# DE MOTV OSCILLATORIO CORPORVM FLEXIBILIVM.

AVCTORE
*LEONH. EVLERO.*

§. 1.

Doctrina de oscillationibus corporum tanto studio a longo iam tempore est peruestigata, vt ea omnino exhausta esse videatur. Postquam enim Hugenius caepisset motum oscillatorium corporum rigidorum ex axe fixo suspensorum ad calculum reuocare: plurima alia oscillationum genera a Mathematicis sunt tractata ac determinata tam pro corporibus rigidis, quam flexibilibus atque etiam fluidis: neque solum in vacuo, sed etiam in medio resistente hos motus oscillatorios sunt perscrutati. Dedi quoque in Comment. Acad. Imper. Petrolitanae Tom. VIII. disertationem de hoc eodem argumento latissime patentem, in qua methodi perquam facilis et expeditae ope innumerabilia oscillationum genera, cuiusmodi sunt chordarum vibrantium, laminarum elasticarum altero termino fixarum, funium seu catenarum suspensarum etc. definiui, ac pro quouis casu longitudinem penduli simplicis isochroni assignaui. Quamuis autem haec doctrina penitus absoluta videatur, occurrunt tamen nonnunquam eiusmodi oscilationum casus, qui peculiari explicatione indigent; hocque adeo euenit in iis generibus, quae prae ceteris amplissime euoluta videntur.

§. 2.

§. 2. Huiusmodi scilicet quaestionem mihi proposuit Vir Celerer. Dan. Bernoullius, circa corpora rigida de puncto fixo ope fili suspensa; qui casus primo intuitu ille ipse esse videtur, quem Hugenius in ipso initio expediuit; filum enim in hac quaestione subtilissimum ponitur, ita vt perpetuo in lineam rectam maneat extensum. Hoc tamen non obstante ingens deprehendetur discrimen inter hunc et Hugeneii casum; qui vulgo per inuentionem centri oscillationis resolui solet. Namque in casu Hugeniano corpus non aliter mobile statuitur, nisi circa axem, ex quo est suspensum, saltem actu alium motum in corpore non existere ponitur praeter angularem circa axem suspensionis: atque in hoc negotio corpus cum filo, cuius ope suspenditur, tanquam rigidum omnisque flexionis incapax spectatur. Quamuis autem in casu Bernoulliano animum a flexibilitate fili abstrahamus seu eius loco virgam rigidam substituamus; tamen iste motus more consueto definiri nequit, nisi simul iunctura, qua corpus cum filo seu virga connectitur, omnis mobilitatis sit expers. Quod si autem corpus circa hanc iuncturam motum recipere queat: tum durantibus oscillationibus corpus non solum circa axem fixum feretur motu angulari, sed etiam circa iuncturam aliquantum vacillabit; hocque duplici motu fit, vt methodo vsitata per centri oscillationis inuestigationem verus motus oscillatorius determinari nequeat. Atque circa hunc casum versabatur quaestio, quam Celeb. Bernoullius mihi proposuerat.

§. 3. Ad hanc similesque alias quaestiones cum distincte intelligendas tum expedite resoluendas naturam motus oscillatorii ex ipsis principiis altius repetemus. Ac primo mo quidem in omni motu oſcillatorio ſpectandus eſt ſtatus quietis ſeu aequilibri, in quo corpus, ſi ſemel fuerit conſtitutum, acquieſcat: ſunt enim oſcillationes nil aliud niſi alternae acceſſiones ac receſſiones a ſtatu aequilibrii. Sic penduli ex puncto fixo ſuſpenſi ſtatus quietis eſt, quo recta per punctum iſtud fixum et centrum grauitatis corporis ducta ſitum tenet verticalem; dum autem oſcillationes peragit, cis et vltra hunc ſtatum alternatim excurrit, donec tandem in hoc ſtatu quieſcat. Sic quoque in chorda tenſa datur ſtatus quietis, e quo ſi chorda deturbetur, vibrationes peragendo alternatim cis et vltra hunc ſitum digreditur. Ac ſimili modo in omni motu oſcillatorio obſeruantur eiusmodi reciprocationes, quibus corpora alternatim accedunt ac recedunt in eadem via ſemperque in huius viae medio exiſtit ſtatus quietis, in quo corpus tandem, excurſionibus penitus extinctis, quieſcat. Oſcillatio autem vocatur vna huiusmodi motus reciproci periodus, qua corpus e ſtatu quietis digreſſum iterum ad eum accedit, indeque vlterius recedit, donec denuo in eadem via reuerti incipiat: ex quo vna quaeque oſcillatio duabus conſtat partibus, quarum priori ad ſtatum quietis accedit, poſteriore ab eo recedit. Oſcillatio ergo finitur cum corpus maxime a ſtatu quietis receſſerit: ibique incipit noua ſequens oſcillatio, quae pariter abſoluetur acceſſione ad ſtatum quietis, ac ſubſequente receſſione ab eodem termino.

§. 4. Primum igitur natura ſtatus quietis, qui in omni motu oſcillatorio ineſt diligentius perſcrutari oportet, cum ex eo motus oſcillatorius potiſſimum pendeat, ac determinetur. Duplici autem modo corpus in quiete

verſa-

versari potest: primum scilicet si a nullis omnino potentiis sollicitetur tum enim vi primae motus legis in eodem statu perpetuo perseuerabit: deinde vero corpus etiamsi a potentiis sollicitetur, tamen in quiete persistere potest, si potentiae se mutuo destruant, atque in aequilibrio sint constitutae: atque hinc iste quietis status, vt a priori distinguatur, status aequilibrii vocari solet. Prior quietis status, quo corpus a nullis vrgetur potentiis omnino ad motum oscillatorium producendum est ineptus; licet enim hoc corpus ex hoc statu remoueatur, tamen ob defectum virium id sollicitantium, non in pristinum statum reuertetur, sed in statu remoto pariter quiescet. Quodsi autem potentiarum corpus sollicitantium, dum corpus ex statu quietis deturbatur, aequilibrium rumpitur, tum vtique aderunt vires corpus in statum quietis repellentes; et quoniam ab his viribus corpori motus imprimitur, corpus cum quadam celeritate in statum aequilibrii appellet, proinde vlterius excurret in plagam oppositam donec eius motus a viribus contra nitentibus absumatur, tum vero ob similem causam rursus ad statum aequilibrii vrgebitur, sicque motu reciproco accedendo et recedendo oscillationes peraget.

§. 5. Motus igitur oscillatorius existit, si vires corpus sollicitantes ita fuerint comparatae, vt, cum corpus extra statum quietis constituitur, eae corpus versus hunc quietis statum propellant. Consideremus primum corpus instar puncti sitque C eius locus quietis; in quo potentiae id sollicitantes in aequilibrio sint constitutae. Concipiatur iam corpus ex C in A transferri, et quia in A non est status aequilibrii, corpus ex A in directione Tab. III. fig. 1.

A C

AC sollicitabitur atque si sibi relinquatur actu per spatium AC promouebitur; continuo autem in hoc motu accelerabitur, quia in singulis spatii AC punctis P $p$ vis adest corpus versus C propellens, ideoque maxima cum celeritate in C appellet, qua, etsi in C est status quietis quoniam tamen ibi nullam virium actionem patitur, vltra in directione CB perget. Quamprimum autem vltra C pertingit, subibit actionem virium id retro versus C pellentium, quibus propterea eius motus iterum retardabitur, donec tandem in B omnis motus ab his viribus reluctantibus destruatur. Ex B igitur ab iisdem viribus reuerti cogetur in via BC, hocque in motu pariter usque in C accelerabitur, ita vt motu concepto iterum versus A excurrere debeat; donec omnem motum amiserit. Absoluet ergo corpus oscillationes tamdiu, quoad propter resistentiam aeris aliaque obstacula omnem motum amittat, atque in C quiescat.

§. 6. Ad motum ergo istiusmodi oscillationum determinandum nosse oportet vim; qua corpus in quauis a puncto C distantia positum eo vrgetur. Quae vis, si in se spectetur, vtique quamcunque legem elongationis a puncto C sequi potest, hincque innumerabilia oscillationum genera orirentur; interim tamen, quoniam ista vis euanescit, si corpus in ipso puncto C versatur, necesse est, vt haec vis eo maior euadat, quo longius corpus a puncto C remoueatur: Sicque corpore in P existente quantitas vis, quae id versus C vrgebit, proportionalis erit functioni cuipiam distantiae CP, quae sit $= x$, quae euanescat posito $x = 0$. Si igitur haec functio, cui vis corpus in distantia CP $= x$ versus C sollicitans est pro-

portio-

portionalis ponatur, $= \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. manifestum est si elongationes a puncto C fuerint minimae, tum vires corpus in quauis distantia $CP = x$ versus C sollicitantes fore his ipsis distantiis proportionales: vis igitur, quae corpus in A constitutum versus C pellit, est ad vim corpus in P existens versus C pellentem vt AC ad PC. Atque simili modo in altera parte CB, vbi $x$ fit negatiua, in quauis distantia CQ corpus in directione QC sollicitabitur vi ipsi distantiae CQ proportionali. Haec autem virium sollicitantium lex distantiis a situ aequilibrii proportionalis, siquidem distantiae fuerint quam minimae, in omnibus oscillationum generibus, quae quidem in mundo obseruantur, locum habet, ita vt ea instar principii omnis motns oscillatorii vti possimus.

§. 7. Hoc principio stabilito sequitur omnes oscillationes eiusdem corporis, siue inter oscillandum maiora siue minora spatia percurrat, dummodo in se spectata sint minima, eodem tempore absolui debere seu fore isochronas. Sit enim initio corpus ex C in A vsque deductum ex quo loco motum oscillatorium coeperit, perueneritque iam in P ac ponatur $AC = a$, $CP = x$, et celeritas, qua corpus elementum spatii $Pp = dx$ percurrit debita sit altitudini $v$. Sit iam $g$ vis acceleratrix, qua corpus in data distantia $c$ a situ C versus C sollicitatur, erit vis qua in P actu per $Pp$ acceleratur $= \frac{gx}{c}$; vnde fiet $dv = \frac{-gxdx}{c}$, hincque $v = \frac{g}{2c}(aa - xx)$. Ipsa ergo celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{g}{2c}(aa - xx)}$; ideoque corpus in C adueniet celeritate $= a\sqrt{\frac{g}{2c}}$. Tempusculum vero, quo per spatiolum $Pp = -dx$ transibit

 erit

erit $= \frac{-dx}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-xx)}}$ : ex quo tempus per ſpatium AP erit $= \frac{A \operatorname{cof.} \frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2g}}}$. Tempus ergo totius acceſſus per ſpatium AC erit $= \frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$: denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 8. Hac acceſſione autem ſemiſſis primae oscillationis abſoluitur, quae adeo fit tempore $\frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$, in qua expreſſione cum non inſit quantitas ſpatii percurſi AC $= a$, perſpicuum eſt acceſſionem corporis ad C perpetuo aequali tempore abſolui, ſiue maius ſiue minus ſpatium AC conficiat. Simili autem modo intelligetur receſſum per ſpatium CB, qui alteram oſcillationis partem conſtituit, eodem tempore abſolui, ita vt totum vnius oſcillationis tempus futurum ſit $= \frac{\pi \sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$. Cum enim corpus in C veniat celeritate debita altitudini $\frac{gaa}{2c}$, ponamus hoc motu iam perueniſſe in Q, poſito CQ $= y$, vbi celeritas eius, qua per elementum $Qq = dy$ pergit, debita ſit altitudini $u$, in hoc ergo loco corpus retrahetur ac retardabitur vi $= \frac{gy}{c}$, vnde fit $du = \frac{-gydy}{c}$ ergo $u = \frac{g}{2c}(aa-yy)$. Excurret itaque antequam omnem motum amittat per ſpatium CB $= a$, ita vt ſit CB $=$ AC. Tempus autem per ſpatium CQ $= y$ erit $= \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-yy)}} = \frac{A \operatorname{ſin.} \frac{y}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Fiat $y = a$, ac prodibit tempus receſſionis integrae per ſpatium CB, $= \frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$; quod vtique aequale eſt tempori acceſſionis per AC, ita

ita vt tempus totius oſcillationis per ACB factae fututurum ſit $= \frac{\pi \sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$, huicque aequalia erunt tempora omnium ſequentium oſcillationum.

§. 9. Commodiſſime autem tempora huiusmodi oſcillationum menſurari ſolent per pendula ſimplicia eodem tempore oſcillationes ſuas abſoluentia. Cum enim pendulum ſimplex, cuius longitudo eſt 3, 166 pedum Rhen. ſingulis minutis ſecundis oſcillationes peragat, atque tempora diuerſorum pendulorum ſequantur longitudinum rationem ſubduplicatam, manifeſtum eſt, ſi cognoscamus longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum motu quopiam oſcillatorio propoſito, tum ſimul veram oſcillationum durationem innoteſcere. Pendulum quidem ſimplex eſt res mere imaginaria, cum per id intelligatur corpus infinite paruum ope fili infinite tenuis et inertia deſtituti ex puncto fixo ſuspenſum: attamen eiusmodi pendulum etſi imaginarium commode pro menſura quarumcunque oſcillationum adhibetur, cum per id non ſolum ratio, quam diuerſae oſcillationes inter ſe tenent, cognoſcatur, ſed etaim duratio oſcillationum per cognitas temporis particulas, veluti minuta ſecunda aſſignari queat. Atque huc quoque referenda eſt centri oſcillationis inueſtigatio, aequatur enim ſemper diſtantia centri oſcillationis ab axe ſuspenſionis longitudini penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Vt igitur motum oſcillatorium quemcunque cum pendulo ſimplici comparare queamus, contemplemur pendulum ſimplex OC, quod conſtet ex corpuſculo infinite paruo C cuius pondus ſit $= p$, ope fili OC cum inertiae tum grauitatis expertis ex polo fixo O ſuspenſo: ſit longitudo huius penduli OC $= f$; eritque hoc pendulum in ſtatu quietis, ſi recta OC fuerit verticalis. Deducatur hoc Fig. 2.

 pen-

pendulum OC infinite parum in situm OA, in quo vtique cessabit aequilibrium; cum enim ponduſculum $p$ in A poſitum ſollicitetur deorſum in directione verticali AE, quae non amplius cum directione fili OA congruit, reſoluatur vis AE, quae aequalis eſt ponderi corpuſculi $p$, in laterales AN et AM, quarum illa AN in tenſione fili conſumitur, haec vero AM corpuſculum in directione AMC ad ſpatium AC percurrendum ſollicitabit. Erit vero ob triangula ſimilia OAC et EAM, vis AM $= \frac{p \cdot AC}{OC}$, ita vt corpuſculum in A ſollicitetur ſecundum directionem AC vi $= \frac{p \cdot AC}{OC}$, quae vtique diſtantiae corpuſculi AC a ſitu quietis eſt proportionalis, quamobrem omnes oſcillationes huius penduli aequalibus abſoluentur temporibus, dummodo ſpatiola AC fuerint minima. Quoniam vero maſſa corpuſculi eſt pariter $= p$, erit vis acceleratrix corpuſculum in A ſollicitans $= \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{f}$.

§. 11. Vis igitur acceleratrix, qua corpuſculum C ad quamcunque diſtantiam AC a ſitu quietis C deductum verſus C ſollicitatur aequalis eſt ipſi diſtantiae AC diuiſae per longitudinem penduli OC $= f$, ſeu haec vis acceleratrix eſt ad vim acceleratricem grauitatis naturalis vti ſpatium AC ad longitudinem penduli OC. Fig. 1 et 2. Quodſi igitur in praecedente caſu, quo corpuſculum ex C in A deductum ad motum oſcillatorium impellitur vis acceleratrix in quauis diſtantia CP $= x$, fuerit aequalis vi acceleratrici, qua pendulum ſimplex in eadem diſtantia verſus ſtatum quietis vrgetur, tum oſcillationes in vtroque caſu abſoluentur aequalibus temporibus, atque longitudo OC $= f$ dabit pendulum ſimplex iſochronum cum motu oſcillatorio fig. 1. In fig. 1 autem eſt in diſtantia

tia CP $= x$ vis acceleratrix $= \frac{gx}{c}$; in pendulo autem pro eadem distantia est vis acceleratrix $= \frac{x}{f}$; ex quarum aequalitate sequitur $f = \frac{c}{g}$. Statim ergo pro quouis motu oscillatorio ex sola vi acceleratrice innotescit longitudo penduli simplicis isochroni, quae prodit, si spatium CP per vim acceleratricem, quam corpus in hac distantia sentit diuidatur, hic enim quotus vbique podit eiusdem quantitatis.

§. 12. Vicissim igitur si constet longitudo penduli simplicis isochroni, quae sit $= f$, pro motu quopiam oscillatorio, definire poterimus vim acceleratricem in quauis a statu quietis distantia. Si nimirum punctum C per spatium AB vti ante exposuimus, oscillationes absoluat paribus temporibus vti pendulum simplex longitudinis $f$; necesse est, vt vis acceleratrix, qua corpusculum in quauis elongatione CP $= x$ a statu quietis C impellitur sit $= \frac{x}{f}$; siquidem, vti in sequentibus semper assumimus, oscillationes fiant per spatia quam minima. Quodsi autem longitudo penduli simplicis non fuerit cognita, tamen, si ea quasi cognita tractetur, quemadmodum in analysi quantitates incognitae, tanquam essent cognitae tractari solent, expressio pro vi acceleratrice in quauis a statu quietis distantia reperietur; quae proinde si comparetur cum vi, qua corpus actu sollicitatur, dabit aequationem, ex qua longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur. Posita nimirum pro motu oscillatorio corpusculi C per spatium AB, longitudine penduli simplicis isochroni etsi ad huc incognita $= f$, erit corpusculi in P positi vis acceleratrix $= \frac{PC}{f}$; at ex huius aequilibrii natura nouimus vim acceleratricem, qua corpus in eadem distantia P C actu sollicitetur, esse $= \frac{g.PC}{c}$, vnde concludimus fore $\frac{PC}{f} = \frac{g.PC}{c}$, hincque $f = \frac{c}{g}$, simili igitur ratiocinio in quouis casu longitudo penduli simplicis isochroni satis expedite determinari poterit.

§. 13. Plana quidem haec sunt, si corpus, quod oscillationes peragit, instar puncti considerari potest, at si corpus finitam habeat extensionem ratiocinium aliquanto magis fiet complicatum, interim tamen eodem modo expedietur. Primo enim probe notari debet situs, quem quaelibet corporis particula in statu aequilibrii occupat, deinde corpus extra statum aequilibrii infinite parum declinari concipiatur, vt obtineat situm ad oscillationes producendas idoneum. Tum igitur quaeratur distantia cuiusvis corporis particulae in hoc statu, a loco, quem in statu aequilibrii obtinet; quae distantia simul viam cuique particulae percurrendam praebebit, donec ad statum aequilibrii perueniat; quo motu prior vnius oscillationis semissis absoluitur. Cognita iam vniuscuiusque particulae distantia a suo situ quietis, et longitudine penduli simplicis isochroni tanquam cognita assumta, innotescet vis acceleratrix vnamquamque particulam sollicitans, quae in massam particulae ducta dabit vim motricem. Hinc ergo colligetur vis motrix totalis corpus sollicitans, quae aequiualere debet viribus corpus actu vrgentibus, atque ex hac aequiualentia elicietur longitudo penduli simplicis isochroni.

§. 14. Consideremus ergo corpus quodcunque A B C D rigidum, nullius mutationis in figura sua capax, quod vel per se solum oscillationes peragat, vel cum aliis corporibus coniunctum oscilletur; dum enim vires inuesti-

inuestigamus ad hoc requisitas, vt oscillationes dato tempore absoluantur, quamuis corporis oscillantis parte m seorsin contemplari conuenit; et, si totum corpus oscillans inflexiones admittat, constabit partibus vel finitae magnitudinis vel infinite paruae quae nullam mutationem recipiunt. Sit igitur ABCD eiusmodi corpus vel pars corporis oscillantis omnis mutationis in figura sua expers, sitque situs, quem figura repraesentat, eius status aequilibrii, in quo vel quiescit, vel in quem peruenit in cuiuslibet oscillationis medio. Dum igitur hoc corpus oscillationes facit, alternatim de hoc situ aequilibrii vel versus P vel Q recedit, hicque duo occurrunt casus considerandi. Vel enim singulae corporis partes aequaliter a situ suo quietis recedunt, vel aliae magis aliae minus, quod posterius euenit, si corpus in motu oscillatorio circa axem quempiam fixum motu angulari fertur, tum enim corporis partes axi viciniores minus a loco quietis recedunt, quam eae, quae magis sunt remotae.

§. 15. Ponamus primum in motu oscillatorio omnes corporis partes aequaliter a suo aequilibrii situ digredi, ita vt corpus solo motu progressiuo feratur, quo singulae eius partes motu inter se parallello, et aequalibus eodem tempore celeritatibus mouentur. Dum igitur corporis centrum grauitatis G per interuallum $Gg$ in $g$ transfertur, quaelibet corporis particula M per interuallum $Mm$ ipsi $Gg$ aequale et parallelum procedet. Quodsi ergo longitudo penduli simplicis isochroni siue cognita sit, siue incognita, ponatur $= f$, vis acceleratrix qua particula M in $m$ posita secundum directionem $mM$ sollicitatur erit $= \frac{Mm}{f} = \frac{Gg}{f}$. Ponatur distantia $Gg = \omega$, quam per-

perpetuo quasi infinite paruam vel saltem minimam assumo, erit vis acceleratrix vrgens particulam M in directione $mM = \frac{\omega}{f}$. Multiplicetur haec per massam seu pondus ipsius particulae M, quod sit $= p$, atque prodibit vis motrix particulam M sollicitans $= \frac{\omega p}{f}$, quae exprimatur linea $Mp$ in huius vis directione lineolae $Gg$ parallela. Sic igitur innotescunt vires singulas corporis particulas sollicitantes, cum centrum grauitatis corporis atque adeo singula elementa per spatiola $\omega$ a suis locis, quae in statu aequilibrii tenent, recesserunt.

§. 16. Quoniam directiones singularum harum virium sollicitantium sunt inter se parallelae, vis ipsis omnibus aequiualens earum summae aequabitur, eritque ideo $= \int \frac{\omega p}{f} = \frac{\omega}{f} \int p$, ob $\omega$ et $f$ quantitates in hac summatione constantes. At cum $p$ sit massa vniuscuiusque corporis elementi, M denotabit $\int p$ massam seu pondus totius corporis. Quare si corporis massa seu pondus ponatur $= P$, erit vis motrix totalis ex singulis viribus sollicitantibus resultans $= \frac{\omega P}{f}$, huiusque directio parallela erit directionibus singularum virium, hoc est directioni $gG$. Ceterum cum iste calculus omnino similis sit ei, quo centrum grauitatis cuiusque corporis inuestigari solet, perspicuum est mediam directionem omnium istarum virium partialium transire per corporis centrum grauitatis G; cum enim vires singulas corporis particulas sollicitantes sint ipsarum massis proportionales, ac directiones habeant inter se parallelas, necesse est, vt earum media directio per centrum grauitatis transeat. Quod si ergo per centrum grauitatis G ducatur recta $GP = \frac{\omega P}{f}$ in directione $gG$, haec recta exhibebit vim motricem totalem ad

hoc

hoc requisitam, vt corpus ABCD motu sibi parallelo oscillationes peragendo eodem tempore oscillationes absoluat, quo pendulum simplex longitudinis $f$.

§. 17. Quo citius huius inuestigationis vsus appareat, ponamus corpus A C B D inter duo elastra A E et B F tensa esse constitutum, ita vt in aequilibrio versetur, vbi vires elastrorum sunt inter se aequales; cum enim sibi directe sint contrariae, atque earum directiones per centrum grauitatis corporis G transeant, corpus vtique quiescet, vbi vires elastrorum inter se sunt aequales, quod in situ, quem figura praesentat, euenire ponamus. Sit A vis, quam vtrumque elastrum in corpus interiectum exerit: ac pendebit eius quantitas a magnitudine interualli A E et C F, ita vt diminuto interuallo vis A crescat, aucto vero interuallo decrescat. Moueatur iam corpus motu sibi parallelo versus F, ita vt eius centrum grauitatis G per spatiolum $Gg = \omega$ progrediatur: hocque motu vis elastri B F intendetur, alterius vero A E tantundem remittetur. Fiat in hoc statu vis elastri $BF = A + E\omega$, et elastri A E vis $= A - E\omega$: atque manifestum est vim, qua corpus versus statum aequilibrii vrgebitur fore $= 2E\omega$: quae vis vtique corpori motum oscillatorium inducet. Ad hunc inueniendum sit longitudo penduli simplicis isochroni $= f$, et pondus corporis $= P$; hincque vis corpus, cum per interuallum $Gg = \omega$ de statu aeqnilibrii recesserit erit $= \frac{P\omega}{f}$: fiat haec vis aequalis ei, qua actu sollicitatur, $2E\omega$, atque reperietur longitudo penduli simplicis isochroni $f = \frac{P}{2E}$. Assumimus autem elastra inertiae expertia, vt nulla vi opus sit ad ipsa elastra mouenda. Fig. 4.

§. 18. Inueſtigemus iam vires ad motum oſcillatorium dato tempore producendum requiſitas, ſi corpus non
Fig. 5. motu ſibi parallelo ex ſtatu quietis recedat, ad eundemque accedat, ſed interea circa axem quempiam fixum gyretur, ita vt ſpatia, quae ſingulae corporis particulae percurrunt, ſint ipſarum diſtantiis ab axe proportionalia. Sit igitur corpus ABCD in ſtatu aequilibrii, quod dum oſcillationes peragit, circa axem fixum O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, motu angulari fertur. Planum chartae repraeſentet ſectionem ad axem O normalem per centrum grauitatis corporis G factam. Remoueatur iam hoc corpus aliquantillum ex ſtatu aequilibrii, ita vt eius centrum grauitatis G transferatur per arculum $Gg$ centro O deſcriptum in $g$, atque quaelibet corporis particula M interea procedet per arculum $Mm$ pariter centro O deſcriptum, ita vt ſit angulus $MOm$ aequalis angulo $GOg$ ſeu $Mm : Gg = OM : OG$. Hoc idem non ſolum in hac corporis ſectione per centrum grauitatis facta eueniet, ſed in omni ſectione corporis illi parallela ſeu ad axem O normali, ita vt de omnibus corporis particulis conſtet, per quaenam ſpatia transferantur dum centrum grauitatis G per arculum $Gg$ promouetur: atque ſic diſtantia cuiusuis corporis particulae a ſitu, quem in ſtatu aequilibrii tenebat, definiri poterit.

§. 19. Vocetur diſtantia $OG = a$, et ſpatiolum $Gg = \omega$, tum ex particula M in planum ad chartam normale ac per axem O et centrum grauitatis ductum ducatur perpendiculum ML, ponatur $OL = x$ et $LM = y$ erit $OM = \sqrt{(xx + yy}$ et per analogiam

giam datam $Mm = \frac{\omega\sqrt{(xx+yy)}}{a}$. Quodsi iam longitudo penduli simplicis isochroni sit $= f$, erit vis acceleratrix particulae M in $m$ translatae per spatium $mM$ $= \frac{Mm}{f} = \frac{\omega\sqrt{(xx+yy)}}{af}$, et denotante $p$ massam elementi M erit vis motrix $= \frac{\omega p\sqrt{(xx+yy)}}{af}$ cuius directio erit $Mp$ ad OM normalis. Resoluatur haec vis in laterales ML et MI, erit vis in directione ML vrgens $= \frac{\omega p x}{af}$, et vis in directione MN vrgens $= \frac{\omega p y}{af}$. Summa autem omnium harum posteriorum virium in directione MN est $= \frac{\omega}{af}\int y p$; at est $y p$ momentum pondusculi $p$ ad axem OG relatum, qui axis cum per centrum grauitatis G transeat, erit ex natura centri grauitatis summa omnium horum momentorum nihilo aequalis; et hancobrem earum media directio prodiret infinita, ita vt positio vis omnibus aequiualentis determinari nequeat.

§. 20. Incommodum hoc tolletur, si omnes has vires MN in eandem directionem incidere faciamus. Cum enim perinde sit, in quonam directionis suae $Mp$ puncto vim $\frac{\omega p\sqrt{(xx+yy)}}{af}$ applicatam concipiamus, concipiamus eam applicatam in puncto $p$, vbi haec directio plano ad chartam normali atque per O et G ducto ocurrit, haecque resoluta dabit vim lateralem in directione $pq$ vrgentem $= \frac{\omega p x}{af}$, et alteram vim lateralem in directione $p$C sollicitantem $= \frac{\omega p y}{af}$, quae posteriores adeo vires omnes sitae erunt in plano ad OC normali. Quarum summa cum sit aequalis nihilo eae nihil ad motum conferent, sed tantum conabuntur corpus circa axem BD inclinare, nisi earum momenta ad vtramque axis huius partem se mutuo destruant. Siquidem totum corpus in planum ABCD esset explanatum, tum momenta harum virium respectu axis BD nulla existerent, at si elementum M non in plano chartae sit situm sed ab eo remotum sit interuallo $= z$, tum momentum ad corpus circa axem BD conuertendum tendens foret $= \frac{\omega p y z}{af}$; horum autem omnium momentorum summa plerumque est vehementer exigua, nam si vel sectio ABCD, vel sectio ad eam normalis per AC ducta corpus in duas partes similes diuidat, tum omnio haec momenta elementaria se mutuo destruunt.

§. 21. Cum igitur ob hanc causam effectum, qui ab his viribus in directione $p$ C agentibus vnquam oriri potest, negligere queamus, supersunt tantum vires $\frac{\omega p x}{af}$ in directione $p\,q$ applicatae, quarum summa est $= \frac{\omega}{af} \int p\,x$. At $p\,x$ est momentum particulae M respectu axis O, ideoque ex natura centri grauitatis summa omnium istorum momentorum aequatur ponderi totius corporis, quod sit $=$ P per distantiam centri grauitatis G ab axe O nemper OG $= a$ multiplicato, ita vt sit $\int p\,x = \mathrm{P}\,a$. ideoque summa virium $\frac{\omega}{af} \int p\,x = \frac{\omega \mathrm{P}}{f}$, quae simul est vis aequiualens omnibus viribus $\frac{\omega p x}{af}$. Quod autem ad earum mediam directionem attinet, quae vtique parallela erit directionibus singularum $p\,q$, eius distantia ab axe O reperietur, si summa momentorum harum virium ad axem O relatorum, quae est $= \frac{\omega}{af} \int p\,x.\,\mathrm{O}p$, diuidatur per summam ipsarum virium, quam vidimus esse $= \frac{\omega \mathrm{P}}{f}$. Capiatur ergo OS $= \frac{\int p\,x.\,\mathrm{O}p}{\mathrm{P}a}$, erit OS distantia vis aequiualentis ab axe O, at-

atque si in S applicetur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$, indirectione $SP$ ipsi $pq$ parallela, haec vis aequiualebit singulis viribus particulas corporis sollicitantibus simul sumtis.

§. 22. Cum igitur in cognitione distantiae $OS$ cardo rei versetur, eam dilucide definiri conuenit; quoniam ergo $OM$ est media proportionalis inter $OL$ et $Op$ fiet $x. Op = OM^2 = xx + yy$; ita vt futura sit distantia $OS = \frac{\int p. OM^2}{Pa} = \frac{\int p(xx+yy)}{Pa}$. Singula igitur corporis elementa multiplicari debent per quadrata distantiarum suarum ab axe $O$, ac summa horum productorum diuisa per $Pa$ dabit distantiam $OS$, haecque est regula nota pro centro oscillationis inueniendo. Vel si per $G$ ductus concipiatur axis axi $O$ parallelus, ad eumque ex $M$ perpendicularis ducatur $MG$ erit $OM^2 = MG^2 + OG^2 - 2\,OG.\,GL$; ideoque $\int p.\,OM^2 = \int p\,MG^2 + \int p.\,OG^2 - 2\int p.\,OG.\,GL$: at est $\int p.\,OG^2 = Pa^2$, ob $\int p = P$, et $\int p.\,OG.\,GL = a\int p.\,GL$, quae summa ob $G$ centrum grauitatis euanescit, superest ergo $\int p.\,MG^2$, quae designat summam omnium productorum ex singulis corporis particulis in quadrata distantiarum suarum ab axe per centrum grauitatis corporis $G$ ducto atque axi $O$ parallelo. Quodsi ergo haec summa quam momentum inertiae corporis respectu huius axis vocare soleo, ponatur $= Pbb$ fiet $\int p.\,OM^2 = Pbb + Paa$, ideoque distantia quaesita $OS = a + \frac{bb}{a}$.

§. 23. Haec linea $OS$ tantum dat distantiam vis sollicitantis totalis $SP = \frac{\omega P}{f}$ ab axe $O$, neque etiamnum constat, vtrum ea in planum $OBD$ per centrum gravitatis G normaliter ad axem O ductum cadat an non. Sit igitur ad hoc inueſtigandum particulae M diſtantia ab hoc plano $= z$, eritque vis $p q = \frac{\omega p x}{a f}$ momentum ad hoc planum relatum $= \frac{\omega p x z}{a f}$; horum igitur momentorum omnium ſumma $\int \frac{\omega p x z}{a f}$ ſeu $\frac{\omega}{a f} \int p x z$ per ſummam virium $\frac{\omega P}{f}$ diuiſa dabit diſtantiam puncti S a plano ODB vel ſurſum accipiendam vel deorſum, prout ſumma $\int p x z$ affirmatiuum vel negatiuum obtineat valorem. Sit $GL = a - x = t$, erit $\int p x z = \int a p z - \int p t z = -\int p t z$ ob $\int a p z = 0$, quia planum OBD per centrum grauitatis tranſit, eritque diſtantia puncti S ab hoc plano $- \frac{\int p t z}{a P}$. Recipiunt vero tam $t$ quam $z$ valores cum affirmatiuos tum negatiuos, ita vt haec expreſſio plerumque ſit vehementer parua; omnino autem nulla erit ſi vel planum ABCD vel planum ad hoc normale per BD ductum corpus in duas partes ſimiles ſecet. Hancque ob rem in praeſenti inſtituto iſtam puncti S a plano OBD diſtantiam, ſi quam habet, negligemus.

§. 24. Si igitur corpus ABCD ita oſcilletur, vt inter oſcillandum circa axem fixum O moueatur, atque eius oſcillationibus iſochronum ſit pendulum longitudin $f$, vis motrix ad motum hunc oſcillatotium producendum requiſita ſequenti modo determinabitur. Ponamus centrum grauitatis corporis G inter oſcillandum perueniſſe in $g$, ita vt eius diſtantia a loco quietis G ſit $G g = \omega$: ſitque totius corporis maſſa ſeu pondus $= P$, Tum per centrum grauitatis G ductus concipiatur axis axi illi O parallelus, ac quaeratur corporis momentum inertiae reſpectu huius axis per centrum grauitatis ducti, quod ſit $= P b b$; re-

pe-

persiturque, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab hoc axe multiplicentur, atque omnia producta in vnam summam coniiciantur. Quo facto ducatur per centrum grauitatis corporis G planum ad axem O normale, atque in recta OG sumatur $GS = \frac{bb}{OG} = \frac{bb}{a}$ ob $OG = a$; in puncto S applicata concipiatur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$ in directione SP ad OS in plano OBD normali, eritque haec vis illa ipsa, quae requiritur ad motum hunc oscillatorium producendum. Ceterum patet, si axis O infinite distet, ita vt corpus motu sibi parallelo feratur, tum punctum S in centrum grauitatis G incidere ob $a = \infty$, prorsus vti ante inuenimus.

§. 25. Proposito igitur corpore quocunque rigido, quod a potentiis sollicitatum oscillationes peragat, eius motus oscillatorius sequenti modo determinabitur. Assumatur tanquam cognita longitudo penduli simplicis isochroni $f$, ac dispiciatur quonam modo corpus inter oscillandum a statu suo quietis digrediatur, vtrum motu sibi parallelo an motu angulari circa axem quempiam fixum. Tum secundum praecepta pro vtroque casu data quaeratur vis motrix ad hunc motum oscillatorium producendum requisita. Denique haec vis quia ob $f$ incognitam est indeterminata aequiualens reddatur viribus corpus actu sollicitantibus, hincque nascetur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni $f$ determinans. Ista autem aequiualentia obtinetur, si in locum vis motricis inuentae applicata concipiatur vis ipsi aequalis et contraria, tum enim haec vis cum viribus corpus actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debet. Quoties namque vna vis

alijs

aliis viribus aequiualet, toties eius contraria cum his iisdem viribus aequilibrium constituet: ideoque ex natura aequilibrii deriuabitur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni $f$ determinans.

§. 26. Ex his iam statim oscillationes corporum inflexibilium ex axe fixo suspensorum a grauitate oriundae definiri poterunt, qui est casus notissimus per inuentionem centri oscillationis expediri solitus. Sit igitur corpus ABCD ope virgae rigidae OAB ex axe fixo horizontali O ita suspensum, vt alium motum praeter angularem circa hunc axem recipere nequeat, quod fiet, si virga OA non solum ipsa fuerit inflexilis, sed etiam corpus traiiciat ipsiue tam firmiter infigatur, vt iunctura nullam inflexionem admittat: hanc enim conditionem absolute necessariam esse, vt more consueto per centrum oscillationis motus recte definiatur ex sequentibus clarius elucebit. Repraesentet ergo planum chartae sectionem corporis verticalem per eius centrum grauitatis G factam atque ad axem horizontalem O normalem, ita vt axis normaliter plano chartae in O infixus concipi debeat. Hoc ergo corpus in statu aequilibrii erit situm, si recta OG in ista sectione ab axe O per centrum grauitatis G ducta fuerit verticalis puta O$g$, ita vt in figura centrum grauitatis G interuallo G$g$, a suo aequilibrii situ distet. Notari hic vero oportet, punctum G non tam pro corporis ABCD, quam pro totius massae oscillantis ex corpore ac virga OA compositae centro grauitatis accipiendum esse.

§. 27. Cum igitur centrum grauitatis G interuallo G$g$ a suo aequilibrii loco sit remotum, ac totius corporis

poris motus fiat circa axem O, distantia cuiusque corporis elementi a suo situ aequilibrii erit cognita. Si ergo vocetur pondus corporis cum virga coniunctim $=$ P, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti et axi O paralleli sit $=$ $Pbb$; atque longitudo penduli simplicis isochroni ponatur $= f$ cognoscetur vis ad hunc motum producendum requisita. Scilicet cum spatium $Gg$ sit minimum, ita vt recta OG a situ verticali infinite parum discrepet, capiatur $GS = \frac{bb}{OG}$, et in S secundum directionem $Ss$ ipsi $Gg$ parallelam applicetur vis $= \frac{P.Gg}{f}$, quae ad hunc motum oscillatorium producendum requiretur. Quanquam enim ante corpus in statu aequilibrii positum sumus contemplati, hic vero corpus in figura extra statum aequilibrii repraesentetur; tamen vtrinque ratiocinium idem est; ob declinationem a situ aequilibrii infinite parvam, de qua tantum spatiolum $Gg$ in computum ingreditur.

§. 28. Haec igitur vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione $Ss$ applicata, existente $GS = \frac{bb}{OG}$, eundem motum oscillatorium producere valet, quem vis corpus actu sollicitans nempe eius pondus, producit. Corpus autem actu sollicitatur a vi ponderi ipsius P aequali in directione verticali GP: ex quo vis P in directione GP aequiualebit vi $\frac{P.Gg}{f}$ in directione $Ss$. Quodsi ergo loco huius vis applicetur ipsi aequalis $\frac{P.Gg}{f}$ at in directione contraria SQ; haec vis cum vi P in directione GP coniuncta corpus in aequilibrio continebit. Cum autem corpus alium motum praeter angularem circa axem O recipere nequeat, in aequilibrio erit, si momenta harum duarum virium respectu axis O

 se

ſe mutuo deſtruant. At eſt vis P in directione G P agentis momentum ad axem O relatum $= P . OG . \sin . OGP = P . Gg$; et vis $\frac{P . Gg}{f}$ in directione S Q agentis momentum eſt $= \frac{P . Gg}{f} OS$. Aequilibrium ergo aderit ſi ſit $P . Gg = \frac{P . Gg . OS}{f}$, hoc eſt ſi $f = OS = OG + \frac{bb}{OG}$. Erit ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= OG + \frac{bb}{OG}$, ideoque aequalis diſtantiae puncti S, quod centrum oſcillationis appellari ſolet ab axe O. Perinde autem eſt ſiue hoc punctum S in ipſum planum O C G D cadat, ſiue extra illud, eius enim diſtantia ſola ab axe, quae ſemper eſt $= OG + \frac{bb}{OG}$ in computum ingreditur.

§. 29. Si iam hanc methodum ſimili modo ad corpora flexibilia adhibere velimus, ingentem ſtatim difficultatem offendemus in ſitu corporis, quem inter oſcillandum extra ſtatum aequilibrii obtinet. Cum enim eiusmodi corpus nonſolum circa axem fixum O, de quo ſuſpenditur, moueri queat, verum etiam circa quamuis flexuram; innumerabilibus modis huiusmodi corpus de ſtatu aequilibrii deturbari poterit; qui cum initio omnes in corpore aeque produci queant, motus oſcillatorii inde prouenientes inter ſe maxime erunt diuerſi. Summa autem anomalia huiusmodi motuum oſcillatoriorum in hoc conſiſtet, quod non ſingulae corporis partes ſimul in ſitum aequilibrii appellant: prouti in caſu praecedente vſu venit. Quando autem non omnes corporis partes ſimul ad ſtatum quietis pertingunt, tum etſi motus reciproci fiunt, tamen oſcillationes diſtincte percipi non poterunt, et hancobrem methodum praecedentem ex aſſumta penduli ſimplicis iſochroni longitudine petitam in vſum voca-

re

re non licebit. Neque vero principia mechanica adhuc ſatis ſunt euoluta, vt ex iis motus iſtiusmodi irregulares, qui prodeunt, ſi corporis partes vtcunque ex ſitu aequilibrii remouentur, ad calculum reuocari atque accurate definiri queant: eiusmodi ergo motibus explicandis ſuperſedere debemus.

§. 30. Quantumuis autem hae oſcillationes initio ſint confuſae et irregulares, tamen eae mox, docente experientia, ita ſe ad vniformitatem componunt, vt omnes partes ſimul ad ſtatum aequilibrii pertingant, atque oſcillationes, ſi quidem ſint minimae, cum oſcillationibus penduli ſimplicis comparari queant. Quamobrem corporum flexibilium oſcillantium eas tantum oſcillationes hic inueſtigabimus, quae ſint regulares, et in quibus omnes partes ad ſtatum aequilibrii ſimul accedunt, ſimulque ab eo recedunt. In hoc igitur negotio, antequam longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri queat, inquirendum eſt, quantum ſingulae corporis partes a ſuo, quem in aequilibrio tenent, ſitu remoueri debeant, vt ſibi relictae ſimul ad ſtatum aequilibrii perueniant. Scilicet cum corpus ſit flexile, inueſtigari oportet figuram, quam inter oſcillandum induet, vt oſcillationes fiant aequabiles; ſiue cum corpus infinitis modis de ſtatu aequilibrii deturbari queat, in eos modos ante omnia eſt inquirendum, quibus ſingulae partes ſimul iterum ad aequilibrii ſtatum appellunt, eoque oſcillationes aequabiles abſoluunt. Inuenta autem eiusmodi idonea inflexione, quae oſcillationes regulares producat, facile erit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignare.

§. 31. In hac inueſtigatione, quemadmodum in reſolutione plerorumque problematum fieri ſolet, ita verſabimur, vt ſtatum corporis extra ſitum aequilibrii, quem quaerimus, tamquam cognitum ſpectemus, ac ſimul longitudinem penduli ſimplicis iſochroni quaſi cognitam aſſumamus. Tum igitur, quia cuiusuis partis motus, quo ad ſtatum aequilibrii peruenit, eſt cognitus, vis ad motum oſcillatorium producendum requiſita determinari poterit. Inuentis autem viribus, quibus omnes corporis partes ſollicitari oportet, vt ſimul atque illo ipſo tempore, quod aſſumta penduli ſimplicis iſochroni longitudo poſtulat, ad ſtatum aequilibrii appellant, efficiendum eſt, vt iſtae vires viribus, quibus corpus actu ſollicitatur, aequivaleant. Loco illarum igitur virium corpori concipiantur applicatae aequales in directionibus contrariis, haeque cum viribus, quibus corpus actu ſollicitatur, in aequilibrio conſiſtere debebunt. Quoniam igitur corpus eſt flexile primo eius inflexio eſt indaganda ab his viribus ſeſe in aequilibrio tenentibus reſultans, ſicque ſtatus corporis extra aequilibrii ſitum determinabitur, tum vero ſimul longitudo penduli ſimplicis iſochroni innoteſcet.

§. 32. Quo autem corpus flexile a potentiis quibuscunque ſollicitatum in aequilibrio verſetur, neceſſe eſt, vt in quauis flexura momenta potentiarum ſe mutuo deſtruant. In caſu igitur propoſito momenta virium ſollicitantium reſpectu cuiusuis flexurae corporis inueſtigari debebunt, quae cum ſe mutuo deſtruant, orientur tot aequationes, quot corpus habet flexuras, ex quibus inflexio corporis, quam in ſingulis flexuris patietur, definietur. Tum vero etiam, ſi corpus fuerit mobile circa axem fixum,

xum,

xum, ipſe hic axis flexurae vicem ſuſtinet, eiusque adeo reſpectu omnium potentiarum ſollicitantium momenta ſe deſtruere debent, ex qua aequatione longitudo penduli ſimplicis iſochroni determinabitur. Poterit itaque haec methodus adhiberi ad oſcillationes regulares corporum flexibilium quorumcunque determinandas, ſiue corpus aliquot tantum habeat flexuras, ſiue infinitas quemadmodum euenit in fune ſeu catena perfecte flexili. Caſum autem hunc poſteriorem iam alibi fuſius ſum perſecutus, quare hic potiſſimum caſum priorem, vbi numerus flexurarum eſt finitus, euoluam; quippe in quo conſiſtit quaeſtio initio memorata, quam Celeb. Bernoullius mihi reſoluendam propoſuit; et quae eiusmodi implicatur difficultatibus, quae in altero caſu non deprehenduntur.

§. 33. Sit igitur ex axe horizontali O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, ita vt charta planum verticale repraeſentet, ſuſpenſa virga rigida O A, quam tum inertiae tum etiam grauitatis expertem aſſumamus: hincque virgae in A alligatum ſit corpus A C B D ita, vt non ſolum corpus cum virga circa axem O, ſed etiam ipſum corpus circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Corporis igitur ita ſuſpenſi ſtatus aequilibrii erit, dum centrum grauitatis eius G in recta verticali O $b$, hoc eſt in puncto $g$ verſatur, atque in hoc ſitu aequilibrii etiam punctum A in eadem recta verticali O $b$ puta in puncto $a$ ſitum erit; alioquin enim corpus, quia flexile eſt, circa punctum A in aequilibrio perſiſtere non poſſet. Cognito iam ſtatu aequilibrii, manifeſtum eſt corpus ex eo cum rotando circa O tum circa A declinari Fig. 7.

 poſſe.

posse. Ponamus ergo corpus ex statu aequilibrii ita deturbari, vt circa axem O per angulum A O $\alpha$, simul vero circa flexuram A per angulum B A $\beta$ inclinetur: flexuram enim in A ita concipimus, vt corpus circa eam tanquam circa axem horizontalem axi O parallelum gyrari queat. Hoc igitur situ punctum A a statu quietis elongatur interuallo A $a$, centrum grauitatis autem G interuallo G$g$, quod componitur ex binis partibus G $\gamma$ et $\gamma$ $g$, quarum illa a motu circa flexuram A, haec vero a motu circa axem O resultat: vtramque autem elongationem a situ naturali infinite paruam assumimus.

§. 34. Ponamus iam corpus sibi relictum ex hoc statu ita ad lineam verticalem O $b$ accedere, vt singulae eius partes simul ad eum situm, quem in statu aequilibrii obtinent, perueniant, quod cum euenerit, motu concepto similiter in alteram regionem corpus excurret, atque oscillationes aequabiles absoluet, sit ergo longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Dum igitur punctum A in $a$ peruenit percurrendo spatiolum A $a$, centrum grauitatis corporis G in $g$ pertinget, et conficiet spatium G$g$ quae spatia etsi sunt curuilinea, tamen instar linearum rectarum considerari possunt. Corpus ergo A C B D perinde in statum aequilibrii perueniet, ac si motu angulari ferretur circa axem horizontalem fixum axi O parallelum in puncto V existentem, quod punctum determinatur intersectione rectae G A productae cum verticali O $b$; tali enim motu puncto A percurrendum est spatium A $a$, centro grauitatis G autem spatium G$g$; prorsus vti simultanea appulsio corporis ad statum aequilibrii postulat. Spatiola igitur a singulis corporis elementis percurrenda sunt

sunt distantiis ab axe isto imaginario per V ducto proportionalia: Hincque vis ad corpus mouendum requisita ex principiis ante datis determinari poterit.

§. 35. Sit igitur corporis ACBD pondus simulque massa $= P$, atque per eius centrum grauitatis G traiici concipiatur axis horizontalis ad planum chartae normalis qui proinde cum axi O tum axi imaginario in V erit parallelus; huius respectu axis quaeratur momentum inertiae corporis quod sit $= Pbb$, atque in recta VAG producta capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$. Tum in S normaliter applicata concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$ secundum directionem $Ss$, erit haec illa ipsa vis ad motum propositum producendum requisita; quae ergo aequiualens esse debet vi grauitatis, qua corpus actu sollicitatur. At directio vis grauitatis est recta verticalis GP per corporis centrum grauitatis G ducta, eiusque quantitas aequatur ipsi corporis ponderi $= P$. Hancobrem necesse est vt vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione $Ss$ applicata aequiualeat vi P in directione GP applicata. Quodsi ergo illa vis animo in sui contrariam mutari, eiusque loco in directione SQ applicari concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$, haec vis cum vi grauitatis P corpus in aequilibrio ita conseruare debebit, vt neque circa axem O neque circa flexuram in A quicquam inflectatur: ex quo harum duarum virium momenta tam respectu axis O quam respectu flexurae in A se mutuo destruant, necesse est.

§. 36. Consideremus primo flexuram in A, eritque vis P in directione GP agentis momentum ad hanc flexuram relatum $= P.AG.\sin.AGP = PAG\sin.GVg =$

P.

$\frac{P.AG.Gg}{VG}$; vis autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione S Q vrgentis momentum ad eandem flexuram relatum est $= \frac{P.Gg}{f}.AS = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$, quae duo momenta vti sunt contraria, ita etiam aequalia esse debent, erit ergo $\frac{P.AG.Gg}{VG} = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ seu $AG.f = AG.VG + bb$. Deinde respectu axis fixi in O momentum ex vi P ortum est $= P.Gg$, at momentum ex vi $\frac{P.Gg}{f}$ resultans erit $= \frac{P.Gg}{f}.OAS = \frac{P.Gg}{f}(OA + AG + \frac{bb}{VG})$, ob angulos enim ad O et A infinite paruos directio S Q quoque ad OA productam normalis est censenda. Ex horum ergo momentorum aequalitate sequitur $VG.f = OA.VG + AG.VG + bb$. Duae igitur habentur aequationes, quarum altera determinabit rationem inter vtrumque motum rotatorium tam circa O quam circa A faciendum, vt corpus ad oscillationes aequabiles peragendas accommodetur, hocque fiet determinatione puncti V, altera vero aequatio inseruiet longitudini penduli simplicis isochroni $f$ inueniendae.

§. 37. Si prior aequatio a posteriori subtrahatur, excedet ratio momenti inertiae corporis seu quantitas $bb$ ex calculo eritque $f(VG - AG) = OA.VG$, seu $f = \frac{OA.VG}{VA} = OA + \frac{AG}{VA}.OA$. Quodsi ergo ex puncto G ducatur rectae OA parallela, donec verticali O $b$ productae occurrat, exhibebit haec longitudinem penduli simplicis isochroni $f$. Ceterum ex hac aequatione prodit $VA = \frac{OA.AG}{f - OA}$; prima autem aequatio praebet $VG = \frac{AG.f - bb}{AG} = VA + AG$, ita vt sit $VA = f - AG - \frac{bb}{AG}$

vnde

vnde eliminanda VA, habebitur $ff = \frac{(OA.AG + AG^2 + bb)f - OA.bb}{AG}$ Ad hanc facilius resoluendam ponamus $OA = a$; $AG = b$; eritque $ff = \frac{2(ab + bb + bb)f - 2abb}{2b}$ et $f = \frac{ab + bb + bb \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$. Duplicem igitur valorem pro pendulo $f$ inuenimus, quod indicat duplici modo corpus ita de statu aequilibrii remoueri posse, vt oscillationes regulares efficiat. Erit autem pro hoc duplici valore distantia $VA$ $\frac{ab - bb - bb \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$ vnde reperitur $OV = OA - AV = \frac{ab + bb + bb \mp \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$. Ex quibus colligitur fore $f + OV = a + b + \frac{bb}{b}$ et $f - OV = \frac{\pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{b}$.

§. 38. Commoda hinc deducitur constructio, ex Fig. 6. qua cum corporis duplex motus oscillatorius, tum pro vtroque pendulum simplex isochronum definietur. Consideretur corpus ACBD in statu quietis, ita vt virga OA et recta AGB situm verticalem teneant, eritque $OA = a$, et $AG = b$; super OG tanquam diametro describatur semicirculus OFG, et per A ducatur recta AF normalis ad OG erit $AF = \surd ab$. Iam existente momento inertiae corporis, vt ante $= Pbb$ sumatur $GR = \frac{bb}{b}$ ita vt R futurum sit corporis centrum oscillationis, si ex puncto A suspenderetur, ac bifariam secetur recta OR in puncto E, erit $OE = RE = \frac{a + b}{2} + \frac{bb}{2b} = \frac{ab + bb + bb}{2b}$, et $AE = \frac{ab - bb - bb}{2b}$ tum ducatur recta EF erit $EF = \frac{\surd((ab + bb - bb)^2 + 4ab^3)}{2b}$ =

$= \frac{\surd((ab+bb)^2 - 2(ab-bb)bb + b^4)}{2b}$. Quod ſi ergo centro E radio EF ducatur circulus VF$v$, eius interſectiones V et $v$, binos valores rectae OV in praecedente figura exhibebit; ſimul vero hinc longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f$, definitur. Scilicet ſi corpus vel circa V vel $v$ de ſtatu quietis deturbatur vtroque caſu oſcillationes regulares conficiet, ac priori caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $f = Ov$, poſteriori caſu erit $f = OV$.

§. 39. Sit corpus virga recta AB ex materia vniformi facta, erit eius centrum grauitatis in puncto medio G, ita vt longitudo virgae futura ſit $AB = 2b$, tum autem erit $kk = \frac{1}{3}bb$; ideoque $f = \frac{a}{2} + \frac{2}{3}b \pm \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}ab + \frac{9}{4}bb)$ et $OV = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b \mp \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}ab + \frac{9}{4}bb)$. Ex his manifeſtum eſt, ſi longitudo virgae AB fuerit valde exigua reſpectu longitudinis $OA = a$, fore vel $f = a + b + \frac{bb}{3a}$ et $OV = \frac{1}{3}b - \frac{bb}{3a}$, vel in altero caſu $f = \frac{1}{3}b - \frac{bb}{3a}$ et $OV = a + b + \frac{bb}{3a}$; priori ergo caſu corpus circa O quaſi corpus rigidum oſcillabitur, poſteriori vero circa ſuum centrum oſcillationis, quod habet reſpectu axis O, quae adeo oſcillationes celerrime abſoluentur. Sit autem $AB = \frac{12}{7}OA$, ſeu $b = \frac{6}{7}a$, erit vel $f = 2a$ et $OV = \frac{1}{7}a$; vel $f = \frac{1}{7}a$ et $OV$
Fig. 9. $= 2a$. Priori igitur caſu virga AB inter oſcillandum eum ſitum tenebit, quem figura indicat, rotabitur ſcilicet circa punctum V. exiſtente $OV = \frac{1}{7}Oa$; eritque penduli ſimplicis iſochroni longitudo $= OF = 2Oa$.
Fig. 10. Poſteriori caſu virga AB inter oſcillandum eum tenebit ſitum, quem figura 10 indicat, gyrabitur nimirum circa pun-

punctum V existente $OV = 2\,Oa$ et longitudo penduli simplicis isochroni erit $OF = \frac{1}{7}\,Oa$. Quod si autem virga AB cum filo $Oa$ tanquam corpus rigidum oscillaretur foret longitudo penduli simplicis isochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = \frac{181}{91}\,Oa$ quae vna parte $\frac{1}{91}$ minor est quam casu priori.

§. 40. Sit corpus ACBD globus ex materia vniformi confectus, qui in puncto A virgae seu filo rigido grauitatis experti OA ita sit alligatus vt circa flexuram in A rotari possit. Erit ergo centrum grauitatis G in centro globi, et globi radius $AG = b$; porro autem momentum inertiae globi ita est comparatum, vt sit $\mathfrak{b}\mathfrak{b} = \frac{2}{5}\,bb$. Erit itaque $f + OV = a + b + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{b} = a + \frac{7}{5}b$ et $f - OV = \pm\sqrt{(aa + \frac{6}{5}ab + \frac{49}{25}bb)}$ ergo $f = \frac{1}{2}a + \frac{7}{10}b \pm \frac{1}{10}\sqrt{(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)}$ et $OV = \frac{1}{2}a + \frac{7}{10}b \mp \frac{1}{10}\sqrt{(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)}$ Sin autem globus filo OA firmiter esset affixus, vt in A nulla inflexio fieri queat, tum foret longitudo penduli simplicis isochroni $= a + b + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{a+b} = a + b + \frac{2\,bb}{5\,(a+b)}$; atque si radius globi $b$ respectu $a$ fuerit valde paruus, erit istud pendulum $= a + b + \frac{2\,bb}{5\,a} - \frac{2\,b^3}{5\,aa}$. Casu autem quo flexura in A existit erit longitudo penduli pro superiori signo $f = a + b + \frac{2\,bb}{5\,a} - \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; at pro inferiori erit $f = \frac{2}{5}b - \frac{2\,bb}{5\,a} + \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; atque hoc posteriori casu circa punctum in ipso globo sumtum gyrabitur. Priori autem casu oscillationes fere congruunt cum iis, quae fierent, si in A nulla esset flexura; lentiores tamen erunt paulisper, quoniam pendulum isochronum longius est parte $\frac{4\,b^3}{25\,aa}$; quod discrimen in experimentis capien- Fig. 7.

 dis

dis probe notari debet. Ceterum etsi filum OA est flexile, dummodo sit tenuissimum, inter oscillandum in directum manebit extensum.

Fig. 11. §. 41 Quo hoc clarius pateat substituamus loco fili rigidi OV, cui corpus est alligatum, funem seu catenam OA perfecte flexilem, simulque naturaliter grauem. Manifestum ergo est hunc funem inter oscillandum incurvatum iri, cuius proinde curuatura ante inuestigari debet, quam motum oscillatorium definire liceat. Sit igitur OMA illa curua quam funis inter oscillandum format, atque corpus AB gyretur circa punctum V. Ponatur corporis AB pondus $= P$, eiusque momentum respectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti atque axi O paralleli $= Pbb$. Quod si iam capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$, vis requisita ad motum oscillatorium in corpore AB generandum erit $= \frac{P.Gg}{f}$, applicanda in puncto S normaliter ad AB scilicet in directione $Ss$. At ob rationes supra allegatas hanc eandem vim in directione contraria SQ applicatam concipiamus. Deinde quaeuis funis particula $x$, cuius massa sit $= dp$ percurrere debet spatiolum $xt$ tempore longitudini penduli simplicis $f$ conformi, ideoque necesse est, vt in directione $xt$ vrgeatur vi $= \frac{xt.dp}{f}$; hanc vero pariter in directione contraria $xz$ applicatam ponemus; vt omnes istae vires cum viribus corpus et funem actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debeant.

§ 42. Incipiamus a flexura A in quam agunt vis grauitatis corporis P in directione GP et vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ, illius momentum est $= \frac{P.AG.Gg}{VG}$, huius vero momentum est $= \frac{P.Gg}{f} AS = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ vnde erit

erit $AG \cdot f = AG \cdot VG + bb$. Cum iam funis in singulis punctis sit flexilis, consideremus eius punctum quodcunque M, in quod non solum vires corpus AB sollicitantes agunt, sed etiam vires, quibus singula elementa portionis funis MA vrgentur. A vi quidem P in directione GP oritur momentum respectu flexurae in M $= P\,(Gg - Mm)$; a vi autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ oritur momentum in contrariam plagam tendens $= \frac{P.Gg}{f}$ $(MA + AG + \frac{bb}{VG})$. Consideretur iam funis elementum quoduis $x = dp$, a cuius ponduscula nascitur momentum pro $M = dp\,(tx - Mm) = xy.\,dp$; quarum omnium per MA summa est $= \int tx.\,dp - Mm.\int dp$. Ex vi autem $xz = \frac{xt.\,dp}{f}$, oritur momentum $= \frac{xt.\,Mx.\,dp}{f} = \frac{xt.\,dp}{f}(AM - Ax)$ quorum omnium summa est $= \frac{AM}{f}\int xt.\,dp - \frac{1}{f}\int xt.\,at.\,dp$ quae integralia ab A vsque ad M sumi debent. Quia igitur omnia momenta pro flexura M orta se destruere debent erit P $(Gg - Mm) + \int tx.\,dp - Mm.\int dp = \frac{P.Gg}{f}$ (MA + AG + $\frac{bb}{VG}$ + $\frac{AM}{f}\int xt.\,dp - \frac{1}{f}\int xt.\,at.\,dp$; sumimus autem hic promiscue $am$ loco curuae AM, quia aberratio a linea recta est infinite parua.

§. 43. Cum autem ex flexura in A sit $\frac{P.\,AG.\,Gg}{VG} = P\,(Gg - Aa) = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ erit pro flexura in M, $P\,(Aa - Mm) + \int tx.dp - Mm\int dp = \frac{P.\,MA.\,Gg}{f} + \frac{AM}{f}\int xt.dp - \frac{1}{f}\int xt.\,at.\,dp$. Ponamus iam $am = x$; $Mm = y$, pondus funis $MA = p$; $Oa = a$, $Aa = c$; erit $AM = am = x$; $\int dp = p$; $\int xt.dp = \int y\,dp$; et $\int xt.at.dp = \int xy\,dp$. Ponatur porro VA

 =

$= \sqrt{a} = k$, et AG $= b$; erit VG $= b + k$ et Gg $= \frac{c(b+k)}{k}$; eritque primo pro flexura in A; $bf = bb + bk + bb$; atque pro flexura M erit $Pc - Py + \int y\, dp - yp = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \frac{x}{f}\int y\, dp - \frac{1}{f}\int xy\, dp$; seu $P(c-y) - \int p\, dy = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \int \frac{dx}{f}\int y\, dp$, vbi notandum est, si $x = 0$ fieri $y = c$ et si $x = a$, fit $y = 0$. Sumantur autem differentialia vt prodeat $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\, dp$. Sumtisque denuo differentialibus posito $dx$ constante habebimus: $-P\,ddy - p\,ddy - dy\,dp = \frac{y\,dx\,dp}{f}$; quae est aequatio pro curuatura funis OMA.

§. 44. Si funis grauitas euanescat, vel corpus P sit quasi infinitum respectu ponderis funis $p$, tum fiet $ddy = 0$, funisque in directum extendetur, ita vt sit $y = \frac{c(a-x)}{a}$, vti supra notauimus. Sin autem funis ad corpus finitam habeat rationem, ponamus funem vniformis crassitiei, vt sit $p$ ipsi $x$ proportionale, sitque $p = nx$: atque habebimus $0 = P\,ddy + nx\,ddy + n\,dx.dy + = \frac{ny\,dx^2}{f} = 0$. Sumatur pro aequatione integrali

$y = c + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 +$ etc. erit

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta P + 6\gamma Px + 12\delta Px^2 + 20\varepsilon Px^3 + 30\zeta Px^4 + 42\eta Px^5 \text{ etc.} \\ \quad + 2\beta nx + 6\gamma nxx + 12\delta nx^3 + 20\varepsilon nx^4 + 30\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \alpha n + 2\beta nx + 3\gamma nx^2 + 4\delta nx^3 + 5\varepsilon nx^4 + 6\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \frac{nc}{f} + \frac{\alpha nx}{f} + \frac{\beta nx^2}{f} + \frac{\gamma nx^3}{f} + \frac{\delta nz^4}{f} + \frac{\varepsilon nx^5}{f} \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0$$

hinc ergo erit $2\beta P = -\alpha n - \frac{nc}{f}$; $6\gamma P = -4\beta n - \frac{\alpha n}{f}$; $12\delta P = -9\gamma n - \frac{\beta n}{f}$; $20\varepsilon P = -16\delta n - \frac{\gamma n}{f}$ etc. At ex aequatione $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\,dx$ intelligitur, sin $x = 0$, fore ob $p = 0$ et $\int y\,dx = 0$; $dy = -$

cdx

$\frac{cdx(b+k)}{fk} = \alpha dx$; ita vt sit $\alpha = \frac{c(b+k)}{fk}$; hinc erit $\beta = \frac{bcn}{2Pfk}$; $\gamma = -\frac{bcnn}{3PPfk} + \frac{nc(b+k)}{6Pffk}$, etc. Inuentis coefficientibus ponatur $x = a$, et $y = 0$, habebiturque aequatio inuoluens incognitas $f$ et $k$, quae cum aequatione $bf = bb + bk + bb$ coniuncta vtramque determinabit.

§. 45. Sit pondus corporis P valde magnum, vt termini, in quorum denominatoribus P plures vna habet dimensiones reiici queant, eritque $y = c - \frac{cx(b+k)}{fk} + \frac{nbcxx}{2Pfk} + \frac{ncx^3(b+k)}{6Pffk}$; ponatur $x = a$, vt fiat $y = 0$ erit $1 - \frac{a(b+k)}{fk} + \frac{naab}{2Pfk} + \frac{na^3(b+k)}{6Pffk} = 0$. Sit funis pondus $na = F$ erit $6Pffk - 6Paf(b+k) + 3Fabf + Fa^2(b+k) = 0$; vnde ob P valde magnum $f = \frac{a(b+k)}{k} + \frac{Fa(2b+k)}{6Pk} = b + k + \frac{bb}{b}$ ex qua aequatione $k$ indeque $f$ definientur. Cum autem in puncto A sit $\frac{cdx}{dy} = -\frac{fk}{b+k}$, erit ob $Aa = c$ subtangens curuae in $A = \frac{fk}{b+k}$: ex subtangente ergo curuae in A cognita cum aequatione $f = b + k + \frac{bb}{b}$ innotescunt $f$ et $k$. Si corpus appensum P penitus euanescat, prodibunt oscillationes funis suspensi perfecte flexilis, quae eaedem deprehendentur, quas iam ante aliquot annos in Comment. Acad. Petropolitanae Cel. Bernoulli et ego inuenimus.

§. 46. Quemadmodum filum OA primum inertiae et grauitatis expers deinde graue quidem at perfecte flexile posuimus, ita nunc loco OA substituamus corpus quodcunque graue et rigidum, quod circa O liberrime rotari queat, in A autem aliud corpus pariter rigidum et graue AB ita habeat connexum, vt id quoque circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Sit corporis O Fig. 12.

A

A centrum grauitatis in E, corporis A B autem in F eritque vtrumque corpus in aequilibrio, si centra grauitatis E et F fuerint in recta verticali O$b$ in punctis $e$ et $f$ sita. Habeat hoc corpus inter oscillandum situm quem figura repraesentat, ita vt corpus O A circa axem O per angulum A O$a$, corpus autem A B circa axem imaginarium L per angulum B L$b$ a statu aequilibrii sit remotum: e quo situ vi grauitatis ita descendat, vt corpus O A circa axem O, corpus vero A B circa L rotando simul ad situm aequilibrii perueniant; sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Ponatur corporis O A pondus, quo in directione verticali E$l$ vrgetur $=$ P, corporis vero A B pondus, quo in directione verticali F$m$ sollicitatur, $=$ Q; atque exprimente P et Q simul massas horum corporum.

§. 47. Per vtriusque corporis centrum grauitatis transire concipiatur axis horizontalis axi O parallelus, atque sit corporis O A momentum inertiae respectu axis E $= Pbb$; corporis autem A B momentum inertiae respectu axis F sit $= Qii$. Quia iam corpus O A circa axem O rotatur, eiusque centrum grauitatis E interuallo E$e$ a statu aequilibrii distat, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita $= \frac{P.Ee}{f}$, quae normaliter ad B A in directione R$r$ est applicanda existente E R $= \frac{bb}{OE}$; hanc vero vim $\frac{P.Ee}{f}$ in directione opposita R$\varrho$ applicatam concipiemus. Simili modo cum corporis A B centrum grauitatis F distet a suo aequilibrii situ $f$ interuallo F$f$, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita $= \frac{Q.Ff}{f}$, et quoniam hoc corpus circa axem imaginarium L oscillando rotatur, vis ista

ista in puncto S secundum directionem ad AB normalem $Ss$ est applicanda, sumto interuallo $FS = \frac{ii}{LF}$, hanc ergo vim in directione opposita $S\sigma$ applicatam concipiemus. Hic quantitates incognitae ergo sunt longitudo penduli simplicis isochroni $f$ et positio puncti L.

§. 48. Vires igitur quibus corpus hoc oscillans in aequilibrio conseruari debet sunt primo pondera P et Q in directionibus $El$ et $Fm$ sollicitantia; deinde vires $\frac{P.Ee}{f}$ et $\frac{Q.Ff}{f}$ in directionibus $R\varrho$ et $S\sigma$ vrgentes. Momenta ergo harum virium cum respectu flexurae A tum respectu axis O se inuicem destruere debebunt. In flexuram A autem agunt vires $Fm$ et $S\sigma$, quarum momenta sunt $Q(Ff - Aa)$ et $\frac{Q.Ff}{f}.AS = \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$, eritque ideo $f(Ff - Aa) = Ff(AF + \frac{ii}{LF})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ erit $f.AF = AF.LF + ii$. In axem O autem agunt omnes vires $Fm$, $El$, $S\sigma$ et $R\varrho$: eritque momentum vis $Fm = Q.Ff$; vis $El = P.Ee$; vis $S\sigma = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AS) = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF})$; vis $R\varrho = \frac{P.Ee}{f}OR = \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Ex his ergo nascetur aequatio $Q.Ff + P.Ee = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ et $Aa : Ee = OA : OE$ erit componendo $Ff : Ee = OA.LF : OE.LA$: eritque ideo $Q.OA.LF.f + P.OE.LA.f = Q.OA^2.LF + Q.OA.AF.LF + Q.OA.ii + P.OE^2.LA + P.LA.bb$.

§. 49. Ponamus $OA = a$; $OE = \alpha$; $AB = b$; $AF = \beta$; et $OL = x$ erit ob angulos ad O et L minimos, $AL = a - x$; $LF = a + \beta - x$: qui valores in prima aequatione substituti dant $\beta f = a\beta + \beta^2 - \beta x + ii$ in altera vero $Qa^2 f + Qa\beta f - Qafx + Pa\alpha f - P\alpha fx = Qa^3 + 2Qa^2\beta - Qa^2 x + Qa\beta^2 - Qa\beta x + Qaii + Pa\alpha^2 - P\alpha^2 x + Pabb - Pbbx$. Ex priori aequatione habetur $f = a + \beta - x + \frac{ii}{\beta}$; qui valor in posteriori substitutus dat $P\alpha xx + Qaxx + P\alpha^2 x - 2Pa\alpha x - P\alpha\beta x - \frac{P\alpha iix}{\beta} + Pbbx - Qa^2 x - Qa\beta x - \frac{Qaiix}{\beta} + Pa^2\alpha - Pa\alpha^2 + Pa\alpha\beta + \frac{Pa\alpha ii}{\beta} - Pabb + \frac{Qa^2 ii}{\beta} = 0$. Quae aequatio, cum duas radices contineat, indicat corpus duplici modo ad oscillationes aequabiles absoluendas impelli posse; hincque vterque modus non solum cognoscitur, sed etiam pro vtroque longitudo penduli simplicis isochroni reperitur. Si ponatur $P = 0$, tum prodibit casus ante pertractatus, vbi virgam OA inertiae ac grauitatis expertem assumsimus; sin autem sit $Q = 0$, ita vt corpus inferius AB vel euanescat vel suam inertiam simulque grauitatem amittat, fiet vel $x = a$ vel $x = a - \alpha + \beta + \frac{ii}{\beta} - \frac{bb}{\alpha}$, priori casu nullus fit motas circa axem O, posteriori vero exhibetur motus oscillatorius ordinarius, fitque longitudo penduli simplicis isochroni $f = \alpha + \frac{bb}{\alpha}$.

Fig. 13. §. 50. Simili modo intelligitur, quemadmodum ratiocinium sit instituendum, si plura corpora rigida ita sint connexa, vt circa quamque flexuram motus existere possit. Ponamus ergo tria corpora OA, AB, et BC hoc modo esse connexa, quorum supremum OA circa axem horizontalem O immediate mobile sit, seu quod eodem redit habeat corpus OABC duas flexuras in A et B, circa quas eius partes inferiores sint mobiles. Repraesentet

tet figura eum ſitum, ex quo corporis ſingulae partes ad ſtatum aequilibrii ſimul perueniant, ſitque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$. Suprema quidem pars OA aliter niſi circa axem O moueri nequit; at partem ſecundam AB gyrari ponamus circa axem horizontalem imaginarium in L: eruntque diſtantiae OL, OM cum longitudine penduli ſimplicis iſochroni $f$ tres quantitates incognitae per aequationes determinandae. Ponamus porro partis OA pondus $= P$ eiusque centrum grauitatis in E: partis AB pondus ſit $=$ Q, eiusque centrum grauitatis in F, partis autem BC pondus ſit $= R$, eiusque centrum gravitatis in G: ducantur verticales $El$, $Fm$, $Gn$ quae exprimant ſollicitationes ab his ponderibus ortas.

§. 51. Per ſingularum harum partium centra grauitatis tranſire concipiantur axes horizontales axi in O paralleli: eorumque reſpectu quaerantur momenta inertiae: ſit igitur partis OA momentum inertiae reſpectu axis $F = Qii$, et partis BC momentum inertiae reſpectu axis $E = Pbb$; AB momentum inertiae reſpectu $G = Rkk$. His cognitis capiantur $ER = \frac{bb}{OE}$; $FS = \frac{ii}{LF}$; $GT = \frac{kk}{MG}$; erunt puncta R, S, T illa loca, vbi applicatae concipi debent vires $R\varrho$; $S\sigma$; $T\tau$, quae ex acceleratione corporis oriuntur Cum autem centrum grauitatis E interuallo $Ee$ diſtet a ſtatu aequilibrii, centrum grauitatis G interuallo $Gg$, erit vis $R\varrho = \frac{P \cdot Ee}{f}$; vis $S\sigma = \frac{Q \cdot Ff}{f}$ et vis $T\tau = \frac{R \cdot Gg}{f}$. Iſtae igitur tres vires effectum trium praecedentium virium $El$, $Fm$, et $Gn$ deſtruere, atque corpus in aequilibrio conſeruare debent; Hinc momenta quae ex illis viribus pro flexuris B, A et O naſcuntur aequalia eſſe debent momentis quae ex iſtis viribus reſultant.

§. 52. Ex viribus autem $El$, $Fm$, et $Gn$ sequentia emergunt momenta: Scilicet pro flexura B est momentum $= R(Gg - Bb) = \frac{R.Gg.BG}{MG}$, pro flexura A est momentum $= R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa)$; et pro ipso axe O est momentum $= R.Gg + Q.Ff + P.Ee$. At ex viribus $R\rho$, $S\sigma$, et $T\tau$ oriuntur momenta in partem contrariam vrgentia; erit autem pro flexura B momentum $= \frac{R.Gg}{f}(Bg + \frac{kk}{MG})$; pro flexura A momentum est $= \frac{R.Gg}{f}(AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$ denique pro axe ipso O est momentum $= \frac{R.Gg}{f}(OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Hinc igitur orientur tres sequentes aequationes $R(Gg - Bb) = \frac{R.Gg}{f}(BG + \frac{kk}{MG})$

$$R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa) = \frac{R.Gg}{f}(AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$$

$$R.Gg + Q.Ff + P.Ee = \frac{R.Gg}{f}(OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$$

Ex quibus tribus aequationibus primum puncta L et M ac deinceps longitudo penduli simplicis isochroni $f$ determinabitur.

§. 53. Prima aequatio ob $Gg : Bb = MG : MB$ abit in hanc $BG.f = BG.MG + kk$: Atque si a secunda prima auferatur remanebit ista $R(Bb - Aa) + Q(Ff - Aa) = \frac{R.AB.Gg}{f} + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$. Est autem $Bb - Aa = \frac{AB.Aa}{LA}$; $Ff - Aa = \frac{AF.Aa}{LA}$; et $Ff = \frac{LF.Aa}{LA}$; $Bb = \frac{LB.Aa}{LA}$ atque $Gg = \frac{LB.MG.Aa}{LA.MB}$, ex quibus haec secunda aequatio resultat, $R.AB.f + Q.AF.f = \frac{R.AB.LB.MG}{MB} + Q.AF.LF$

+Q.

$+ Q.ii$. Subtrahatur ſecunda aequatio a tertia ac remanebit: $R.Aa + Q.Aa + P.Ee = \frac{R.OA.Gg}{f} + \frac{Q.OA.Ff}{f} + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Verum eſt $Aa = \frac{OA.Ee}{OE}$, $Ff = \frac{OA.LF.Ee}{OE.LA}$, et $Gg = \frac{OA.LB.MG.Ee}{OE.LA.MB}$, ex quibus naſcitur ſequens aequatio tertia; $R.OA.f + Q.OA.f + P.OE.f = \frac{R.OA^2.LB.MG}{LA.MB} + \frac{Q.OA^2.LF}{LA} + P.OE^2 + P.bb$. Habemus ergo tres aequationes inter quantitates finitas tam cognitas quam incognitas, quoniam eliminauimus quantitates infinite paruas $Ee$, $Aa$, $Ff$, $Bb$, et $Gg$, ex quibus formari poterit aequatio inter $f$ et cognitas, quae erit trium dimenſionum atque indicat, triplici modo corpus OABC duabus flexuris praeditum ad oſcillationes aequabiles peragendas incitari poſſe.

§. 54. Quodſi corpus oſcillans plures quam duas habeat flexuras, circa quae aeque ac circa axem O motus rotatorius exiſtere queat. Simili modo tam inflexio ad oſcillationes aequabiles producendas neceſſaria, quam longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri poterit. Obtinentur enim tot aequationes, quot ſunt flexurae ipſo axe O quoque pro flexura computato, ex quibus primo axes imaginarii, circa quae partes inferiores gyrantur definiri poterunt, quorum numerus vnitate minor eſt, quam numerus aequationum; ita vt vna aequatio ſuperſit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibens. Haec autem aequatio eliminatis poſitionibus axium illorum imaginariorum aſcendet ad tot dimenſiones, quot fuerint flexurae axe O quoque pro vna flexura computato, vnde colligendum eſt, eiusmodi corpus tot variis modis ad oſcillationes vniformes abſoluendas impelli poſſe, quot contineat

tineat partes flexuris inter se iunctas. Pariter scilicet haec oscillationum ratio est comparata, acsi filo inertiae et grauitatis experti plura corpuscula fuerint alligata; quae etiam tot variis modis oscillationes vniformes peragere possunt, quot fuerit pondufcula. Neque vero iste casus ab eo, quem hic tractauimus, aliter discrepat, nisi quod hic corpora flexuris inuicem connexa finitae magnitudinis assumsimus, dum ea ibi infinite parua possuimus: ex quo necesse est, vt ille casus in hoc comprehendatur: formulae autem atque aequationes hic inuentae ad hyppothesin corpusculorum infinitae paruorum accommodabuntur, si quantitates $hh$, $ii$, $kk$ euanescant.

---

---

DE

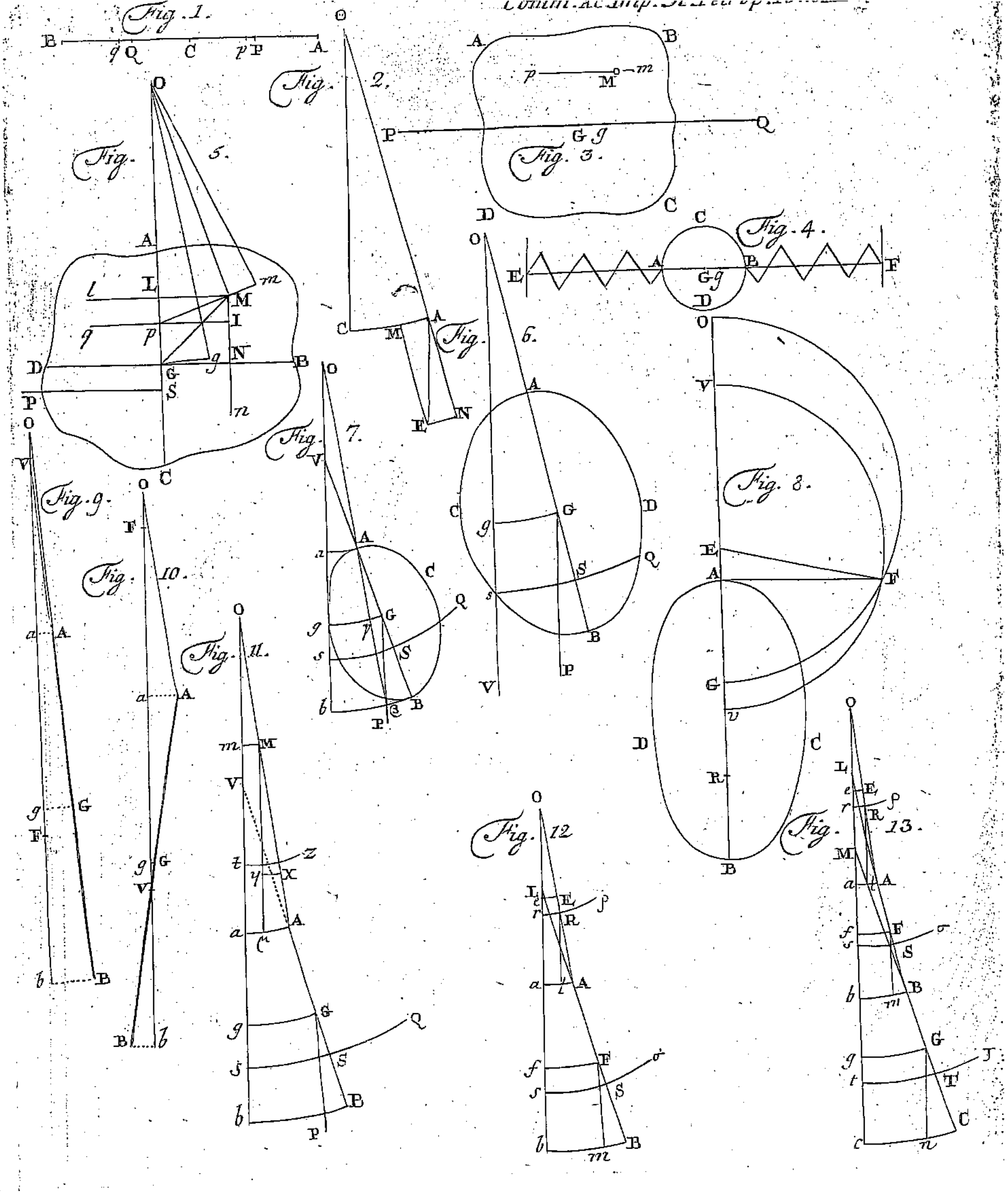
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.