



# SUR LE POINT DE REBROUSSEMENT

DE LA SECONDE ESPECE

de Mr. le Marquis de l'HÔPITAL,

PAR M. EULER.

**J**'ai déjà fait voir dans quelques pieces, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Academie Royale, que même la Geometrie n'est pas exemte des controverses, & des contradictions apparentes, quoiqu'on soutienne fort souvent le contraire. Mais j'ai aussi fait remarquer ce grand avantage de la Geometrie, que ces difficultés peuvent être applanies, en sorte qu'il n'y reste plus le moindre doute ; pourvu qu'on examine bien à fond toutes les circonstances du sujet, sur lequel les controverses roulent. Dans ce discours je m'en vais entretenir l'Assemblée encore sur une controverse de la pure Geometrie, qui regarde une certaine espece de points de rebroussement, semblables à un bec d'oiseau, & formés de deux branches d'une courbe, qui tournent leur concavité du même côté, au lieu que les deux branches d'une courbes, qui forment des points de rebroussement ordinaires, sont courbées en divers sens.

§. 2. Mr. le Marquis de l'Hopital, dans son Analyse des infiniment petits, nomme ces points de rebroussement à bec d'oiseau, *de la seconde espece*, & il soutient qu'il y a une infinité de courbes tant algebriques que transcendantes, qui sont pourvus d'un tel point de rebroussement. Il prouve cela par la Theorie de l'evaluation en cette maniere. Soit ABC une courbe quelconque, qui ait en B un point

Planches  
II. & III.

Fig 1.



d'inflexion, & qu'on plie autour de cette courbe un fil, qu'on developpe ensuite en le tirant au point A successivement, jusqu'à ce qu'il vienne se détacher du point d'inflexion B, & l'extrémité A décrira par cette évolution l'arc AD, auquel le fil détaché BD sera perpendiculaire & son rayon de courbure, comme on fait par la théorie de l'évolution. Mais si l'on continue cette évolution au delà du point B, le fil BD rebrousse-ra chemin, & venant dans la situation MN, son extrémité décrira l'arc DN, qui sera par conséquent la continuation de l'arc AD. Or ces deux arcs AD, DN, qui au point D forment un angle infiniment petit, tournent leur concavité du même côté. Donc cette courbe ADN décrite par l'évolution de la ligne ABC aura au point D un point de rebroussement de la seconde espèce; comme le Marquis de l'Hopital l'appelle.

§. 3. Quelque solide que paroisse cette démonstration, M. Guà de Malves dans son traité : *Usage de l'Analyse de Des-Cartes pour decouvrir les propriétés des lignes geometriques de tous les Ordres* : est d'un sentiment tout à fait contraire, & soutient qu'il n'y a aucune courbe, dont une branche s'étant étendue de A & D, puisse subitement rebrousser chemin, & venir dans la situation DN, sans qu'elle change en même tems de courbure, ou sans qu'elle devienne convexe, ayant auparavant été concave en même sens. Pour l'épreuve que M. le Marquis de l'Hopital donne, il ne nie pas, que la courbe formée de cette façon n'ait la figure représentée : mais il prétend, que la branche DN n'est pas la continuation de la branche AD, bien qu'elle soit décrite par le même mouvement d'évolution. Il est donc obligé de dire, qu'il n'est pas permis de juger de la continuité d'une courbe, par la continuité de sa description. Cette exception paroitra sans doute fort étrange, & j'avouë que, si elle étoit fondée, elle renverseroit la plupart des marques, par lesquelles nous croyons pouvoir avec assurance juger de la figure des lignes courbes.

§. 4. M. Guà ne reconnoit que l'équation analytique, de laquelle on puisse tirer une exacte connoissance de la figure d'une ligne courbe,



be, du nombre de ses branches & de leur continuité. Il croit avoir démontré dans son Ouvrage, que toutes les fois qu'il se trouve un tel point de rebroussement dans une ligne courbe, elle est encore défectueuse: & que si l'on en acheve la description suivant l'équation qui exprime sa nature, la figure provient toujours telle, que la 2 fig. représente: c'est à dire, que le bec d'oiseau deviendra doublé  $ADM$  &  $aDn$ , & que ce n'est plus l'arc  $DN$ , qui soit la continuation de l'arc  $AD$ , mais l'arc  $Da$ ; de sorte que le point  $D$  ne soit que l'interfection de deux branches,  $ADa$  &  $NDn$ , qui se coupent en  $D$  sous un angle infiniment petit, & qui tournent leur concavité du même coté. On pourroit aussi dire, que ce sont deux branches d'une même ligne courbe  $ADn$  &  $NDa$ , qui se touchent ensemble au point  $D$ , & alors il seroit incertain, si l'arc  $Dn$  ou l'arc  $Da$  seroit la continuation de l'arc  $AD$ .

Fig. 2.

§. 5. Pour prouver cette these, il tire par le point  $D$  la tangente  $EDe$ , qu'il prend pour l'axe, sur lequel il pose l'abscisse  $DP = x$  & l'appliquée  $PM = y$ . Maintenant quelle que soit l'équation pour la courbe, si l'on prend l'abscisse  $x$  fort petite, la valeur de  $y$  se pourra toujours exprimer par une serie convergente de cette forme:

Fig. 3.

$$y = \frac{x x}{2a} \pm Ax^m \pm Bx^n \pm Cx^k \text{ \&c.}$$

où les exposans  $m, n, k$  &c. croissent de plus en plus, & sont des nombres, ou entiers, ou rompus; & s'il y en a des fractions, dont le dénominateur est un nombre pair, les valeurs de ces termes seront ambiguës, & ce sera le cas où plusieurs branches de la courbe viennent toucher l'axe  $Ee$  au point  $D$ . Or le premier terme où la plus basse puissance de  $x$  sera  $\frac{x x}{2a}$ , si le rayon de la courbure en  $D$  est supposé  $= a$ .

§. 6. Cela remarqué il suppose l'abscisse  $x$  infiniment petite pour connoitre le train de la courbe au point  $D$ , & dans ce cas, dit-il, évanouïront tous les termes  $Ax^m, Bx^n, Cx^k$  &c. par rapport au



premier  $\frac{x^2}{2a}$ , puisque leurs exposans sont plus grands que 2; de for-

te que pour la courbe au point D il ne reste que l'équation  $y = \frac{x^2}{2a}$ .

qui en exprimera le train ou la route, que la courbe suit en deçà & en delà du point D, pourvu que l'abscisse  $x$  demeure infiniment petite.

Or dans ce cas il est clair, que l'équation  $y = \frac{x^2}{2a}$  reste la même, soit

qu'on prenne  $x$  affirmative ou negative: & partant il conclut, que la courbe aura toujours auprès du point D la forme MD  $m$ ; & que par conséquent l'arc AD doit prendre sa continuation vers D  $m$ . Cela doit s'entendre, lorsque la courbure en D est finie, ce qui arrive dans notre cas; car si la courbure étoit, ou infinie, ou infiniment petite, ce raisonnement perdrait sa force.

Fig. 2.

§. 7. Ce sont les raisons dont M. Guà de Malves combat l'idée de M. le Marquis de l'Hopital sur les points de rebroussement de la seconde espece; & si l'on pese les argumens de part & d'autre, on les trouvera si forts, qu'il paroît presque inévitable de reconnoître une contradiction entre la description faite par l'évolution, & l'équation de la courbe; l'une nous montrant très clairement que la continuation de l'arc AD doit passer en rebroussant par DN; tandis que l'autre nous persuade, que cette continuation doit absolument se faire par D  $n$  ou Da. Néanmoins je prouverai par des raisons incontestables, qu'il n'y a pas ici la moindre dissension entre la description mécanique & le calcul; mais qu'il s'est glissé dans le raisonnement de M. Guà, tout solide qu'il puisse paroître d'ailleurs, une petite inadvertence; qui étant remarquée, cette contradiction disparaîtra d'abord entièrement.

§. 8. Car quoiqu'il soit vrai, que dans une telle équation  $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \&c.$  où les exposans  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  &c. sont des nombres affirmatifs allant en croissant, on peut négliger par rapport au premier terme les suivans, lorsqu'on suppose  $x$  infini-



infiniment petit, tant affirmatif que négatif, & que dans ce cas on n'a qu'à considérer cette équation  $y = Ax^a$ ; néanmoins il faut bien remarquer, que cette omission des termes ne peut avoir lieu, qu'aux cas, où ces termes ont tous des valeurs réelles, quoiqu'elles soient infiniment petites. Car si un seul terme de ceux qu'on rejette étoit imaginaire, toute l'expression, & par conséquent la valeur de  $y$  le seroit aussi: donc on auroit grand tort, si l'on mettoit  $y = Ax^a$  ou à une quantité réelle. Et partant la règle reçue, par laquelle on fait évanouir par rapport au premier terme les suivans, demande cette restriction, que les termes à omettre ne soient pas imaginaires.

§. 9. Mr. Guà de Malves n'a pas pris garde à cette limitation absolument nécessaire, & c'est de là, que sa prétendue contradiction dans le point de rebroussement de la seconde espèce a tiré son origine. Pour éclaircir cela mieux, soit proposée cette équation  $y = x + xx\sqrt{-1}$ ; & on verra d'abord que la valeur de  $y$  est toujours imaginaire, excepté le seul cas où  $x = 0$ , auquel devient aussi  $y = 0$ . Ainsi cette équation ne désigne qu'un seul point situé sur l'axe au commencement des abscisses  $x$ . Mais si nous voulions juger de la courbe exprimée par cette équation, suivant la méthode de Mr. Guà, en supposant l'abscisse  $x$  infiniment petite, nous n'aurions qu'à considérer cette équation  $y = x$ , & nous en concluons, que cette courbe se confond au commencement avec une droite exprimée par  $y = x$ ; ce qui seroit pourtant contraire à la vérité. Cependant cette conclusion seroit bien juste, si le coefficient de  $xx$ , au lieu d'être imaginaire, eût été une quantité réelle quelconque.

§. 10. Or il peut arriver, qu'une branche de la courbe évanouît, ou devient imaginaire, quand même aucun terme de l'équation n'est affecté ouvertement par une quantité imaginaire. Car considérons la courbe dont l'équation est  $y = x + x\sqrt{x}$ , & supposons  $x$  infiniment petit tant affirmatif, que négatif. Dans le premier cas le terme  $x\sqrt{x}$  étant réel, & infiniment plus petit que  $x$ , on le pourra négliger pour  
avoir



avoir  $y = x$ , qui représente le commencement de la courbe vers la région des abscisses positives. Mais dès qu'on prend  $x$  négatif, quoiqu'infiniment petit, le terme  $x\sqrt{x}$  devenant imaginaire, rendra aussi la valeur de  $y$  imaginaire; & partant dans ce cas il ne sera plus permis d'envisager l'équation  $y = x$  au lieu de  $y = x + x\sqrt{x}$ . Cette courbe ne s'étend donc pas dans la région des abscisses négatives, mais elle aura deux branches vers la région des affirmatives selon la double valeur de  $\pm x\sqrt{x}$ , qui forment un point de rebroussement de la première espèce. Il est clair que c'est la parabole cubique seconde.

§. 11. Un tel point de rebroussement ordinaire se trouvera

aussi dans cette équation plus générale  $y = ax + \epsilon x^{1 + \frac{m}{n}}$ , toutes les fois que  $m$  sera un nombre impair, &  $n$  pair affirmatif. Car

dans ce cas la valeur du terme  $\epsilon x^{1 + \frac{m}{n}}$  sera ambiguë, & on aura

Fig. 4.

$y = ax \pm \epsilon x^{1 + \frac{m}{n}}$ . Pour trouver la forme de cette courbe, on n'a qu'à tirer la droite  $AL$ , que prenant l'abscisse  $AP = x$ , l'appliquée  $PL$  devienne  $= ax$ . Ensuite qu'on prenne sur  $PL$  pro-

longée  $LM = LN = \epsilon x^{1 + \frac{m}{n}}$ , qui sera infiniment plus petit que  $x$ , si  $x$  est infiniment petit, & la courbe passera par les points  $M$  &  $N$ , qui se réunissent au point  $A$ . Donc la courbe aura deux branches  $AM$  &  $AN$ , dont chacune est convexe vers  $AL$ , & qui formeront par conséquent un point de rebroussement  $MAN$  de la première espèce: car cette courbe ne s'étendra pas dans la région des abscisses négatives, puisque mettant  $x$  négative, l'appliquée  $y$  devient imaginaire.

§. 12. La même chose peut arriver dans des courbes, qui semblent à M. Guà ne pouvoir admettre un point de rebroussement de la seconde espèce. On n'a qu'à considérer cette équation  $y = axx \pm \epsilon xx\sqrt{x}$ , laquelle devient imaginaire dès qu'on met  $x$  négatif, & partant



partant il est sur, que cette courbe n'a aucune partie dans la région des abscisses negatives. Pour connoître la figure de cette courbe, on n'a qu'à construire sur l'axe AP une parabole AL, qui répond à l'équation  $y = axx$ , & nommant  $AP = x$  on aura  $PL = axx$ . Qu'on prenne ensuite  $LM = LN = \sqrt[3]{\beta x x \sqrt{x}}$ , & les points M & N seront dans la courbe cherchée; & puisqu'en supposant  $x$  infiniment petit, les parties LM & LN sont infiniment plus petites que PL, l'une & l'autre branche AM & AN se confondra au commencement A avec la parabole AL, & aura la même courbure, & tournera par conséquent sa convexité vers l'axe AP; de sorte que ces deux branches MA & NA formeront en A un vrai point de rebroussement de la seconde espece.

Fig. 5.

§. 13. De là il est clair, que quoiqu'on suppose l'abscisse  $x$  infiniment petite, il n'est pas permis de négliger le terme  $\sqrt[3]{\beta x x \sqrt{x}}$  par rapport à  $axx$ , que lorsque  $x$  est prise affirmative; & qu'au cas, que  $x$  est prise negative, l'équation  $y = axx$  ne pourra plus être employée pour  $y = axx \pm \sqrt[3]{\beta x x \sqrt{x}}$ ; puisque celle-là montreroit une valeur réelle de  $y$ , qui est pourtant, à cause du second terme, imaginaire. Par conséquent le raisonnement de M. Guà n'a plus lieu dans ce cas, quand il prétend, que l'équation  $y = axx$  puisse être employée pour connoître la forme de la courbe près du point A; d'où il s'ensuivroit sans doute, que la courbe s'étendroit dans la region des abscisses negatives: car l'autre terme négligé  $\sqrt[3]{\beta x x \sqrt{x}}$  nous fait connoître, que les appliquées  $y$  deviennent alors imaginaires. Il n'est donc pas permis de négliger ce terme par rapport à  $axx$ , que tandis que sa valeur ne devient pas imaginaire, quoiqu'on prenne  $x$  infiniment petite.

§. 14. Ayant ainsi trouvé une courbe, qui a un point de rebroussement de la seconde espece, il sera facile de s'imaginer une infinité d'autres courbes; dans lesquelles il se trouve un pareil point de rebroussement. Car à l'équation  $y = axx \pm \sqrt[3]{\beta x x \sqrt{x}}$  on pourra ajouter autant de puissances de  $x$  qu'on voudra, pourvu que leurs exposants soient des nombres affirmatifs plus grands que 2; puisque tous ces termes évanouiront également par rapport au premier  $axx$ , pourvu



qu'on suppose  $x$  infiniment petite, mais affirmative. Car pour les valeurs negatives de  $x$  le seul terme  $\beta x x \sqrt{x}$  rend cette hypothese inutile. De plus on pourra encore ajouter ce terme  $x x P$ , pour avoir

$$y = a x x \pm \beta x x \sqrt{x} + x x P$$

si  $P$  marque une fonction quelconque de  $x$ , qui évanouisse en faisant  $x = 0$ .

§. 15. Il est à remarquer, que toutes ces courbes, qui sont contenues dans cette équation generale, auront au point de rebroussement A leur courbure finie, ou le rayon de la développée  $y$  sera fini; tout comme cela arrive dans les courbes, que M. le Marquis de l'Hopital a formées pour démontrer l'existence du point de rebroussement de la seconde espece. Il sera à propos de rapporter ici quelques courbes des plus simples de cette nature.

$$\begin{array}{ll} y = a x x + \beta x x \sqrt{x} & \text{du } 5^{\text{me}} \text{ ordre} \\ y = a x x + \beta x^3 \sqrt{x} & \text{du } 7^{\text{me}} \text{ ordre} \\ y = a x x + \beta x^4 \sqrt{x} & \text{du } 9^{\text{me}} \text{ ordre} \\ y = a x x + \beta x^5 \sqrt{x} & \text{du } 11^{\text{me}} \text{ ordre} \\ & \&c. \end{array}$$

qui toutes ont au commencement où  $x = 0$ , un point de rebroussement de la seconde espece, & le rayon de la développée est dans ce point d'une quantité finie.

§. 16. On peut rendre ces formules encore plus générales sans augmenter le nombre des termes, en employant un autre signe radical, dont l'exposant est un nombre pair, afin que la valeur soit ambiguë: ainsi nous aurons ces équations:

$$\begin{array}{l} y = a x x + \beta x x \sqrt[4]{x} \\ y = a x x + \beta x x \sqrt[4]{x^3} \\ y = a x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x} \\ y = a x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x^5} \\ \quad \&c. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{ou} \\ y = a x x + \beta x x \sqrt[6]{x} \\ y = a x x + \beta x x \sqrt[6]{x^5} \\ y = a x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x} \\ y = a x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x^5} \\ \quad \&c. \end{array} \right.$$

Toutes



Toutes ces formules seront comprises dans cette générale

$y = \alpha x x + \beta x^2 + \frac{m}{n}$ , où  $m$  marque un nombre affirmatif impair, &  $n$  un nombre affirmatif pair quelconque. Le rayon de la développée sera dans toutes ces courbes au point de rebroussement fini.

§. 17. Au lieu du premier terme  $\alpha x x$  on pourra aussi prendre une autre puissance de  $x$  plus haute, & alors le rayon de la développée au point de rebroussement sera infiniment grand, comme dans ces formules :

$$y = \alpha x^3 + \beta x^3 + \frac{m}{n}$$

$$y = \alpha x^4 + \beta x^4 + \frac{m}{n}$$

$$y = \alpha x^5 + \beta x^5 + \frac{m}{n}$$

&c.

ou plus généralement  $y = \alpha x^k + \beta x^k + \frac{m}{n}$ , où  $k$  marque un nombre entier plus grand que 1, & les valeurs de  $m$  &  $n$  demeurent comme dans l'article précédent. Car si  $k$  étoit = 1, le point de rebroussement deviendrait de la première espèce. Il n'est pas aussi nécessaire que  $k$  soit un nombre entier, il peut être un nombre rompu, pourvu que la puissance  $x^k$  n'acquière pas une valeur ambiguë, qui puisse être aussi bien négative qu'affirmative.

§. 18. L'exposant  $k$  peut aussi être un tel nombre rompu moindre que 2, pourvu qu'il soit plus grand que 1, & dans ces cas le rayon de la développée au point A, où se trouve le point de rebroussement de la seconde espèce, deviendra infiniment petit. On pourra même prendre  $k$  plus petit que l'unité, pourvu que la puissance  $x^k$  ne devienne pas ambiguë, ce qui arrive, si  $k$  est une fraction dont le dénominateur est un nombre impair. Mais alors la tangente de la courbe au point de rebroussement A deviendra perpendiculaire à l'axe AP, au

*Fig. 6*



lieu que dans les cas précédens elle tomboit sur l'axe AP même. Dans ces cas il faut remarquer, que le rayon de la développée au point A fera fini si  $k = \frac{1}{2}$ , (cas qui se trouve exclus,); infiniment petit si  $k > \frac{1}{2}$  & infiniment grand si  $k < \frac{1}{2}$ . Ainsi cette équation  $y = a\sqrt[3]{x} + \beta\sqrt[2]{x}$  marquera une telle courbe MAN, qui aura au point A un point de rebroussement de la seconde espece, où le rayon de la développée sera infiniment grand.

§. 19. Il est aussi possible que l'exposant  $k$  soit  $= \frac{1}{2}$ , sans que la puissance  $\alpha x^{\frac{1}{2}}$  devienne ambiguë : l'ambiguïté étant détruite par le terme suivant, comme dans cette équation  $y = a\sqrt{x} + \beta\sqrt{x}\sqrt{x}$ , où le premier terme  $\sqrt{x}$  se trouve dans le second encore après le signe radical, de sorte que si l'on prenoit le premier terme  $\sqrt{x}$  negatif, le second en deviendroit imaginaire. Et en effet puisque  $x$  a dans le second terme plus de dimensions que dans le premier, cette courbe aura au commencement aussi un point de rebroussement de la seconde espece. Or cette courbe appartiendra au quatrième ordre, puisque son équation étant délivrée des radicaux devient

$$y^4 - 2\alpha\alpha xy^2 - 4\alpha\beta\beta xxy + \alpha^4 xx - \beta^4 x^3 = 0$$

qui paroît être la plus simple courbe douée d'un tel point de rebroussement.

§. 20. Car il est assez évident qu'un tel point de rebroussement ne peut pas avoir lieu dans les lignes du troisième ordre : puisqu'il est possible de tirer une ligne droite, par un tel point de rebroussement, qu'elle fasse quatre interseptions, ce qui demande au moins une ligne du quatrième ordre. Or je serai voir bientôt, qu'il y a une infinité de lignes du quatrième ordre, qui ont un tel point de rebroussement, & il sera encore incertain laquelle d'entr'elles pourroit être jugée la plus simple : si l'on ne veut regarder dans ce jugement, que l'équation entre les coordonnées, la décision ne sera plus difficile, dès qu'on considérera l'équation générale du quatrième ordre



dre, qui renferme toutes les courbes de cette nature. Par là il est aisé de juger, que dans le cinquième ordre & les suivants le nombre de telles courbes sera encore infiniment plus grand, de sorte qu'on ne faudroit plus avoir le moindre doute sur l'existence de ce point de rebroussement de la seconde espece de M. le Marquis de l'Hôpital.

§. 21. La dernière formule  $y = \alpha \sqrt{x} + \beta \sqrt{x} \sqrt{x}$  ne diffère des précédentes, qu'en ce qu'ici l'axe AP est perpendiculaire à la courbe, au lieu que dans les précédentes équations elle étoit la tangente même. Car on n'a qu'à changer  $y$  &  $x$  pour avoir  $x = \sqrt{y} + \sqrt{y} \sqrt{y}$ , & prenant les quarrés on aura  $xx = y + 2y\sqrt{y} + y\sqrt{y}$ . Donc si  $x$  &  $y$  sont infiniment petits, on rejettera le dernier terme, & ayant  $y = xx$ , cette valeur substituée dans le terme  $y\sqrt{y}$  donnera  $xx\sqrt{x}$ , de sorte que  $xx = y + xx\sqrt{x}$  ou  $y = xx \pm xx\sqrt{x}$ , qui est une des équations précédentes. De même de l'équation générale  $y = xx^k + \beta x^k + \frac{m}{n}$  (17), changeant les coordonnées  $x$  &  $y$ , on aura  $x = y^k + y^k + \frac{m}{n}$ . Or puisque  $x$  &  $y$  sont supposées infiniment petites, il y aura  $y^k = x$  &  $y = x^{\frac{1}{k}}$ ; donc  $x = y^k + x^{1 + \frac{m}{nk}}$ , &  $y = \sqrt[k]{(x - x^{1 + \frac{m}{nk}})} = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{m+n}{nk}}$  ou  $y = \alpha x^{\frac{1}{k}} + \beta x^{\frac{m+n}{nk}}$ , équation pour une courbe qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece, qui est perpendiculaire à l'axe.

§. 22. De ces formules il est aisé d'en tirer d'autres, qui contiennent des points de rebroussement de cette seconde espece, dont la tangente fasse un angle quelconque oblique avec l'axe AP. Pour commencer des cas les plus simples, soit proposée cette équation  $y =$



- Fig. 7.*  $ax + \beta xx + \gamma xx \sqrt{x}$ , & on verra premierement, que la droite AK fera la tangente de cette courbe au point A, si posant  $AP = x$ , fera  $PK = ax$ . Ensuite qu'on construise la parabole AL de sorte que  $PL = ax + \beta xx$ , & qu'on prenne  $LM = LN = \gamma xx \sqrt{x}$ ; on obtiendra deux branches AM & AN, qui se réunissant en A, y auront pour tangente la droite AK, & leur courbure sera la même, que celle de la parabole AL; de sorte que la convexité de ces deux branches au point A sera tournée vers l'axe AP. Or si le coefficient  $\beta$  est negatif, cette équation  $y = ax - \beta x + \gamma xx \sqrt{x}$  représentera un point de rebroussement MAN, dont la concavité sera tournée vers l'axe AP.
- Fig. 8.*

§. 23. Cette formule peut être renduë plus générale de cette

maniere:  $y = ax + \beta xx + \gamma x^2 + \frac{m}{n}$  en supposant  $m$  un nombre impair &  $n$  un nombre pair: on y pourra encore ajouter autant de puissances de  $x$  qu'on voudra, pourvu que leurs exposants soient plus grands que 2, & dans tous ces cas le rayon de la développée au point de rebroussement sera fini. Or il sera infiniment grand dans cette équation:

$$y = ax + \beta x^k + \gamma x^k + \frac{m}{n}$$

si l'exposant  $k$  est plus grand que 2; mais infiniment petit, si cet exposant  $k$  est moindre que 2, mais pourtant plus grand que 1: ou il est à remarquer, qu'il peut aussi être un nombre rompu, pourvu que la puissance  $x^k$  n'en devienne pas ambiguë.

§. 24. Pour rendre ces formules encore plus générales, soit P une fonction quelconque de  $x$ , qui n'ait aucune ambiguë, laquelle devienne  $= 0$  en supposant  $x = 0$ . Ensuite soit Q une telle fonction ambiguë, qu'elle renferme aussi bien une valeur negative qu'affirmative, ou qui soit  $\pm Q$ , mais qui devienne imaginaire en prenant  $x$  negatif, au moins tandis qu'il est infiniment petit: & de plus que Q évanouisse en faisant  $x = 0$ . Cela posé, il est clair, que cette équation:

$$= y$$



$y = \alpha x + x P (1 \pm Q)$  désignera une courbe, qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece: & cette équation peut être renduë encore plus générale en supposant  $y = \alpha x + x P (1 \pm Q)^n$ ,  $n$  marquant un nombre quelconque tant affirmatif que negatif. La fonction  $P$  pourra aussi être ambigue, pourvu que son ambiguïté soit détruite par la fonction  $Q$ , ce qui arrive si elle renferme  $\sqrt{P}$ , puisqu'alors  $P$  ne peut pas recevoir la valeur negative.

§. 25. On pourroit rendre cette formule encore plus générale en ajoutant à  $y$  des fonctions de  $y$ , qui évanouissent par rapport à  $Px$ , si l'on met  $x$  infiniment petit, mais je ne m'y arrêterai pas, puisque cette formule est déjà suffisante pour trouver une infinité de telles lignes courbes de tous les ordres après le troisieme. Je remarquerai seulement que faisant  $n = -1$ ,  $P = x$  &  $Q = \sqrt{x}$ , on obtient encore une

autre courbe du quatrieme ordre:  $y = \frac{\alpha x x}{1 \pm \beta \sqrt{x}}$ : qui sera comprise

dans cette équation  $(y - \alpha x x)^2 = \beta \beta y y x$ , & qui paroît encore plus simple que la précédente. En changeant les constantes pour remplir l'uniformité, elle sera  $a a y y - 2 a y x x + x^4 = b x y y$ .

§. 26. Par le moyen de ces formules il sera donc aisé de fournir une infinité de lignes courbes, qui auront un tel point de rebroussement de la seconde espece. Mais il n'en sera pas de même de la question inverse, si l'on veut juger, l'équation pour une courbe étant donnée, si cette courbe aura un tel point de rebroussement, ou non? Pour déterminer le point de rebroussement ordinaire, on a coutume de chercher l'endroit, où le differentiel second de l'une des coordonnées, ou évanouit, ou devient infini; puisque dans cet endroit là le rayon de la courbure est toujours, ou infini, ou egal à zero. Mais dans le point de rebroussement de la seconde espece le rayon de la courbure est tantôt fini, tantôt infiniment grand, tantôt infiniment petit; de sorte que ce point n'est pas attaché à une certaine propriété des differentiels seconds.

On



On ne sauroit non plus rien conclure des différentiels du troisième ou de quelqu'ordre plus haut, puisqu'on pourra toujours assigner de tels points de rebroussement, où tous ces différentiels ont des valeurs quelconques.

§. 27. Ne voyant donc aucune methode sûre pour découvrir cette espece de points de rebroussement, par quelque propriété des différentiels, on sera obligé de se tenir à l'analyse des finis, ou de tirer le jugement de l'équation en termes finis de la courbe. Or d'abord il est évident, que ce point de rebroussement est un point double de la courbe, & partant il faut commencer par chercher tous les points doubles qui peuvent se trouver dans la courbe proposée, & ensuite le jugement, si un tel point double est en même tems un point de rebroussement de la seconde espece, ne sera plus difficile. Or pour reconnoître les points doubles on peut faire usage des différentiels; car ayant différentié l'équation proposée entre les coordonnées  $x$  &  $y$ , on supposera séparément égaux à zero, tant les termes qui contiennent les  $d x$ , que les  $d y$ : & les cas, où ces deux équations jointes à l'équation même de la courbe, auront les mêmes racines, montreront tous les points doubles, qui se trouvent dans la courbe proposée.

§. 28. Par cette methode ayant decouvert les points doubles de la courbe proposée, on jugera de chacun, s'il est un point de rebroussement de la seconde espece, ou non, de la maniere suivante. On tirera par le point double à volonté une droite, qu'on regardera comme l'axe, sur lequel on prendra depuis le point double les abscisses, qui soient  $= x$ , & les appliquées  $= y$ , qu'on fera, ou perpendiculaires, ou inclinées sous un angle quelconque à l'axe. Cela fait, l'équation pour la courbe entre  $x$  &  $y$  fera toujours telle, qu'il ne s'y trouvera, ni aucun terme constant, ni les termes où  $x$  &  $y$  n'ont qu'une seule dimension, & partant l'équation, qui résulte, sera toujours comprise dans cette forme générale.

$$0 = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^3 + \epsilon x^2 y + \zeta x y^2 + \eta y^3 + \theta x^4 + \iota x^3 y + \&c.$$

Car



Car toutes les fois que dans l'équation manquent le terme constant & les termes  $x$  &  $y$ , c'est une marque seure, que la courbe aura au commencement, où  $x = 0$  &  $y = 0$ , un point double, ou une interfection de deux branches.

§. 29. Ensuite on supposera  $x$  &  $y$  infiniment petits pour avoir cette équation  $0 = \alpha x x + \beta x y + \gamma y y$ , dont les racines  $y = -\frac{\beta x}{2\gamma} \pm x \sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)}$  marqueront les tangentes des branches, qui s'entrecoupent au commencement. Donc si ce point double est un point de rebroussement, il faut que ces deux tangentes soient les mêmes, ce qui arrive si  $\beta\beta = 4\alpha\gamma$ . Par conséquent s'il n'y a pas  $\beta\beta = 4\alpha\gamma$ , ou si l'équation, en supposant  $x$  &  $y$  infiniment petits, n'aura point deux racines égales, ce sera une marque sure, que le point double n'est pas un point de rebroussement, soit de la première ou de la seconde espèce. Il ne reste donc que le cas de deux racines égales pour entrer dans le jugement, s'il y a un point de rebroussement de la seconde espèce ou non.

§. 30. Mais si les deux tangentes conviennent, on pourra prendre cette commune tangente pour axe, & alors l'équation pour la courbe aura cette forme.

$$0 = Ayy + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3 + Fx^4 + Gx^3y + \&c.$$

Maintenant il faut voir, si les deux branches ont tourné leur courbure du même côté. Pour cet effet il faut, que dans la supposition de  $x$  infiniment petit, en négligeant tous les termes, qui évanouissent par rapport aux autres, la valeur de  $y$  ne devienne pas ambiguë, c'est à dire, il faut qu'il soit ou  $y = \alpha x x$ , ou  $y = \alpha x^3$ ; ou  $y = \alpha x^4$  &c. Soit  $y = \alpha x x$ , ce qui est le cas où le rayon de la développée devient fini, & alors on aura en négligeant les dimensions plus hautes que la quatrième.

$$0 = \alpha^2 Ax^4 + Bx^3 + \alpha Cx^4 + Fx^4$$



donc il faut qu'il soit  $B=0$ , & que  $\alpha$  n'obtienne pas une valeur double de l'équation  $\alpha^2 A + \alpha C + F=0$ , ou que  $CC=4AF$ , de sorte que  $Ayy + Cxxy + Fx^4$  devienne un carré.

§. 31. Donc à moins que l'équation n'ait pas cette forme

$$(y - \alpha xx)^2 = Bxy^2 + Cy^3 + Dx^3y + Exxyy + Fxy^3 + \&c$$

la courbe n'aura pas un point de rebroussement de la seconde espèce. Mais cela ne suffit pas encore; il faut outre cela, que dans l'expression  $Bxy^2 + Cy^3$  &c. si l'on met  $y = \alpha xx$ , la plus basse puissance de  $\alpha$  soit impaire. Par là on comprend aisément, que si l'équation étoit  $(y - \alpha x^3)^2 = Bxy^2 + \&c.$  cette partie doit avoir toujours la même propriété, qu'après avoir fait  $y = \alpha x^3$  la plus basse dimension de  $x$  soit impaire & plus haute que  $x^6$ ; & cette même maxime se doit observer dans les équations plus compliquées; de sorte que le jugement du point de rebroussement de la seconde espèce ne sera jamais difficile en se servant de cette manière.

§. 32. De là nous pourrons donner une équation générale pour toutes les lignes du quatrième ordre, qui auront un point de rebroussement de la seconde espèce; laquelle sera

$$(y - \alpha xx)^2 = Axy^2 + By^3 + Cx^3y + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4.$$

Car cette dernière partie  $Axy^2 + By^3 + Cx^3y$  &c. deviendra au commencement où  $y = \alpha xx$  égale à

$$\alpha^2 Ax^5 + \alpha^3 Bx^6 + \alpha Cx^5 + \alpha^2 Dx^6 + \alpha^3 Ex^7 + \alpha^4 Fx^8$$

& partant en négligeant les plus hautes puissances de  $x$ , l'équation sera pour le commencement

$$(y - \alpha xx)^2 = \alpha (\alpha A + C) x^5 \text{ ou } y = \alpha xx \pm xx \sqrt{\alpha (\alpha A + C) x}.$$

Donc





Donc pourvu que  $aA + C$  ne soit pas égal à zero, les lignes comprises dans l'équation générale donnée auront un point de rebroussement de la seconde espece. Par conséquent cette propriété aura lieu toutes les fois, qu'il n'y a pas  $C = -aA$ ; & alors ce point de rebroussement sera de cette nature  $y = axx + \sqrt{ax}$ .

§. 33. Mais quand  $C = -aA$ , il y aura encore des cas, où l'équation :

$$(y - axx)^2 = Axxy(y - axx) + By^3 + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4$$

contient des courbes d'un tel point de rebroussement. Pour trouver ces cas, on n'a qu'à supposer, pendant que  $x$  est considéré comme infiniment petit :

$$y = axx + \beta x^3 + \gamma x^3 \sqrt{x}.$$

& apres avoir déterminé  $\beta$  &  $\gamma$  on parviendra à cette equation :

$$(y - axx - \frac{1}{2} Axxy)^2 = Byy(y - axx) + Exy^3 + Fy^4$$

qui renferme encore une infinité d'autres courbes, qui ont toutes un tel point de rebroussement. Donc en regardant la simplicité de l'équation, il n'y a aucun doute que cette ligne  $(y - axx)^2 = Axxy$  ou  $y = \frac{axx}{1 - \sqrt{Ax}}$  ne soit la plus simple qui ait cette propriété.

§. 34. Soit proposée pour donner un exemple de la methode, que je viens d'expliquer, cette ligne du cinquième ordre, dont l'équation est :

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) (aa - zz)^2 = 2aa xx - x^4 - 2xxzz.$$

Pour trouver si cette courbe a un point de rebroussement de la seconde espece, je cherche premierement, si elle a un point double. Pour cet effet l'équation proposée donnera par la différentiation en supposant  $x$  constant :

$$-4 \left(1 - \frac{x}{a}\right) (aa - zz) z dz + 4xxz dz = 0.$$

Or en supposant  $z$  constant nous aurons :

$$-\frac{dx}{a} (aa - zz)^2 = 4aa x dx - 4x^3 dx - 4xzz dx.$$

A ces trois équations satisfont ces valeurs :

$$x = 0 \quad \& \quad z = \pm a.$$

§. 35. Cette courbe aura donc deux points doubles, & pour chercher la nature de chacun, je supposerai  $z = a - y$ , car il est clair de l'équation proposée, puisqu'elle a un diamètre sur lequel sont prises les abscisses  $x$ , que ces deux points doubles seront semblables entr'eux. Or posant  $z = a - y$ , nous aurons cette équation :

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) yy (2a - y)^2 = 2aa xx - x^4 - 2xx(a - y)^2$$

ou bien :

$$4aa yy - 4ay^3 + y^4 - 4axyy + 4xy^3 - \frac{xy^4}{a} - 2aa xx + x^4 = 0$$

$$- 4axxy + 2xxyy + 2aa xx$$

& partant.

$$(2ay - xx)^2 = 4ay^3 + 4axyy + y^4 + 4xy^3 + 2xxyy - \frac{xy^4}{a}$$

D'où il est clair que cette courbe a deux points de rebroussement de la seconde espece.

§. 36. Pour connoître la figure de cette courbe, on n'a qu'à chercher la valeur de  $zz$  de l'équation proposée, qu'on trouvera  $zz = aa - \frac{axx \pm x^2 \sqrt{ax}}{a - x}$ , ou  $zz = aa - \frac{xx \sqrt{a}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{x}}$ . De laquelle on tire les endroits où l'appliquée  $z$  evanouît, par le moïen de cette équation  $aa \sqrt{a} \mp aa \sqrt{x} - xx \sqrt{a} = 0$  ou  $(aa - xx)^2 = a^3 x$  qui a deux racines réelles qui sont :

$$x = 0, 5248876a; \quad \& \quad x = 1, 4902162a.$$

Ensuite



Ensuite la valeur de  $dz$  fera  $= 0$ , dans le cas  $\sqrt{x} = \frac{4}{3}\sqrt{a}$  ou  $x = \frac{16}{9}a = 1,7777a$ ; & la valeur de  $dx$  fera  $= 0$ , où  $z = 0$ , c.à.d. où la courbe coupe l'axe. Mais si nous supposons  $x = \frac{16}{9}a$ , nous aurons ou  $zz = \frac{283}{27}aa$  ou  $zz = -\frac{57}{189}aa$ , dont la dernière valeur est imaginaire. Enfin on voit que la courbe aura aussi une asymptote perpendiculaire à l'axe, ou  $x = a$ .

§. 37. Cette courbe est représentée dans la 9<sup>me</sup> figure, où  $CO$  est l'axe & en même tems le diamètre de la courbe,  $C$  le commencement des abscisses  $x$ . Les points  $A, A$  sont les deux points de rebroussement de la seconde espèce, que nous venons de trouver étant  $AC = a$ . Les deux branches qui constituent ces points de rebroussement, forment la lunule  $ABADA$ . Outre cela prenant  $CE = a$ , la droite  $FEF$  perpendiculaire à l'axe  $CO$  sera une asymptote de deux autres branches  $IHK$  &  $IHK$ , qui de  $K, K$  vont en divergeant à l'infini, ayant en  $H, H$  leur plus petite distance à l'axe  $CO$ . On voit aussi qu'on peut tirer une droite, qui coupe cette ligne courbe en 5 points, suivant la nature des lignes du 5<sup>me</sup> ordre.

Fig. 9.

