminorum numerus, atque omnes ipsius y exponentes per n diuisibiles sunt, aequatio haec tantum m dimensionum est censenda, ex quo ea in n aequationes simpliciores resolui poterit, quarum singulae erunt huiusmodi

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

quibus aequationibus inuentis, et deinceps resolutis singuli valores ipsius y praebebunt totidem radices potestatis n

ex

ex quantitate x. Numerus igitur harum radicum seu valorum ipsius y erit $=mn$, id quod egregie conuenit quaestionis indoli. Reuera enim x habet ex aequatione m valores diuersos, quorum singulorum radices potestatis n hac methodo inueniri debent. Ex vnoquoque autem ipsius x valore tot radices potestatis n extrahi possunt, quot exponens n habet unitates, ex quo omnino y habere debebit mn valores diuersos.

§. 27. Ponamus valorem ipsius x definiri per hanc aequationem quadraticam:

$$xx + ax + b = 0$$

ita vt sit vel $x = -\frac{a+\sqrt{(aa-4b)}}{2}$ vel $x = -\frac{a-\sqrt{(aa-4b)}}{2}$; atque ex vtroque horum valorum extrahi oportere radicem potestatis n. Cum igitur hic sit x binomium vel residuum, habemus hic illum ipsum casum, quem hactenus tractauimus vt scilicet ex binomio vel residuo radix datae potestatis extrahatur. Sit igitur radix potestatis n ex $x = y$, seu $x = y^n$ atque y definietur hac aequatione:

$$y^{2n} + ay^n + b = 0.$$

Quodsi iam ponamus hanc aequationem in factores simplices duarum dimensionum huius formae $yy + Ay + B = 0$ resolui, quorum numerus erit $= n$, reperiemus omnes has aequationes partiales contineri in hac

$$yy + uy\sqrt[2n]{b} + \sqrt[n]{b} = 0$$

sortiente u tot diuersos valores, quot exponens n habet vnitates; qui valores definiuntur hac aequatione:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{a}{\sqrt{b}} = 0$$

vbi signorum ambiguorum superius $+$ est capiendum, si n fuerit numerus par, contra vero alterum signum $-$ valet

valet, si sit n numerus impar. Quare si huius aequationis n dimensionum vnica radix seu valor ipsius u constiterit, ex eo bini pro y inuenientur valores hi:

$$y = \frac{u\sqrt[2n]{b} + (uu-4)\sqrt[n]{b}}{2}$$

qui erunt radices potestatis n ex binis valoribus ipsius x, qui sunt $x = \frac{u \pm \sqrt{(uu-4b)}}{2}$. Radices autem istae y, etiam hoc modo possunt exprimi, vt sit

$$y = \frac{u \pm \sqrt{(uu-4)}}{2} \cdot \sqrt[2n]{b}$$

haecque regula consentire reperietur cum ea, quae supra §. 19 est data.

§. 28. Sit nobis propositum hoc binomium $41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7}$, ex quo radicem potestatis septimae extrahi oporteat. Hoc comparato cum valore ipsius x fiet $a = -82\sqrt{5}$ et $b = 4 \cdot 3^7$, hincque $\frac{-a}{\sqrt{b}} = \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}}$. Quamobrem haec habebitur aequatio ordinis septimi:

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u + \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}} = 0$$

quae ad rationalitatem reducta ponendo $u = \frac{v\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, reperietur esse $v = -1$, ita vt sit $u = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, et $\sqrt{(uu-4)} = \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{3}}$, atque $\sqrt[2n]{b} = \sqrt[14]{4 \cdot 3^7} = 2^{\frac{2}{7}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

Quare radix potestatis septimae quaesita y erit haec:

$$y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{2\sqrt{3}} \cdot 2^{\frac{2}{7}}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$$

Examinanti autem patebit signum $+$ valere ita, vt futura sit $\sqrt[7]{(41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$.

Hocque exemplum sufficiet ad vsum huius regulae, quae in

in superioribus iam fusius est exposita, illustrandum. Pergo ergo ad quantitates irrationales magis compositas, methodumque exponam, cuius ope ex iis radices extrahi queant.

§. 29. Denotet ergo x valorem, qui ipsi ex hac aequatione cubica conuenit;

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

et quaerenda sit radix quadrata ex ista quantitate x. Ponatur haec radix quadrata $= y$, ita vt sit $y = \sqrt{x}$ seu $x = yy$; atque y definietur per hanc aequationem:

$$y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0.$$

Quodsi iam y pariter sit radix ex aequatione aliqua cubica vti x, id quod pono: nam si y per aequationem cubicam exprimi nequeat, eius valor simplicius quam per $\sqrt{x}$ exhiberi non poterit. Quare videndum est, an inueniri queat aequatio cubica puta haec:

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

quae in illa aequatione sextae potestatis contineatur. Quod vt fiat, multiplicetur haec aequatio per $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, ac productum illi aequationi aequetur, quo facto reperietur

$$\alpha = -p$$
$$\beta = a - q + pp$$
$$\gamma = -r + 2pq - ap - p^3$$

Deinde vero p, q, et r determinabuntur ita.

$$b + 2pr = aq - qq - app + 3ppq - p^4$$
$$0 = (a - 2q + pp)(r - pq)$$
$$0 = rr + c + pr(a - 2q + pp)$$

Si iam ponamus $a - 2q + pp = 0$ ex secunda aequatione fiet $rr = -c$ in tertia, atque ob $q = \frac{a+pp}{2}$

prima dabit hanc aequationem $p^4 + 2ppp - 8p\sqrt{-c} + aa - 4b = 0$ ob $r = \sqrt{-c}$.

Sin autem aequatio desideretur, per quam q determinetur, quia est $p = \sqrt{(2q - a)}$ aequatio prima abibit in hanc:

$$qq - b = 2\sqrt{(ac - 2cq)} \text{ seu}$$
$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0$$

ex qua, si reperiri potuerit valor pro q erit $p = \frac{qq-b}{2r}$ atque $r = +\sqrt{-C}$. Deinde vero fit $\alpha = -p$, $\beta = q$, et $\gamma = -r$. Inuentis ergo valoribus pro p, q, et r, aequatio sex dimensionum: $y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0$ resoluitur in binas has cubicas.

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$
$$y^3 - py^2 + qy - r = 0$$

quarum radices singulae erunt radices quadratae ex radicibus huius aequationis $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Litterae autem p, q, et r a coëfficientibus cognitis a, b, et c ita pendent vt sit $a = -pp + 2q$; $b = qq - 2pr$ et $c = -rr$ ex quibus eliminando p et r nascitur aequatio superior:

$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0.$$

§. 30. Vt vsus huius extractionis aliquo exemplo illustretur, pono x habere valorem ex hac aequatione:

$$x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0.$$

Quare, vt forma ipsius x ob oculos ponatur, radices istius aequationis cubicae inuestigari oportebit; quae commodissime inuenientur ope sequentis regulae in Transact. Anglicanis traditae.

Si

Si fuerit haec aequatio cubica.

$$x^3 - 3\alpha xx + 3\alpha^2 - \alpha^3$$
$$-3\beta x + 3\alpha\beta = 0$$
$$-2\gamma$$

erunt eius tres radices sequentes:

$$x = \alpha + \sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

Quod si nunc hanc aequationem generalem ad nostrum exemplum $x^3 + 3x^2 + 6x - 25 = 0$ accommodemus, fiet:

$-3\alpha = 3$ seu $\alpha = -1$
$3 - 3\beta = 6$ seu $\beta = -1$
$4 - 2\gamma = -25$ seu $\gamma = \frac{29}{2}$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{13\sqrt{5}}{2}$; ex quibus terni ipsius x valores erunt sequentes:

$$x = -1 + \sqrt[3]{\tfrac{29 + 13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{29 - 13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29 + 13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29 - 13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29 + 13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29 - 13\sqrt{5}}{2}}$$

Haec igitur nobis proposita est quaestio, vt ex singulis hisce ipsius x valoribus radices quadratas extrahamus.

§. 31 Comparetur ergo aequatio proposita $x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0$ cum forma generali $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fietque: $a = 3$, $b = 6$, et $c = -25$, atque ex his nascetur sequens aequatio biquadratica:

$$q^4 - 12q^2 - 200q + 336 = 0$$

ad quam eo facilius resoluendam pono $q = 2u$ oriturque:

$$u^4 - 3u^2 - 25u + 21 = 0$$

ita vt valor ipsius u sit vel ± 3 vel ± 7. Reperietur autem esse $u = 3$, ideoque $q = 6$. Porro ob $r = \sqrt{-c}$ fiet $r = 5$ atque $p = \frac{qq-b}{2r} = 3$. Quo circa radices quadratae ex valoribus ipsius x erunt radices sequentium binarum aequationum

$$y^3 + 3y^2 + 6y + 5 = 0$$
$$y^3 - 3y^2 + 6y - 5 = 0$$

quae duae aequationes ita inter se conueniunt vt radices vnius sint simul radices alterius sed negatiue sumtae: ideoque sufficiet alterius aequationis radices indagasse. Ex priori ergo fit

$$-3\alpha = 3 \quad \text{seu} \quad \alpha = -1$$
$$3 - 3\beta = 6 \quad \text{seu} \quad \beta = -1$$
$$4 - 2\gamma = 5 \quad \text{seu} \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}$$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ex quibus sequentes valores ipsius y inueniuntur

$$y = -1 + \sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$y = -1 - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2}}$$
$$y = -1 - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2}}.$$

Harum vnaquaeque cum sua negatiua constituet radices quadratas vnius ex valoribus ipsius x.

§. 32. Ac primi quidem ipsius x valoris, qui erat

$$-1 + \sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt:

$$-1 + \sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$+1 - \sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Se-

Secundi ipsius x valoris, qui erat

$$-1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt

$$-1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Tertii denique ipsius x valoris, qui est

$$-1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

binae radices quadratae sunt:

$$-1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

quae omnia si cui volupe fuerit per calculum periculum facere, veritati consentanea reperietur. Nam quaenam ex inuentis radicibus cuique ipsius x valori competant, ob summum nexum inter se, nisi periculum faciendo definiri non potest.

§. 33. Progrediamur vltra, atque inuestigemus radicem cubicam ex valoribus ipsius x, quos obtinet vi aequationis huius cubicae: $x^3+ax^2+bx+c=0$. Ponatur radix cubica ex x seu $\sqrt[3]{x}=y$ erit $x=y^3$, atque valor radicis quaesitae y definietur per hanc aequationem.

$$y^9+ay^6+by^3+c=0.$$

Hanc igitur diuisibilem esse pono per aequationem quandam cubicam:

$$y^3+py^2+qy+r=0$$

vt valor ipsius y pari expressione, vti x, possit exhibe-

ri. Sit autem quotus huic diuisori assumto respondens:

$$y^6 + \alpha y^5 + \beta y^4 + \gamma y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Quodsi iam productum aequale constituatur illi aequationi nouem dimensionum, superatis calculis satis prolixis, tandem istae emergent determinationes:

$$a = p^3 - 3pq + 3r$$
$$b = q^3 - 3pqr + 3rr$$
$$c = r^3$$

Vnde fit $r = \sqrt[3]{c}$; $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$

qui ipsius q valor in aequatione secunda substitutus dat hanc aequationem, ex qua valor ipsius p erui debebit.

$$p^9 - 3p^6(6r + a) + 3p^3(9rr + 3ar + aa - 9b) + (3r - a)^3 = 0$$

Ex hac ergo aequatione si erui poterit valor ipsius p, simul valor radicis quaesitae y ex aequatione cubica poterit assignari.

§. 34. Cum igitur aequatio diuidens quaesita sit $y^3 + pyy + qy + r = 0$, atque inuento valore ipsius p sit $r = \sqrt[3]{c}$ et $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$, quotus ex diuisione ortus seu alter factor erit

$$y^6 - py^5 + (pp - q)y^4 - (pq - 2r)y^3 + (qq - pr)y^2 - qry + rr = 0$$

quae facile in binas sequentes aequationes cubicas resoluitur

$$y^3 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$
$$y^3 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$

Habemus ergo tres aequationes cubicas dummodo valor ipsius p fuerit cognitus ex quibus elicientur nouem valores pro y, quarum terni erunt totidem radices cubicae ex singulis ipsius x valoribus. Omnis enim quantitas

tres

tres habet radices cubicas, vti ex qualibet quantitate duae radices quadratae extrahi possunt. Simili scilicet modo, quo est tam $\sqrt{a^2} = a$, quam $\sqrt{a^2} = -a$ tripliciter $\sqrt[3]{a^3}$ exprimi potest, erit nempe

I. $\sqrt[3]{a^3} = +a$

II. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . a$

III. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . a$

atque ex hoc fonte ingressae sunt istae coëfficientes imaginariae $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ in binas alteras aequationes inuentas.

§. 35. Potuissemus igitur ex hoc fonte assumto vno diuisore $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ aequationis $y^9 + ay^6 + by^3 + c = 0$ statim reliquos binos diuisores formare. Cum enim in ista aequatione 9 dimensionum omnes ipsius y exponentes per 3 sint diuisibiles, manifestum est, si fuerit y radix ex illa aequatione, tum etiam omnes valores in $\sqrt[3]{y^3}$ contentos esse debere eius radices. Hoc est si y fuerit radix illius aequationis, pariter radices erunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} y$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} y$: qui si loco y in aequatione $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ substituantur, statim praebent binos reliquos factores. Atque hac lege animaduersa poterimus facile ad radices altiorum ordinum progredi, quas ex radicibus aequationis cubicae propositae extrahi oporteat; qui labor, si eodem, modo quo pro radicibus quadratis et cubicis a nobis est institutus, susciperetur, omnino fieret insuperabilis. Quin etiam hac via procedere poterimus ad aequationes adhuc plurium dimensionum; per quas valor ipsius x determinetur.

§. 36.

§. 36. Ex his scilicet, si debito modo applicentur, patebit, y fore radicem potestatis n ex x, posito x dari per hanc aequationem cubicam:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Si coëfficientes huius aequationis

$$y^3 + p y^2 + q y + r = 0$$

sequenti modo determinentur:

I. Casu quo $n = 1$

$a = p$
$b = q$
$c = r$

II. Casu quo $n = 2$

$a = -pp + 2q$
$b = qq - 2pr$
$c = -rr$

III. Casu quo $n = 3$

$a = p^3 - 3pq + 3r$
$b = q^3 - 3pqr + 3rr$
$c = r^3$

IV. Casu quo $n = 4$

$a = p^4 + 4pqq - 4pr - 2qq$
$b = q^4 - 4pqqr + 4qrr + 2pprr$
$c = -r^4$

V. Casu quo $n = 5$

$a = p^5 - 5p^3q + 5pprr + 5pqq - 5qr$
$b = q^5 - 5pq^3r + 5qqrr + 5p^2qr^2 - 5pr^3$
$c = r^5$

VI. Casu quo $n = 6$

$a = -p^6 + 6p^4q - 6p^3r - 9ppqq + 12pqr + 2q^3 - 3rr$
$b = q^6 - 6pq^4r + 6q^3rr + 9p^2q^2r^2 - 12pqr^3 - 2p^3r^3 + 3r^4$
$c = -r^6$

§. 37.

§. 37. Quodsi autem quantitas x definiatur per aequationem biquadraticam:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

atque y denotet radicem potestatis n ex x vt sit $y = \sqrt[n]{x}$; haec radix y determinabitur pariter per aequationem biquadratam hanc:

$$y^4 + p y^3 + q y^2 + r y + s = 0$$

si quidem coefficientes p, q, r, et s definiantur vt sequitur:

I. Casu quo $n = 1$

$a = p$;
$b = q$;
$c = r$;
$d = s$;

II. Casu quo $n = 2$

$a = -pp + 2q$
$b = qq - 2pr + 2s$
$c = -rr + 2qs$
$d = ss$

III. Casu quo $n = 3$

$a = p^3 - 3pq + 3r$
$b = q^2 - 3pqr - 3qs + 3rr + 3pps$
$c = r^3 - 3qrs + 3pss$
$d = s^3$

IV. Casu quo $n = 4$

$a = -p^4 + 4ppq - 4pr - 2qq + 4s$
$b = q^4 - 4pqqr - 4qqs + 4qrr + 4ppqs + 2pprr - 8prs + 6ss$
$c = -r^4 + 4qrrs - 4prss - 2qqss + 4s^3$
$d = s^4$

Atque ſimili modo vlterius tam ad altiores poteſtates radicis y, quam ad aequationes magis compoſitas, quibus x definitur progredi licet.

§. 38. Quemadmodum autem ſupra §. 34. vidimus pro extrahenda radice cubica plurimum iuuare formulas $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, quae praeter vnitatem ſunt radices cubicae ex vnitate; ita ad extractionem radicum altiorum ordinum noſſe oportebit radices earundem poteſtatum ex vnitate. Quamobrem operae pretium erit radices cuiuscunque poteſtatis, earumque indolem indagare. At manifeſtum eſt radices poteſtatis n ex vnitate oriri debere ex reſolutione huius aequationis:

$$x^n - 1 = 0$$

omnis enim valor ipſius x huic aequationi conueniens ita eſt comparatus, vt eius poteſtas exponentis n aequetur vnitati. Si iam ponamus α eſſe eiusmodi valorem ipſius x erit $\alpha^n = 1$: hinc vero ſequitur fore etiam poteſtates α^{2n}, α^{3n}, α^{4n}, etc. aequales vnitati. Quae cum ſint poteſtates exponentis n ipſarum α^2, α^3, α^4, etc. neceſſe eſt, vt, ſi fuerit α radix aequationis $x^n - 1 = 0$ ſint etiam omnes ipſius α poteſtates, quales ſunt α^2, α^3, α^4, α^5, etc. radices ipſius x. Quocirca ſi aequationis $x^n - 1 = 0$ radices ponantur α, β, γ, δ, ε, etc. hae radices ita erunt comparatae, vt vniuscuiusque poteſtates ſingulae in iisdem quantitatibus occurrere debeant. Atque hinc reſoluetur ſequens problema, quo quaerunturur n quantitates diuerſae huius naturae, vt ſingularum poteſtates quaecunque ſimul ſint termini ex ea quantitatum ſerie.

§. 39.

§. 39. Sic si sit $n = 1$, aequatio $x - 1 = 0$ dat radicem 1, quae ita est comparata, vt eius omnes potestates ipsi sint aequales, qui est problematis casus primus.

Casus secundus quo $n = 2$. dat hanc aequationem:

$$x^2 - 1 = 0$$

cuius duae sunt radices hae

$$x = + 1$$
$$x = - 1$$

quarum binarum radicum omnes potestates sunt vel $+ 1$ vel $- 1$.

Casus tertius, quo $n = 3$, dat hanc aequationem: $x^3 - 1 = 0$. cuius vna radix cum sit $= 1$, si aequatio $x^3 - 1 = 0$ per $x - 1$ diuidatur prodibit:

$$xx + x + 1 = 0$$

quae duas reliquas radices aequationis $x^3 - 1 = 0$ praebebit, vnde tres aequationis propositae $x^3 - 1 = 0$ radices erunt

$$x = + 1$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Quae eadem proprietate commemorata gaudent, nam primae radicis 1 omnes potestates ipsi sunt aequales: deinde est

$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$	$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$
$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

et ita porro

§ 40. Casus quartus quo $n = 4$ praebet hanc aequationem: $x^4 - 1 = 0$. cuius radicum singularum biquadrata aequantur vnitati. Resoluitur autem haec aequatio in has binas $xx - 1 = 0$ et $xx + 1 = 0$, ex quibus quatuor illae radices reperientur:

$$x = +1$$
$$x = -1$$
$$x = +\sqrt{-1}$$
$$x = -\sqrt{-1}$$

atque vnius cuiuscunque potestas quaecunque aequalis est vni ex his ipsis quatuor radicibus.

Casus quintus quo $n = 5$ dat aequationem hanc $x^5 - 1 = 0$, quae diuisa per $x - 1 = 0$, ex quo divisore prima radix $x = 1$ innotescit, dat $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; quae in duas quadraticas discerpitur huius formae

$$xx + px + 1 = 0$$
$$xx + qx + 1 = 0$$

in quibus p et q sunt radices huius aequationis $uu - u - 1 = 0$; ita vt sit

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Hinc iam quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ oriuntur sequentes:

$$x = 1$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} = \alpha$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} = \beta$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} = \gamma$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} = \delta$$

quae

quae ratione suarum potestatum ita sunt comparatae, vt sit:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|}
\alpha^2 = \delta & \beta^2 = \gamma & \gamma^2 = \alpha & \delta^2 = \beta \\
\alpha^3 = \gamma & \beta^3 = \delta & \gamma^3 = \beta & \delta^3 = \alpha \\
\alpha^4 = \beta & \beta^4 = \alpha & \gamma^4 = \delta & \delta^4 = \gamma \\
\alpha^5 = 1 & \beta^5 = 1 & \gamma^5 = 1 & \delta^5 = 1
\end{array}$$

§. 41. Casus sextus quo $n = 6$ praebet hanc aequationem $x^6 - 1 = 0$, cuius sex singularum radicum potestates sextae aequales erunt vnitati. Haec vero aequatio per $xx - 1$ diuisa, vnde iam duae radices ipsius x nempe $+1$ et -1 prodeunt, dat hanc

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

quae vlterius resoluitur in has duas:

$$xx + x + 1 = 0$$
$$xx - x + 1 = 0$$

vnde tandem omnes sex radices quadratocubicae ex vnitate proueniunt:

$$x = +1$$
$$x = -1$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}$$

quae statim inueniri potuissent ex tribus radicibus cubicis vnitatis; radices enim quadratocubicae primo sunt ipsae radices cubicae, ac deinde eaedem radices cubicae negatiue sumtae, id quod patet ex resolutione aequationis $x^6 - 1 = 0$ in has binas cubicas $x^3 - 1 = 0$ et $x^3 + 1 = 0$.

§ 42. Rosolutio casus septimi, quo $n = 7$ et $x^7 - 1 = 0$ maiori laborat difficuitate, et quia in eius resolutione plura exempla occurrunt; quibus doctrina hactenus tradita illustratur, hoc negotium absoluemus. Aequatio autem $x^7 - 1 = 0$ diuisa per $x - 1$, vnde prima radix $x = 1$ innotescit, dat

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

quae diuisores rationales non admittit, quia autem aequatio haec manet inuariata ponendo $\frac{1}{x}$ loco x, ex quo constat productum ex binis radicibus esse $= 1$ haec aequatio resolui poterit in ternas quadraticas:

$$x + p\,x + 1 = 0$$
$$x + q\,x + 1 = 0$$
$$x + r\,x + 1 = 0$$

vbi p, q, r sunt tres radices ex ista aequatione cubica

$$u^3 - u^2 - 2\,u + 1 = 0$$

quibus inuentis erit praeter $x = 1$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(pp - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-q \pm \sqrt{(qq - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-r \pm \sqrt{(rr - 4)}}{2}$$

Primo igitur valores litterarum p, q, r inuestigari debent ex resolutione huius aequationis cubicae: $u^3 - u^2 - 2\,u + 1 = 0$ cuius tres valores ipsi u conuenientes dabunt valores litterarum p, q, et r.

§. 43. Comparetur ergo haec aequatio cum aequatione cubica generali §. 30 data, eritque

$\alpha = + \frac{1}{3}$;

$3\,\beta - \frac{1}{9} = 2$; seu $\beta = \frac{7}{9}$

$-\frac{2}{27}+\frac{7}{9}-2\gamma=1$ seu $\gamma=\frac{-7}{54}$

vnde $\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)}=\frac{7}{18}\sqrt{-3}$ atque $\sqrt[3]{(\gamma\pm\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)})}$

$=\sqrt[3]{(\frac{-7}{54}\pm\frac{7}{18}\sqrt{-3})}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}}(-1\pm3\sqrt{-3})$

Hinc ergo pro p, q, r sequentes prodibunt valores:

$$p=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$q=\frac{1}{3}\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$r=\frac{1}{3}\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{6}\right)-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

Tres hae formulae in hac vna comprehendi possunt:

$$\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{3}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)+\frac{\beta}{3}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

quae abit in primam si fuerit $\alpha=1$ et $\beta=1$, in secundam si $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, atque in tertiam si $\alpha=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. In omni autem casu erit $\alpha\beta=1$, et $\alpha^2=\beta$, atque $\beta^2=\alpha$. Huius igitur triplicis formae in vnicam redactae quadratum quaternario minutum, vt prodeant formae $pp-4$, $qq-4$ et $rr-4$ erit:

$$-\frac{7}{3}+\frac{\alpha}{3}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)+\frac{\beta}{3}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

Est enim $\sqrt[3]{49}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)$

et $\sqrt[3]{49}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$

quarum transformationum beneficio quadratum superius inventitur, a quo 4 ablatus est.

§. 44. Quia nunc inuenimus ternas quantitates $pp-4$, $qq-4$, et $rr-4$ possemus statim iis signum radicale

$\sqrt{}$

$\sqrt{}$ praefigendo septem radices aequationis $x^7 - 1 = 0$ assignare. At si has radices in forma simplicissima exhibere velimus, indagare debemus, an ex istis quantitatibus $pp - 4$, $qq - 4$; $rr - 4$ actu radix quadrata extrahi possit. Cum igitur sint p, q et r valores ipsius u ex hac aequatione:

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

ponamus $\sqrt{(uu-4)} = v$, atque hic valor v praebebit valores pro $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$. Posito autem $\sqrt{(uu-4)} = v$ seu $uu = vv + 4$ habebimus:

$$(vv+2)\sqrt{(vv+4)} = vv + 3 \text{ hincque}$$

$$v^6 + 7v^4 + 14v^2 + 7 = 0.$$

Huius aequationis ponantur secundum §. 29 factores

$$v^3 + pv^2 + qv + r = 0$$

$$v^3 - pv^2 + qv - r = 0$$

atque ad determinandos coefficientes p, q, r prodibit aequatio:

$$q^4 - 28q^3 + 56q = 0$$

ex qua prodit $q = 0$, $r = \sqrt{-7}$, et $p = \sqrt{-7}$; ita vt v definiatur per has aequationes: $v^3 \pm v^2\sqrt{-7} \pm \sqrt{-7} = 0$

§. 45. Ex hac duplici aequatione sufficiet alteram tantum resoluisse, cum alterius radices sint negatiuae radicum alterius aequationis, atque iam supra signa radicalia $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$; $\sqrt{(rr-4)}$ signum habeant ambiguum. Quaeramus ergo radices aequationis huius:

$$v^3 - v^2\sqrt{-7} - \sqrt{-7} = 0$$

quae

quae cum forma generali §. 30. comparata, dat:

$$\alpha = \frac{\sqrt{-7}}{3}$$

$$\beta = -\frac{7}{9}$$

$$+\frac{7\sqrt{-7}}{27} - \frac{21\sqrt{-7}}{27} - 2\gamma = -\sqrt{-7} \text{ seu } \gamma = \frac{13\sqrt{-7}}{54}$$

vnde fit $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{\sqrt{21}}{18}$ atque

$$\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = \sqrt[3]{\left(\frac{13\sqrt{-7}}{54} \pm \frac{\sqrt{27}}{18}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{13 \pm 3\sqrt{-7}}{2}}$$

seu $\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1 \mp 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$

Atque hinc scripto $-\sqrt{-7}$ loco $\sqrt{-7}$, prodibunt pro v tres sequentes valores:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

qui comprehendi possunt in hac vna forma:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{\mu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} + \frac{\nu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

denotantibus μ et ν vel vtraque 1, vel altera $-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ et altera $-\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}$.

§. 46. Vt nunc appareat quomodo littera μ et ν ad supra assumtas §. 43. nempe ad α et β comparatae esse debeant, sumamus huius valoris inuenti quadratum quod erit:

$$-\frac{7}{3} + \frac{\mu}{3}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} + \frac{\nu}{3}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

qui cum congruere debeat cum valore supra pro $pp-4$, seu $qq-4$, seu $rr-4$ inuento fiet

$$\alpha\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right) = \mu\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) \text{ et}$$

$$\beta\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) = \nu\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

vnde erit $\mu = \alpha\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$
atque $\nu = \beta\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

His definitis pro valoribus ipsius x supra §. 43 inuentis, si valeat p erit $\alpha = 1$, $\beta = 1$
si valeat q; erit $\alpha = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$
si valeat r; erit $\alpha = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$

Atque ex his prodibit formularum irrationalium $\sqrt{(pp-4)}$, $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$ valor vnica expressione contentus hic:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{\alpha}{3}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{\beta}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

substitutis ergo loco α et β singulis casibus valoribus debitis reperientur sequentes septem radices aequationis

$$x^7 - 1 = 0$$

I. $x = 1$

II. III. $\left\{ x = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)} \right.$
$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \pm \left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$

IV. V. $\left\{ x = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)} \right.$
$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \mp \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$

VI. VII. $\left\{ x = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)} \right.$
$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \mp \left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$

§. 47. In vnaquaque harum formarum praeter primam continentur quatuor signa radicalia cubica, at in qualibet bina eiusmodi signa in vnum colligi possunt. Cum enim sit vt supra ostendimus:

$$\sqrt[3]{49}\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = -\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

et $$\sqrt[3]{49}\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = -\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

erit

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$$

et $$\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

His igitur valoribus ſubſtitutis ſeptem illae ipſius x radices ex aequatione $x^7 - 1 = 0$, ſeu ſeptem diuerſae expreſſiones, quarum ſingularum poteſtates ſeptimae vnitatem producunt erunt ſequentes.

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}.$$

$$\mathrm{II\ et\ III} = -\frac{1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{7}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right) \frac{7}{6\sqrt{-7}}$$
$$\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$\mathrm{IV\ et\ V} = -\frac{1\mp\sqrt{-7}}{6} - \frac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$$
$$-\frac{(-1-3\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$\mathrm{VI\ et\ VII} = -\frac{1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{(-1-\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)$$
$$-\frac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

§. 48. Si quis porro progredi voluerit, facile deſiniet octo radices huius aequationis $x^8 - 1 = 0$

$\mathrm{I} = +1$; $\mathrm{III} = +\sqrt{-1}$; $\mathrm{V} = +\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{VII} = -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{II} = -1$; $\mathrm{IV} = -\sqrt{-1}$; $\mathrm{VI} = +\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{VIII} = -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$:

ſimili modo ex tribus radicibus cubicis ex vnitate, reperientur nouem radices aequationis $x^9 - 1 = 0$ dum ex ſingulis radicibus cubicis denuo ternae radices cubicae

extrahuntur eruntque ideo

$I = 1$ $\quad IV = \sqrt[5]{\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$; $VII = \sqrt[5]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

$II = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; $V = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[5]{-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$; $VIII = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

$III = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $VI = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$; $IX = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[5]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

Decem autem radices aequationis $x^{10} - 1 = 0$ erunt primo quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ ipsae §. 40. exhibitae, atque insuper eaedem per -1 multiplicatae. At vero radices vndecim aequationis $x^{11} - 1 = 0$ exhiberi non possunt nisi ope aequationis quinque dimensionum, cuius resolutio cum adhuc lateat, hic subsistere debemus.

PRO-