II.

Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs.

(Exhib. Berol. 1747 Junii 22. Conf. *Comment. arithm.* Prooem. pag. XVIII. N. 57 et Suppl. Prooem. N. 1.)

§ 1. Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain à découvrir un ordre quelconque dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire, que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques personnes se sont donné la peine de continuer au-delà de cent-mille: et on s'apercevra d'abord qu'il n'y règne aucun ordre ni règle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'arithmétique nous fournit des règles sûres, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin que l'on souhaite, sans pourtant nous y laisser apercevoir la moindre marque d'un ordre quelconque. Je me vois aussi bien éloigné de ce but, mais je viens de découvrir une loi fort bizarre parmi les sommes des diviseurs des nombres naturels, sommes qui, au premier coup d'oeil, paraissent aussi irrégulières que la progression des nombres premiers, et qui semblent même envelopper celle-ci. Cette règle, que je vais expliquer, est à mon avis d'autant plus importante qu'elle appartient à ce genre de vérités dont nous pouvons nous persuader, sans en donner une démonstration parfaite. Néanmoins, j'en allèguerai des preuves telles, qu'on pourra presque les envisager comme équivalentes à une démonstration rigoureuse.

§ 2. Les nombres premiers se distinguent des autres nombres, en ce qu'ils n'admettent d'autres diviseurs que l'unité et eux-mêmes. Ainsi 7 est un nombre premier, parce qu'il n'est divisible que par l'unité et soi-même. Les autres nombres qui ont, outre l'unité et eux-mêmes, encore d'autres diviseurs, sont nommés composés: comme par exemple le nombre 15, qui, outre l'unité et soi-même, est divisible per 3 et par 5. Donc en général, si le nombre p est premier, il ne sera divisible que par 1 et par p: mais si p est un nombre composé, il aura, outre 1 et p, encore d'autres diviseurs; et partant, dans le premier cas, la somme des diviseurs sera $= 1 + p$; dans l'autre cas, elle sera plus grande que $1 + p$. Comme les réflexions suivantes rouleront sur la somme des diviseurs de chaque nombre, je me servirai d'un certain caractère pour la marquer. La lettre $\int$ qu'on emploie dans l'analyse des infinis pour indiquer les intégrales, étant mise devant un nombre, signifiera la somme de tous ses diviseurs: ainsi $\int 12$ signifie la somme de tous les diviseurs du nombre 12 qui sont $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, de sorte que $\int 12 = 28$. Cela posé, on verra que

$$\int 60 = 168 \quad \text{et} \quad \int 100 = 217.$$

L'unité n'ayant d'autre diviseur que soi-même, on aura $\int 1 = 1$. Le chifre 0, au contraire, étant divisible par tout nombre, la valeur de $\int 0$ sera infinie. Cependant, dans la suite, je lui assignerai, pour chaque cas proposé, une valeur déterminée, convenable à mon dessein.

§ 3. Ayant donc établi ce signe $\int$ pour marquer la somme des diviseurs du nombre devant lequel il est posé, il est clair que, si p marque un nombre premier, la valeur de $\int p$ sera $= 1 + p$: excepté le cas où $p = 1$, car alors nous avons $\int 1 = 1$, et non pas $\int 1 = 1 + 1$; d'où l'on voit qu'il faut exclure l'unité de la suite des nombres premiers; étant le commencement des nombres entiers, elle n'est ni premier ni composé. Or, si le nombre p n'est pas premier, la valeur de $\int p$ sera plus grande que $1 + p$. Dans ce cas, on trouvera aisément la valeur de $\int p$ par les facteurs du nombre p. Car soient a, b, c, d, etc. des nombres premiers différents entr'eux, on verra aisément que:

$$\begin{aligned}\int ab &= 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) = \int a . \int b\\ \int abc &= (1 + a)(1 + b)(1 + c) = \int a . \int b . \int c\\ \int abcd &= (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) = \int a . \int b . \int c . \int d\end{aligned}$$

etc.

Pour les puissances des nombres premiers, on a besoin de règles particulières, comme:

$$\int a^2 = 1 + a + a^2 = \frac{a^3 - 1}{a - 1},$$

$$\int a^3 = 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

et généralement $$\int a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Et par le moyen de celles-ci, on pourra assigner la somme des diviseurs de chaque nombre, tout composé qu'il puisse être; ce qui sera clair par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}\int a^2 b &= \int a^2 . \int b,\\ \int a^3 b^2 &= \int a^3 . \int b^2,\\ \int a^3 b^4 c &= \int a^3 . \int b^4 . \int c\end{aligned}$$

et généralement $$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon = \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta . \int e^\varepsilon.$$

Ainsi, pour trouver la valeur de $\int 360$, puisque 360 se résout dans ces facteurs $2^3 . 3^2 . 5$, j'aurai

$$\int 360 = \int 2^3 . 3^2 . 5 = \int 2^3 . \int 3^2 . \int 5 = 15 . 13 . 6 = 1170.$$

§ 4. Pour mettre devant les yeux la progression des sommes des diviseurs, j'ajouterai la table suivante, qui contient les sommes des diviseurs des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 100

$\int 1 = 1$	$\int 7 = 8$	$\int 13 = 14$	$\int 19 = 20$	$\int 25 = 31$	$\int 31 = 32$	$\int 37 = 38$
$\int 2 = 3$	$\int 8 = 15$	$\int 14 = 24$	$\int 20 = 42$	$\int 26 = 42$	$\int 32 = 63$	$\int 38 = 60$
$\int 3 = 4$	$\int 9 = 13$	$\int 15 = 24$	$\int 21 = 32$	$\int 27 = 40$	$\int 33 = 48$	$\int 39 = 56$
$\int 4 = 7$	$\int 10 = 18$	$\int 16 = 31$	$\int 22 = 36$	$\int 28 = 56$	$\int 34 = 54$	$\int 40 = 90$
$\int 5 = 6$	$\int 11 = 12$	$\int 17 = 18$	$\int 23 = 24$	$\int 29 = 30$	$\int 35 = 48$	$\int 41 = 42$
$\int 6 = 12$	$\int 12 = 28$	$\int 18 = 39$	$\int 24 = 60$	$\int 30 = 72$	$\int 36 = 91$	$\int 42 = 96$

$\int 43 = 44$	$\int 53 = 54$	$\int 63 = 104$	$\int 73 = 74$	$\int 83 = 84$	$\int 93 = 128$
$\int 44 = 84$	$\int 54 = 120$	$\int 64 = 127$	$\int 74 = 114$	$\int 84 = 224$	$\int 94 = 144$
$\int 45 = 78$	$\int 55 = 72$	$\int 65 = 84$	$\int 75 = 124$	$\int 85 = 108$	$\int 95 = 120$
$\int 46 = 72$	$\int 56 = 120$	$\int 66 = 144$	$\int 76 = 140$	$\int 86 = 132$	$\int 96 = 252$
$\int 47 = 48$	$\int 57 = 80$	$\int 67 = 68$	$\int 77 = 96$	$\int 87 = 120$	$\int 97 = 98$
$\int 48 = 124$	$\int 58 = 90$	$\int 68 = 126$	$\int 78 = 168$	$\int 88 = 180$	$\int 98 = 171$
$\int 49 = 57$	$\int 59 = 60$	$\int 69 = 96$	$\int 79 = 80$	$\int 89 = 90$	$\int 99 = 156$
$\int 50 = 93$	$\int 60 = 168$	$\int 70 = 144$	$\int 80 = 186$	$\int 90 = 234$	$\int 100 = 217$
$\int 51 = 72$	$\int 61 = 62$	$\int 71 = 72$	$\int 81 = 121$	$\int 91 = 112$	
$\int 52 = 98$	$\int 62 = 96$	$\int 72 = 195$	$\int 82 = 126$	$\int 92 = 168$	

Je ne doute pas que, pour peu qu'on regarde la progression de ces nombres, on ne désespère presque d'y découvrir le moindre ordre, vu que l'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée tellement, qu'il semblera d'abord impossible d'indiquer une loi quelconque dans la progression de ces nombres, sans qu'on sache celle des nombres premiers; et il semble même qu'il y a ici beaucoup plus de bizarrerie encore que dans les nombres premiers.

§ 5. Néanmoins j'ai remarqué, que cette progression suit une loi bien régulière et qu'elle est même comprise dans l'ordre des progressions que les géomètres appellent *recurrentes*, de sorte qu'on peut toujours former chacun des termes par quelques-uns des précédents, suivant une règle constante. Car si $\int n$ marque un terme quelconque de cette progression irrégulière, et $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$, etc. les termes précédents, je dis que la valeur de $\int n$ est toujours composée de quelques-uns des termes précédents suivant cette formule:

$$\begin{gathered}\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) \\ - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) + \int(n-70) \\ + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) \text{ etc.}\end{gathered}$$

Dans cette formule il y a à remarquer:

I. Que dans l'ordre alternant des signes $+$ et $-$, chacun se répète deux fois de suite.

II. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. qu'il faut successivement retrancher du nombre proposé n, deviendra évidente, dès qu'on prend leurs différences:

N.	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,	51,	57,	70,	77,	92,	100,	etc.
Diff.	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,	6,	13,	7,	15,	8........		

car alternativement on aura tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. et les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, etc. Par ce moyen on pourra continuer la suite de ces nombres aussi loin que l'on voudra.

III. Quoique cette suite aille à l'infini, on n'en doit prendre, dans chaque cas, que les termes depuis le commencement jusqu'au premier terme supérieur à n, et qui, par conséquent, donnerait, après le signe $\int$, un nombre négatif.

IV. S'il arrive que le terme $\int 0$ se rencontre dans cette formule, comme sa valeur est indéterminée en elle-même, il faut, dans chaque cas, au lieu de $\int 0$, mettre le nombre proposé même.

§ 6. Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre proposé et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra développer. Et comme je dois avertir, que je ne suis pas en état de donner une démonstration rigoureuse de cette loi, je ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples:

$$
\begin{aligned}
&\int 1=\int 0=1,\\
&\int 2=\int 1+\int 0=1+2=3,\\
&\int 3=\int 2+\int 1=3+1=4,\\
&\int 4=\int 3+\int 2=4+3=7,\\
&\int 5=\int 4+\int 3-\int 0=7+4-5=6,\\
&\int 6=\int 5+\int 4-\int 1=6+7-1=12,\\
&\int 7=\int 6+\int 5-\int 2-\int 0=12+6-3-7=8,\\
&\int 8=\int 7+\int 6-\int 3-\int 1=8+12-4-1=15,\\
&\int 9=\int 8+\int 7-\int 4-\int 2=15+8-7-3=13,\\
&\int 10=\int 9+\int 8-\int 5-\int 3=13+15-6-4=18,\\
&\int 11=\int 10+\int 9-\int 6-\int 4=18+13-12-7=12,\\
&\int 12=\int 11+\int 10-\int 7-\int 5+\int 0=12+18-8-6+12=28,\\
&\int 13=\int 12+\int 11-\int 8-\int 6+\int 1=28+12-15-12+1=14,\\
&\int 14=\int 13+\int 12-\int 9-\int 7+\int 2=14+28-13-8+3=24,\\
&\int 15=\int 14+\int 13-\int 10-\int 8+\int 3+\int 0=24+14-18-15+4+15=24,\\
&\int 16=\int 15+\int 14-\int 11-\int 9+\int 4+\int 1=24+24-12-13+7+1=31,\\
&\int 17=\int 16+\int 15-\int 12-\int 10+\int 5+\int 2=31+24-28-18+6+3=18,\\
&\int 18=\int 17+\int 16-\int 13-\int 11+\int 6+\int 3=18+31-14-12+12+4=39,\\
&\int 19=\int 18+\int 17-\int 14-\int 12+\int 7+\int 4=39+18-24-28+8+7=20,\\
&\int 20=\int 19+\int 18-\int 15-\int 13+\int 8+\int 5=20+39-24-14+15+6=42.
\end{aligned}
$$

Je crois ces exemples suffisants pour prouver que l'accord de ma règle avec la vérité ne peut nullement être attribué au hasard seul.

§ 7. Si néanmoins on objectait, que ces exemples ne prouvent que la justesse des six premiers termes de notre suite: 1, 2, 5, 7, 12, 15, et non celle de la loi de progression, telle que je l'ai indiquée, il suffira de choisir, pour vérifier cette loi, quelques exemples de plus grands nombres:

I. Soit proposé le nombre 101 dont on veuille chercher la somme des diviseurs, et on aura:

$$\begin{aligned}\int 101 = & \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75 \\ & + \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 = \\ & + 217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124 \\ & + 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1\end{aligned}$$

où, additionnant ces nombres deux à deux

$$\int 101 = 373 - 396 + 222 - 204 + 206 - 177 + 92 - 14,$$

ce qui donne $\int 101 = 102$, d'où l'on conclurait que 101 est un nombre premier, si on ne le savait d'ailleurs.

II. Soit proposé le nombre 301 dont on veuille savoir la somme des diviseurs, et l'on aura:

$$\begin{aligned}\int 301 = & \int 300 + \int 299 - \int 296 - \int 294 + \int 289 + \int 286 - \int 279 - \int 275 + \int 266 + \int 261 \\ & - \int 250 - \int 244 + \int 231 + \int 224 - \int 209 - \int 201 + \int 184 + \int 175 - \int 156 \\ & - \int 146 + \int 125 + \int 114 - \int 91 - \int 79 + \int 54 + \int 41 - \int 14 - \int 0\end{aligned}$$

où il est clair, comment par le moyen des différences, on peut aisément former cette suite pour chaque cas proposé. Or, substituant les sommes des diviseurs, on trouvera:

$$\begin{aligned}\int 301 = & + 868 - 570 + 307 - 416 + 480 - 468 + 384 - 240 + 360 - 392 + 156 - 112 \\ & + 336 - 684 + 504 - 372 + 390 - 434 + 504 - 272 + 248 - 222 + 240 - 80 \\ & + 120 - 24 \\ & + 42 - 301\end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \int 301 = + 4939 - 4587 = 352:$$

d'où l'on reconnaît que 301 n'est pas premier. Or, puisque $301 = 7.43$, on aura

$$\int 301 = \int 7 . \int 43 = 8.44 = 352,$$

comme la règle vient de le montrer.

§ 8. Ces exemples que je viens de développer, ôteront sans doute tout scrupule qu'on aurait pu encore avoir sur la vérité de ma formule. Or, on sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, qu'on ne voit aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs, sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, etc. paraît non seulement n'avoir aucun rapport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompue et qu'ils sont mêlés de deux progressions régulières différentes, c'est-à-dire

de 1, 5, 12, 22, 35, 51, etc. et de 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc.,

il semble presque qu'une telle irrégularité ne saurait trouver lieu dans l'analyse. De plus, le défaut d'une démonstration n'en doit pas peu augmenter l'intérêt; vu qu'il serait presque moralement impossible de parvenir à la découverte d'une telle propriété, sans y avoir été conduit par une méthode certaine, qui pourrait tenir lieu d'une parfaite démonstration. J'avoue aussi que ce n'a pas été par un simple hasard, que je suis tombé sur cette découverte: mais une autre proposition d'une pareille nature qui doit être jugée vraie, quoique je n'en puisse donner aucune démonstration, m'a ouvert le chemin pour parvenir à cette belle propriété. Et bien que cette recherche ne roule que sur la nature des nombres à laquelle l'analyse des infinis ne paraît guère être aplicable, c'est pourtant par le moyen de différentiations et de plusieurs autres détours que j'ai été conduit à cette conclusion.

Je souhaiterais qu'on trouvât un chemin plus court et plus naturel pour y parvenir, et peut-être que la considération de la route que j'ai suivie y pourra conduire.

§ 9. Il y a long-temps que je considérai, à l'occasion du problème de la partition des nombres, cette expression:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots\ldots$$

la supposant continuée à l'infini. J'ai multiplié actuellement un grand nombre de ces facteurs ensemble, pour voir la forme de la série qui en résulte, et j'ai trouvé cette progression:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots.$$

où les exposants de x sont les mêmes nombres qui entrent dans la formule précédente; et aussi les signes $+$ et $-$ alternent deux à deux. On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette série. Aussi n'ai-je pour toute preuve qu'une longue induction, que j'ai du moins poussée aussi loin, que je ne puis en aucune manière douter de la loi d'après laquelle ces termes et leurs exposants sont formés. J'ai long-temps cherché en vain à démontrer d'une manière rigoureuse, que cette série doit être égale à l'expression proposée $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ et j'ai adressé la même demande à quelques-uns de mes amis dont je connais la force dans ces sortes de questions; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans en avoir pu déterrer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connue, mais pas encore démontrée, que si l'on pose:

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots.$$

la même quantité s pourra aussi être exprimée en sorte:

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}\ldots.$$

Car chacun est en état de se convaincre de cette vérité par la résolution actuelle à tel point qu'il souhaitera, et il paraît impossible que la loi qu'on a découverte dans 20 termes par exemple, ne soit pas également vraie pour tous les suivants.

§ 10. Ayant donc découvert que ces deux expressions infinies sont égales, quoique l'égalité ne puisse être démontrée, toutes les conclusions qu'on pourra déduire de cette égalité seront de même nature, c'est-à-dire vraies sans être démontrées. Ou, si l'une quelconque de ces conclusions pouvait être démontrée, on en pourrait réciproquement tirer une démonstration de l'égalité mentionnée; et c'est dans cette vue que j'ai manié de plusieurs manières ces deux expressions, par où j'ai été conduit entr'autres à la découverte que je viens d'expliquer, et dont la vérité doit être aussi certaine que celle de l'égalité de ces deux expressions. Voilà de quelle manière j'ai opéré. Ces deux expressions étant égales:

$$\text{I.}\quad s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots.$$

$$\text{II.}\quad s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots.$$

pour délivrer la première des facteurs, j'en prends les logarithmes, d'où je tire

$$ls=l(1-x)+l(1-x^2)+l(1-x^3)+l(1-x^4)+l(1-x^5)+\ldots.$$

Maintenant pour éliminer les logarithmes, j'en prends les différentielles, ce qui donnera cette équation:

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \ldots$$

que je divise par $-dx$ et multiplie par x, pour avoir:

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \ldots$$

La seconde valeur de la même quantité s donne par la différentiation:

$$ds = -dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \ldots,$$

de laquelle, en la multipliant par $-x$ et divisant par sdx, on tirera une autre valeur de $-\frac{xds}{sdx}$ qui sera

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots}.$$

§ 11. Soit la valeur de $-\frac{xds}{sdx} = t$, et nous aurons deux valeurs égales pour cette quantité t

$$\text{I.}\quad t = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{6x^6}{1-x^6} \ldots$$

$$\text{II.}\quad t = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots}.$$

Je résous chaque terme de la première expression en une progression géométrique par la division ordinaire, et j'obtiens:

$$\begin{array}{rllllllllllll}
t = & x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12}+\ldots \\
 & & +2x^2 & & +2x^4 & & +2x^6 & & +2x^8 & & +2x^{10} & & +2x^{12}+\ldots \\
 & & & +3x^3 & & & +3x^6 & & & +3x^9 & & & +3x^{12}+\ldots \\
 & & & & +4x^4 & & & & +4x^8 & & & & +4x^{12}+\ldots \\
 & & & & & +5x^5 & & & & & +5x^{10} & & +\ldots \\
 & & & & & & +6x^6 & & & & & & +6x^{12}+\ldots \\
 & & & & & & & +7x^7 & & & & & \\
 & & & & & & & & +8x^8 & & & & \\
 & & & & & & & & & +9x^9 & & & \\
 & & & & & & & & & & +10x^{10} & & \\
 & & & & & & & & & & & +11x^{11} & \\
 & & & & & & & & & & & & +12x^{12}+\ldots
\end{array}$$

où il est aisé de voir, que chaque puissance de x se rencontre autant de fois, que son exposant a de diviseurs, puisque chaque diviseur devient un coefficient de la même puissance de x. Ainsi, réunissant tous les termes homogènes dans une même somme, le coefficient de chaque puissance de x sera la somme de tous les diviseurs de son exposant. Et partant, exprimant ces sommes de diviseurs par la préposition du signe $\int$, ainsi que je l'ai fait ci-dessus, j'obtiendrai pour t la série qui suit:

$$t = \int 1 . x + \int 2 . x^2 + \int 3 . x^3 + \int 4 . x^4 + \int 5 . x^5 + \int 6 . x^6 + \int 7 . x^7 + \ldots$$

dont la loi de progression est tout à fait manifeste; et, quoiqu'il semble que l'induction ait quelque part dans la détermination de ces coefficients, pour peu que l'on considère l'expression infinie précédente, on s'assurera aisément de la nécessité de cette loi de progression.

§ 12. Substituons cette valeur au lieu de t dans la seconde expression de cette même lettre t, qui, délivrée des fractions, se réduit à cette forme:

$$\left.\begin{array}{l} t(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots) \\ -x-2x^2+5x^5+7x^7-12x^{12}-15x^{15}+22x^{22}+26x^{26}+\ldots \end{array}\right\}=0,$$

Maintenant la valeur précédente étant mise dans cette équation, nous trouverons:

$$\begin{array}{r} 0=\int 1.x+\int 2.x^2+\int 3.x^3+\int 4.x^4+\int 5.x^5+\int 6.x^6+\int 7.x^7+\int 8.x^8+\int 9.x^9+\ldots \\ -x-\int 1.x^2-\int 2.x^3-\int 3.x^4-\int 4.x^5-\int 5.x^6-\int 6.x^7-\int 7.x^8-\int 8.x^9-\ldots \\ -2x^2-\int 1.x^3-\int 2.x^4-\int 3.x^5-\int 4.x^6-\int 5.x^7-\int 6.x^8-\int 7.x^9-\ldots \\ +5x^5+\int 1.x^6+\int 2.x^7+\int 3.x^8+\int 4.x^9+\ldots \\ +7x^7+\int 1.x^8+\int 2.x^9+\ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

Ici il est aisé d'observer que les coefficients de chaque puissance de x sont les sommes des diviseurs d'abord de l'exposant de cette puissance même, et ensuite, des autres nombres plus petits qui résultent si l'on ôte successivement de l'exposant les nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. Ensuite, si l'exposant de la puissance de x est égal à un terme de cette série numérique, alors ce même terme accompagne encore les coefficients. En troisième lieu, l'ordre des signes n'a besoin d'aucun éclaircissement. Ainsi, on conclura en général que la puissance x^n aura ces coefficients:

$$\int n-\int(n-1)-\int(n-2)+\int(n-5)+\int(n-7)-\int(n-12)-\int(n-15)+\ldots$$

jusqu'à ce qu'on ne parvienne à des nombres négatifs. Mais si l'un quelconque de ces nombres devant lesquels se trouve le signe $\int$, devient $=0$, alors il faut mettre à sa place le nombre n même, de sorte que dans ce cas, il y a $\int 0=n$ et le signe de ce terme suit l'ordre général des autres.

§ 13. Ainsi donc, puisque l'expression infinie du § précédent doit être égale à zéro, quelque valeur que l'on donne à la quantité x, il faut de nécessité que les coefficients de chaque puissance à part, pris ensemble, soient égaux à zéro, et partant nous aurons les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & \int 1-1=0, \\ \text{II.} & \int 2-\int 1-2=0, \\ \text{III.} & \int 3-\int 2-\int 1=0, \\ \text{IV.} & \int 4-\int 3-\int 2=0, \\ \text{V.} & \int 5-\int 4-\int 3+5=0, \\ \text{VI.} & \int 6-\int 5-\int 4+\int 1=0, \\ \text{VII.} & \int 7-\int 6-\int 5+\int 2+7=0, \\ & \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \int 1=1, \\ \int 2=\int 1+2, \\ \int 3=\int 2+\int 1, \\ \int 4=\int 3+\int 2, \\ \int 5=\int 4+\int 3-5, \\ \int 6=\int 5+\int 4-\int 1, \\ \int 7=\int 6+\int 5-\int 2-7, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et généralement nous aurons:

$$0=\int n-\int(n-1)-\int(n-2)+\int(n-5)+\int(n-7)-\int(n-12)-\int(n-15)\ldots$$

et par conséquent

*

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \ldots$$

qui est la même expression que j'ai donnée là-haut et qui exprime la loi, selon laquelle les sommes des diviseurs des nombres naturels procèdent. Outre la raison des signes et de la nature de la progression des nombres:

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 7,\quad 12,\quad 15,\quad 22,\quad 26,\quad 35,\quad 40,\quad 51,\quad 57,\quad 70,\quad 77,\quad \text{etc.}$$

on voit aussi, par ce que je viens d'avancer, la raison pourquoi, dans les cas où se trouve le terme $\int 0$, il faut mettre à sa place le nombre n même, ce qui aurait pu paraître la chose la plus étrange dans mon expression. Ce raisonnement, quoiqu'il soit encore fort éloigné d'une démonstration parfaite, ne laissera pas pourtant de lever plusieurs doutes sur la forme bizarre de l'expression que je viens d'expliquer.