



SUR LE
PRINCIPE
DE LA
MOINDRE ACTION,

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

Si la question étoit, lequel des Philosophes a été le premier, à qui il est venu dans l'esprit, que la Nature dans toutes ses opérations suivoit la voye la plus facile, ou ce qui revient au même, faisoit le moins de dépense? il seroit assurément ridicule, que quelqu'un des Philosophes modernes voulût s'attribuer cette gloire. Car les plus anciens Philosophes avoient déjà reconnu, que la Nature ne faisoit rien en vain, ce qui s'accorde parfaitement avec la moindre dépense; car si la Nature employoit des dépenses superflus, il n'y a pas de doute, qu'elle ne fit quelque chose en vain. Aristote fait déjà souvent mention de ce dogme, et paroît l'avoir plutôt pris de ceux qui l'avoient précédé, que l'avoir imaginé lui-même. La proposition a fait ensuite un si grand progrès dans les Écoles, qu'on l'a regardée comme un des premiers préceptes de la Philosophie, jusqu'à ce qu'enfin Descartes a osé la rejeter. Lors donc que M. *Kanig* nous objecte *Malebranche, s'Gravesande, Wolff*, & d'autres encore, qui ont dit, que la Nature suivoit toujours les routes les plus faciles, ou employoit le moins de dépense dans ses opérations; non seulement nous sommes de son avis, mais nous convenons

mons encore, qu'il auroit pû en nommer un bien plus grand nombre. Aussi nôtre Ill. Président n'a t'il jamais prétendu, que personne avant lui n'eut pensé à cette loi, & il a abandonné volontiers cette gloire, quelle qu'elle soit, aux autres que M. *Kœnig* en a jugé dignes.

Il n'est donc pas ici question de chercher, qui a dit le premier, que dans la Nature il y avoit une telle Loi? mais qui a été le premier, qui a fait connoître exactement cette Loi? Et qui a déterminé le véritable fonds, que la Nature épargne, non pas seulement quelquefois, mais épargne toujours, & dans toutes ses opérations? Et c'est cela que nous nions avec la plus grande justice, qu'aucun autre ait fait avant nôtre Ill. Président. Nous accorderons donc facilement, que plusieurs ont reconnu en général cette Loi, mais l'ont reconnuë si obscurément, qu'on ignoroit entièrement ce que c'est que la Nature épargne. Nous accordons même, que dans quelques unes de ses opérations quelques Auteurs ont connu ce qui étoit un *Minimum*; mais ce n'a été que dans des cas si particuliers, qu'on ne pouvoit jamais l'appliquer aux autres cas, ou que du moins on ne voyoit aucun moyen d'en faire l'application. Mais, quoique cette première connoissance soit digne de louange, & doit être regardée comme ayant ouvert la route à une connoissance plus étenduë; puisque nos connoissances ne s'élevent que par degrés, des plus particulières aux plus générales; cependant comme on considère ici la force universelle de la Nature, qui s'étend à toutes ses opérations, on n'en peut rien attribuer à ce qui ne subsiste que dans des cas particuliers. Et l'on doit dire que celui qui a déterminé ce qui dans toutes les opérations de la nature est un *Minimum*, est celui qui a découvert ce que la Nature se propose; en quoi consiste le dernier degré de nôtre connoissance. Or, avant M. de *Maupertuis*, il ne se trouve certainement personne, qui ait pû prétendre à cette découverte; & par cela seul, qu'il a clairement exposé cette Loi universelle, on voit assez que la gloire de la première invention lui est dûë. Car comment pourroit-on croire

croire qu'il eut pris d'un autre, ce que personne avant lui n'avoit dit savoir.

Mais il n'y a personne, contre qui nous dûssions avoir moins cette dispute à soutenir que contre M. le Professeur *Kœnig*, qui nie hardiment, qu'il y ait dans la Nature une telle Loi universelle, et qui pousse l'ineptie jusqu'à se moquer du Principe d'Épargne, en quoi consiste le *Minimum* que la Nature affecte. Ajoutez à cela, qu'il introduit le grand *Leibnitz* comme parlant, et qu'il l'explique comme ayant été fort éloigné lui même de la connoissance d'un tel Principe. D'où l'on voit que Mr. *Kœnig* ne peut refuser à nôtre Président la découverte de ce Principe, qu'il juge faux. Cependant il n'est guères d'accord avec lui même, lorsqu'il cite *Malebranche*, *s'Gravesande*, *Wolff*, et *Leibnitz* même, comme les Auteurs, chez lesquels M. de *Maupertuis* a puisé son principe. Car comme il n'accuse ceux-cy d'aucune erreur, comment peut-il en accuser M. de *Maupertuis*, s'il a pris son principe d'eux? Mais il dit que ce qu'il a pris de ces Auteurs est vrai, et que ce qu'il y a ajouté, est faux. Il avouë donc que le Principe de nôtre Ill. Président contient quelque chose, qui n'a point été dit par ces Auteurs, et le lui accorde; nous aquiesçons à cet aveu. Comme donc ce en quoi le Principe de Mr. de *Maupertuis* diffère du sentiment des Auteurs, que nous venons de nommer, consiste dans l'Universalité, que M. *Kœnig* désapprouve; par cela même il accorde, que ces Auteurs ont été très éloignés de la connoissance de la Loi universelle de la Nature, et laisse positivement à nôtre Président seul la découverte de cette Loi, en quoi consiste le principal état de la question. Quant à ce que M. *Kœnig* oppose que ce Principe est faux, nous nous en mettons peu en peine; la vérité ne dépendra jamais de son opinion: nous ferons voir cy-après, combien il s'est misérablement trompé dans ses démonstrations, qu'il vanteroit avec tant d'ostentation. Ces objections donc, qu'il croyoit invincibles, étant ruinées, il sera forcé d'avouër, que le Principe de M. de *Maupertuis* est non seulement très beau, et de la plus grande importance dans toute la

Philosophie; mais encore qu'on ne sauroit attribuer à aucun autre qu'à Lui la gloire de la découverte. Si donc il avoit regardé comme digne de reproche cette découverte, pendant qu'il la croyoit fausse, il faut, après qu'on lui en aura fait voir la vérité, qu'il la regarde comme digne de louange.

Cependant comme cette controverse, dans laquelle M. *Kœnig* a impliqué l'Académie, a fait naître l'occasion d'agiter la question du *Minimum*, que la Nature affecte, duquel comme le fait voir assez clairement M. *Kœnig*, on juge d'ordinaire assez mal, il ne sera pas hors de propos d'exposer ici en peu de mots, & d'expliquer tout ce qui avoit été fait sur cette question avant M. de *Maupertuis*.

Premièrement, quoique les plus anciens Philosophes, & les Sectateurs d'Aristote aient établi, que la Nature ne faisoit rien en vain, & que dans toutes ses opérations elle choisissoit la voie la plus courte; quoique dans ce principe ils aient fait consister la cause finale, que la Nature avoit le plus en vuë: nous ne voyons pas cependant, qu'ils aient expliqué aucun phénomène par ce Principe. Si tous les mouvemens de la Nature se faisoient dans des lignes droites, on pourroit d'abord conclure, que la Nature choisit la ligne droite, parce qu'elle est la plus courte entre deux termes. On voit à la vérité chez Ptolémée, que c'est la cause qu'il assigne, pour laquelle les rayons de la lumière viennent à nous en ligne droite: mais comme cela n'arrive, que lorsque le milieu, que ces rayons traversent, est homogène, cette explication étoit trop bornée, pour mériter aucune attention. Car comme excepté dans ce cas, à peine se trouve-t-il aucun autre mouvement produit dans la Nature, qui se fasse en ligne droite, il étoit assez manifeste, que ce n'étoit point la route la plus courte proprement dite, que la Nature affectoit. Il se trouva donc des Philosophes, qui penserent qu'on pouvoit aussi bien prendre pour la ligne la plus courte, la ligne circulaire; peut-être parce qu'ils avoient appris des Géomètres, que dans la superficie de la sphère les arcs des
grands

grands cercles étoient les lignes les plus courtes entre deux points. De là croyant que les corps celestes se mouvoient dans de grands cercles, ils n'hésitoient pas à placer dans cette propriété du cercle la cause finale de leurs mouvemens. Mais comme on fait maintenant, que les lignes décrites par les corps celestes, non seulement ne sont point des cercles, mais même n'appartiennent qu'à un genre de courbes des plus transcendentes ; cette opinion des lignes droites ou circulaires, que la Nature affecteroit, est entièrement bannie ; & ce sentiment, que la Nature cherche partout un *Minimum*, paroissoit entièrement renversé. Il ne faut pas douter, que ce ne soit la cause, pour laquelle Descartes & ses Sectateurs ont crû, qu'il falloit rejeter absolument de la Philosophie les causes finales ; prétendant que dans toutes les opérations de la Nature on remarquoit plutôt une inconstance extreme, que quelque Loi certaine & universelle. Tant s'en falloit donc, que le renouvellement & le progrès de la Philosophie nous eussent rendus plus certains de ce Principe, qu'au contraire ils paroissoient nous écarter de sa connoissance.

Cependant dans quelques cas particuliers il resta comme une ombre de ce Principe universel ; il faut surtout compter parmi ces cas la réflexion de la Lumiere. Comme elle se fait toujours tellement, que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, Ptolemée fit voir que la route, que décrit le rayon, est la plus courte ; que s'il étoit réfléchi de toute autre manière, la route qu'il décriroit seroit plus longue. Or il étoit clair, que cette explication ne pouvoit avoir lieu pour la réfraction, où la route dans laquelle les rayons sont détournés, ne peut pas se concilier avec la plus courte.

Quoi qu'on vit donc, que dans le mouvement direct & réfléchi des rayons, la Nature choisissoit en effet la route la plus courte, la seule réfraction fit connoître, qu'on ne pouvoit faire consister la Loi de la Nature dans le choix du plus court chemin ; outre qu'une infinité d'autres phénomènes étoient contraires à cette Loi. Comme donc

on ne trouvoit point ici de Loi universelle, il falloit avoir recours à quelqu'autre *Minimum* qu'à la longueur de la route, tant dans le mouvement direct, que dans le mouvement réfléchi des rayons, qui dans ces cas se confondit avec la route la plus courte; mais qui eût lieu aussi dans la réfraction des rayons. Sur cette considération Fermat établit, que les rayons de la lumière ne cherchoient pas tant dans leur mouvement la route la plus courte, que celle par laquelle ils pouvoient parvenir d'un point à un autre dans le tems le plus court. Or il posa que dans un même milieu les rayons se mouvoient de la même vitesse, de sorte que dans un même milieu les tems étoient proportionels aux routes décrites; & qu'ainsi, tant dans le mouvement direct que dans le réfléchi, la route la plus courte étoit nécessairement celle qui étoit décrite dans le tems le plus court: mais que dans des milieux diaphanes de différentes densités, tels que l'air, l'eau, le verre, la vitesse des rayons de la lumière étoit aussi différente, plus grande dans les milieux les plus rares comme l'air, moindre dans les plus denses, comme le verre: sentiment qui paroissoit assez conforme à la Nature. Et par cette Hypothese, que Descartes attaqua vivement, après les plus grandes difficultés de calcul vaincuës, il parvint à expliquer heureusement les phénomènes de la réfraction, & trouva que les sinus des angles d'incidence & de réfraction devoient conserver toujours entre eux le même rapport, comme l'expérience le faisoit voir.

Mais Descartes, ennemi redoutable de Fermat, proscrivant absolument les causes finales, expliqua tout autrement la réfraction. Appliquant ici les règles de la collision des corps, il fit voir qu'un corps sphérique jetté obliquement dans un fluide devoit se détourner de son chemin: & comme il avoit établi, que les rayons de la lumière n'étoient qu'une suite de petits globules, si un rayon passoit obliquement d'un milieu diaphane dans un autre, il falloit qu'il changeât de direction: d'où il tira aussi les mêmes règles de réfraction, que les expériences indiquoient. Mais Descartes s'écartoit de Fermat en ce qu'il

qu'il crût que les rayons de la lumière se mouvoient plus vite dans un milieu plus dense, tel que le verre, que dans un milieu plus rare, tel que l'air; au lieu que Fermat établissoit le contraire. Descartes pensoit que la cause de cette plus grande vitesse dans le verre, que dans l'air, venoit de ce que le verre oppoisoit à leur passage moins de résistance que l'air, & chercha à en trouver les raisons dans les Principes de sa Philosophie. Cette controverse agitée dans ce tems avec tant d'ardeur doit paroître d'autant plus surprenante, que Descartes établissoit, que la lumière parvenoit dans l'instant aux plus grandes distances, ce qui ne pouvoit s'accorder avec l'idée de vitesse: rechercher donc, lequel de l'air ou du verre les rayons traversoient le plus vite, étoit une question ridicule.

Quoique le sentiment de Fermat fût reçu de la plus-part des Philosophes & des Géometres, qui n'étoient point attachés à la doctrine de Descartes, il s'en falloit cependant beaucoup, que Fermat pût s'attribuer la découverte d'une Loi générale, que la Nature suivit dans toutes ses opérations. Cet homme si subtil avoit bien remarqué, que le principe du moindre tems n'avoit lieu que dans le mouvement de la lumière, & ne pouvoit s'étendre aux autres Phénomènes. Il étoit encore plus éloigné de penser, qu'une pierre projetée, ou que les Planetes se meussent dans le Ciel selon la Loi du plus court tems. Ainsi, quand son sentiment auroit été vrai, il ne faisoit cependant rien pour la question présente, où il ne s'agit pas de quelque Principe particulier, mais d'un Principe universel, qui s'étende à toutes les opérations de la Nature. De plus, par cela même qu'il avoit Descartes pour adverfaire, & qu'il ne pouvoit le réfuter, il nuit encore moins à notre cause.

Leibnitz aussi a tâché de renverser l'explication de Fermat. Dans les Actes de Leipzig, 1682. il s'est proposé pour la réfraction de la lumière de rappeler dans la Philosophie ces causes finales, qui en avoient été bannies par Descartes, & de rétablir l'explication, que

Descartes avoit déduite de la collision des corps, à laquelle le sentiment de Fermat étoit contraire. Il commence donc par nier, que la Nature affecte, soit la route la plus courte, soit celle du moindre tems; mais prétend qu'elle choisit la route la plus facile, qu'il ne faut confondre avec aucune des deux. Or pour estimer cette route la plus facile, c'est la résistance, avec laquelle les rayons de la lumière traversent les milieux diaphanes qu'il considère, & il suppose cette résistance différente dans les différens milieux. Il établit même, ce qui paroît favoriser l'opinion de Fermat, que dans les milieux les plus denses, comme l'eau & le verre, la résistance est plus grande que dans l'air & les autres milieux plus rares. Cela supposé, il considère la difficulté que trouve un rayon, lorsqu'il traverse quelque milieu, & estime cette difficulté par le chemin multiplié par la résistance. Il prétend, que le rayon suit toujours cette route, dans laquelle la somme des difficultés ainsi évaluée est la plus petite: & par la methode de *Maximis & Minimis*, il trouve la règle que l'expérience a fait connoître. Mais, quoique cette explication au premier coup d'oeil semble s'accorder avec celle de Fermat, elle est cependant ensuite interprétée avec une subtilité si merveilleuse, qu'elle lui est diamétralement opposée, & qu'elle s'accorde avec celle de Descartes. Car, quoique *Leibnitz* ait supposé la résistance du verre plus grande que celle de l'air, il prétend cependant, que les rayons se meuvent plus vite dans le verre que dans l'air; & pour cela même que la résistance du verre est la plus grande, ce qui assurément est un insigne paradoxe. Or voici comme il s'y prend pour le soutenir: Il dit qu'une plus grande résistance empêche la diffusion des rayons, au lieu que les rayons se dispersent davantage là où la résistance est moindre; & que la diffusion étant empêchée, les rayons resserrés dans leur passage, tels qu'un fleuve qui coule dans un lit plus étroit, en acquèrent une plus grande vitesse. Ainsi l'explication de *Leibnitz* s'accorde avec celle de Descartes, en ce que l'un & l'autre donne aux rayons une plus grande vitesse dans le milieu le plus dense; mais elle s'en

écarte

écarter fort par la cause, que chacun assigne pour cette plus grande vitesse : puisque Descartes croyoit, que les rayons se mouvoient avec le plus de vitesse dans le milieu le plus dense, parce que la résistance y étoit moindre, & que *Leibnitz* au contraire attribué cette plus grande vitesse à une plus grande résistance. Si ce sentiment peut être admis ou non ? ce n'est pas ce que j'examine ici ; mais ce que je dois remarquer, c'est que, quoique *Leibnitz* semble vouloir regarder ce Principe de la route la plus facile comme universel, cependant il ne l'a jamais appliqué à aucun autre cas, ni enseigné comment dans d'autres cas cette difficulté, qu'il falloit faire un *Minimum*, devoit être estimée. S'il dit comme ici, que c'est par le produit de la route décrite multipliée par la résistance, dans la plus-part des cas il fera absolument impossible de définir ce qu'on doit entendre par la résistance, qui est un terme très vague ; & lorsqu'il n'y aura aucune résistance, comme dans le mouvement des Corps celestes, comment cette difficulté devra-t-elle être estimée ? Sera-ce par la seule route décrite, puisque la résistance étant nulle, on pourroit la regarder comme partout la même. Mais alors il s'ensuivroit, que dans ces mouvemens la route elle-même décrite devoit être le *Minimum*, & par conséquent la ligne droite, ce qui est entièrement contraire à l'expérience. Si au contraire le mouvement se fait dans un milieu résistant, dira-t-il, que ce mouvement sera tel, que le produit de la route décrite multipliée par la résistance soit un *Minimum* ? On tiroit de là les conclusions les plus absurdes. On voit donc clairement, que le Principe de la route la plus facile, tel qu'il a été proposé & expliqué par *Leibnitz*, ne sauroit s'appliquer à aucun autre Phénomène, qu'à celui du mouvement de la lumière.

Il semble cependant qu'on pourroit rendre ce Principe beaucoup plus étendu, par l'interprétation qu'on donneroit aux remarques qui suivent. Car *Leibnitz* supposant que les rayons se meuvent d'autant plus vite, qu'ils trouvent une plus grande résistance, dans ce cas la
vitesse

vitesse seroit proportionnelle à la résistance, & pourroit être prise pour sa mesure ; & l'estimation de la difficulté selon que *Leibnitz* l'a faite, se réduiroit au produit de la route décrite multipliée par la vitesse ; ce qui étant supposé un *Minimum*, s'accorderoit avec le Principe de *M. de Maupertuis*, qui estime la quantité d'action par le même produit de l'espace multiplié par la vitesse. Comme donc ce produit, non seulement dans le mouvemens des rayons, mais dans tous les mouvemens & dans toutes les opérations de la Nature, devient en effet le plus petit possible, & que c'est en cela que consiste le Principe de la moindre action ; on pourroit d'abord penser, que *Leibnitz* avoit en vuë ce principe, qui s'accordoit avec son principe de la route la plus facile. Mais quand nous admettrions sans aucune exception le raisonnement de *Leibnitz*, par lequel il veut prouver, qu'une plus grande résistance augmente la vitesse, personne cependant ne pourra jamais croire, que dans tout mouvement il arrive, que la vitesse croisse avec la résistance ; y ayant dans la Nature une infinité d'exemples, où le contraire saute aux yeux, & où la résistance diminue la vitesse. C'est donc par un pur hazard qu'il arrive icy, que le Principe du chemin le plus facile s'accorde avec celui de la moindre action ; ainsi qu'il arrive, que le Principe de *Ptolemée* du chemin le plus court dans l'Optique & dans la Catoptrique, s'accorde encore avec ce même Principe : quoique ce ne soit que dans ce Principe même, qu'il faille chercher la raison de ces phénomènes. Ainsi, lorsque *Leibnitz* donne son Principe du chemin le plus facile pour une loy universelle de la Nature, & fait la difficulté proportionnelle au produit du chemin par la résistance, il ne sauroit accorder cela avec le Principe de la moindre action dans aucun autre cas, que dans ceux, où la vitesse croit proportionnellement avec la résistance ; cas qui sont assurément bien rares, si l'on n'ose pas dire, qu'il ne s'en trouve aucun.

Dans tous les autres cas donc, le Principe du chemin le plus facile différera beaucoup du Principe de la moindre action ; & *Leibnitz*

se feroit contredit lui-même, s'il avoit jamais prétendu, que dans les opérations de la Nature, le produit du chemin décrit multiplié par la vitesse faisoit un *Minimum*, excepté les seuls cas, où la vitesse seroit proportionelle à la résistance. D'où nous concluons avec assurance, que le Principe de la moindre action non seulement a été entièrement inconnu à *Leibnitz*, mais encore qu'il a employé un Principe fort différent, qui ne s'accordoit avec celui-là que dans un très petit nombre de cas très singuliers; pendant que dans une infinité d'autres, il lui étoit manifestement contraire. Mais de plus ce Principe de *Leibnitz*, quelque général qu'il paroisse, n'est d'usage que dans fort peu de cas, & ne l'est peut être que dans les seuls, dont nous avons parlé. Dans tous les autres on ne peut pas même l'appliquer, parce qu'on ne sçait pas comment mesurer la résistance; & que, de quelque manière qu'on la mesurât, elle jetteroit toujours dans de grandes erreurs. Tant s'en faut donc, que *Leibnitz* ait jamais eu le Principe de la moindre quantité d'action, qu'au contraire il a eu un Principe tout opposé, dont l'usage, excepté dans un seul cas, n'étoit jamais applicable, ou conduisoit à l'erreur. Et l'on ne voit pas aussi, que *Leibnitz* ait voulu dans aucun autre cas faire l'application de ce Principe.

On ne pouvoit donc rien imaginer de plus ridicule, que de supposer le fragment de cette Lettre, qui attribuoit à *Leibnitz* un Principe opposé à celui qu'il a publiquement adopté. Et l'on ne sçauroit sauver cette absurdité par la différence des tems, où l'on voudroit supposer, qu'il a eu ces différents principes, Car *Leibnitz* ayant expliqué la réfraction par un Principe tout différent de celui de la moindre action, si depuis il étoit parvenu à la connoissance de ce Principe universel, qui y étoit si applicable, la première chose sans doute qu'il eut faite, c'eut été d'en faire l'application aux phénomènes de la Lumière, pour lesquels il s'étoit servi d'un Principe si éloigné de celui-ci.

C'est une chose assurément digne de remarque, qu'un partisan de *Leibnitz* nous ait mis en même tems dans la double obligation, de prouver que le Principe de la moindre action est vrai, & qu'il n'est point de *Leibnitz*. C'étoit une adresse singulière de M. *Kœnig* : aux uns il vouloit faire croire que le Principe de M. de *Maupertuis* étoit une chimère : à ceux à qui il n'auroit pas pû le persuader, il vouloit faire croire, que le Principe étoit de *Leibnitz*. Il n'a pas mieux réüssi pour l'un que pour l'autre.

Or comme les disciples de *Leibnitz* ont coûtume avec beaucoup de raison de faire grand cas de tous ses Ecrits, & de celui dont nous parlons, qui se trouve dans les Actes de *Leipzig* ; il est assez surprenant, que l'Ill. Baron de *Wolff*, d'ailleurs si attaché à tous les sentimens de *Leibnitz*, dans l'explication de la réfraction de la Lumière, se soit tellement écarté de son Maître, que rejetant sa subtile explication il ait rapporté mot à mot dans ses Elémens de Dioptrique l'explication de Fermat, rejetée par *Leibnitz*. Car dans son II. Problème §. 35. ce grand homme ayant supposé la vitesse de la Lumière différente dans différents milieux, plus petite dans les plus denses, plus grande dans les plus rares, il cherche le tems qu'un rayon employera pour parvenir par quelque route que ce soit d'un point donné à un autre point placé dans un autre milieu ; d'où il conclut, que la Nature agissant toujours par le plus court chemin, ce tems doit être le plus petit. On ne voit pas assurément ici, comment il conclut de la route la plus courte, au moindre tems : de plus il n'apporte ni n'allégué aucune preuve de sa proposition ; pendant que partout ailleurs à peine profère-t-il sans en alléguer l'axiome, que *le tout est plus grand que sa partie*. Par cela donc que le premier des sectateurs de *Leibnitz* a non seulement omis son explication de la réfraction, mais encore lui a préféré celle de Fermat, nous pouvons avec sûreté conclure, que l'explication de *Leibnitz* n'a pas paru peu suspecte à cet homme si éclairé : & que ce n'est pas dans cette source, qu'on doit chercher le Principe qui régit la Nature.

Mais

Mais outre ce *Minimum*, que la Nature affecte dans le mouvement de la Lumière, les Philosophes, & surtout les Geomètres, ont recherché ce qui étoit un *Minimum* dans les autres opérations de la Nature. Car nous devons ici principalement consulter les Geomètres, qui peuvent non seulement définir exactement ce que c'est que le *Minimum*, mais encore qui peuvent démontrer comment ce *Minimum* arrive : pendant que les Philosophes qui s'écartent de la Geométrie, se contentent d'ordinaire de termes vagues, & qui ne signifient rien de certain, qui n'expliquent point ce que c'est que le *Minimum*, & par lesquels on peut encore beaucoup moins connoître, comment le *Minimum* arrive : comme lorsqu'ils disent en général, que la Nature opère par la route la plus courte, ou par la plus facile, sans expliquer, ni quelle est cette route la plus courte dans chaque cas, ni qu'elle est la plus facile ; & qu'ils ne démontrent point, comment dans chaque cas cette route devient, ni la plus facile, ni la plus courte. Mais les Geomètres, qui ont traité cette matière avec plus d'exactitude, n'ont examiné que quelques phénomènes particuliers déduits de cette Loi de la Nature, que les Anciens n'avoient que confusément admise, cherchant ce qui dans les phénomènes devenoit en effet un *Minimum*. Et nous ne trouvons dans ce genre rien de plus, que ce qui a été observé par quelques uns touchant les règles de la collision des corps, qui se borne à un cas extrêmement particulier. Cependant M. *Kœnig* a la hardiesse d'accuser notre Ill. Président d'en avoir tiré son Principe universel, en cachant par un insigne plagiat les noms des Auteurs. Accusation d'autant plus absurde, que de l'aveu même de M. *Kœnig* cette observation du *Minimum*, qui a lieu dans la sollicitation des corps, est extrêmement limitée, & n'embrasse qu'un certain cas de cette collision : mais le Principe produit par M. de *Maupertuis* est universel, toute sa force consiste dans son universalité, & il ne sauroit en aucune manière être déduit de cette Observation particulière. M. *Kœnig* nomme surtout MM. *s'Gravesande* & *Engelbard*, comme ceux avec lesquels notre Ill. Président a concouru, & comme ayant

remarqué depuis longtems ce qu'il a donné ; d'où l'on voit plus clair que le jour, combien M. *Kœnig* se contredit lui-même : car approuvant extrêmement ce que ces deux Auteurs ont dit, comment peut-il reprendre d'erreur M. *de Maupertuis*, s'il n'a dit que la même chose ? Et M. *Kœnig* déclarant le Principe faux, comment se peut-il faire, que M. *de Maupertuis* l'ait pris de ces deux Héros ? M. *Engelbard* aussi n'aura pas de graces à rendre à M. *Kœnig* d'avoir introduit son nom dans cette dispute ; il paroît honorable à la vérité pour lui d'avoir enseigné, il y a vingt ans, ce que M. *de Maupertuis* n'a proposé que depuis peu, comme une importante découverte ; cependant M. *Kœnig*, comme pour le confondre davantage, ajoute aussi-tôt après, que cette découverte avoit été publiée il y a 30 ans par *s'Gravesande*, & connuë des moindres Geomètres. Il impute donc ici le plus honteux plagiat à M. *Engelbard*, qu'il venoit tout à l'heure de citer honorablement, en le faisant parler, comme s'il avoit découvert ce qui dix ans auparavant étoit dans les livres de *s'Gravesande*. M. *Kœnig* traitant donc si injurieusement ses amis, il n'est pas surprenant, qu'il ne rougisse pas de se comporter à l'égard de ses adversaires avec tant d'iniquité, & de les accuser dans des cas, où il n'y a pas la moindre vraisemblance.

Mais voyons ce que MM. *Engelbard* & *s'Gravesande* ont dit : car puisque l'un & l'autre ont dit la même chose que nôtre Ill. Président, il faut què ce que l'un a dit, l'autre l'ait dit aussi. La découverte de *s'Gravesande*, selon l'exposition même qu'en fait M. *Kœnig*, consiste en ce que, si deux corps non élastiques se rencontrent de telle manière qu'après le choc l'un & l'autre demeurent en repos, la somme des forces vives avant le choc étoit la moindre, pourvû qu'on conçoive la vitesse relative demeurer la même. D'où l'on tire cette proposition : que dans le choc des corps non élastiques, la quantité de force vive qui périt, est égale à la plus petite force vive, que les mêmes corps pourroient recevoir, la vitesse respective avant le choc

de-

demeurant la même : Proposition qui n'est d'aucune importance, & qui n'a pas le moindre rapport au Principe de la moindre action. Car comme il ne s'y agit que de ce qui péric, & qu'en cela même ce n'est pas la plus petite force vive, mais quelque chose qui se réduit à une autre force vive, qui ne peut être prise pour un *Minimum* que sous une certaine & particulière considération; au lieu qu'ici c'est de ce qui est réellement produit, qu'il s'agit: on voit entre les deux une telle différence, qu'il n'est pas possible d'en imaginer une plus grande. Et ce que *s'Grav. sande* ajoute du choc de plusieurs corps, partant du même Principe, ne fait pas plus à notre affaire. Enfin la force de cette Proposition est tellement restreinte, qu'elle n'a lieu que pour les corps non-élastiques; pendant que le Principe de la moindre action a la plus grande étendue, & n'est sujet à aucune restriction. Après cela y aura t-il quelqu'un d'un esprit sain, qui accuse celui qui a découvert la vérité la plus étendue, de l'avoir prise dans un cas aussi particulier? Assurément on ne s'attendroit pas à une telle accusation, si l'on ne savoit, que la fureur de la chicane aveugle M. *Kanig*; fureur qui le transporte tellement, que partout où il trouve le mot de *Minimum*, il croit avoir trouvé la source du Principe de la moindre action.

Comme donc M. *Kanig* lui-même n'a pas pu trouver d'autres phénomènes du mouvement, dans lesquels on eût observé aucun *Minimum*; on sera forcé de reconnoître, qu'avant M. de *Maupertuis*, il n'y avoit que quelques cas très limités, dans lesquels on eût trouvé quelque raison du *Minimum*; & qu'il n'y a eu absolument personne, qui se soit attribué la découverte d'un Principe général.

Je ne rapporte point ici l'observation que j'ai faite, que dans le mouvement des Corps celestes, & qu'en général dans le mouvement de tous les corps attirés vers des centres de forces, si à chaque instant l'on multiplie la masse du corps par l'espace parcouru & par la vitesse, la somme de tous ces produits est toujours la moindre. Car, quoique

cette découverte soit assurément de beaucoup préférable à celles que nous avons citées, & que le produit que je considère, présente l'action même telle que M. de Maupertuis la définit; il faut cependant remarquer, que n'ayant paru qu'après que M. de Maupertuis avoit exposé son Principe, elle ne peut porter aucun préjudice à sa nouveauté. De plus je n'avois point découvert cette belle propriété *a priori*; mais, (pour me servir des termes de Logique,) *a posteriori*, déduisant après plusieurs tentatives la formule, qui dans ces mouvemens devenoit un *Minimum*; & n'osant lui donner plus de force, que dans le cas que j'avois traité, je n'avois point crû avoir trouvé un Principe plus étendu: content d'avoir trouvé cette belle propriété dans les mouvemens, qui se font autour des centres de forces. M. Käinig aussi ne paroît pas faire grande attention à cette découverte; puisqu'après mes démonstrations, qui ne sont pas Métaphysiques, mais Géométriques, il doute encore, si mes formules deviennent des *Maximum* ou des *Minimum*? J'aurois donc fort souhaité, qu'un si grand Maître eut examiné mes démonstrations, & nous eut indiqué les erreurs, qu'il y auroit crû cachées: car je voudrois pouvoir acquérir quelque science d'un si sublime Docteur.

On avoit aussi remarqué dans l'équilibre des corps certains cas, où l'on trouvoit évidemment quelque *Minimum*. Il avoit été facile de s'apercevoir, que les corps graves ne pouvoient demeurer en équilibre, si leur centre de gravité n'étoit le plus bas qu'il fût possible. De là on avoit attribué à l'équilibre des corps graves cette propriété, que la distance de leur centre de gravité au centre de la terre, étoit la moindre. De ce Principe par la méthode des Isopérimètres les Géomètres avoient tiré plusieurs lignes courbes, comme la *Catenaire* formée par une chaîne, qui pend librement attachée par ses deux bouts; comme aussi la *Lintcaire*, que forme un linge rempli de liqueur, & quelques autres de cette espèce, dans lesquelles le commun centre de gravité occupe le lieu le plus bas. Mais si ces corps sont
assez

assez proches du centre de la Terre, ou de quelqu'autre centre de forces, pour que les directions des forces qui les sollicitent, ne pussent plus passer pour parallèles, alors la considération du centre de gravité cesse entièrement; parce qu'alors dans ces corps, il n'y a plus aucun point, qui ait la propriété du centre de gravité: alors aussi le Principe de la plus grande descente du centre de gravité n'a plus aucun lieu: il ne sauroit donc passer pour général, même dans le seul état d'équilibre, bien moins donc encor dans l'état du mouvement. Cependant on a remarqué dans quelques uns de ces cas une espece de centre de gravité, par la descente la plus grande duquel on pouvoit déterminer les états d'équilibre; mais personne ne s'est glorifié d'avoir atteint le Principe universel, qui avoit lieu dans tous ces états. M. Daniel Bernoulli, un des hommes des plus subtils dans ces sortes de spéculations, nous a donné à la vérité quelque chose de fort beau pour un cas extrêmement singulier, lorsqu'il a assigné *a priori* la quantité, qui dans les courbes élastiques étoit un *Minimum*; proposition dont j'ai ensuite démontré la vérité. Cette découverte, si on la compare avec les autres Principes particuliers, qu'on avoit trouvés auparavant, doit assurément passer pour une des plus sublimes; mais M. Kœnig fait voir clairement, qu'il ne l'a pas même comprise, lorsqu'il demeure si obstinément dans cette erreur de croire, que la formule que M. Bernoulli avoit assurée être un *Minimum* dans la courbure des corps élastiques, devient zero. Nous ferons voir cy-dessous, comment un raisonnement très faux l'a jetté dans une erreur si énorme. Tout ce qu'on avoit donc jusqu'ici donné sur le *Minimum* que la Nature affecte dans toutes ses opérations, tant pour l'état de mouvement que pour l'état d'équilibre, ne convenoit qu'à des cas très particuliers; & n'avoit point cette connexion, d'où l'on pût tirer quelque Principe plus général, qui conduisît seulement aux cas qu'on avoit traités. D'où l'on peut voir ce que M. de Maupertuis a fait dans cette matière, & combien peu il a à craindre le soupçon, que M. Kœnig a voulu susciter, comme s'il avoit pris ses Principes des autres.

Dés

Dés l'année 1740. dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, M. de Maupertuis avoit exposé le *Principe universel du repos & de l'équilibre*, qui renferme par un merveilleux accord tous les Principes particuliers, dont nous venons de parler : tant ceux qui sont tirés de la nature du centre de gravité, que ceux qui sont appropriés aux corps élastiques, quelques différens qu'ils paroissent ; & qui s'étend encore avec la plus grande universalité, à tous les cas d'équilibre, de quelque manière qu'ils se rapportent aux corps, ou aux forces sollicitantes. Car par ce seul Principe j'ai entièrement expliqué, non seulement tous les cas où les corps, soit rigides, soit flexibles, soit élastiques, soit fluides, peuvent jamais se trouver en équilibre ; mais encore ces cas se peuvent déterminer avec une facilité merveilleuse, de sorte que ce Principe doit passer dans la Mécanique pour une découverte importante. Car ce Principe posé, tout ce qui a été jusqu'ici traité tant dans la Dynamique que dans l'Hydrodynamique, en découle si aisément, que dans les cas même les plus compliqués, qui demandent par la méthode directe les recherches les plus ennuyeuses, on parvient à un calcul très élégant & très simple. L'état d'équilibre, surtout dans les machines de toute espèce, quelque composées qu'elles puissent être, se détermine avec tant de facilité, qu'on n'a pas besoin même d'avoir égard à leur construction ; ce qui rend souvent le calcul si pénible. Et comme les premiers élémens de cette Science suivent naturellement de ce même Principe, on doit le regarder comme le fondement le plus commode & le plus heureux, tant de la Dynamique, que de l'Hydrodynamique. Or ce Principe est tel, que sa vérité peut être démontrée par les raisonnemens les plus évidens ; & ne demande la considération d'aucun mouvement, par où l'ordre des différentes Sciences seroit troublé. Car il ne faut qu'examiner, comment chaque particule du corps est affectée par les forces sollicitantes, pour tirer de chaque sollicitation une quantité, qu'on peut appeller *l'efficace* de chaque force ; & assurer qu'il y aura équilibre, lorsque la somme de toutes ces *efficaces* sera la moindre : de sorte que par la seule

seule methode de *Maximis & Minimis*, on peut exécuter avec une facilité incroyable tout ce qui concerne la Dynamique & l'Hydrodynamique.

Il seroit donc fort ridicule de comparer un tel Principe avec ce Principe le plus stérile & le plus desagréable, que M. *Kœnig* a tâché de produire ; ce dernier confondant tellement le Dynamique avec le Phoronomique, qu'il ne seroit pas possible de parvenir à la connoissance d'aucun état d'équilibre, qu'on n'eût auparavant une connoissance parfaite du mouvement ; que non seulement dans la Dynamique il n'est pas permis de supposer, mais qui encore exige le plus souvent les recherches plus sublimes, & qui ne peut avoir d'application que dans un très petit nombre de cas ; comme nous ferons voir cy-dessous à l'égard du Principe de M. *Kœnig*, qui n'est applicable que dans un cas ou deux, & avec la confusion la plus vicieuse de différentes Sciences.

Le Principe, que M. de *Maupertuis* a découvert, est donc digne de la plus grande louange ; & l'on ne peut douter, qu'il ne soit fort supérieur à toutes les découvertes, qui avoient été faites jusqu'ici dans la Dynamique. Son usage n'embrasse pas seulement toute la Dynamique, ce qui seroit déjà une grande universalité ; mais avec une legère & naturelle addition, il s'étend avec le plus grand succès à toute la Science du mouvement : car pour chaque mouvement proposé on peut facilement comprendre, que ce que nous avons appelé *l'efficace*, étant pris pour chaque instant, la somme doit être un *Minimum*. Cette condition pour le mouvement étant ajoutée, on voit naitre l'autre Principe universel de notre Ill. Président, qu'il appelle *le Principe de la moindre action* ; car on peut démontrer facilement, comme je l'ai fait voir dans un Mémoire particulier, que si toutes les efficaces, dont nous avons parlé ci-dessus, sont multipliées par les élémens du tems, on voit naitre le produit de la masse par la vitesse & par le petit espace parcouru : produit qui contient l'idée de l'action.

Ces deux Principes sont donc si intimement liés l'un à l'autre, qu'on peut plutôt les regarder comme un seul : & comme le Principe du mouvement suit clairement du Principe de l'équilibre, de même le Principe de l'équilibre, ou de la moindre action, se peut appliquer à tous les cas de l'équilibre. Ainsi toutes les Sciences qu'on a coutume de comprendre sous le nom de Mécanique, soit qu'on s'y propose l'équilibre, soit qu'on s'y propose le mouvement, sont tellement fondées sur ce Principe, qu'on les en peut fort fertilement & fort parfaitement déduire. On voit aussi par là, que qui a admis l'un de ces Principes, ne peut plus douter de l'autre ; & le Principe de l'équilibre étant le plus rigoureusement démontré, on doit compter avec la même certitude sur le Principe du mouvement. La combinaison donc de ces deux principes, ou plutôt chacun pris séparément, puisqu'ils sont le plus étroitement liés l'un à l'autre, déclare cette Loi la plus universelle de la Nature, par laquelle nous connoissons enfin distinctement, ce que nous n'avions fait auparavant que soupçonner : Que la Nature dans toutes ses opérations affecte un *Minimum*, & que ce *Minimum* est certainement contenu dans l'idée de l'Action, telle qu'elle est définie par M. de Maupertuis ; de sorte qu'il ne reste plus rien à objecter.

