DE DESCENSV CORPORVM SVPER PLANO INCLINATO ASPERO

AVCTORE
L. Euler.

§. 1.

Eadem principia, ex quibus in ſuperiori diſſertatione motum corporum ſuper plano horizontali aſpero, quatenus is a frictione turbatur, determinaui atque explicaui, multo latius patent, eorumque ope plurima alia phaenomena motuum corporum exponi et euolui poſſunt. In hac quidem diſſertatione conſtitui vſum iſtorum principiorum ante ſtabilitorum oſtendere in motu corporum ſuper plano inclinato deſcendentium definiendo, in quo negotio pariter frictionis rationem maxime ſpectari oportet. Singularia autem in hoc motu phaenomena deprehenduntur, quorum conſenſus cum concluſionibus ex memoratis principiis deductis vniuerſae theoriae veritatem maxime corroborabit, quae confirmatio reſpectu eorum, qui nexum veritatum tam diſtincte intueri non valent, haud exigui momenti eſt exiſtimanda. Etſi enim leges motus, vnde haec deducuntur, aeque ſunt neceſſario verae, ac regulae quibus in arithmetica et geometria vtimur, tamen quemadmodum in arithmeticis operationibus probationes adhiberi ſolent, ita in mechanicis, concluſiones ex principiis deriuatas per experimenta comprobari conuenit. Tab. IV.

§. 2. Phaenomena, quae in deſcenſu corporum ſuper plano inclinato occurrunt, potiſſimum huc redeunt, vt alia corpora radendo, alia rotando deſcendere obſeruemus, atque in motu rotatorio inſignis deprehenditur differentia, prout cum eo motus progreſſiuus vel magis vel minus permiſcetur. Vti hoc argumentum de motu ſuper plano inclinato ad mechanicam elementarem refertur, ita quoque in ſyſtemata Phyſicae eſt traductum, paſſimque regulas Auctores tradere ſunt conati, ex quibus iudicare liceat, quibus caſibus corpora cum radendo tum rotando ſint deſcenſura. Has autem regulas omnes Cel. Profeſſor Krafft ſumma in experimentis capiendis ſollertia, erroris conuicit, neque vllam regulam tam pro motu radente, quam pro rotatorio veritati conſentaneam deprehendit: hincque Vir praeſtantiſſimus anſam arripuit tam per plurima experimenta quam per ratiocinium veras naturae leges eruendi. Idem negotium Vir Cel. Daniel Bernoulli eſt aggreſſus, atque a priori ſolam ratiocinii vim ſecutus easdem plane elicuit regulas, quas experientia ſuppeditauerat.

§. 3. Quoniam igitur video Viros acutiſſimos diuerſas vias eſſe ingreſſos, quibus ſcopum intentum attigerint, non ſolum actum non agere arbitror, ſi meam methodum, qua idem negotium abſolui, dilucide expoſuero; ſed etiam meo quidem iudicio perfectioni Theoriae maxime conſulitur, quo plures viae ad eandem veritatem ducentes detegantur atque ad vſum accommodentur. Etſi enim omnes ad eundem terminum collineant, tamen aliae aliis longius deducunt, atque ad alias veritates non minus cognitione dignas aditum patefaciunt. Quae cum ita ſint, idem hoc argumentum a Viris nominatis iam pertractatum mea methodo expediam, ea ſcilicet

ipſa

ipſa, quam in praecedente diſſertatione de motu corporum ſuper plano horizontali aſpero expoſui. Omnino enim vis methodi in hoc conſiſtit, vt quantum datae vires corpus ſollicitantes in motu eius tam progreſſiuo quam rotatorio cum generando tum alterando valeant, aſſignare poſſimus. Has autem regulas, quas natura in huiusmodi motibus mixtis conſtantes obſeruare debet, cum in ſuperiori diſſertatione fuſe expoſui, tum alibi ſummo rigore demonſtratas dedi.

§. 4. Si deſcenſum corporum ſuper plano inclinato in genere contemplemur, primum omnium perſpiciemus motum rotatorium, ſi quem corpus in deſcenſu ſuper plano inclinato recipit, ab alia cauſa praeter frictionem proficisci non poſſe. Sublata enim frictione corpus plano inclinato impoſitum a ſolo ſuo pondere ad motum incitatur, cuius vis directio, cum per centrum grauitatis corporis tranſeat, alium motum niſi progreſſiuum in corpore generare non valet. Namque ſi vim grauitatis, qua corpus cietur, more conſueto reſoluamus in binas laterales, quarum alterius directio ſit plano inclinato parallela, alterius vero ad id normalis; prior vis tota ad corpus mouendum impenditur, et quia per centrum grauitatis tranſit ad motum rotatorium generandum omnino erit inepta. Poſterior autem vis tota ab immobilitate plani abſorbetur, neque alium effectum producit, niſi appreſſionem corporis ad planum, vnde pariter nullus motus rotatorius reſultare poteſt. Super huiusmodi igitur plano tam perfecte polito, vt omni frictione careat, etiam globus perfecte rotundus ſine vllo motu rotatorio deſcendere deberet: quod non magis experientiae ad ver-

ſari

sari putandum est, quam confectio eiusmodi plani laeuigatissimi, omni frictione carentis.

§. 5. Consideremus ergo corpus ELMD plano in-
Fig. 7. clinato immobili ita impositum, vt basi ED planum contingat, sit autem hoc corpus adhuc in quiete, in quo statu perpetuo esset permansurum, nisi a vi externa, cuiusmodi est grauitas ad motum impelleretur. Accedat igitur grauitas, qua corpus in directione verticali GP deorsum sollicitatur; erit haec vis vtique aequalis ponderi corporis, quod sit $= P$, eiusque directio GP transibit per centrum grauitatis corporis G. Resoluatur haec vis P corpus in directione GP sollicitans in duas laterales, quarum alterius directio sit recta GH parallela plano AB, alterius vero GFN normalis ad AB, erit, vti constat, illa vis $\frac{AC}{AB} \cdot P$ haec vero $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, ducta BC horizontali, ac AC verticali. Effectus ergo grauitatis in hoc consistet, vt corpus primum sollicitetur in directione GH a vi $= \frac{AC}{AB} \cdot P$, ac praeterea in directione GN a vi $= \frac{BC}{AB} \cdot P$. Harum virium si posterior $\frac{BC}{AB} P$ in directione ad planum AB normali agens sola adesset, tum vtique corpus in suo situ perpetuo quiesceret, si quidem recta GF intra basin DE, qua corpus planum contingit cadat, hocque casu effectus vis $\frac{BC}{AB} P$ in sola pressione consumetur, qua corpus in planum AB normaliter aget premendo vi $= \frac{BC}{AB} P$, idque actu ad motum cieret, nisi esset immobile: Sin autem normalis GF extra basin DE cadat, tum corpus in eam partem procumbet in quam recta GF cadit.

§. 6.

§. 6. Altera autem vis $\frac{AC}{AB}.P$, cuius directio est GH, quia planum AB eius actioni non obstat, corpus actu promouebit in directione GH eique motum progressiuum inducet. Quamdiu enim corpus est in quiete frictio plani, quantacunque ea sit, nullum effectum exerit, at statim ac corpus ELMD a vi $\frac{AC}{AB}.P$ moueri incipit, resistentia frictionis subito aderit, corpusque in directione opposita DA retrahet. Quamobrem nisi vis promouens $\frac{AC}{AB}P$ maior fuerit, quam frictio, corpus in directione GH promoueri non poterit. Neque vero frictio soli motui progressiuo quem vis $\frac{AC}{AB}P$ in corpore producere conatur, reluctatur sed etiam, quoniam eius directio DA non per centrum grauitatis corporis G transit, corpori motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis eius G transeuntem atque ad planum ACB normalem imprimere annitetur, actuque imprimet, nisi magnitudo basis DE, aliaeque circumstantiae post exponendae hunc effectum impediant. Quoniam enim corpus non est liberum, sed plano immobili AB incumbit, non sufficit ad motum rotatorium generandum vim rotatorium adesse, sed etiam tantam esse oportet, vt obstacula ab immobilitate plani AB oriunda superare valeat.

§. 7. Ante omnia igitur quantitatem frictionis, quam corpus; statim ac motu suo planum radere incipit, sentit, determinari oportet. In praecedente quidem dissertatione exposui, quemadmodum frictionem super plano horizontali aspero per experimenta explorare oporteat, neque autem hanc frictionem in praesenti casu adhibere licet, eo quod corpus non toto suo pondere plano inclinato incumbit, hincque minorem frictionem patiatur necesse est. Tam ratio enim quam experientia docet, quo maiori vi idem corpus contra idem planum asperum apprimatur, frictionem in eadem ratione augeri debere. Quare cum vis, qua corpus ad planum inclinatum apprimetur, constet sitque $= \frac{BC}{AB}.P$, poterimus huius principii ope ex frictione corporis super plano AB secundum horizontem disposito, quantitatem frictionis inferre, quam idem corpus super eodem plano inclinato patietur. Sit igitur F frictio, quam planum AB horizontale factum corpori ELMD sibi imposito ~~obiicit~~, quod frictio horizontalis appellari solet: quoniam hoc casu pressio aequalis est ponderi toti P, erit frictio eiusdem corporis super plano inclinato $AB = \frac{BC}{AB}.F$.

§. 8. Antequam inuestigemus vnde motus rotatorius proueniat, atque an corpus ELMD motum rotatorium sit concepturum? ponamus corpus hoc solo motu progressiuo super plano inclinato descendere seu ad corporum classem pertinere in quibus vis frictionis nullum motum rotatorium producat, etsi ad huc ignoramus, in quo ratio huius rei sit posita. Primum igitur manifestum est hoc corpus ad motum incitari non posse, nisi vis vrgens $\frac{AC}{AB}.P$ maior sit frictione $\frac{BC}{AB}.F$, hoc est nisi sit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$. Quoniam igitur $\frac{AC}{BC}$ exponit tangentem anguli eleuationis plani ABC, posito sinu toto $= 1$, patet quamdiu anguli ABC tangens minor fuerit quam $\frac{F}{P}$, tum corpus perpetuo in quiete esse permansurum: simulac vero inclinatio plani AB tanta statuatur, vt eius tangens excedat valorem $\frac{F}{P}$ corpus descendere incipere. Hinc deducitur

tur facilis modus frictionem horizontalem F per planum inclinatum explorandi, ab Illuſtri Bilfingero adhibitus: notetur enim angulas B, quo corpus tantum non ſuper plano inclinato deſcendere incipit, quo per experimenta inuento erit frictio horizontalis $F = \frac{AC}{BC} . P$.

§. 9. Ponamus itaque eſſe $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, atque corpus ſuper plano inclinato actu deſcendet. Inceperit ergo corpus deſcenſum ſuum ex puncto ſummo A, atque iam peruenerit in M abſoluto ſpatio $AM = x$. Ponatur eius Fig. 8. celeritas in M debita altitudini v, et quia in directione MB ſollicitatur vi $= \frac{AC}{AB} P$, in eadem vero retardatur vi $= \frac{BC}{AB} . F$, erit vis acceleratrix corporis in directione $MB = \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P}$, propter maſſam corporis ſimulque pondus $= P$. Ex his dum corpus per elementum dx progreditur erit $dv = (\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P}) dx$ hincque $v = \frac{(AC.P - BC.F) x}{AB.P}$. Deſcendet igitur corpus frictione non obſtante motu vniformiter accelerato, et aequalibus temporibus aequalia celeritatis incrementa capiet. Cui phaenomeno ſi experientia aduerſari videatur, cauſa aberrationis aperte in reſiſtentia aeris deprehenditur, quae cum ſit quadrato celeritatis proportionalis vniformem accelerationem maxime perturbat. Sublata autem reſiſtentia aeris, corpus abſoluto ſpatio AB celeritatem acquiret tantam, quantam in vacuo, libero lapſu adipiſceretur per altitudinem $= AC - BC . \frac{F}{P}$.

§. 10. Videamus iam quid requiratur ad hoc, vt Fig. 9. corpus motum progreſſiuum, quem determinauimus, purum proſequi poſſit neque rotationi ſeu prouolutioni ſit obnoxium. Videmus autem a frictione oriri momentum tendens ad corpus in sensum MDE conuertendum circa axem horizontalem per centrum grauitatis G transeuntem et ad planum ACBG normalem, hocque momentum esse $= \frac{BC}{AB} F . GF$; quare corpus sine prouolutione progredietur secundam directionem GMH, si istud momentum impeditur, quominus in effectum deducatur. Ponamus per hoc momentum corpus iam ita procliue ad volvendum esse factum, vt soli baseos extremitati D innitatur, atque tantum non incipiat circa D circumagi. In hoc statu, tota pressio $\frac{BC}{AB} . P$, quam corpus in planum AB exerit in vnicum punctum D colligetur, ita corpus in solo puncto D planum AB premat normaliter tota sua vi $\frac{BC}{AB} P$, et nisi planum resisteret, hac vi corpus actu ad motum impelleretur. Cum igitur plani firmitas hanc vim destruat, idem est acsi, sublato plano, corpus indirectione DQ ad AB normali vrgeretur vi $= \frac{BC}{AB} . P$, cuius momentum respectu axis per centrum grauitatis G transeuntis est $= \frac{BC}{AB} P . GQ = \frac{BC . DF}{AB} . P$, atque directe repugnat momento superiori ex frictione orto.

§. 11. In hoc igitur corpus versabitur statu, vt a quatuor viribus sollicitetur, quarum prima in directione GH est $= \frac{AC}{AB} . P$, secunda in directione GF est $= \frac{BC}{AB} . P$ tertia in directione DA est $= \frac{BC}{AB} . F$, et quarta in directione DQ est $= \frac{BC}{AB} . P$. Binae priores quia earum directiones per centrum grauitatis transeunt ad motum rotatorium nihil conferunt; tertia autem conatur corpus in eam ipsam plagam rotare, in quam rotari debet, si

vllus

vllus motus rotatorius actu subsequitur, eiusque momentum est $= \frac{BC.GF}{AB}.F.$, Quartae vis effectus huic motui rotatorio est contrarius, eiusque momentum est $= \frac{BC.DF}{AB}.P.$ Quamobrem nisi illud momentum maius sit quam hoc, motus rotatorius nullus producetur; hincque corpus motu radente seu motu progressiuo puro secundum directionem GH progredietur, si fuerit $\frac{BC.DF}{AB}.P > \frac{BC.GF}{AB}.F$ hoc est si sit $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$. Ducta autem ex centro grauitatis G ad basis extremitatem infimam D recta GD, erit $\frac{DF}{GF}$ tangens anguli DGF; quoties itaque tangens anguli DGF maior fuerit quam $\frac{F}{P}$ posito sinu toto $= 1$, toties corpus motu progressiuo solo super plano inclinato descendet, dummodo fuerit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, alioquin enim corpus perpetuo in quiete persisteret.

§. 12. Facillime itaque iudicare poterimus, vtrum datum corpus super plano inclinato descensurum sit motu radente puro, an vero voluendo: ad hoc scilicet tantum attendere debemus, vtrum $\frac{DF}{GF}$ seu tangens anguli DGF maior sit an minor fractione $\frac{F}{P}$. Priori enim casu, quo $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ corpus motu progressiuo puro descendet; casuque posteriore, quo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ simul motum rotatorium recipiet. Quoniam in hoc criterio eleuatio plani inclinati seu angulus ABC non inesse deprehenditur, perspicuum est, quod corpus in vna plani eleuatione sine prouolutione descendat, idem in omni alia eleuatione quacunque sine prouolutione esse descensurum; hocque plurima experimenta a Cel. Professore Krafft instituta constanter comprobauerunt. Neque igitur in iudicio hac dere ferendo spectari oportet rectam verticalem, ex centro grauitatis corporis ductam, vtrum ea extra basin an intra cadat; vti aliquibus auctoribus placuit; sed ex solo angulo D G F totum iudicium est petendum.

§. 13 Si igitur frictio horizontalis F adaequet pondus corporis absolutum P, tum fit fractio $\frac{F}{P} = 1$ quae est tangens anguli 45°. Hoc igitur casu corpus ELMD motu progressiuo puro descendet, si angulus DGF maior fuerit semi recto. Si frictio horizontalis F fuerit ad pondus P vti 1 ad 2, ideoque $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, quae fractio est tangens anguli 26°, 34′; in hac ergo hypothesi, nisi angulus DGF maior fuerit angulo 26°, 34′, corpus sine prouolutione descendere nequit. Sin autem frictio horizontalis F subtripla ponderis P. quae ratio vulgo in lignis obseruari solet, erit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, et angulus tangentem habens $= \frac{1}{3}$ erit $= 18°, 26′$: ex quo angulum DGF maiorem esse oportet 18°, 26′, si quidem corpus sine rotatione dascendere debeat. Si planum AB data opera fuerit politum, pariter ac basis corporis DE tum fere deprehenditur $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, eritque adeo $\frac{F}{P}$ tangens anguli 14°, 2′, corpus igitur solo motu radente descendet si angulus DGF maior fuerit quam 14°, 2′. Ex his facile erit de parallelepipedo iudicare, vtrum motu radente, an voluente super plano inclinato sit descensurum; et si figura fuerit minus regularis cognito loco centri grauitatis totum iudicium absoluetur.

§. 14 Operae autem praetium erit corpora prismatica, quorum sectiones ad axem normales sint polygona regularia seorsim perpendere; quae vel ex materia vniformi constent, vel saltem suum grauitatis centrum in me-

dio

dio axis positum habeant. Huiusmodi igitur prisma ita imponatur plano inclinato, vt eius axis situm teneat horizontalem. Repraesentet figura D H I K L E eiusmodi Fig. 10. prisma, cuius singulae sectiones sint polygona regularia n laterum. Erit ergo angulus $DGF = \frac{180}{n}$ graduum. ex quo eiusmodi prisma sine prouolutione descendet si fuerit tangens anguli $\frac{180°}{n}$ maior quam $\frac{F}{P}$. Casu itaque quo $\frac{F}{P} = 1$, prisma triangulare tantum sine rotatione descendet; quadrangulare enim iam in ipso termino prouolutionis versatur. Sin $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$. numerus laterum minor esse debet quam 7, vt descensus sine prouolutione absoluatur. At si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ prisma polygonum 9 laterum adhuc radendo descendet, quae autem plura habent latera voluentur. Sit denique $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, atque ex superioribus cocluditur, prismata polygona pauciorum quam 13 laterum omnia sine motu rotatorio esse descensura.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus, quomodo corpus comparatum esse oporteat, vt motu progressiuo solo descensum absoluat; simul intelligimus, quibus casibus motus rotatorius corpori descendenti inferatur. Quoties Fig. 9. scilicet fractio $\frac{DF}{GF}$ minor fuerit fractione $\frac{F}{P}$, corpus descendere non poterit, quin simul voluatur. Quod si ergo perpendiculum GF, quod ex centro grauitatis G in planum inclinatum AB demittitur, in ipsam basis extremitatem deorsum spectantem D eadit, tum ob $DF = 0$, corpus semper motum rotatorium recipiet, nisi ipsa frictio F fuerit nulla: quo tamen casu in ipso rotationis termino erit constitutum. Sin autem perpendiculum GF adeo extra basin infra D cadat, tum ob $\frac{DF}{GF}$ negatiuum ide-

ideoque nihilo minus, corpus voluetur, etiamsi frictio omnino euanuerit. In hoc autem statu corpus ne quidem super plano horizontali consistere poterit, propterea quod perpendiculum ex centro grauitatis demissum extra basin cadit: sed statim prolabetur; quod quidem ex primis staticae principiis est manifestum. Super plano inclinato autem accedit momentum vis prosternentis $\frac{BC.DF}{AB}$ P, quod quia sit negatiuum, solum motum rotatorium generabit.

§. 16. Perspicuum autem est, nisi corpus fuerit rotundum, eiusque axis situm horizontalem teneat, motum rotatorium vehementer fore irregularem. Statim enim ac motus rotatorius incipit, tum corpus in solo puncto Fig. 10. D plano innitetur, et circa hoc punctum conuertetur, donec alia facies puta DH plano inclinato applicuerit; hocque, quia cum impetu euenit, simul ex percussione mutatio in corporis motu orietur; rotatio vero circa angulum D subito sistetur, et corpus vel sine motu rotatorio moueri perget, vel circa sequentis basis extremitatem H motum rotatorium nanciscetur. Turbabitur ergo descensus huiusmodi corporum continuis saltibus, atque adeo percussionibus, ita vt motus nullo modo ad expressiones algebraicas vniformes reuocari queat; sed continuo dum alia basis plano inclinato se aplicat, nouo calculo erit opus; haecque operatio eo erit difficilior, quo magis corpus a figura rotunda recedat.

Fig. 11. §. 17. Persequamur igitur praecipue corpora rotunda, in quibus motus rotarorius sine subitaneis alterationibus locum habere potest. Incumbat scilicet huiusmodi corpus rotundo ita plano inclinato AB vt eius axis sit ho-

horizontalis, atque ad planum verticale ACB normalis; huius porro corporis rotundi centrum grauitatis G positum in medio axis puncto, partesque corporis vtrinque sitae sint inter se aequales et similes; praeterea vero axis sit permanens, vt corpus circa eum libere rotari possit, quemadmodum in praecedente dissertatione exposuimus. Exponat circulus LMD vel sectionem axi normalem per centrum grauitatis G factam, vel aliam quamcunque maximam, qua corpus planum contingit. Sit igitur huius sectionis radius $GD = c$, et pondus corporis maneat vt ante $= P$ eiusque momentum inertiae respectu axis sit $= Pbb$. Vidimus autem supra huius momenti valorem pro praecipuis speciebus corporum rotundorum: si nempe corpus fuerit cylindrus ex materia vniformi constans, tum erit $bb = \frac{1}{2}cc$; et si corpus fuerit vel globus, vel sphaeroides ellipticum pariter vniforme erit $bb = \frac{2}{5}cc$. Denique sit F frictio horizontalis huius corporis rotundi, quam sentiret super plano AB horizontali motu radente solo promotum.

§. 18. Inceperit hoc corpus descensum suum super plano inclinato AB ex A. vbi initio in quiete fuerit constitutum, perpendiculo GD in A incidente: absolueritque iam spatium $AD = x$. In statu hoc praesente duplicem habebit motum, progressiuum et rotatorium: sit igitur celeritas motus progressiui, qua centrum grauitatis G indirectione GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v: celeritas vero rotatoria, qua punctum quoduis periphaeriae M circa axem G in plagam Mm D circumfertur, debita sit altitudini u. Dum igitur corpus motu progressiuo pergit per elementum spatii Gg

$= dx$, punctum M motu angulari in m perueniet, vt fit $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Celeritas autem puncti D, qua planum in directione DB radet, erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque interea radet per elementum $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})dx$. Quoniam igitur effectus frictionis, quae est $= \frac{BC}{AB}F$, dato tempusculo proportionalis est spatiolo, per quod frictio exercetur, erit frictionis vis, dum corpus per elementum dx progreditur, non $\frac{BC}{AB}.Fdx$ sed $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})Fdx$; qua corpus in directione DA retrahetur.

§. 19. A pondere autem corporis P corpus in directione GH sollicitatur vi $= \frac{AC}{AB}.P$, ad planum vero apprimitur in directione GD vi $= \frac{BC}{AB}P$, quam planum ita absorbet, vt inde nulla vis ad corpus rotandum resultet eo quod interuallum DF euanescit. Accelerabitur igitur corpus in directione GH vi acceleratrice $\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{F}{P}$. Motus autem rotatorius a sola frictione accelerabitur, eritque vis acceleratrix, qua punctum M dum per Mm rotatur, $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fcc}{Pbb}$. Ponatur anguli ABC sinus $= m$, cosinus $= n$, ita vt sit $mm + nn = 1$ posito sinu toto $= 1$; erit $\frac{AC}{AB} = m$ et $\frac{BC}{AB} = n$. Per effectum igitur sollicitationum momentanearum habebimus has duas aequationes

$$dv = m\,dx - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fdx}{P}$$

$$du = n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fcc\,dx\sqrt{u}}{Pbb\sqrt{v}}$$

Ex quibus aequationibus integrando colligi poterit corporis in quouis loco tam motus rotatorius quam progressiuus: integratio autem ita perfici debet vt posito $x = 0$ tam $\sqrt{v}$ quam $\sqrt{u}$ euanescat; quoniam corpus in A motum ex quiete inchoasse ponimus. §. 20.

§. 20. Quia tres habemus variabiles x, u, et v, earum vnam eliminari oportet: commodissime autem x eliminatur, quoniam in vtraque aequatione tantum dx inest. Prior autem aequatio dat $dx = \frac{Pdv\surd v}{mP\surd v - nF\surd v + nF\surd u}$; posterior vero aequatio dat $dx = \frac{Pbbvdu}{nFcc\surd vu - nFccu}$; vnde inter v et u hanc acquirimus aequationem $\frac{dv}{mP\surd v - nF\surd v + nF\surd u} = \frac{bbdu\surd v}{nFcc\surd vu - nFccu}$, quae posito $\frac{bb}{cc} = k$ abit in $nFdv \surd vu - nFudv = kmPvdu - knFvdu + knFdu\surd vu$. Cum haec aequatio sit homogenea ponamus $v = ttu$, vt sit $dv = ttdu + 2tudt$, factaque substitutione habebimus istam aequationem: $nFut^3du + 2nFt^2u^2dt - nFttudu - 2Fnftuudt = kmPttuduk - nFttudu + knFtudu$, quae peracta variabilium separatione transit in hanc:
$\frac{2nFttdt - 2nFtdt}{kmPtt - knFtt + knFt - nFt^3 + nFtt} = \frac{du}{u}$, siue diuisione per t instituta in hanc $\frac{du}{u} = \frac{2nFtdt - 2nFdt}{-nFtt + (kmP - knF + nF)t + knF}$.

§. 21. Ad hanc aequationem integrandam ponamus breuitatis gratia $kmP - knF + nF = 2gnF$, ita vt sit $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF}$ eritque $\frac{du}{u} = \frac{2dt - 2tdt}{tt - 2gt - k}$, quae ob $tt - 2gt - k = (t - g + \surd(gg + k))(t - g - \surd(gg + k))$, abit in $\frac{du}{u} = \frac{\frac{g - 1 - \surd(gg + k)}{\surd(gg + k)}dt}{t - g + \surd(gg + k)} \frac{-\frac{g + 1 - \surd(gg + k)}{\surd(gg + k)}dt}{t - g - \surd(gg + k)}$ cuius integrale est $lu = lC + \frac{g - 1 - \surd(gg + k)}{\surd(gg + k)} l(t - g + \surd(gg + k)) - \frac{g + 1 - \surd(gg + k)}{\surd(gg + k)} l(t - g - \surd(gg + k)) = lC + \frac{g - 1}{\surd(gg + k)} l\frac{t - g + \surd(gg + k)}{t - g + \surd(gg + k)} - l(tt - 2gt - k)$. A logarithmis iam ad numeros concludendo erit $u(tt - 2gt - k) = C\left(\frac{t - g + \surd(gg + k)}{t - g + \surd(gg + k)}\right)^{\frac{g - 1}{\surd(gg + k)}}$ atque loco t restituendo $\frac{\surd v}{\surd u}$ erit $v - 2g\surd vu - ku = C \left(\frac{\surd v - g\surd u + \surd u(gg + k)}{\surd v - g\surd u - \surd u(gg + k)}\right)^{\frac{g - 1}{\surd(gg + k)}}$. Ad constantem C ad no-

 strum

strum casum accommodandam, ponamus $u = 0$ quod initio motus euenit, eritque $v = C$; quoniam vero et hoc casu est $v = 0$, erit $C = 0$; ideoque $v - 2g\sqrt{vu} - ku = 0$. Ex qua aequatione oritur vel $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$ vel $\sqrt{v} = (g - \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$. Manifestum autem est priorem tantum aequationem locum habere posse, quia in descensu vtraque celeritas $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ est affirmatiua.

§. 22. Cum igitur posito $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF} = \frac{mbbP - nbbF + nccF}{2nccF}$ sit $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$: perpetuo in descensu corporis super plano AB motus progressiuus ad motum rotatorium eandem conseruabit rationem: eritque in singulis locis celeritas corporis progressiua $\sqrt{v}$ ad celeritatem rotatoriam $\sqrt{u}$ vti $g + \sqrt{(gg + k)}$ ad 1 seu vti k ad $\sqrt{(gg + k)} - g$, existente $k = \frac{b.b}{cc}$. Si igitur fuerit $\frac{F}{P} = \frac{2}{3}$ pro cylindro ob $k = \frac{1}{2}$ erit $g = \frac{3m + n}{4n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)}}{4n}$; ideoque $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 3m + n + \sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)} : 4n$. Eadem vero hypothesi pro globo vel sphaeroide elliptico, ob $k = \frac{2}{5}$ erit $g = \frac{6m + 3n}{10n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)}}{10n}$ hincque fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 6m + 3n + \sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)} : 10n$. Quod si ergo eleuatio plani fuerit angulus semirectus, erit $m = n$; hocque casu fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 20 : 10 = 2 : 1$. Globus igitur super plano ad angulum semirectum eleuato ita descendet, vt eius celeritas progressiua vbique duplo maior sit celeritate rotatoria, siquidem sit $\frac{F}{P} = \frac{2}{3}$.

§. 23. Perpetuo autem corporis rotundi super plano inclinato descendentis celeritas progressiua maior erit quam celeri-

celeritas rotatoria; eoque maior erit differentia, quo magis planum ad horizontem inclinatur, seu quo maior fiat angulus ABC. Nam si angulus B omnino euanescat, seu planum AB fiat horizontale, erit $m=0$ et $n=1$, ideoque $g=\frac{1-k}{2}$, et $\sqrt{(gg+k)}=\frac{1+k}{2}$ ex quo oritur $\sqrt{v}:\sqrt{u}=1:1$, nempe hoc casu corpus perfecte quiescet, et vterque motus erit nullus. Si angulus B sit infinite paruus, ita vt sit m quantitas infinite parua manente $n=1$ erit $g=\frac{1-k}{2}+\frac{kmP}{2F}$ ideoque $\sqrt{(gg+k)}=\frac{1+k}{2}+\frac{(1-k)kmP}{2(1+k)F}$; et $g+\sqrt{(gg+k)}=1+\frac{kmP}{(1+k)F}$; quare fiet $\sqrt{v}:\sqrt{u}=1+\frac{kmP}{(1+k)F}:1$. Quando autem planum AB in situm verticalem eleuatur, tum ob $n=0$ fit $g=\infty$, ideoque celeritas progressiua $\sqrt{v}$ infinities erit celeritate rotatoria maior: hoc scilicet casu corpus solo motu progressiuo descendet. Nullo autem casu inter medio fieri potest $\sqrt{u}=\sqrt{v}$, ad hoc enim requiritur vt sit $k=1-2g$ siue $\frac{kmP}{nF}=0$, quod nusquam nisi in situ horizontali euenit.

§. 24. Comparatis binis celeritatibus inter se poterimus quoque ad quoduis spatium absolutum $AD=x$ motum corporis assignare: Cum enim sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}=\frac{\sqrt{(gg+k)}-g}{k}$ fiet ex prima aequatione $dv=mdx-n\left(\frac{g+k-\sqrt{(gg+k)}}{k}\right)\frac{Fdx}{P}$ quae integrata dat $v=mx-\frac{n(g+k-\sqrt{(gg+k)})Fx}{kP}=\frac{x}{kP}(kmP-ngF-knF+nF\sqrt{(gg+k)})$ seu $v=$

$$\frac{x(kmP-(1+k)nF+\sqrt{(k^2m^2P^2+2(1-k)kmnFP+(1+k)^2nnF^2)})}{2kP}$$

cognita autem pro spatio percurso x celeritate progressiua $\sqrt{v}$, simul innotescit celeritas rotatoria $\sqrt{u}$ ex aequatione

$$\sqrt{u}=\frac{\sqrt{(gg+k)}-g}{k}\sqrt{v}=\frac{\sqrt{(k^2m^2P^2+2(1-k)kmnFP+(1+k)^2nnF^2)}-(1-k)nF-kmP}{2knF}\sqrt{v}$$

Hinc

Hinc perſpicitur dum angulus B euaneſcit ob $m = 0$ fore $v = 0$, hocque caſu ſolo corpus non deſcendet, nam quamprimum planum tantillum eleuatur, prodit $v = \frac{m x}{1+k}$. Hincque adeo conſtat frictione motuque rotatorio non obſtante, corpus motu vniformiter-accelerato eſſe deſcenſurum.

§. 25. Determinato corporum rotundorum motu mixto ex progreſſiuo et rotatorio, quo ſuper plano inclinato deſcendunt, pauca quaedam de motu corporum non rotundorum ſed ſuperficiebus planis terminatorum afferamus, non vt totum motum proſequamur, quod opus eſſet fere inſuperabile, ſed tantum vt initium motus cognoſcamus. Quemadmodum enim corpora rotunda ſtatim deſcendere incipiunt ac planum AB ad horizontem minimum inclinatur; corpora vero motus rotatorii expertia ante non deſcendunt, quam $\frac{AC}{BC}$ maior fiat quam $\frac{F}{P}$; ita in reliquis corporibus certus ac determinatus dabitur terminus eleuationis plani in quo corpus deſcendere incipiat. Sit igitur corpus DELK, quod initio plano inclinato AB ita inſedit, vt eius facies DE plano eſſet applicata, iam autem percurſo ſpatio AD $= x$, peruenerit in ſitum quem figura repraeſentat. Scilicet baſis DE, quae initio planum AB tangebat, ab eo remota ſit angulo ADE, qui angulus continuo fiet maior, donec alia ſuperficies ſequens DK plano applicetur, quod cum euenit motus rotatorius prior ſubito ſiſtetur, corpuſque vel motu radente ſolo progredietur, vel motum angularem circa ſequentem angulum K concipiet. Per ſequemur autem hic tantum motum rotatorium primum natum, qui eousque durat, quoad facies DK ſe plano applicet.

§. 26.

§. 26. Sit igitur angulus $ADE = s$, qui simul ostendit, quantum corpus iam ab initio motus circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum sit circumactum: at demisso ex centro grauitatis G in basin DE perpendiculo GF sit angulus $DGF = f$. Quodsi iam ex G in planum AB demittatur perpendiculum Gf, erit angulus $FGf = s$, ideoque angulus $DGf = f - s$, ex quo erit $\frac{Df}{DG} = \sin.(f - s)$ et $\frac{Gf}{DG} = \cos.(f - s)$. Ponatur $DG = c$, sitque celeritas corporis progressiua, qua centrum grauitatis G in recta GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v, celeritas vero qua punctum D circa axem corporis per centrum grauitatis G ductum rotatur, debita altitudini u. Dum autem corpus hac celeritate rotatur centrum grauitatis G a plano AB recedere debet, hocque fiet celeritate $= \sin.(f-s)\sqrt{u}$; quem centri grauitatis motum seorsim contemplabimur, cum eius motum progressiuum secundum directionem GH non afficiat. Erit igitur porro celeritas, qua punctum D versus B progreditur $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque si frictio horizontalis fuerit $= F$ erit frictio quam corpus in hoc statu sentiet $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{BC}{AB}.F$, qua corpus in directione DA retrahetur. Ponamus autem vt ante $\frac{AC}{AB} = m$, et $\frac{BC}{AB} = n$, ita vt sit $mm + nn = 1$.

§. 27. Sit corporis massa seu pondus $= P$ eiusque momentum inertiae respectu axis G, circa quem gyratur $= Pbb$, erit vis qua corpus in directione GH vrgetur $= mP$, vis autem in directione normali $Gf = nP$. Hinc itaque corpus in directione GH accelerabitur vi acceleratrice $= m - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{F}{P}$. Atque si simul vim plani, quae corpus a plano repellit, quoniam punctum

D

D non intra planum AB ingredi potest, in computum ducamus, qua vtique reactio plani in D, quae per se est $= n$P, augetur idemque ratiocinium adhibeamus quo vsi sumus in praecedente dissertatione, oportebit ibi loco F scribi $n\,\mathrm{F}\,(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})$ et loco P, n.P; quibus surrogatis erit vis accelerans motum rotatorium in D $=$

$$\frac{n.\mathrm{DG}(\mathrm{F}(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\mathrm{G}f-\mathrm{P.D}f)}{\mathrm{P}(bb+\mathrm{D}f^2)} - \frac{nc^2(\mathrm{F}(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\,\mathrm{cos.}(f-s)-\mathrm{P.\,sin.}(f-s))}{\mathrm{P}(bb+cc(\mathrm{sin.}(f-s))^2)}$$

Dum autem centrum grauitatis G in directione GH per spatiolum dx progreditur, punctum D motu angulari absoluet spatium $= \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ verum quia interea angulus ADE $= s$ elemento ds augetur: fiet $c\,ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$; ideoque $dx = \frac{c\,ds\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$.

§. 28. Ex effectu iam sollicitationum momentanearum cosequuntur binae sequentes aequationes.

$$dv = m\,dx - n\,(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{\mathrm{F}\,dx}{\mathrm{P}} = \frac{mc\,ds\sqrt{v}}{\sqrt{u}} - \frac{n\mathrm{F}c\,ds\sqrt{v}}{\mathrm{P}\sqrt{u}} + \frac{n\mathrm{F}c\,ds}{\mathrm{P}}$$

$$du = \frac{nc^3(\mathrm{F}\,1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\,\mathrm{cos.}(f-s) - \mathrm{P\,sin.}(f-s))\,ds}{\mathrm{P}(bb+cc\,(\mathrm{sin.}\,(f-s))^2)}$$

Prior aequatio in hanc transmutatur $dv = m\,dx - \frac{n\mathrm{F}\,dx}{\mathrm{P}} + \frac{n\mathrm{F}c\,ds}{\mathrm{P}})$ cuius integrale est $v = m\,x - \frac{n\mathrm{F}x}{\mathrm{P}} + \frac{n\mathrm{F}cs}{\mathrm{P}}$, Hae autem aequationes etsi in se intractabiles videntur, tamen pro ipso motus initio ex iis idoneae conclusiones formari poterunt. Ponamus ad hoc $v = \alpha s + \beta ss$ et $u = \gamma s + \delta ss$ erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\gamma + \delta s}{\alpha + \beta s}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)s}{2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}$ erit porro ob s minimum cos. $(f-s) =$ cos. $f + s$ sin. f et sin. $(f-s) =$ sin. $f - s$ cos. f: quibus in prima aequatione substitutis fit $dv = \alpha\,ds + 2\beta s\,ds = c\,ds(m - \frac{n\mathrm{F}}{\mathrm{P}})$

($\sqrt{}$

$(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)s}{2\gamma\sqrt{\alpha\gamma}}) + \frac{nFcds}{P}$ ex quo erit $\alpha = (m - \frac{nF}{P}) c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{nFc}{P}$. Poſterior vero aequatio neglecto etiam s dabit $\gamma\, ds = \frac{nc^3(F(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}})\,\text{cof.}\, f - P.\,\text{fin.}\, f)ds}{P(bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)}$ ſeu $Pbb\gamma + Pcc\gamma(\text{fin}\, f)^2 = nFc^3\,\text{cof.}\, f - nFc^3\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.\,\text{cof.}\, f - nPc^3.\,\text{fin.}\, f$.

§. 29. Prior aequatio dat $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\alpha P - nFc}{(mP - nF)c}$, ſeu $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{(mP - nF)c}{\alpha P - nFc}$ vnde fit $\gamma = \frac{(mP - nF)^2 cc\alpha}{(\alpha P - nFc)^2}$; qui valor in altera aequatione ſubſtitutus dabit $\frac{P(bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)\alpha cc(mP - nF)^2}{(\alpha P - nFc)^2} = nFc^3\,\text{cof.}\, f - nPc^3\,\text{fin.}\, f - \frac{nFc^4(mP - nF)\,\text{cof.}\, f}{\alpha P - nFc}$. Sit $\alpha P - nFc = z$ fiet $(bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)(mP - nF)^2 nFc + (bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)(mP - nF)^2 z = nFczz\,\text{cof.}\, f - nPczz\,\text{fin.}\, f - nFcc(mP - nF)z\,\text{cof.}\, f$. Ponatur porro $z = (mP - nF)t$ fiet $tt = \frac{nFcct\,\text{cof.}\, f + (bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)(mP - nF)t + (bb + cc(\text{fin.}\, f)^2)nFc}{nFc\,\text{cof.}\, f - nPc\,\text{fin.}\, f}$

Ex hac aequatione valor ipſius t inuentus praebebit valorem ipſius z, hocque cognito innoteſcet α, indeque porro β. Sin autem ſtatim ponamus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = r$, atque $c\,\text{fin.}\, f = DF = p$, et $\text{cof.}\, f = GF = q$, ita vt ſit $pp + qq = cc$, fiet primo initio $\frac{dv}{du} = rr$ hincque reperietur

$$r = \frac{mP(bb + pp) - nF(bb + pp - cq) + \sqrt{(nnF^2(bb + pp + cq)^2 - 2mnFP(bb + pp)(bb + pp - cp) + m^2P^2(bb + pp)^2) - 4nnFP(bb + pp)cp)}}{2nFcq - 2nPcp}$$

quamprimum ergo $(mP - 2nF)r + nF$ incipit maius eſſe quam o, tum corpus deſcendere incipiet, et ſi fuerit $Fqr - Ppr > Fq$ corpus quoque rotari incipiet. Eſt autem $Fq > Pp$, quia alioquin corpus ſolo motu progreſſiuo deſcendit, quem caſum ante euoluimus.

§. 30 Ex eadem aequatione pro r inuenta si ponatur $\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \omega$ ita vt sit $dv = \frac{(mP - nF)dx + nF\omega dx}{P}$, ac primo quidem motus initio $du = \frac{nc^2(Fq - Fq\omega Pp)ds}{P(bb+pp)}$; reperietur inuertendo $\omega =$

$$\frac{nF(bb+pp-cq) - mP(bb+pp) + \sqrt{(nnF^2(bb+pp+cq)^2 - 2mnFP(bb+pp)(bb+pp-cq) + m^2P^2(bb+pp)^2) - 4nnFP(bb+pp)cp)}}{2nF(bb+pp)}$$

Ex hac aequatione intelligitur fore $dv = 0$, si sit $mq = np$ seu angulus ABC = ang. DGF, hoc ergo casu corpus quiescet, si quidem fuerit $\frac{p}{q} < \frac{F}{P}$. Statim vero ac angulus ABC incipiet superare angulum DGF, corpus motum adipiscetur progressiuum simulque rotatorium ad progressiuum datam rationem tenentem. Si enim ponatur $mq = np$ oritur $\omega = \frac{nF - mP}{nF}$, ex quo fit $dv = 0$ et $du = 0$. Quibus igitur casibus quoduis corpus, quo motu radente solo descendere nequit, motu mixto descendere incipiat, ex his facile colligitur.

§. 31. Omnis ergo quaestio de motu corporum super plano inclinato bipartita erit, primum enim quaeritur, vtrum corpus sit descensurum, an vero in quiete permansurum, tum vero, si constet corpus descendere debere, formabitur altera quaestio, quomodo descensus fiat, vtrum motu radente puro, an motu mixto ex radente et voluente. Hae igitur quaestiones pro quouis casu oblato facile decidentur. Impositum enim sit plano inclinato ABC corpus DKLE, cuius frictio horizontalis sit ad proprium pondus vt PR ad RQ, sicque constituatur angulus PQR cuius tangens erit $\frac{F}{P}$. Deinde ex corporis centro grauitatis G in basin DE, qua incumbit plano, demittatur perpendiculum GF, atque ab extremitate basis infima D ad G ducatur recta DG vt obtinea-

Fig. 13 et 14.

tur

tur angulus DGF. His duobus angulis PQR et DGF cognitis, qui ab eleuatione plani inclinati nullo modo pendent, duos caſus contemplari oportet: qui ſunt.

I. *Si angulus* DGF *maior fuerit angulo* PQR: corpus ſuper plano inclinato quieſcet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo PQR: quod ſi autem angulus ABC maior conſtituatur quam angulus PQR, tum corpus deſcendet motu progreſſiuo puro, neque vllum motum rotatorium recipiet.

II. *Si angulus* DGF *minor fuerit angulo* PQR, corpus tamdiu tantum ſuper plano inclinato quieſcet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo DGF; quamprimum vero angulus eleuationis plani ABC excedet angulum DGE, tum corpus deſcendet idque motu mixto ex radente et voluente, niſi planum AB verticaliter erigatur, quo caſu motus rotatorius prae progreſſiuo euaneſcit. In hoc ergo poſteriori caſu quo angulus DGF $<$ PQR motus nullus ſubſequetur, niſi recta verticalis ex centro grauitatis G demiſſa extra baſin ED cadat. Atque ſi in caſu poſteriori iſta recta verticalis extra baſin cadat, corpus tam radendo quam voluendo deſcendet. Secus autem res ſe habet in caſu priori, tum enim corpus deſcendere poteſt, etiamſi recta verticalis ex corporis centro grauitatis G demiſſa non extra baſin cadat: ac licet haec recta verticalis extra baſin cadat, tamen nullus ſubſequetur motus rotatorius.

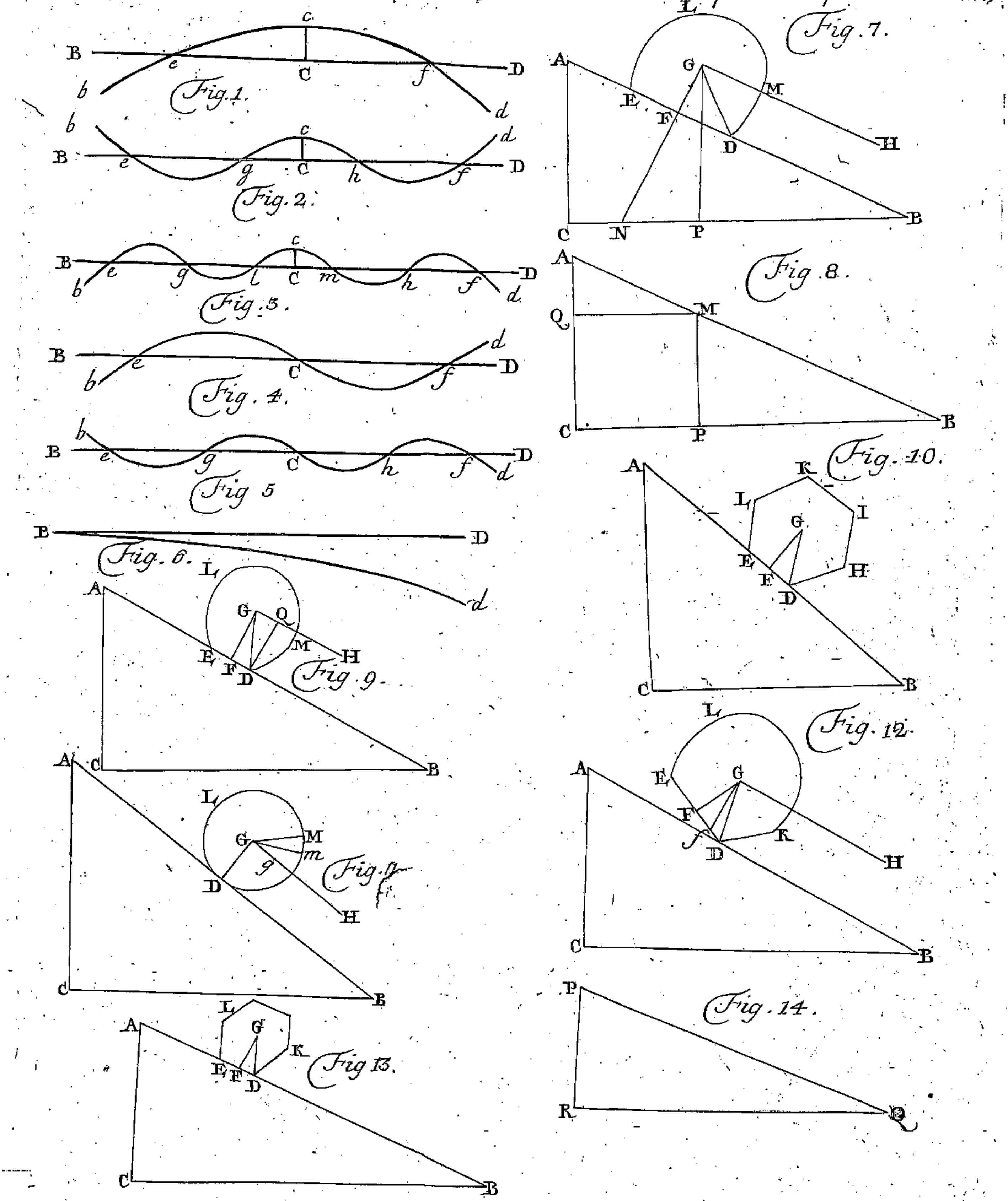

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.