

# SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICIL-

## LIMI A FERMATIO PROPOSITI.

AVCTORE

L. EVLERO.

### §. I.

Quamquam problemata, quae olim soluta difficilia sunt habita, hodie plerumque ob fines analyseos tantopere promotos nihil vel parum difficultatis habere solent; tamen hoc in eo problematum genere, quae ad methodum Diophanti pertinent, non vsu venit. In hac enim analyseos parte post Fermatii tempora, qui plurimum studii et operae in ea felicissimo cum successu consumsit, non solum nihil ultra praestitum esse videtur, sed etiam hoc studium a geometris, qui eum sunt secuti, fere penitus est neglectum. Et si autem ea analyseos pars, in qua mathematici hodie potissimum versantur, ob summam vtilitatem, quam ad reliquas scientias atque artes copiosissime affert, omni laude maxime digna est habenda: tamen altera quoque pars, quae in numeris est occupata, et ad problemata indeterminata soluenda adhiberi solet, idcirco minime est contemnenda, cum in ea plerumque summa ingenii vis cernatur atque ab analysta non mediocri sagacitas requiratur.

§. 2. Quae cum ita sint comparata, ea huius generis problemata, quae a Fermatio summopere difficilia sunt iudicata, eadem et hodie non magis facta sunt facilia; hincque studium, quod in eorum solutione ponitur, non male collocatur. Proponit autem Fermatius in anno-

Tom. II. Nou. Comment.

G

tatio

50 SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

tationibus suis ad Diophantum Bacheti sequens problema tanquam solutu difficillimum

*Inuenire triangulum rectangulum in numeris rationalibus expressum, cuius uterque cathetus area ipsius trianguli minutus producat numerum quadratum.*

Huius ergo problematis sequentes, quas mihi quidem efficere contigit, solutiones in medium afferre visum est,

Praeparatio ad solutionem.

§. 3. Notum est triangulum rectangulum in numeris rationalibus exprimi, si ponatur cathetorum alter  $= 2ab$ , et alter  $= aa - bb$ , tum enim prodibit hypotenusâ  $= aa + bb$ . Generalius catheti ambo poni possunt  $\frac{2ab}{z}$  et  $\frac{aa - bb}{z}$ , prodeunte hypotenusâ  $= \frac{aa + bb}{z}$ . Ponam autem, quoniam naturam trianguli rectanguli ultimo loco in computum vocare expedit,

$$\text{vnum cathetum} = \frac{2x}{z}$$

$$\text{alterum cathetum} = \frac{y}{z}$$

$$\text{eritque area} = \frac{xy}{z}$$

Ac primo per conditionem problematis hae quantitates

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \frac{2x}{z} - \frac{xy}{z} \text{ seu } 2xz - xy \\ \text{II. } \frac{y}{z} - \frac{xy}{z} \text{ seu } yz - xy \end{array} \right\} \text{ quadrata effici debent.}$$

Tum vero, quia hypotenusâ fit  $= \frac{\sqrt{(4xx + yy)}}{z}$ , haec quantitas

$$\text{III. } 4xx + yy \text{ reddi debet quadratum.}$$

§. 4. Quoniam hae ambae quantitas  $2xz - xy$  et  $yz - xy$  esse debent quadrata, earum productum pariter erit quadratum. Ordior ergo a producto,

$2xy$

$$2xyzz - 2xxyz - xyys + xxyy$$

quod quadratum reddi debet, ponoque eius radicem =  $xy - \frac{p}{q}yz$ , ut ex evolutione valor ipsius  $z$  commode defini queat; fiet autem

$$2xyzz - 2xxyz - xyys + xxyy = xxyy - \frac{2p}{q}xxyz + \frac{pp}{qq}yyzz$$

Ac deleto utrinque termino communi  $xxyy$  et reliqua aequatione per  $yz$  diuisa obtinebitur

$$2xz - 2xx - xy = -\frac{2p}{q}xy + \frac{pp}{qq}yz$$

$$\text{vnde fit } z = \frac{2qqxx + qqxy - 2pqxy}{2qqx - ppy}$$

§. 5. Inuento iam valore ipsius  $z$ , fiet

$$z - y = \frac{2qqxx - 2pqxy + ppyy}{2qqx - ppy} = \frac{(2qx - py)^2}{2qqx - ppy}$$

$$z - x = \frac{ppxy + qqxy - 2pqxy}{2qqx - ppy} = \frac{xy(p - q)^2}{2qqx - ppy}$$

hincque porro habebitur:

$$2xz - xy = \frac{x(2qx - py)^2}{2qqx - ppy} = \frac{xx(2qx - py)^2}{2qqxx - ppxy}$$

$$yz - xy = \frac{xyx(p - q)^2}{2qqx - ppy} = \frac{xyx(p - q)^2}{2qqxx - ppxy}$$

Quarum quantitatum cum vtraque esse debeat quadratum; hoc efficietur, dummodo communis denominator:  $2qqxx - ppxy$  fiat quadratum. Ponatur in hunc finem  $2qqxx - ppxy = rrxx$ , ac diuisione facta per  $x$  erit  $(2qq - rr)$

$$x = ppy, \text{ et } \frac{x}{y} = \frac{pp}{2qq - rr}$$

§. 6. Sufficiet autem ad nostram solutionem nosse relationem inter  $x$  et  $y$ , quia in calculum iam introductus est communis denominator  $z$ , quare ponere licebit:

$$x = pp \text{ et } y = 2qq - rr$$

$$\text{vnde fiet } z - x = \frac{pp(2qq - rr)(p - q)^2}{pprr} \text{ ideoque}$$

G 2

$$z =$$

52 SOLVITIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

$$z = pp + \frac{(2'qq - rr)(p - q)^2}{rr}$$

ideoque superest tantum, vt  $4xx + yy$  reddatur quadratum, vnde sequens expressio debet esse quadratum

$$4p^4 + 4q^4 - 4qqrr + r^4$$

vnde sequentes solutiones particulares adornabuntur.

Solutio prima.

§. 7. Quoniam igitur quaestio huc est reducta, vt pro litteris  $p, q, r$  eiusmodi valores assignentur, qui hanc expressionem

$$4p^4 + 4q^4 - 4qqrr + r^4$$

reddant quadratum, solutio generalis, quae omnes omnino valores idoneos harum litterarum complectatur, tradi nequit. Cum igitur solutionibus specialibus acquiescere debeamus, ponam primo radicem huius expressionis esse  $= 2pp + rr$ , vt termini  $4p^4$  et  $r^4$  vtrinque se destruant, ac prodibit haec aequatio

$$4q^4 - 4qqrr = + 4pprr$$

vnde fit  $pp = + \frac{qq}{rr} (qq - rr)$ , et habebimus

$$\text{vel } p = \frac{q}{r} \sqrt{(qq - rr)} \text{ vel } p = \frac{q}{r} \sqrt{(rr - qq)}$$

§. 8. Priori formulae  $p = \frac{q}{r} \sqrt{(qq - rr)}$  satis fit ponendo  $q = cc + dd$ , et  $r = 2cd$ , vnde fit  $p = \frac{(cc + dd)(cc - dd)}{2cd}$

Ex his ergo valoribus:

$$p = (cc + dd)(cc - dd)$$

$$\text{seu } q = 2cd(cc + dd)$$

$$r = 4ccdd$$

$$q =$$

$$\left. \begin{aligned} q &= cc + dd \\ r &= 2cd \\ p &= \frac{(cc+dd)(cc-dd)}{2cd} \end{aligned} \right\} \text{erit } \begin{aligned} x &= pp \\ y &= 2qq - rr \\ \sqrt{(4xx + yy)} &= 2pp + rr \\ z &= x + \frac{y(-q)^2}{rr} \end{aligned}$$

quibus inuentis erit pro triangulo rectangulo quaesito :

I. cathetus =  $\frac{2x}{z}$ , II. cathetus =  $\frac{y}{z}$

Exemplum. 1.

§. 9. Sit  $c = 2$ , et  $d = 1$ , ac prodibunt hi valores :

$p = 5 \cdot 3 = 15$ ;  $x = 225$

$q = 4 \cdot 5 = 20$ ;  $y = 544$

$r = 4 \cdot 4 = 16$ ;  $z = 225 + \frac{544 \cdot 25}{256} = \frac{25 \cdot 89}{8} = \frac{2225}{8}$

atque  $\sqrt{(4xx + yy)} = 2pp + rr = 706$

ex quibus conficitur hoc triangulum rectangulum in numeris :

I. cath.  $\frac{2x}{z} = \frac{144}{89}$ ; II. cath.  $\frac{y}{z} = \frac{4352}{25 \cdot 89}$ ; III. hypot. =  $\frac{5648}{25 \cdot 89}$

area ergo erit =  $\frac{72 \cdot 4352}{25 \cdot 89^2}$ , et problemati ita satisficit.

I. cath. - area =  $\frac{144}{25 \cdot 89^2} (25 \cdot 89 - 2176) = \frac{144 \cdot 49}{25 \cdot 89^2} = \left(\frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 89}\right)^2$

II. cath. - area =  $\frac{4352}{25 \cdot 89^2} (89 - 72) = \frac{17 \cdot 17 \cdot 256}{25 \cdot 89^2} = \left(\frac{16 \cdot 17}{5 \cdot 89}\right)^2$

Exemplum. 2.

§. 10. Sit  $c = 3$ , et  $d = 1$ , ac sequentes prodibunt valores

$p = 10 \cdot 8$

$p = 20$

$q = 6 \cdot 10$  qui per 4 diuisi ad minores

$q = 15$

$r = 6 \cdot 6$  terminos hos reducuntur

$r = 9$

54 SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

ex his fit  $x=400$  ;  $y=369$  ; et  $z = \frac{4625}{9}$  ;  $\sqrt{(4xx + yy)} = 881$  ; vnde triangulum rectangulum erit

I. cath.  $\frac{z}{x} = \frac{37 \cdot 9}{185}$  ; II. cath.  $\frac{y}{z} = \frac{81 \cdot 41}{25 \cdot 185}$  ; III. hyp.  $= \frac{9 \cdot 881}{25 \cdot 185}$

atque area  $= \frac{16 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 41}{25 \cdot 185^2}$  ; quare problemati ita fatisfit :

I. cath. — area  $= \frac{2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 185 - 16 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 41}{25 \cdot 185^2} = \frac{16 \cdot 9 \cdot 5029}{25 \cdot 185^2} = \left( \frac{4 \cdot 77}{5 \cdot 185} \right)^2$

II. cath. — area  $= \frac{81 \cdot 41 \cdot 185 - 16 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 41}{25 \cdot 185^2} = \frac{81 \cdot 41 \cdot 41}{25 \cdot 185^2} = \left( \frac{9 \cdot 41}{5 \cdot 185} \right)^2$

Solutio secunda.

§. 11. Sumatur ex solutione praecedente casus posterior  $p = \frac{q}{r} \sqrt{(rr - qq)}$ , qui requirit hos valores :

$$\left. \begin{aligned} r &= cc + dd \\ q &= 2cd \\ p &= \frac{2cd(cc - dd)}{cc + dd} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= (cc + dd)^2 ; \quad x = pp \\ \text{seu } q &= 2cd(cc + dd) ; \quad y = 2qq - rr \\ p &= 2cd(cc - dd) ; \quad \sqrt{(4xx + yy)} = 2pp - rr \end{aligned}$$

et vt ante  $z = x + \frac{y(p - q)^2}{rr}$

Quia autem esse debet  $2qq > rr$  erit  $8ccdd > (cc + dd)^2$  et  $2cd\sqrt{2} > cc + dd$ , seu  $0 > cc - 2cd\sqrt{2} + dd$ , quod huc redit, vt fit  $dd > (c - d\sqrt{2})^2$  ; ergo vel  $d > c - d\sqrt{2}$  seu  $\frac{d}{c} > \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$  vel  $d > d\sqrt{2} - c$  seu  $\frac{d}{c} < \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

Ergo si  $d = 1$  necesse est vt fit vel  $c < \sqrt{2} + 1$  vel  $c > \sqrt{2} - 1$ . At est  $c > 1$ , vnde semper erit  $c > \sqrt{2} - 1$ , et  $2qq - rr$  fiet quantitas positua. Erit itaque

I. cath.  $= \frac{z}{x}$  ; II. cath.  $= \frac{y}{z}$  et III. hypot.  $= \frac{\sqrt{4xx + yy}}{z}$ .

Exemplum. 1.

§. 12. Sit  $c = 2$ , et  $d = 1$ , ac prouenient hi valores ;

$r =$

$\sqrt{4xx + \dots}$

$yp. = \frac{6 \cdot 887}{25 \cdot 125}$

atisfit :

$= \left( \frac{4 \cdot 77}{5 \cdot 185} \right)^2$

$= \left( \frac{6 \cdot 41}{5 \cdot 185} \right)^2$

casus poste-

lores :

$= pp$

$= 2qq - rr$

$yy) = 2pp - rr$

$(cc + dd)^2$

id, quod huc

$eu \frac{d}{c} > \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

$eu \frac{d}{c} < \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$2 + 1$  vel

$c > \sqrt{2} - 1,$

$eu$

$= \frac{\sqrt{4xx + yy}}{z}$

at hi valores ;

$r =$

$$\left. \begin{matrix} r = 5 \cdot 5 = 25 \\ q = 4 \cdot 5 = 20 \\ p = 4 \cdot 3 = 12 \end{matrix} \right\} \text{hincque } \begin{cases} x = 144 \\ y = 175 \\ \sqrt{4xx + yy} = 337 \end{cases}$$

atque  $z = 144 + \frac{175 \cdot 64}{625} = \frac{4048}{25}$

Vnde trianguli quaesiti erit

I. cath.  $= \frac{z^2}{z} = \frac{258 \cdot 25}{4048} = \frac{78 \cdot 25}{253} = \frac{450}{253}$

II. cath.  $= \frac{y}{z} = \frac{25 \cdot 175}{4048} = \frac{4372}{4048}$

III. hypot.  $= \frac{\sqrt{4xx + yy}}{z} = \frac{25 \cdot 337}{4048} = \frac{8425}{4048}$

Area itaque erit  $= \frac{225 \cdot 4375}{253 \cdot 4048} = \frac{225 \cdot 4375}{16 \cdot 253^2}$

Vnde problemati hoc modo satisfit, vt fit :

I. cath. — area  $= \frac{225(32 \cdot 253 - 4375)}{16 \cdot 253^2} = \frac{225 \cdot 61}{16 \cdot 253^2} = \left( \frac{15 \cdot 61}{4 \cdot 253} \right)^2$

II. cath. — area  $= \frac{25(175 \cdot 253 - 9 \cdot 4375)}{253 \cdot 4048} = \frac{25 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 28}{16 \cdot 253^2} = \left( \frac{25 \cdot 14}{4 \cdot 253} \right)^2$

### Exemplum. 2.

§. 13. Sit  $c = 3$  et  $d = 1$ , ac prodibunt hi valores :

$$\left. \begin{matrix} r = 10 \cdot 10 \\ q = 6 \cdot 10 \\ p = 6 \cdot 8 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} r = 25 \\ q = 15 \\ p = 8 \end{matrix} \right\} \text{hincque } \begin{cases} x = 144 \\ y = 175 \\ \sqrt{4xx + yy} = 337 \end{cases}$$

qui valores cum sint iidem, qui in exemplo praecedente, hinc nulla noua oritur solutio. Maiores autem numeros pro  $c$  et  $d$  non substituo, quod inde nimis complicati valores pro  $x$ ,  $y$  et  $z$  prodeunt; praecipua enim cura in hoc debet poni, vt triangula in minimis, quantum fieri potest, numeris expressa reperiantur.

Solutio

## Solutio tertia.

§. 14. Cum  $4xx + yy = 4p^2 + 4q^2 - 4qqrr + r^2$  esse debeat quadratum, eius radicem ponamus hic  $= 2pp \pm 2qq$ , ut sit  $\sqrt{4xx + yy} = 2pp \pm 2qq$ ; atque prodibit haec aequatio  $r^2 - 4qqrr = \pm 8ppqq$ ; unde fit  $pp = \pm \frac{2rr(rr - 4qq)}{16qq}$  et vel  $p = \frac{r}{4q} \sqrt{2rr - 8qq}$  vel  $p = \frac{r}{4q} \sqrt{8qq - 2rr}$  Quia vero ob  $y = 2qq - rr$  esse oportet  $2qq > rr$ , prior valor erit inutilis, habebimusque

$$p = \frac{r}{4q} \sqrt{8qq - 2rr}; \quad x = pp; \quad y = 2qq - rr;$$

$$\text{et } \sqrt{4xx + yy} = 2pp - 2qq$$

atque ut ante  $z = x + \frac{y(p-q)^2}{rr}$ . Erit ergo

$$\text{I cathetus} = \frac{2x}{z}; \quad \text{II cath.} = \frac{y}{z}; \quad \text{hypot.} = \frac{\sqrt{4xx + yy}}{z}$$

Nunc ergo huc devenimus, ut  $8qq - 2rr$  reddatur quadratum: fit eius radix  $= \frac{c}{a}(2q + r)$  eritque  $4q - 2r = \frac{c}{a}(2q + r)$  seu  $4ddq - 2ddr = 2ccq + ccr$ , hincque  $q = cc + 2dd$  et  $r = 4dd - 2cc$ ;  $2q + r = 8dd$  atque  $\sqrt{8qq - 2rr} = 8cd$ , hincque  $p = \frac{4cd(2dd - cc)}{2dd + cc}$  Quare in integris multiplicando per  $2dd + cc$  fiet

$$\left. \begin{array}{l} p = 4cd(2dd - cc) \\ q = (2dd + cc)^2 \\ r = 2(2dd - cc)(2dd + cc) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = pp \\ y = 2qq - rr \\ \sqrt{4xx + yy} = 2pp - 2qq \\ z = x + \frac{y(p-q)^2}{rr} \end{array}$$

## Exemplum. I.

§. 15. Sit  $c = 1$ ;  $d = 1$ , erit:

$$p =$$



$$p = 4; x = 16$$

$$q = 9; y = 126 \text{ et } z = 16 + \frac{216 \cdot 15}{36} = \frac{207}{2} = \frac{9 \cdot 23}{2}$$

$$r = 6; \sqrt{(4xx + yy)} = 130$$

$$\text{I cath. } \frac{64}{207}; \text{ II cath. } = \frac{252}{207}; \text{ III hypot. } = \frac{260}{207}$$

$$\text{Area vero erit } = \frac{64 \cdot 126}{207 \cdot 207} = \frac{64 \cdot 14}{9 \cdot 23^2}; \text{ sicque fiet}$$

$$\text{I. cath. — area } = \frac{64}{9 \cdot 23^2} (23 - 14) = \frac{64}{23^2} = \left(\frac{8}{23}\right)^2$$

$$\text{II. cath. — area } = \frac{252 \cdot 27 - 64 \cdot 14}{9 \cdot 23^2} = \frac{28 \cdot 175}{9 \cdot 23^2} = \frac{4 \cdot 7^2 \cdot 5^2}{9 \cdot 23^2} = \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 23}\right)^2$$

Hocque exemplum sine dubio in numeris minimis existit, uti deinceps ostendam.

### Exemplum. 2.

§. 16. Quia debet esse  $2qq > rr$ , oportet ut sit  $\frac{c}{d} > 2 - \sqrt{2}$ ; nihilque refert, sine sit  $2dd > cc$  sine minus, quia nihil obstat, quo minus  $p, q, r$ , esse queant numeri negativi.

Sit igitur  $d = 2; c = 3$ ; erit  $2dd - cc = -1$ ;  $2dd + cc = 17$  atque

$$\begin{array}{l|l} p = -24. & 1 = -24 \\ q = 17. & 17 = 289 \\ r = -2. & 17 = -34 \\ \hline & z = \frac{50983}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 576 \\ y = 2 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 17^2 \\ \sqrt{(4xx + yy)} = 2 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 313 \end{array}$$

$$\text{I. cath. } = \frac{2704}{90983}; \text{ II. cath. } = \frac{28 \cdot 41 \cdot 17^2}{90983}; \text{ III. hyp. } = \frac{4 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 313}{90983}$$

§. 17. In his omnibus exemplis notari meretur, perinde esse, sine litterarum  $c$  et  $d$  valores capiantur affirmativi, sine negativi, inde enim tantum valores  $p$ , vel  $q$ , vel  $r$  procedunt negativi; neque propterea valores  $x$  et

58 SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

$y$  alterantur. Verum valor ipsius  $z$  variationem subit ex quo pro  $z$  semper duplex valor assignari poterit, alter qui iam est exhibitus  $z = x + \frac{y(p-q)^2}{rr}$  alter vero  $z = x + \frac{y(p+q)^2}{rr}$ : sicque ob duplicem valorem ipsius  $z$  singula exempla allata duplicabuntur.

§. 18. Huiusmodi solutiones particulares plures adhuc elicere licet, dum aliae idoneae quantitates pro radice quadrata huius formae  $4p^4 + 4q^4 - 4qqrr + r^4$  assumuntur. Veluti si haec radix ponatur  $rr + 2qq + 2pp$ , obtinebitur haec aequatio  $-4qqrr = 4qqrr + 4pp(2qq + rr)$ , seu  $pp(2qq + rr) = +2qqrr$ ; vnde patet signum inferius valere, esseque  $\sqrt{(4xx + yy)} = rr + 2qq - 2pp$ , existente vel  $p = \frac{2qr}{\sqrt{2qq+rr}}$  vel  $q = \frac{pr}{\sqrt{2(rr-pp)}}$  quae formulae iam facile rationales redduntur. Hic ergo si ponatur  $r = 3$ ,  $p = 1$ , erit  $q = \frac{3}{4}$ , et in integris

$$\begin{array}{l|l} p = 4 & x = 16 \text{ qui casus ob } y \text{ negativum} \\ q = 3 & y = -126 \text{ non conuenit quaestioni} \\ r = 12 & \sqrt{(4xx + yy)} = 130 \end{array}$$

§. 19. Quoniam cardo quaestionis in hoc versatur, ut haec expressio reddatur quadratum,  $4p^4 + (2qq - rr)^2$ , potest hoc generaliter ita effici, ut eius radix ponatur  $= 2qq - rr + \frac{2m}{n} pp$ , vnde fiet  $pp = \frac{m}{n} (2qq - rr) + \frac{nm}{n} pp$  seu  $(nn - mm)pp = mn(2qq - rr)$ , et  $p = \sqrt{\frac{nm(2qq - rr)}{nn - mm}}$   $= mn \sqrt{\frac{2qq - rr}{mn(nn - mm)}}$ , cui conditioni satisfiet eiusmodi numeros pro  $m$  et  $n$  quaerendo, ut fit  $mn(nn - mm)$  numerus huius formae  $2ff - gg$ . Verum haec solutio facilius obtinetur ex ipsa praeparatione ad solutionem tradita, quae, si recte tractetur, omnes solutiones non solum

in se complectitur; sed etiam solutiones in minoribus numeris omnes commode exhibet. Eam data opera euoluam.

Solutio generalis.

§. 20. Assumtis cathetis trianguli quaesiti  $\frac{z^2}{z}$  et  $\frac{y}{x}$  ponatur statim, ut anguli recti ratio habeatur:

$x = ab$ ;  $y = aa - bb$ ; eritque trianguli

I. cath.  $= \frac{zab}{z}$ ; II. cath.  $= \frac{aa - bb}{z}$ . hypot.  $= \frac{aa + bb}{z}$

et area huius trianguli erit  $= \frac{ab(aa - bb)}{z^2}$

Inuenimus autem primo (§. 4.)

$$z = \frac{2qqxx + qqxy - 2pqxy}{2qqx - ppy}$$

seu  $z = x + \frac{xy(p - q)^2}{2qqx - ppy}$

Vel, quia  $q$  tam negative quam affirmative accipere licet, erit

$$z = x + \frac{xy(p + q)^2}{2qqx - ppy}$$

existente  $x = ab$  et  $y = aa - bb$ .

§. 21. Tum vero (§. 5.) hanc quantitatum  $x$  et  $y$  indolem inuenimus, ut sit  $2qqxx - ppxy = rrxx$ , unde fit

$$z = x + \frac{y(p \pm q)^2}{rr} = ab + \frac{(aa - bb)(p \pm q)^2}{rr}$$

Nihil aliud ergo efficiendum restat, nisi ut haec aequatio  $2qqxx - ppxy = rrxx$ , seu haec:

$$xy = \frac{x^2}{p^2} (2qq - rr) \text{ conficiatur.}$$

Vbi cum sit  $xy = ab(aa - bb)$ , eiusmodi numeros pro  $a$  et  $b$  inuestigari oportet, ut fiat  $ab(aa - bb)$  numerus huius formae  $2ff - gg$ , seu  $(2ff - gg)bb$ .

## 60 SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

§. 22. Ponamus igitur pro  $a$  et  $b$  iam huiusmodi valores esse erutos, vt fit

$$ab(aa-bb) = (2ff - gg)bb$$

Cum igitur ob  $x = ab$  fit:

$$(2ff - gg)bb \frac{abb}{pp} = (2qq - rr)$$

hinc statim sponte se prodit

$$\frac{abq}{p} = fb \text{ et } \frac{abr}{p} = gb$$

fit ergo  $p = ab$  erit  $q = fb$  et  $r = gb$

$$\text{atque } z = ab + \frac{(aa-bb)(ab+fb)^2}{ggbb}$$

Eruntque trianguli rectanguli quaesiti latera:

$$\text{I. cath.} = \frac{zab}{z} = \frac{2abggb}{2abggb + (aa-bb)(ab+fb)^2}$$

$$\text{II. cath.} = \frac{aa-bb}{z} = \frac{(aa-bb)ggb}{2abggb + (aa-bb)(ab+fb)^2}$$

$$\text{III. hypot.} = \frac{aa+bb}{z} = \frac{(aa+bb)ggb}{2abggb + (aa-bb)(ab+fb)^2}$$

§. 23. Possunt etiam ex huiusmodi valoribus ipsarum  $a$  et  $b$  quibusuis innumerabilia triangula rectangula, quae quaesito satisfaciant, erui. Posito enim  $p = ab$ , si fit  $ab(aa-bb) = (2ff - gg)bb$ , erit

$$(ff - gg)bb = 2q - rr$$

$$\text{seu } 2(ffbb - qq) = ggbb - rr$$

$$\text{Ponitur } 2(fb+q) \frac{m}{n} (gb+r) \text{ eritque } fb - q = \frac{n}{m} (gb - r)$$

et hinc reperietur:

$$(2ff$$

$$p = \frac{2mngb - (2nn + mm)fb}{2nn + mm}$$

$$q = \frac{(2nn + mm)gb - 4mnfb}{2nn - mm}$$

Vel in numeris integris erit

$$p = (2nn - mm)ab$$

$$q = 2mngb - (2nn + mm)fb$$

$$r = (2nn + mm)gb - 4mnfb$$

§. 24. Inuentis sic valoribus his  $p$ ,  $q$ , et  $r$ , erit

$$s = \frac{abrr + (aa - bb)(p + q)^2}{rf}$$

atque trianguli quaesiti latera erunt:

I. cath.  $= \frac{ab}{2}$ , II. cath.  $= \frac{aa - bb}{2}$ , et III. hyp.  $= \frac{aa + bb}{2}$

vnde pro singulis idoneis valoribus ipsarum  $a$  et  $b$ , vt sit  $ab(aa - bb) = (2ff - gg)hb$ , ob  $m$  et  $r$  numeros pro arbitrio assumendos, innumerabilia triangula exhiberi poterunt.

§. 25. Quoniam igitur totum negotium huc redit, vt pro  $a$  et  $b$  eiusmodi numeri assumantur, vt productum  $ab(aa - bb)$  siue  $ab(a + b)(a - b)$  fiat numerus huius formae  $(2ff - gg)hb$ . Quo hoc facilius effici possit, indolem numerorum, qui in hac forma generali  $(2ff - gg)hb$  seu hac  $2tt - uu$  continentur, attentius considerari conueniet. Ac primo quidem perspicuum est, in forma  $2tt -$

## §. 25. SOLVITIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

— $uu$  contineri omnes numeros quadratos, quippe qui procedunt, si  $u=t$ ; tum vero etiam in hac forma continentur omnes numeri quadrati duplicati, ponendo  $u=0$ . Praeterea vero infiniti alii occurrunt numeri, qui vsque ad 200 sunt sequentes:

1, 2, 4, 7, 8, 9, 14, 16, 17, 18, 23, 25, 28, 31, 32, 34, 36, 41, 46, 47, 49, 50, 56, 62, 63, 64, 68, 71, 72, 73, 79, 81, 82, 89, 92, 94, 97, 98, 100, 103, 112, 113, 119, 121, 124, 126, 127, 128, 136, 137, 142, 144, 146, 151, 153, 158, 161, 162, 164, 167, 169, 175, 178, 184, 188, 191, 193, 194, 196, 199, 200.

§. 26. Si numeri primi considerentur, qui occurrunt, ii non solum omnes in hac forma  $8m + 1$  continentur, sed etiam vicissim omnes numeri primi in hac gemina forma  $8m + 1$  contenti ibi occurrunt, ideoque in forma  $2tt - uu$  comprehenduntur. Praeterea vero horum numerorum primorum dupla adfunt, item eorum producta, tam per quosuis numeros quadratos, quam per se ipsos; nec non horum productorum dupla. Qua proprietate animadverta non difficile erit hos numeros, quo vsque libuerit continuare.

§. 27. Hinc porro colligitur numeros non primos in forma  $2tt - uu$  contentos alios diuisores, qui quidem inter se sint primi, non admittere, nisi qui ipsi sint numeri in eadem forma  $2tt - uu$  contenti. Quare cum productum  $ab(a+b)(a-b)$  esse debeat numerus formae  $2tt$

— $uu$ ,

$2tt-uu$ , hique factores  $a, b, a+b, a-b$ , sint vel primi inter se vel ad summum binarium pro communi diuisore habeant., qui ipsi in forma  $2tt-uu$  continetur, necesse est, vt hi singuli factores  $a, b, a+b, a-b$  sint numeri eiusdem formae  $2tt-uu$ . Quo cognito ex tabula tradita non erit difficile idoneos valores pro  $a$  et  $b$  excerpere, vt non solum  $a$  et  $b$  sed etiam  $a+b$  et  $a-b$  in eadem tabula existant.

§. 28. Quod si autem  $a, b$ , et  $a+b, a-b$  singuli sint numeri formae  $2tt-uu$ , tum quoque eorum productum  $ab(a+b)(a-b)$  in eadem forma continebitur, quod generatim ita ostendi potest: sint propositi duo numeri huius formae, velut  $2aa-εε$  et  $2γγ-δδ$  erit eorum productum  $(2aa-εε)(2γγ-δδ) = (2aγ + εδ)^2 - 2(εγ + αδ)^2 = 2(2aγ + εγ + αδ + εδ)^2 - (2aγ + 2εγ + 2αδ + εδ)^2$ . Est enim generaliter

$$xx-2yy = 2(x+y)^2 - (x+2y)^2$$

ita vt hae duae formae  $2tt-uu$  et  $tt-2uu$  inter se congruant. Cum igitur productum ex duobus numeris formae  $2tt-uu$  facile ad eandem formam reuocetur, etiam si quocumque numeri huius formae in se inuicem multiplicentur, eorum productum in eadem forma comprehendendi reperietur

§. 29. Tribuatur ergo primo ipsi  $b$  valor quidam ex tabula numerorum allata (§. 25), et in eadem tabula facile dispicietur, vtum insint tres numeri  $a-b, a, a+b$ , qui differant illo numero  $b$ . Verum hanc tabulam inspicienti mox patet pro  $b$  vel numeros impares, vel per 88 diuisi-

#### 64 SOLVITIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

divisibiles tantum assumi posse, siquidem  $a$  et  $b$  numeri debent esse inter se primi. Huiusmodi igitur valoribus pro  $b$  substitutis, pro  $a$  sequentes prodibunt valores

$b$	valores ipsius $a$
1	8, 17, 63, 72, 127,
7	9, 16, 25, 144,
8	9, 17, 71, 81, 89, 161,
9	16, 23, 25, 32, 41, 73, 103, 112, 128, 137, 184,
16	25, 47, 63, 97, 137, 153,
17	64, 81, 144, 161,
23	41, 121, 144,
25	56, 72, 119, 128, 137, 144, 153, 169,
31	32, 63, 72, 81, 113, 144,
32	41, 49, 81, 121,
41	72, 103, 112, 153,
47	56, 72, 79, 81, 97, 128, 144,
49	72, 113, 146,
56	81, 97, 137,
63	64, 79, 136,
71	73,
72	79, 89, 97, 103, 119, 121,
73	89,
79	—
81	97, 112, 113

Ex-



Exemplum. 1.

§. 30. Quo usus huius tabulae ad solutionem problematis clarius appareat, sit  $b=1$ ;  $a=8$ , eritque:

$$ab=8; aa-bb=63; ab(aa-bb)=8.9.7=4.9.$$

14. Fiet ergo  $4.9.14=bb(2ff-gg)$ , ideoque  $b=6$  et  $2ff-gg=14$ , unde colligitur  $f=3$ ,  $g=2$ , et ex §. 23 obtinebimus.

$p=8(2mm-11mm); q=24mm-18(2m+mm); r=12(2m+mm)-72mm$   
qui sublato communi diuifore 2, erit

$$p=8nn-4mm$$

$$q=12mn-18nn-9mm; r=12nn+6mm-36mn$$

$$p+q=12mn-10nn-13mm$$

$$-p+q=12mn-26nn-5mm$$

$$\text{et } z=8+\frac{63(p+q)^2}{rr}$$

Hinc ergo innumerabiles prodeunt valores ipsius  $z$ , ex quorum quouis conficitur triangulum rectangulum.

I. cath.  $=\frac{16}{z}$ ; II. cath.  $=\frac{63}{z}$ ; III. hypot.  $=\frac{65}{z}$

Casusque omnium simplicissimus oritur ponendo  $n=0$  et

$m=1$ , unde fit  $r=6$ ,  $p+q=\frac{5}{15}$ , et  $z=8+\frac{7}{4}\cdot\frac{25}{169}$

ergo vel  $z=\frac{207}{4}$  vel  $z=\frac{1215}{4}$ , quorum valorum prior est pro casu simplicissimo iam §. 15. exposito.

Exemplum. 2.

§. 31. Cum pro quibusque valoribus litterarum  $a$  et  $b$  infiniti exhiberi possint valores idonei ipsius  $z$ , quorum inuentio nulla difficultate laborat per ea, quae §. §. 23 & 24 sunt tradita, hic tantum valorem §. 22 datum,  $z=$

66 SOLVTIO PROBLEMATIS DIFFICILLIMI

$ab + \frac{(aa-bb)(ab+fb)^2}{ggbb}$  adhibere sufficiet, ob  $ab(aa-bb) = (2ff-gg)bb$ ; unde erunt trianguli catheti, I =  $\frac{2ab}{z}$ ; II =  $\frac{aa-bb}{z}$  et hypoth. =  $\frac{aa+bb}{z}$ . Sit igitur  $b=7$  et  $a=9$  erit  $ab=63$ ;  $aa-bb=32$ , et  $ab(aa-bb) = 63 \cdot 32 = 16 \cdot 9 \cdot 14 = (2ff-gg)bb$ , unde fiet  $b=12$ ;  $f=3$  et  $g=2$ ; ergo  $z = 63 + \frac{32(63+16)^2}{2 \cdot 24}$  seu  $z = 63 + \frac{9(27+4)^2}{2}$ ; ideoque vel  $z = \frac{207}{2}$  vel  $z = \frac{1215}{2}$  consequenter triangulum quaesitum erit vt ante:

I cath. =  $\frac{126}{207}$ ; II cath. =  $\frac{64}{207}$  III hypot. =  $\frac{260}{207}$ .

Exemplum. 3.

§. 32. Quo vsus tabulae §. 29. exhibitae clarius percipiatur, sumamus pro  $a$  et  $b$  maiores numeros, fitque  $b=41$  et  $a=112$ , vt fit  $ab=7 \cdot 16 \cdot 41$ ;  $aa-bb=71 \cdot 9 \cdot 17$  erit  $ab(aa-bb) = 16 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 71 = (2ff-gg)bb$ , et  $b=12$  atque  $7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 71 = 2ff-gg$ . At est  $7=3^2-2 \cdot 1^2$ ;  $17=2 \cdot 3^2-1^2$ ;  $41=7^2-2 \cdot 2^2$ ;  $71=2 \cdot 6^2-1^2$ , unde fit  $7 \cdot 41 = (21+2 \cdot 2)^2 - 2(6+7)^2 = 17^2 - 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 16^2 - 15^2$ ;  $17 \cdot 71 = (2 \cdot 18+1)^2 - 2(6+3)^2 = 35^2 - 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 32^2 - 29^2$  Atque  $7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 71 = (17 \cdot 35 - 2 \cdot 3)^2 - 2(51-35)^2 = 589^2 - 2 \cdot 16^2$ ; ergo  $7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 71 = 2 \cdot 573^2 - 557^2$ . Haec autem reductio ad formam  $211-uu$  infinitis aliis modis fieri potest, quorum simplicissimus est hic:

$7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 71 = 2 \cdot 417^2 - 37^2$  vt fit  $f=417$  et  $g=37$ .

Ergo

Ergo ob  $h=12$  erit  $fb=12.3.139$  et  $gb=12.37$ .

$$\text{ideoque } z = 16.7.41 + \frac{5.17.71(16.7.41 + 4.5.139)^2}{16.5.37.37}$$

$$\text{seu } z = 16.7.41 + \frac{17.71(4.7.41 - 5.139)^2}{37.37}$$

$$\text{vel } z = 16.7.41 + \frac{17.71.103.103}{37.37} = \frac{1909.1511}{13.69}$$

Ex quo obtinebitur triangulum rectangulum :

$$\text{I. cath.} = \frac{9184.1369}{19091511}$$

$$\text{II. cath.} = \frac{10863.1369}{19091511}$$

$$\text{III. hyp.} = \frac{14225.1369}{19091511}$$