DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM AB EORVM FIGVRA NON SPHAERICA ORIVNDA.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamuis cum *Neutono* aſſumamus dari in ſyſtemate planetario eiusmodi centrum virium, ad quod cuncta materiae, ex qua planetae conſtant, elementa attrahantur in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; hinc tamen non ſequitur, ſingulos planetas circa iſtud centrum perfectas deſcripturos eſſe ellipſes, quarum alteruter focus in hoc centro eſſet ſitus. Haec enim concluſio, vti ex ipſius *Neutoni* demonſtrationibus facile colligitur, locum non habet, niſi corpora planetarum vel ſint tam parua, vt inſtar punctorum ſpectari queant, vel ita comparata, vt omnium virium, quibus ſingulae planetae particulae vrgentur, media directio per ipſius centrum grauitatis ſimul et centrum virium tranſeat, atque inſuper vis aequiualens ipſa, quae ex ſingulis illis viribus conflatur, ſit diſtantiarum quadratis reciproce proportionalis.

§. 2. Egregie vero etiam *Neutonus* demonſtrauit, ſi corpus planetae ſit perfecte ſphaericum atque ex materia homogenea conſtet, tum omnium virium, quibus ſingulae eius particulae ad centrum virium nitantur, mediam directionem non ſolum per ipſum planetae centrum ad centrum virium porrigi, ſed etiam vim ex omnium coniunctione natam reciproce proportionalem esse quadrato distantiae centri planetae a centro virium. Hoc igitur casu planeta perinde circa centrum virium mouebitur, ac si cuncta eius materia in ipsius centro esset vnita, ideoque eius motus perficietur in sectione conica, cuius alteruter focus in centro virium existat.

§. 3. Quae proprietas, cum tam commode in figuram sphaericam materia vniformiter repletam competat, atque ob hanc causam non adeo multis aliis figuris sit communis, nullum est dubium, quin planeta, qui alia figura diuersa fuerit praeditus, non eandem legem in motu suo sit secuturus. Nisi enim eius corpus hoc modo exposito sit formatum, omnino euenire potest, vt media omnium virium directio vel non per centrum grauitatis planetae transeat, vel non per centrum virium, vel etiam per neutrum. Tum vero etiam saepissime accidit, vt vis omnibus simul sumtis aequiualens non sit quadratis distantiae a centro virium reciproce proportionalis, quarum anomaliarum si vel vna affuerit, motus planetae ab ellipsi seu sectione conica discrepare debebit.

§. 4. Cuiusmodi autem motus perturbatio a defectu idoneae Planetae formae oriri debeat, difficillimum profecto erit generatim determinare, cum fines analyseos nondum sint eousque promoti, vt aequationes, quas leges Mechanicae suppeditant, euoluere atque ad vsum accommodare liceret. Neque huiusmodi inuestigatio cum vlla successus spe suscipi potest, nisi cum constet, illam perturbationem motus tam esse exiguam, vt in calculo instar quantitatis propemodum euanescentis tractari queat. Cum vero et haec tractatio, ob infinitam figurarum, quae plane-

planetis tribui queant, varietatem nimis late pateat, hic singularem tantum casum euoluere constitui, ex quo tamen via ad innumeros alios tractandos cognosci possit.

§. 5. Considerabo ergo corpus ex duobus globis A Tab. V. Fig. 1. et B virga rigida et inertiae experte iunctis compositum, quod in plano tabula repraesentato moueatur circa centrum virium O, ad quod vterque globus seorsim sollicitetur in ratione duplicata reciproca distantiarum. Ad motum ergo huius corporis AB hinc oriundum recte inuestigandum ad eius centrum grauitatis, quod sit in C respici oportet. Repraesentent ergo litterae A et B massas globorum A et B, sintque distantiae $AC = a$, $BC = b$, ab horum globorum centris aestimandae, erit ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$. Porro vis centri virium O tanta sit vt in distantia f, aequetur grauitati, atque globus A versus O vrgebitur vi motrice $= \frac{Aff}{OA^2}$, et globus B eodem trahetur secundum directionem BO vi $= \frac{Bff}{OB^2}$.

§. 6. Sumta quadam recta OE pro axe ad quem motus referatur, sit EC linea curua, quam centrum grauitatis C iam descripserit, ac vocetur distantia $OC = z$, et angulus $EOC = \Phi$, erit demisso ex C in axem perpendiculo CP, abscissa $OP = x = z \cos. \Phi$ et applicata $PC = y = z \sin. \Phi$, posito simitoto $= 1$. Hoc autem temporis puncto virga AB eum situm teneat, quem figura refert sitque angulus $OCA = \theta$, quem motus continuatione augeri ponam, ita vt corpus A circa C respectu lineae OC arcum DA iam descripserit. At quia haec ipsa linea OC est mobilis, motum istum angularem ad lineam quandam fixam OE referri conuenit; producatur ergo recta BCA donec huic OE occurrat in R, eritque

 angulus

§. 11. Vt iſtae aequationes ad vſum propius accommodentur, multiplicetur prima per coſ. Φ, altera per ſin. Φ, erit ob $\text{coſ.}\,\Phi^2 + \text{ſin.}\,\Phi^2 = 1$ eas addendo.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2(P\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi)$$

Deinde prior multiplicetur per $-$ ſin. Φ, et altera per coſ. Φ, erit eas pariter addendo

$$2dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2}dt^2(Q\,\text{coſ.}\,\Phi - P\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

Supereſt igitur vt pro P et Q valores ante exhibiti ſubſtituantur.

§. 12. Erit autem hos valores ex §. IX. reſtituendo

$$Q\,\text{ſin.}\,\Phi + P\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{Aff(z - a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta - a\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta + b\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

ſimilique modo

$$Q\,\text{coſ.}\,\Phi - P\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{Aff(a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta - a\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(b\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta - b\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

At eſt $\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta + \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta = \text{coſ.}\,(\eta - \Phi) = \text{coſ.}\,\theta$, ob $\eta = \Phi + \theta$, tum vero $\text{ſin}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\eta = \text{ſin.}\,(\Phi - \eta) = -\,\text{ſin.}\,\theta$, ſicque angulo η ex computo exeunte, habebitur.

$$Q\,\text{ſin}\,\Phi + P\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{Aff(z - a\,\text{coſ.}\,\theta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\,\text{coſ.}\,\theta)}{(A+B)BO^3} \text{ et}$$

$$Q\,\text{coſ.}\,\Phi - P\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{-Aaff\,\text{ſin.}\,\theta}{(A+B)AO^3} + \frac{Bbff\,\text{ſin.}\,\theta}{(A+B)BO^3}$$

§. 13. Quodſi iam iſti valores in ſuperioribus aequationibus (§. XI.) ſubſtituantur, orientur ſequentes duae aequationes, quibus motus centri grauitatis C continetur.

I. ddz

I. $ddz - z\,d\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z-a\,\mathrm{cof.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\,\mathrm{cof.}\,\theta)}{BO^3}\right)$

II. $2\,dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\,\mathrm{fin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\mathrm{fin.}\,\theta}{BO^3}\right)$

quae adhuc in fe continent quatuor indeterminatas z, Φ, θ et t; vnde vna praeterea opus eft aequatione, vt binae eliminari et aequatio inter duas tantum indeterminatas elici queat.

§. 14. Verum hanc tertiam aequationem nobis fuppeditabit confideratio motus rotatorii virgea A B, quae cum axe Q E iam conftituit angulum E R C $= \eta = \Phi + \theta$, progreffu temporis augendum. Ad huius accelerationem definiendam noffe oportet totius corporis gyrantis momentum inertiae, quod oritur, fi fingulae eius particulae per quadrata diftantiarum fecarum ab axe gyrationis multiplicentur, haecque producta in vnam fummam colligantur. Sit igitur hoc momentum inertiae $=(A+B)kk$. Deinde fi momentum virium hunc motum gyratorium accelerantium, feu ad angulum η augendum tendentium ponatur $= Rr$, erit tempufculo dt acceleratio motus rotatorii $\frac{2dd\eta}{dt^2} = \frac{Rr}{(A+B)kk}$ feu $ddy = \frac{Rrdt^2}{2(A+B)kk}$.

§. 15. Cum autem globus A ad O follicitetur vi $= \frac{Aff}{AO^2}$, erit eius momentum refpectu axis rotationis C $= \frac{Aff}{AO^2} \cdot AC$ fin. O A R; at eft fin. O A R : O C $=$ fin. O C A : A O, ideoque fin. O A R $= \frac{OC\,\mathrm{fin.}\,OCA}{AO} = \frac{z\,\mathrm{fin.}\,\theta}{AO}$ ergo hoc momentum erit $= \frac{Aaffz\,\mathrm{fin.}\,\theta}{AO^3}$, et ad anguli η diminutionem tendit. Globus autem B ad O trahitur vi $= \frac{Bff}{BO^2}$, eiusque ergo momentum ad C erit $= \frac{Bff}{BO^2} \cdot$ B C fin. O B C $= \frac{Bbffz\,\mathrm{fin.}\,\theta}{BO^3}$, et ad angulum η augendum impen-

impenditur, vnde totale momentum, quod posui R r, erit $= ff\,z$ sin. $\theta\,(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$ hincque acceleratio motus rotatorii ita difinietur, vt sit: $dd\eta = \frac{ffzdt^2 \sin.\theta}{2(A+B)kk}(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3}) = dd\Phi + dd\theta$.

§. 16. En igitur tres aequationes, quibus opus est ad motum tam centri grauitatis C, quam motum gyratorium ipsius virgae A B determinandum:

I. $ddz - z^d\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}(\frac{A(z - a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\cos.\theta)}{BO^3})$

II. $2dz^d\Phi + z^{dd}\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}(\frac{Aa\sin.\theta}{AO^3} - \frac{Bb\sin.\theta}{BO^3})$

III. $dd\Phi + dd\theta = \frac{-ffzdt^2}{2(A+B)k^2}(\frac{Aa\sin.\theta}{AO^3} - \frac{Bb\sin.\theta}{BO^3})$

Tota ergo huius duplicis motus determinatio huc est reducta, vt ex istis tribus aequationibus duae indeterminatae eliminentur, et aequatio inter duas tantum variabiles eliciatur, cuius resolutio ad vsum vocari queat.

§. 17. Diuidatur aequatio II per III, ac prodibit sequens formula perquam concinna.

$$\frac{2dzd\Phi + zdd\Phi}{dd\Phi + dd\theta} = -\frac{kk}{z}.$$

seu $2z^dz^d\Phi + zz^{dd}\Phi + kkdd\eta = 0$ ob $\eta = \Phi + \theta$.

Integratione ergo instituta erit:

$zz^d\Phi + kkd\eta = C\,dt$ denotante B quantitatem constantem. Exprimit autem $\frac{1}{2}zz^d\Phi$ elementum areae E O C, quae si dicatur $= S$, erit $2\,dS + kkd\eta = C\,dt$, et quia celeritas gyratoria exponitur per $\frac{d\eta}{dt}$, erit $\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{kk} - \frac{2dS}{kkdt}$, et denuo integrando: $\eta = D + \frac{Ct}{kk} - \frac{2S}{kk}$.

§. 18. Hinc primo patet, si area EOC a centro grauitatis C circa centrum virium O descripta exacte

esset

eſſet tempori proportionalis, tum etiam motum gyratorium eiusue celeritatem $\frac{d\eta}{dt}$ futuram eſſe vniformem. Sin autem areae EOC deſcriptio non ſit tempori proportionalis, quod re vera euenire mox oſtendetur, tum etiam motus gyratorius virgae AB circa centrum C tantundem ab vniformitate diſcrepabit. Atque hinc ſine dubio circa motum lunae libratorium, quia deſcriptio arearum circa terram non eſt tempori proportionalis, praeclara concludere licebit, etiamſi caſus, quem hic contemplor, non admodum congruat cum figura lunae. Sed hanc applicationem tam diu differre conueniet, donec reliqua motus phaenomena fuerint euoluta.

§. 19. Cum igitur iam adepti ſimus hanc aequationem $zz^d\Phi + kkd\eta = Cdt$: ob $d\eta = d\Phi + d\theta$, hinc eliminare poterimus elementum quantitatis variabilis θ, ope formulae

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$$

ideoque duae tantum nobis ſupererunt aequationes euolvendae, nempe:

$$\text{I. } ddz - z^d\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z - a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\cos.\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2^d z^d + z^{dd}\Phi = \frac{ffdt^2\sin.\theta}{2(A+B)}\left(\frac{Aa}{AO^3} - \frac{Bb}{BO^3}\right)$$

in quibus etſi angulus θ adhuc ineſt, tamen ſufficit noſſe eius differentialis valorem:

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 20. Loco elementi temporis dt introducamus in calculum motum corporis ſphaerici circa centrum virium O in circulo cuius radius ſit $= hu$, informiter reuoluentis; quod tempusculo dt angulum circa O deſcribat $= d\omega$,

 qui

erit $d\theta = \frac{gg\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)}{kk} - \frac{bb\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)\sqrt{(1+nn)}}{kk} - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$ vbi primo notandum esse kk quantitatem prae bb minimam, simulque proxime esse $gg = bb\sqrt{(1-nn)}$ nisi motus gyratorius vehementer fuerit velox. Sit igitur $gg - bb\sqrt{(1-nn)} = \alpha kk$, vt sit proxime $d\theta = \alpha\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v) - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$, qui valor cum θ tantum in terminis minimis occurrat, ad approximandum satis est exactus.

§. 25. Incipiamus ab aequatione posteriori, quae hanc indicet formam:

$$\frac{2z\,dz\,d\Phi + zz\,dd\Phi}{d\omega} = \frac{3abb^3 d\omega\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{z^3} = \frac{3abb^3 d\omega\,\text{fin.}\,2\theta}{2z^3}$$

et integrando $\frac{zz\,d\Phi}{d\omega} = \frac{3}{2}ab\int\frac{b^3}{z^3}d\omega\,\text{fin.}\,2\theta + Cbb$ at cum ab fit minimum in hoc termino sufficit pro z ponere $b(1+n\,\text{cof.}\,v)$, et ob $d\omega = \mu\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)$ erit

$$\frac{zz\,d\Phi}{dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} = \frac{3}{2}\mu^2 ab\int\frac{dv\,\text{fin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} + Cbb$$

Neque vero hinc vtiles conclusiones deducere valebimus, nisi excentricitatem n valde paruam statuamus, quod quidem pro applicatione ad motus planetarum tuto facere poterimus.

§. 26. Hoc autem casu cum sit $\frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v} = dv(1-n\,\text{cof.}\,v)$ proxime, erit $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha+1)n\,\text{cof.}\,v)$ hincque $dv = \frac{-d\theta}{1-\alpha-(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v} = -d\theta(-\alpha+(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ et proxime $\frac{dv}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = -d\theta(1-\alpha-(1-3\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ sicque erit $\int\frac{dv\,\text{fin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = -(1-\alpha)\int d\theta\,\text{fin.}\,2\theta + (1-3\alpha)n\int d\theta\,\text{fin.}\,2\theta\,\text{cof.}\,v$ sed sufficiat solum primum terminum retinuisse vt integratione instituta sit $\int\frac{dv\,\text{fin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\text{cof.}\,2\theta$ ideoque habebitur satis accurrate

zzdΦ

$$\frac{zzd\Phi}{dv(1+n\cos.v)} = Cbb + \tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\cos. 2\theta$$

vnde erit:

$$d\Phi = \frac{Cbb\,dv(1+n\cos.v)}{zz} + \frac{\tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\,dv(1+n\cos.v)\cos.2\theta}{zz}$$

§. 27. Sumtis ergo quadratis et minimis neglectis terminis erit

$$z^4 d\Phi^2 = CCb^4dv^2(1+n\cos.v)^2 + \tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\mu Cabbbdv^2(1+n\cos.v)^2\cos.2\theta$$

Iam vero prima aequatio exuta differentialis constantis $d\omega$ ratione transit in sequentem,

$$z^3 d\frac{dz}{d\omega} - \frac{z^4 d\Phi^2}{d\omega} + b^3 zd\omega = \frac{3ab^3 d\omega(1-3\cos.\theta^2)}{2z}$$

At cum sit $z = b(1+n\cos.v+p)$ erit $\frac{dz}{b} = -ndv\sin.v + dp$ et ob $d\omega = \mu dv(1+n\cos.v)$ erit

$$(1+n\cos.v+p)^3 d\left(\frac{dp - ndv\sin.v}{\mu dv(1+n\cos.v)}\right) - \frac{CCdv(1+n\cos.v)}{\mu}$$

$$-\tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\frac{Cab}{bb}dv(1+n\cos.v)\cos.2\theta + \mu dv(1+n\cos.v)(1+n\cos.v+p)$$

$$= \frac{3\mu abdv(1+n\cos.v)(1-3\cos.\theta^2)}{2b(1+n\cos.v+p)}.$$

§. 28. Ponatur iam differentiale dv constans, eritque

$$d,\frac{dp - ndv\sin.v}{\mu dv(1+n\cos.v)} = \frac{ddp}{\mu dv(1+n\cos.v)} + \frac{ndp\sin.v}{\mu(1+n\cos.v)^2} - \frac{ndv\cos.v - nndv}{\mu(1+n\cos.v)^2}$$

et quia est approximando:

$(1+n\cos.v+p)^3 = (1+n\cos.v)^3 + 3(1+n\cos.v)^2 p$, erit substitutione facta, iisque terminis in quibus p plus vna dimensione obtinet neglectis;

$$\frac{ddp}{\mu dv}(1+n\cos.v)^2 + \frac{ndp\sin.v}{\mu}(1+n\cos.v) - \frac{ndv(\cos.v+n)}{\mu}(1+n\cos.v)$$

$$- \frac{3npdv(\cos.v+n)}{\mu} - \frac{3(1-\alpha)\mu Cabdv(1+n\cos.v)\cos.2\theta}{2bb} - \frac{CC}{\mu}dv(1+n\cos.v)$$

$+\mu$

$$+\mu p dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)-\frac{3\mu ab dv(1-3\,\mathrm{cos.}\,\theta^2)}{2bb}+\mu dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)^2$$
$$+\frac{3\mu abp dv(1-3\,\mathrm{cos.}\,\theta^2)}{2bb(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)}=0.$$

§. 29. Reducatur cof. θ^2 ad cofinum fimplicem ponendo cof. $\theta^2=\frac{1+\mathrm{cos.}\,2\theta}{2}$, erit $1-3$ cof. $\theta^2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ cof. 2θ, atque aequentur termini, in quibus p non ineft feorfim $=0$, eritque diuifione per dv peracta:

$$\begin{aligned}&+\mu+2\mu n\,\mathrm{cos.}\,v+\mu nn\,\mathrm{cos.}\,v^2=0\\&-\frac{CC}{\mu}-\frac{CCn}{\mu}\,\mathrm{cos.}\,v-\frac{nn}{\mu}\,\mathrm{cos.}\,v^2\\&-\frac{nn}{\mu}-\frac{n}{\mu}\,\mathrm{cos.}\,v\\&\qquad-\frac{n^3}{\mu}\,\mathrm{cos.}\,v\end{aligned}$$

cui aequationi vt fatis fiat, neceffe eft, vt fit:
$\mu=1$ et $CC=1-nn$, ita vt fiat:
$d\omega=dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)$ atque

$$d\Phi=\frac{dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)\sqrt{(1-nn)}}{(1+n\,\mathrm{cos.}\,v+p)^2}+\frac{\frac{3}{4}(1-\alpha)ab dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)\,\mathrm{cos.}\,2\theta}{bb(1+n\,\mathrm{cos.}\,v+p)^2}$$

§. 30. Altera vero aequatio, ex qua valorem ipfius p definiri oportet erit:

$$\frac{ddp}{dv}(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)^2+ndp\,\mathrm{fin.}\,v(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)+pdv(1-2n\,\mathrm{cos.}\,v-3nn)$$
$$-\frac{3(1-\alpha)ab dv(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)\,\mathrm{cos.}\,2\theta}{2bb}\sqrt{(1-nn)}\frac{-3abp dv(1+3\,\mathrm{cos.}\,2\theta)}{4bb(1+n\,\mathrm{cos.}\,v)}$$
$$+\frac{3ab dv(1+3\,\mathrm{cos.}\,\theta)}{4bb}=0$$

negligantior primo termini angulum θ negligentes vt et excentricitas n erit

$$\frac{ddp}{dv}+p\,dv-\frac{3abp dv}{4bb}+\frac{3ab dv}{4bb}=0$$

eritque $p=\frac{-3ab}{4bb-3ab}$, quae eft pars veri valoris ipfius p neque ab excentricitate n neque ab angulo θ pendens.

§. 31.

§. 31. Maneat adhuc excentricitas n euanefcens, eritque

$$\frac{ddp}{dv}+pdv-\frac{3abpdv}{4bb}-\frac{9abpdv\,\text{cof.}\,2\theta}{4bb}-\frac{3(1-\alpha)abdv\,\text{cof.}\,2\theta}{2bb}$$
$$+\frac{3abdv}{4bb}+\frac{9abdv\,\text{cof.}\,2\theta}{4bb}=0$$

fit nunc $p=\frac{-3ab}{4bb-3ab}+q$, erit

$$0=\frac{ddq}{dv}+qdv-\frac{3(1-\alpha)abdv\,\text{cof.}\,2\theta}{2bb}+\frac{9abdv\,\text{cof.}\,2\theta}{4bb}$$

omiffis terminis, qui ob $\frac{ab}{bb}$ prae reliquis funt minimi, atque facile patet, valorem ipfius q effe huiusmodi: $q=\frac{3\beta ab}{4bb}\,\text{cof.}\,2\,\theta$; nam ob $d\,\theta=-(1-\alpha)\,dv$, erit $d\,q=\frac{3(1-\alpha)\beta abdv\,\text{fin.}\,2\theta}{2bb}$ atque $ddq=\frac{-3(1-\alpha)^2\beta abdv^2\,\text{cof.}\,2\theta}{bb}$, quibus valoribus fubftitutis fiet diuifione per $3\,dv\,\text{cof.}\,2\,\theta$ facta

$$0=\frac{-(1-\alpha)^2\beta ab}{bb}+\frac{\beta ab}{4bb}-\frac{(1-\alpha)ab}{2bb}+\frac{3ab}{4bb}$$

feu $0=\beta(1-4(1-\alpha)^2)+3-2(1-\alpha)$ vnde fit

$\beta=\frac{1+2\alpha}{4(1-\alpha)^2-1}=\frac{1+2\alpha}{3-8\alpha+4\alpha\alpha}$. Erit ergo

$$p=\frac{-3ab}{4bb}+\frac{3(1+2\alpha)ab\,\text{cof.}\,2\theta}{4bb(3-8\alpha+4\alpha\alpha)}$$

qui eft verus valor ipfius p, quatenus is non ab excentricitate n pendet: quia autem hic ipfe valor valde eft paruus, eius partes ab excentricitate n pendentes, vtpote multo minores facile negligere licet.

§. 32. Quoniam haec potiffimum ad motum lunae accommodare animus eft, propterea quod lunae corpus ob eius motum libratorium ita formatum videtur, vt notabiliter a figura Sphaerica difcrepet, pofitiones noftras ita definiamus, vt ad lunam pertinere videantur. In luna autem directio virgae A B conftanter propemodum in rectam C O incidit; vnde fit angulus θ fere $= 0$, ideoque statui debet $\alpha = 1$, ob $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1) n \cos v)$, eritque $p = -\frac{3ab}{4bb} - \frac{9ab}{4bb} = -\frac{3ab}{bb}$ ob $\cos. 2\theta = 1$. Hinc fiet.

$$z = b\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \cos. v\right)$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{dv(1 + n \cos. v)\sqrt{(1 - nn)}}{\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \cos. v\right)^2}$$

§. 33. Ponatur breuitatis gratia $1 - \frac{3ab}{bb} = m$

$$\text{erit } \frac{1}{(m + n \cos. v)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2n \cos. v}{m^3} + \frac{3nn \cos. v^2}{m^4}$$

reiectis terminis, in quibus altiores potestates ipsius n occurrunt. Multiplicetur per $1 + n \cos. v$

$$\text{ac fiet } \frac{1}{m^2} + \frac{n \cos. v}{mm} - \frac{2nn \cos. v^2}{m^3}$$
$$- \frac{2n \cos. v}{m^3} + \frac{3nn \cos. v^2}{m^4}$$

quae insuper per $\sqrt{(1 - nn)} = 1 - \frac{1}{2} n n$ multiplicata

$$\text{dat } \frac{2 - nn}{2mm} - \frac{n(2 - m) \cos. v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m) \cos. v^2}{m^4}$$

At ob $\cos. v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2v$ habebitur:

$$\frac{2mm - mmnn + 3nn - 2mnn}{2m^4} - \frac{n(2 - m) \cos. v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m) \cos. 2v}{2m^4}$$

quae per dv multiplicata dat valorem ipsius $d\Phi$

§. 34. Habebimus ergo hanc aequationem

$$d\Phi = \frac{dv}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)dv}{2m^4} - \frac{n(2 - m)dv \cos. v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3 - 2m)dv \cos. 2v}{2m^4}$$

cuius integrale est

$$\Phi = C + v\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)}{2m^4}\right) - \frac{n(2 - m) \sin. v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3 - 2m) \sin. 2v}{4m^4}$$

vbi

vbi eſt $m = 1 - \frac{3ab}{bb}$. Denotat autem v anomaliam excentricam, quae ita eſt comparata, vt, ſi anomalia media ponatur $= u$, ſit $u = v + n$ ſin. v.

§. 35. Ponatur in primo termino pro v eius valor $u - n$ ſin. v, erit:

$$\Phi = C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{m^3} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) n \text{ ſin. } v$$
$$+ \frac{nn(3-2m)}{4m^4} \text{ ſin. } 2v$$

vbi duo vltimi termini continent aequationem centri, quae indicat, quantum locus medius a vero diſtet. Primi ergo termini

$$C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$

deſignant locum medium.

§. 36. Erit ergo motus medium ad motum anomaliae mediae, vt

$$u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) \text{ ad } u$$

ſed cum non ſolum nn ponatur valde paruum, ſed etiam $1 - m = \frac{3ab}{bb}$, ſit vehementer paruum, alterum terminum negligere licet; ita vt ſit motus medius ad motum anomaliae vti $\frac{1}{mm}$ ad 1, ſeu vt 1 ad $m.m$, quae ratio erit, vt 1 ad $\left(1 - \frac{3ab}{bb}\right)^2$ ſeu vt 1 ad $1 - \frac{6ab}{bb}$. Motus medius autem erit ad motum Aphelii, ſi O ſit ſol, ſeu ad motum Apogaei, ſi O ſit terra, vt 1 ad $\frac{6ab}{bb}$. Sicque Aphelium ſeu Apogaeum in conſequentia promouetur; et quidem interuallo vnius reuolutionis ſecundum motum medium per ang: $= \frac{6ab}{bb} \cdot 360^\circ$.

 §. 37.

§. 37. Egregie haec conclusio quadrat in motum lunae, cuius Apogaeum fere duplo celerius progreditur, quam per Theoriam inuenitur. Obseruationes enim praebent motum lunae medium ad motum anomaliae mediae, vt 1, 0085193 ad I, ita vt motus medius sit ad motum Apogaei vt 1, 0085193 ad 0, 0085193, hoc est, vt 1 ad 0, 0084473. Per Theoriam autem ob actionem solis motus lunae medius ad motum Apogaei tantum esse deberet vt 1 ad 0, 0041045, vnde excessus motus Apogaei veri supra Theoreticum est ad motum medium vt 0, 0043428 ad 1.

§. 38. Ad modum ergo probabile videtur, hunc motus Apogaei lunae excessum inde oriri, quod lunae corpus sit oblongum, eiusque axis longior perpetuo ad centrum terrae fere directus. Atque hinc etiam ratio figurae istius oblongae definiri poterit, cum esse debeat $\frac{6ab}{bb} = 0,\ 0043428$. Posito enim in semidiametris terrae $b - 60$, fiet $ab = 2,\ 60568$, et si fingamus $a = b$ seu $CB = CA$, foret $CA = CB = 1\frac{1}{4}$: hincque prodiret tota distantia seu longitudo virgae $AB = 2\frac{1}{2}$ semid. terrae. Luna ergo, cnm non sit virga duobus globis onusta, vt eius figura quasi aequiualeat, multo longior esse deberet, ac fortasse 3 diametros terrae superare, ita vt eius axis longior plus quam octies excederet breuiorem, quod vix verisimile videtur.

§. 39. Quodsi ergo huiusmodi figura lunae oblonga non toleranda videatur, etsi fortassis minor a figura Sphaerica defectus aliquid ad Apogaei accelerationem conferre possit; alia certe vis adesse debet insuper in lunam agens

agens, quae tanto Apogaei motui producendo par ſit: ſeu ſtatuendum erit, vim terrae, lunam trahentem, non exacte eſſe quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem: quod cum ex nonnullis lunae exiguis inaequalitatibus, quae Theoriae repugnant, concludendum videtur, tum etiam inde, quod parallaxis lunae vera integro fere minuto maior deprehenditur, quam ſecundum Theoriam eſſe deberet.

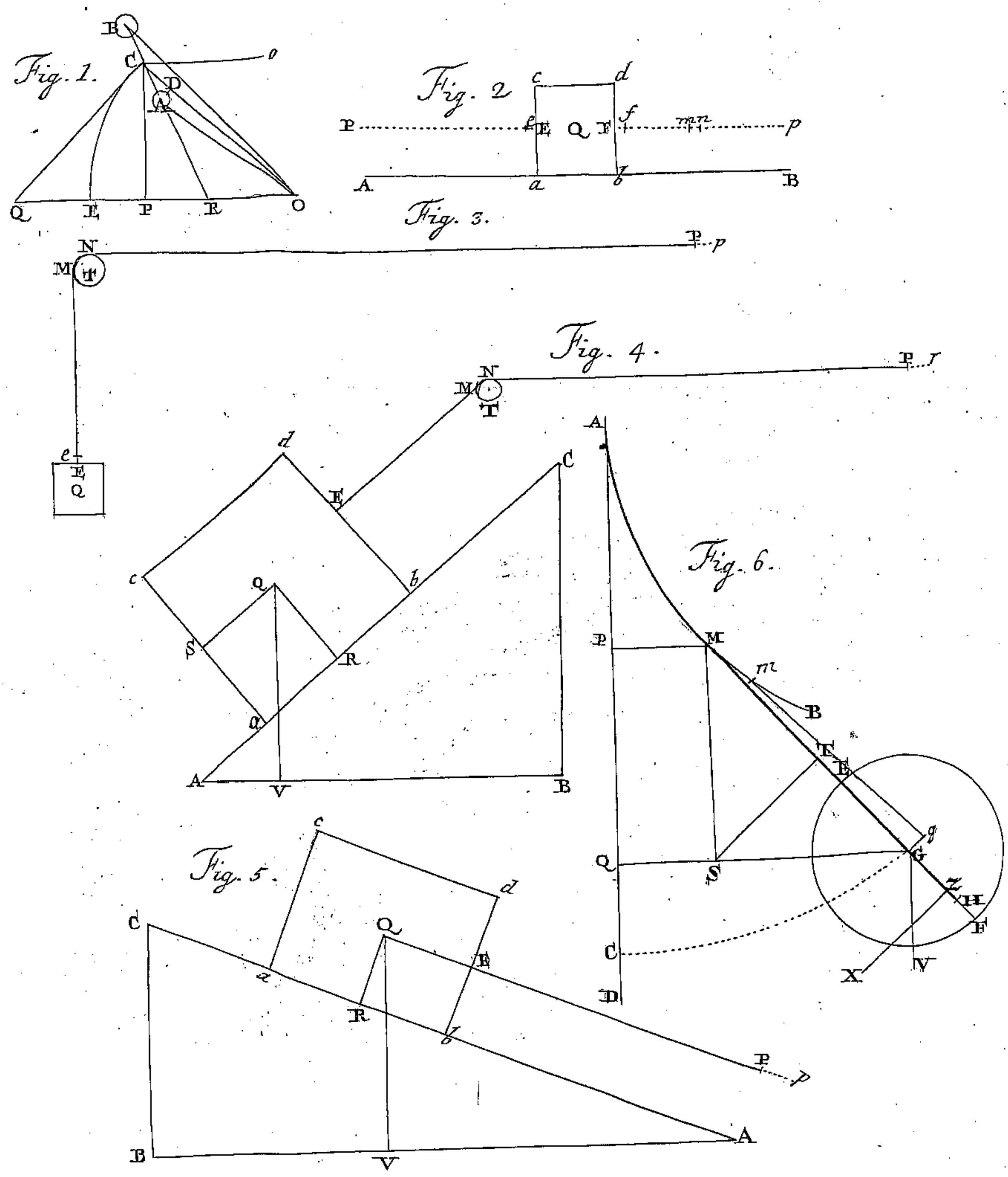
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.