APPLICATION
DE LA
MACHINE HYDRAULIQUE
DE M. *SEGNER*
A' TOUTES SORTES D'OUVRAGES
ET DE SES AVANTAGES SUR LES AUTRES MACHINES HYDRAULIQUES DONT ON SE SERT ORDINAIREMENT,

PAR M. EULER.

I.

Ayant déjà donné la Théorie de cette Machine, (*) j'expoſerai ici plus en détail, de quelle manière on doit s'en ſervir le plus commodément dans toutes les occaſions, où l'on fait uſage des machines ordinaires, qui ſont miſes en mouvement par l'impulſion de l'eau contre les aubes d'une rouë. Je mettrai en même tems cette nouvelle machine en comparaiſon avec les machines ordinaires, pour faire voir les grands avantages, qu'elle eſt capable de fournir préférablement aux autres. Car, en employant la même quantité d'eau, & la même chûte, cette machine produira un effet à peu près quatre fois plus grand que les machines ordinaires, quand même elles ſont le plus avantageuſement appliquées.

II. Pour cet effet je commencerai par mettre dans tout ſon jour la Théorie des machines ordinaires, où il faut avoir égard aux articles ſuivans :

(*) Voyez le Tome précedent. p. 311. & ſuiv.

I. à la quantité d'eau, dont on eſt le maitre de ſe ſervir pour mettre la machine en mouvement. Soit donc D la quantité d'eau, que le reſervoir fournit par ſeconde.

II. à la hauteur, par laquelle on peut faire tomber cette eau, avant qu'elle frappe les aubes de la rouë : je nommerai cette hauteur $= a$.

III. Ces deux articles enſemble donnent ce qu'on peut nommer la force mouvante de la machine ; car, plus la quantité d'eau D fournie par ſeconde ſera grande, la force mouvante croitra en même raiſon ; & plus la hauteur de la chûte a ſera grande, la force en ſera augmentée en même raiſon. Ainſi on pourra exprimer la force mouvante par le produit Da : & on verra par la ſuite, que cette idée eſt réélle, & conforme à la Théorie.

IV. Donc, lorsque cette eau frappe contre les aubes, elle aura une viteſſe, qui répond à la hauteur a, ou bien cette viteſſe ſera $= \sqrt{a}$. Poſant donc $g =$ à la hauteur, par laquelle un corps tombe dans une ſeconde, puisque la viteſſe $\sqrt{g}$ parcourt l'eſpace $2g$ par ſeconde, la viteſſe $\sqrt{a}$ parcourra un eſpace $= 2\sqrt{ag}$ par ſeconde.

V. Puisque la quantité d'eau qui arrive par ſeconde eſt $= D$, elle formera avec cette viteſſe un filet d'eau, dont l'épaiſſeur ſera $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$: car cette épaiſſeur multipliée par l'eſpace parcouru dans une ſeconde $2\sqrt{ag}$, doit produire la quantité d'eau fournie par ſeconde. Ce filet frappera donc les aubes ſur un eſpace $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$: ou ce n'eſt qu'un tel eſpace ſur la ſurface des aubes, qui ſera frappée par l'eau.

VI. Or on ſait, que pour que la machine produiſe le plus grand effet, il faut que l'aube ſe meuve avec une viteſſe égale au tiers de la viteſſe

viteſſe de l'eau. Donc la viteſſe de ce point de l'aube ſera $= \frac{1}{3} V a$, ou elle décrira un eſpace $\frac{2}{3} V a g$ par ſeconde. Soit b le rayon de la rouë, & $1 : \pi$ le rapport du diametre à la circonference, de ſorte que $2 \pi b$ ſoit la circonference de la rouë; & $\frac{2}{3} V a g : 2 \pi b = \frac{V a g}{3 \pi b}$ donnera le nombre des révolutions, que la rouë acheve par ſeconde.

VII. La viteſſe donc, dont l'eau frappe l'aube, ne ſera que $\frac{2}{3} V a$ ou duë à la hauteur $= \frac{4}{9} a$. Et partant ſi nous ſuppoſons, que toute la quantité d'eau frappe les aubes, & que cela ſe faſſe perpendiculairement ſur l'eſpace $= \frac{D}{2 V a g}$, ce qui eſt le cas le plus avantageux, la force de l'eau contre l'aube ſera égale au poids d'un volume d'eau $= \frac{4}{9} a . \frac{D}{2 V a g} = \frac{2}{9} D V \frac{a}{g}$.

VIII. Il eſt bien vrai, que quelques Auteurs eſtiment cette force deux fois plus grande; & cela arrive actuellement, non ſeulement ſelon l'expérience, mais auſſi ſelon la théorie, lorsque la ſurface qui reçoit le choc eſt très large par rapport à la partie frappée; & que l'eau eſt obligée de rebrouſſer chemin, & de changer ſa direction juſqu'à un angle droit. Mais quand les aubes ne ſont pas ſi larges, & que l'eau aprés le choc ne ſubit point un ſi grand changement dans ſa direction, comme il arrive ordinairement, alors la force revient à celle qui a été trouvée.

IX. Ainſi, quand même nous voudrions accorder tous les avantages, la force de l'eau ſur les aubes deviendroit $= \frac{4}{9} D V \frac{a}{g}$; mais il il faut remarquer, que ce cas ne ſauroit avoir lieu que ſous ces trois conditions: 1mo, que toute la quantité d'eau D vienne frapper ſur les aubes, & que rien n'en échape: 2do, que le choc ſe faſſe toujours ſe-

lon une direction perpendiculaire à l'aube : & 3tio, que le filet d'eau ne frappe que ſur une petite partie de l'aube, ou plutôt que l'aube ſoit trés large par rapport au filet d'eau.

X. Cette quantité $\frac{4}{9}$ D $V\frac{a}{g}$ ſera donc aſſeurément trop grande pour exprimer la force de l'eau ſur l'aube, & il eſt très probable que la moitié $\frac{2}{9}$ D $V\frac{a}{g}$ ne ſera presque jamais trop petite. Par ces raiſons je prendrai un milieu en poſant cette force $= \frac{1}{3}$ D $V\frac{a}{g}$: & le moment pour tourner la rouë ſera $= \frac{1}{3}$ D $b\,V\frac{a}{g}$.

XI. Suppoſons que cette rouë faſſe μ révolution pendant chaque ſeconde, & nous aurons $\mu = \frac{Vag}{3\pi b}$, ou $\mu b = \frac{1}{3\pi} Vag$. Et poſant la longueur d'un pendule ſimple à ſecondes $= l$, de ſorte que $l =$ 3, 166 pieds de Rhin, on ſait que $\frac{2g}{l} == \pi\pi$: donc nous aurons $\mu b = \frac{1}{3} V\frac{1}{2} a l$.

XII. Quelle que ſoit la réſiſtance a vaincre par la force de la machine, il eſt permis de concevoir un tambour, dont le rayon $= c$, lequel ſoit mis en mouvement par la rouë principale, moyennant des pignons & rouës quelconques : & que la réſiſtance ſoit appliquée à ce tambour. Donc, poſant cette réſiſtance $=$ Q, qui marque un volume d'eau, dont le poids lui eſt égal, le moment de cette réſiſtance ſera $=$ Q c.

XIII. Suppoſons de plus, que ce tambour acheve ν tours dans une ſeconde, & puisque la rouë principale eſt ſuppoſée faire μ tours en même tems ; le principe général de l'équilibre de toutes les machines fournit cette égalité

$\frac{1}{3}\mu$.

$$\tfrac{1}{3}\mu.\ D\,b\,V\frac{a}{g} = v.\ Q\,c$$

& puisque $\mu\, b = \frac{1}{3} V \frac{1}{2} a l$, nous aurons $v\,Q\,c = \frac{1}{9} D\,a\, V\frac{l}{2g}$ ou bien, à cauſe de $\pi = V\frac{2g}{l}$; $v\,Q\,c = \frac{1}{9\pi} D\,a$.

XIV. En voici donc deux équations

I. $D\,a = 9\pi.\ v\,Q\,c$ & II. $\mu\, b = \frac{1}{3} V \frac{1}{2} a l$

qui renferment tout ce qu'il faut ſavoir de la théorie, pour mettre bien en pratique toutes les machines de cette eſpece : & ces deux équations ſont ſuffiſantes pour réſoudre toutes les queſtions, qu'on ſçauroit former ſur la conſtruction de ces machines.

XV. On voit bien que ſous le moment $Q\,c$ on peut comprendre auſſi le frottement, auquel l'aiſſieu du tambour eſt aſſujetti : mais, pour le frottement de l'aiſſieu de la rouë principale, il ne ſauroit être renfermé dans le terme $v\,Q\,c$, vû qu'il ſe rapporte à un autre mouvement de rotation. Ainſi, poſant $F\,f$ pour le moment du frottement de la rouë principale, la premiere égalité aura cette forme

$D\,a = 9\pi\,(v\,Q\,c + \mu\,F\,f)$, l'autre demeurant la même.

XVI. Sur cette forme je remarque d'abord, que puisque Q marque la réſiſtance à vaincre, & $2\pi\,v\,c$ le chemin par lequel la réſiſtance eſt avancée pendant une ſeconde, le produit $2\pi\,v\,c\,Q$ nous offre la juſte idée de l'effet de la machine rapporté à une ſeconde ; & comme la force mouvante $D\,a$ ſe rapporte auſſi à une ſeconde, le rapport que nous venons de découvrir entre la force mouvante & l'effet total de la machine, eſt bien remarquable. Car la force mouvante eſt à l'effet total de la machine comme $4\frac{1}{2}$ à 1.

XVII. Donc, ſi l'effet que la machine doit produire, eſt donné, ſavoir le produit de la réſiſtance par ſon chemin dans une ſeconde,

nous en connoitrons d'abord la force mouvante, qui y eſt requiſe, où le produit de la quantité d'eau fournie par ſeconde par la hauteur de la chûte : car la force mouvante ſera $= 4\frac{1}{2}$ fois l'effet total. Et réciproquement, ſi la force mouvante eſt donnée, l'effet qu'on en peut attendre, ſera deux neuvièmes de la force mouvante : ce qu'il faut entendre, lorsque la machine eſt arrangée le plus avantageuſement.

XVIII. A' cauſe du frottement de la rouë principale, il eſt evident, que pour le ſurmonter il faut d'autant moins de force mouvante, plus le nombre μ ſera petit, ou plus ſera lent le mouvement de rotation de la rouë principale. Donc, puisqu'en vertu de la ſeconde équation, il faut qu'il ſoit : $\mu b = \frac{1}{3} V \frac{1}{2} a l$; pour rendre la valeur μ petite, il faut augmenter le rayon de la rouë autant que cela ſe pourra.

XIX. On voit de là que, s'il étoit poſſible de conſtruire une telle machine, où l'effet total fût plus grand par rapport à la force mouvante, cette machine ſeroit plus parfaite : & on comprendra auſſi que la plus parfaite Machine ſeroit celle, où l'effet total ſeroit exactement égal à la force mouvante : car qu'il devint même plus grand, cela eſt ouvertement impoſſible, & contraire aux principes de Mécanique.

XX. Mais avant que d'examiner ſur ce pied la nouvelle machine de M. *Segner*, je me ſouviens encore d'une autre manière de mettre une machine en mouvement par un jet d'eau. On place la rouë principale horizontalement, & ſes aubes ſont inclinées à l'horizon ; le trait d'eau y tombe perpendiculairement, & frappant obliquement les aubes, y exerce un effet pareil à celui du vent ſur les moulins à vent.

XXI. Pour conſidérer donc une telle machine, ſoit encore D la quantité d'eau fournie par ſeconde, qui ait une chûte de la hauteur a, avant qu'elle tombe ſur les aubes, & ce filet d'eau qui rencontre les

aubes

aubes, aura une largeur, comme nous avons vû $= \frac{D}{2\sqrt{ag}}$ qui ſera la ſection horizontale du filet.

XXII. Que l'angle Φ exprime l'inclinaiſon de l'aube à l'horizon, & le filet d'eau en tombant ſur l'aube y occupera un eſpace $= \frac{D}{2 \operatorname{cof}\Phi. \sqrt{ag}}$, qu'il frapperoit avec la viteſſe $= \sqrt{a}$ ſi l'aube étoit en repos, & la viteſſe perpendiculaire ſur l'aube ſeroit par la décompoſition $= \operatorname{cof}\Phi. \sqrt{a}$. Mais, puisque les aubes ont un mouvement horizontal, dont la viteſſe ſoit $= \sqrt{u}$, elles échapent à l'impulſion avec une viteſſe $= \operatorname{ſin}\Phi. \sqrt{u}$, de ſorte que la veritable viteſſe dont l'eau frappe les aubes ſera $= \operatorname{cof}\Phi. \sqrt{a} - \operatorname{ſin}\Phi. \sqrt{u}$.

XXIII. La force qui en réſulte ſur les aubes ſera donc $= \frac{D}{2 \operatorname{cſ}\Phi. \sqrt{ag}}$, $(\operatorname{cof}\Phi. \sqrt{a} - \operatorname{ſin}\Phi. \sqrt{u})^2$, dont la direction eſt perpendiculaire au plan des aubes, d'où réſulte une force horizontale pour pouſſer les aubes $= \frac{D \operatorname{ſin}\Phi}{2 \operatorname{cof}\Phi. \sqrt{ag}} (\operatorname{cof}\Phi. \sqrt{a} - \operatorname{ſin}\Phi. \sqrt{u})^2$. Poſant la tangente de l'angle $\Phi = t$ cette force ſera $= \frac{Dt(\sqrt{a} - t\sqrt{u})^2}{2(1+tt)\sqrt{ag}}$, qui devient un *maximum*, lorsqu'on détermine l'inclinaiſon en ſorte que $(1-tt)\sqrt{a} = t(3+tt)\sqrt{u}$.

XXIV. Soit b le rayon de la rouë principale, ou la diſtance depuis l'aiſſieu de la rouë jusqu'à l'endroit des aubes, où ſe fait le choc, & que cette rouë faſſe μ révolutions dans une ſeconde. Donc, puisque la viteſſe eſt ſuppoſée $= \sqrt{u}$, elle fera un eſpace $= 2\sqrt{gu}$ par ſeconde; donc $\mu = \frac{2\sqrt{gu}}{2\pi b}$ ou $\mu b = \frac{1}{\pi}\sqrt{gu} = \sqrt{\frac{1}{2}ul}$: & le

moment de la force ſur les aubes pour faire tourner la roue $= \frac{Dbt(Va-tVu)^2}{2(1+tt)Vag}$.

XXV. Que Q repréſente encore la réſiſtance appliquée à un tambour, dont le rayon $= c$, & qui faſſe v tours dans une ſeconde; de ſorte que le moment de la réſiſtance ſoit $= Qc$; & le principe de l'équilibre nous fournit cette équation

$$vQc = \frac{\mu Dbt(Va-tVu)^2}{2(1+tt)Vag} = \frac{Dt(Va-tVu)^2}{2\pi(1+tt)} V\frac{u}{a}$$

Or, pour produire le plus grand effet, poſons $Vu = \frac{(1-tt)Va}{t(3+tt)}$

de ſorte que $\mu b = \frac{1-tt}{t(3+tt)} V\frac{1}{2}al$, & l'équation trouvée prendra cette forme :

$$2\pi vQc = \frac{4Da(1-t^4)}{(3+tt)^3}.$$

XXVI. Nous voyons donc, que l'effet $2\pi vQc$ ſeroit le plus grand par rapport à la force mouvante Da, ſi l'on faiſoit $t = o$, & dans ce cas on auroit $Da = \frac{27}{4}. 2\pi vQc$: & nous aurions comme auparavant $Da = 9\pi vQc$, ſi nous euſſions augmenté la force de l'impulſion à cauſe de la largeur des aubes. Mais, puiſque μb deviendroit infini, en poſant $t = o$, ce cas ne peut pas avoir lieu dans la pratique.

XXVII. Il faudra donc donner à t une ſi petite valeur, que celle de μb ne devienne pas trop grande; or alors l'effet de cette machine deviendra plus petit, que ſi l'on employoit la même force mouvante ſelon la manière precedente : & partant il ſera toujours plus avantageux de ſe ſervir des roues verticales, comme il a été enſeigné auparavant.

XXVIII.

XXVIII. Voyons maintenant, quel ſera l'effet de la nouvelle machine hydraulique, tandis que la force mouvante Da demeure la même: ou bien, ſoit encore D la quantité d'eau, qui ſe fournit par ſeconde, & a la hauteur de la chûte, ou plûtôt celle qu'on peut donner au vaiſſeau deſtiné à recevoir l'eau par enhaut, & à la laiſſer ecouler par enbas ſuivant la nature de cette machine, dont j'ai déjà donné la deſcription dans le Mémoire ſur la Théorie de ce ſujet.

XXIX. Soit n le nombre des ouvertures, par lesquelles l'eau coule en bas, & bb l'amplitude de chacune: comme ce vaiſſeau tourne autour d'un axe vertical qui paſſe par ſon milieu, ſoit la diſtance des ouvertures à cet axe $= b$, & la viteſſe des ouvertures autour de cet axe $= \sqrt{u}$, qui fera dans une ſeconde l'eſpace $= 2\sqrt{gu}$: donc, ſi nous ſuppoſons que le vaiſſeau faſſe μ tours dans une ſeconde, nous aurons cette égalité $\mu = \frac{2\sqrt{gu}}{2\pi b}$ ou $\mu b = \frac{1}{\pi}\sqrt{gu} = \sqrt{\frac{1}{2}ul}$, prenant l pour la longueur du pendule ſimple à ſecondes.

XXX. La hauteur de l'eau dans le vaiſſeau étant conſtamment $= a$, j'ai montré que l'eau ſort par les ouvertures avec une viteſſe $= \sqrt{(a+u)}$, qui fera donc un chemin $= 2\sqrt{g(a+u)}$ dans une ſeconde. Et partant la quantité d'eau, qui s'en va par toutes les ouvertures dans une ſeconde, ſera $= 2nbb\sqrt{g(a+u)}$; laquelle devant être égale à la quantité D, qui entre dans le vaiſſeau chaque ſeconde, nous aurons cette égalité $D = 2nbb\sqrt{g(a+u)}$.

XXXI. Que cette machine faſſe tourner un tambour, en ſorte qu'il acheve v révolutions dans une ſeconde: que la réſiſtance à vaincre ſoit $= Q$, & le rayon du tambour $= c$, de ſorte que le moment de cette réſiſtance par rapport à l'aiſſieu du tambour ſoit $= v$, & par ce que j'ai demontré, on aura cette équation:

$$\frac{v}{\mu} Qc = 2nbbb(a+u-\sqrt{(au+uu)})$$

cette

cette expreſſion étant le moment de la réaction de l'eau pour faire tourner la machine : or ici eſt $\frac{\nu}{\mu}$, & a ce que j'ai là nommé $\frac{I}{\mu}$ & c.

XXXII. Pour comparer l'effet de la machine qui eſt $= 2\pi\nu Qc$ avec la force mouvante Da, mettons pour $2\pi bb$ ſa valeur $\frac{D}{\sqrt{g(a+u)}}$, & nous aurons :

$$\frac{\nu}{\mu} Qc = \frac{Db}{\sqrt{g}} (\sqrt{(a+u)} - \sqrt{u})$$

& puisque $\mu b = \frac{I}{\pi} \sqrt{gu}$, nous aurons

$$2\pi\nu Qc = 2D(\sqrt{(au+uu)} - u)$$

XXX. L'effet de la machine $2\pi\nu Qc$ ſera donc le plus grand, ſi l'on fait $u = \infty$, car alors à cauſe de $\sqrt{(au+uu)} - u = \frac{1}{2}a$, on aura $2\pi\nu Qc = Da$, ou bien l'effet ſera égal à la force mouvante. Mais ſi l'on faiſoit $u = \infty$, le mouvement de rotation de la machine deviendroit infiniment rapide. Cela étant impoſſible à exécuter, il faudra rendre la viteſſe $\sqrt{u}$ auſſi grande, que les circonſtances le permettront.

XXXIV. Mais alors l'effet de la machine deviendra plus petit que la force mouvante, ou bien on perdra une partie de la force mouvante. Suppoſons donc qu'on veuïlle perdre la partie exprimée par la fraction δ ſur l'effet entier, qui ſeroit égal à la force mouvante, de ſorte qu'il y ait

$$2\pi\nu Qc = (1-\delta) Da.$$

Cela poſé, nous aurons $(1-\delta)a = 2\sqrt{(au+uu)} - 2u$, d'où nous tirons la valeur de $u = \frac{(1-\delta)^2 a}{4\delta}$, & $a+u = \frac{(1+\delta)^2 a}{4\delta}$.

XXXV.

XXXV. Donc, puisque $\mu b = \frac{1}{\pi} V g u = V \frac{1}{2} u l$, nous aurons cette équation $\mu b = \frac{1}{2}(1-\delta) V \frac{a l}{2\delta}$: & l'équation $n b b = \frac{D}{2 V g (a+u)}$ prendra cette forme $nbb = \frac{D V \delta}{(1+\delta) V g a} = \frac{D V 2\delta}{\pi (1+\delta) V a l}$ ou bien $nbb = \frac{(1-\delta) D}{2\pi(1+\delta)\mu b} = \frac{\nu Q c}{(1+\delta)\mu a b}$, & ce ſont les déterminations tirées de la théorie, & appliquées à nôtre préſent deſſein.

XXXVI. Pour cette machine nous avons donc ces trois équations

I. $2\pi\nu Q c = (1-\delta) D a$

II. $\mu b = \frac{1}{2}(1-\delta) V \frac{a l}{2\delta}$

III. $nbb = \frac{D}{\pi(1+\delta)} V \frac{2\delta}{a l} = \frac{(1-\delta) D}{2\pi(1+\delta)\mu b} = \frac{\nu Q c}{(1+\delta)\mu a b}$

qui ſervent à déterminer tout ce qui regarde la conſtruction de la machine, pour la rendre propre au deſſein, auquel on la veut deſtiner.

XXXVII. Les élémens donc, desquels la conſtruction d'une telle machine dépend, ſont : 1mo, la quantité d'eau D qui ſe décharge par ſeconde dans le vaiſſeau; 2do, la hauteur qu'on peut donner au vaiſſeau qui eſt $= a$, & dépend de la chûte de l'eau; 3°, le demi-diametre du vaiſſeau en bas $= b$, ou la diſtance des ouvertures à l'axe de la machine; 4°, l'amplitude de chaque orifice bb, avec leur nombre n; 5°, le nombre des révolutions μ, que le vaiſſeau acheve pendant une ſeconde; 6°, la réſiſtance Q qu'il faut vaincre par la force de la machine, avec le rayon du tambour c, qui y eſt appliqué; 7°, le

7° le nombre des tours v que ce tambour fait chaque ſeconde; & 8° enfin, la fraction δ, qui exprime le déchet, dont l'effet actuel de la machine eſt moindre que l'effet le plus grand, dont la machine eſt ſuſceptible.

XXXVIII. La quantité d'eau fournie par ſeconde D multipliée par la hauteur du vaiſſeau a, ou le produit D a donne ce que je nomme la force mouvante : & $2 \pi v Q c$ exprime l'effet de la machine, étant le produit de la réſiſtance Q par le chemin qu'elle fait par ſeconde: où Q marque un volume d'eau, dont le poids eſt égal à la réſiſtance. Et c'eſt par ce produit, qu'il eſt convenable d'eſtimer l'effet de toutes les machines.

XXXIX. Si la machine étoit dans ſa plus grande perfection, ou qu'il fût $\delta = o$, l'effet ſeroit préciſément égal à la force mouvante; au lieu que les machines ordinaires, que j'ai décrites cy-deſſus, produiſent à peine un effet qui eſt $4\frac{1}{2}$ fois plus petit que la force mouvante. Ainſi, on peut ſoutenir, qu'une telle machine eſt capable de produire un effet quatre fois plus grand, que les machines ordinaires: ce qui eſt le plus grand avantage, qu'on peut prétendre.

XL. Car il eſt premièrement certain, qu'aucune machine, quelque parfaite qu'elle puiſſe être, ne ſauroit jamais produire un effet plus grand que la force mouvante. Et enſuite, quoiqu'on ne puiſſe pas mettre $\delta = o$, il eſt pourtant toujours poſſible de lui donner une ſi petite valeur, que la perte eſt presque inſenſible, ou que l'effet $2 \pi v Q c$ approche tant de la force mouvante D a, que la différence ſe réduiſe à peu prés à rien.

XLI. Or on voit, que plus on prend petite la fraction δ, plus le produit μb en deviendra grand; de ſorte qu'il faut alors, ou augmenter l'amplitude du vaiſſeau en bas, c'eſt à dire, ſon demi-diametre b, ou augmenter le nombre de ſes révolutions. Ce ſera donc tant de ce rayon b que du nombre μ, que les circonſtances permettent d'établir,

tablir, qu'il faut déterminer la fraction δ. Au reſte le produit μb entre uniquement dans la détermination de la machine; & il n'importe, quelle valeur qu'on donne à chacun ſéparément, pourvû que le produit μb demeure le même.

XLII. Or il eſt auſſi néceſſaire d'avoir égard tant au frottement qu'à la réſiſtance de l'air, d'où l'effet de la machine ſouffrira quelque diminution. Pour le frottement du tambour, il peut être compris dans le moment même de la réſiſtance Qc, vû qu'il y a des machines, comme les moulins, qui n'ont pas d'autre réſiſtance à vaincre que ce frottement, & alors Qc exprimera uniquement le moment de ce frottement.

XLIII. Mais le frottement du vaiſſeau même, puiſqu'il tourne autour d'un axe particulier, ſe doit conſidérer ſéparément. Suppoſons donc que pour vaincre ce frottement, il faille employer un moment de force $= Ff$; lequel devant être ſurmonté par la force mouvante, il faudra écrire $vQc + \mu Ff$ au lieu de vQc, & alors nôtre premiere équation prendra cette forme :

$$2\pi vQc + 2\pi\mu Ff = (1-\delta)\,Dd$$

ou $$2\pi vQc = (1-\delta)\,Dd - 2\pi\mu Ff$$

XLIV. Pour la réſiſtance de l'air, on la pourra presque réduire à rien, lorsqu'on couvrira le vaiſſeau tout autour d'une ſurface unie, & arrondie exactement autour de ſon axe de mouvement, afin que l'air ne rencontre rien à frapper. Cependant, lorsque le mouvement du vaiſſeau eſt fort rapide, l'air ne manquera pas d'y cauſer quelque réſiſtance, quelque unie que ſoit la ſurface extérieure du vaiſſeau ; puiſque les orifices, par où l'eau ſort, demandent quelques éminences.

XLV. Suppoſons donc que ces éminences ſouffrent de l'air la même réſiſtance, que ſi une ſurface $= rr$ ſe mouvoit avec une viteſſe égale dans l'eau. Donc, puiſque ces éminences ſe meuvent avec

une viteſſe $= V u$, la réſiſtance de l'air ſera $= rru = \frac{(1-\delta)^2 arr}{4\delta}$ dont le moment, qui s'oppoſe au mouvement de la machine, eſt $= \frac{(1-\delta)^2 abrr}{4\delta}$

XLVI. Cette réſiſtance ſe faiſant autour de l'axe du vaiſſeau, il faudra ajouter au terme νQc encore celui-cy $\frac{(1-\delta)^2 \mu abrr}{4\delta}$, ou puiſque $\mu b = \frac{1}{2}(1-\delta) V \frac{al}{2\delta}$, celui-cy $= \frac{(1-\delta)^3 arr}{8\delta} V \frac{al}{2\delta}$. De ſorte qu'avec le frottement du vaiſſeau nous ayons cette première équation.

$$2\pi(\nu Qc + \mu Ff + \frac{(1-\delta)^3 arr}{8\delta} V \frac{al}{2\delta}) = (1-\delta) Da$$

ou bien: $2\pi\nu Qc = (1-\delta) Da - 2\pi\mu Ff - \frac{\pi(1-\delta)^3 arr}{4\delta} V \frac{al}{2\delta}$

XLVII. Maintenant on voit, que ſi l'on prenoit la fraction δ trop petite, quelque petite que fût d'ailleurs rr d'où dépend la réſiſtance de l'air, l'effet propre de la machine $2\pi\nu Qc$ pourroit non ſeulement évanouïr, mais auſſi devenir négatif. Il faudra donc donner à δ une telle valeur, que l'effet de la machine ſoit diminué de la réſiſtance de l'air le moins qu'il eſt poſſible.

XLVIII. Pour cet effet il faut rendre $(1-\delta) Da - \frac{\pi(1-\delta)^3 arr}{4\delta} V \frac{al}{2\delta}$ un *maximum*, ou ſeulement $(1-\delta) Da - \frac{\pi arr V al}{4\delta V 2\delta}$, puiſque δ eſt fort petit par hypotheſe: d'où l'on trouve:

$$\delta = \sqrt[5]{\frac{9\pi\pi alr^4}{128 DD}} \quad \text{ou} \quad \delta = \sqrt[5]{\frac{7 ar^4 l}{10 DD}} \text{ à peu près}$$

Or

Or ſi l'on trouvoit pour δ une valeur aſſez conſidérable, que $(1-\delta)^3$ différoit trop de l'unité, alors il faudra chercher la valeur de δ de cette équation :

$$\frac{10\,D\,D}{7\,a\,r^4\,l}\delta^3 = 1 - 2\,\delta - \delta\,\delta + 4\,\delta^3 - \delta^4 - 2\,\delta^5 + \delta^6$$

dont la réſolution ne ſera pas difficile en chaque cas.

XLIX. De là on voit que plus la réſiſtance abſoluë de l'air, que j'indique par rr, eſt grande, plus auſſi la valeur de la fraction δ ſe trouvera grande. Or, ayant eſtimé la ſurface de toutes les éminences que frappent l'air, on en prendra environ la millième partie pour la valeur de rr. Ainſi, ſi cette ſurface montoit à un pied quarré, ce qui ſeroit déjà beaucoup, la valeur de rr ſeroit $\frac{1}{1000}$ pied quarré : d'où l'on voit déjà, que la fraction δ ſe trouve ordinairement très petite.

L. On voit auſſi que plus la hauteur du vaiſſeau a ſera grande, la valeur de δ en ſera augmentée ; mais une plus grande quantité d'eau D tendra à diminuer la fraction δ. Mais il faut remarquer que plus la quantité D eſt grande, plus auſſi la machine doit être grande, & partant auſſi rr; d'où l'on peut conclure que $\frac{DD}{r^4}$ eſt toujours une quantité conſtante à peu près.

LI. Donc, ſi nous poſons, que lorsque D eſt un pied cubique il y a $rr = \frac{1}{1000}$: nous aurons $\frac{DD}{r^4} = 1000000$, & puisque $l = 3\frac{1}{6}$, poſons $a = 12$ pieds, pour donner au vaiſſeau une des plus grandes hauteurs, & nôtre équation deviendra.

$$37500\,\delta^5 = 1 - 2\,\delta - \delta\,\delta + 4\,\delta^3 - \&c.$$

d'où nous concluons $\delta = \frac{4}{5}$; ainſi dans ce cas, qui ſemble pourtant donner une des plus grandes valeurs de δ, nous trouvons $\delta < \frac{1}{8}$: de ſorte qu'on ne perd qu'une huitième partie ſur l'effet total.

LII. Posant donc $\delta = \frac{1}{8}$; nôtre seconde équation donne

$$\mu\, b = \tfrac{7}{16} \sqrt{4\, a\, l} = \tfrac{7}{8} \sqrt{a\, l}$$

A' present on prendra μ si petit, que b ne devienne trop grand, pour diminuer l'effet du frottement du vaisseau; aussi si l'on pose $\mu = \frac{7}{8}$, le rayon b sera la moyenne proportionelle entre la hauteur du vaisseau a & $l = 3\frac{1}{6}$ pieds : & si l'on prenoit $\mu = \frac{7}{16}$, le rayon b seroit le double de cette moyenne proportionelle. On prendra donc toujours le rayon b si grand, qu'il sera possible selon les circonstances.

LIII. Puisque nous avons trouvé par estime $\frac{D}{r\,r} = 1000$, nous aurons $r\,r = \frac{D}{1000}$, & ayant eu dans ce cas $\sqrt{a\,l} = 6$ à peu près, nous obtiendrons $r\,r\,\sqrt{a\,l} = \frac{6}{1000}$ D. Donc, posant $\delta = \frac{1}{8}$, le terme qui résulte de la résistance de l'air dans l'expression de l'effet de la machine deviendra $= \frac{1}{20}\, D\,a$ à peu près : & si nous donnons une valeur égale à l'effet du frottement $2\,\pi\,\mu\,F\,f$, nôtre premiere équation se réduira à celle-cy.

$$2\,\pi\,\nu\,Q\,c = \tfrac{31}{40}\, D\,a \text{ ou du moins } 2\,\pi\,\nu\,Q\,c = \tfrac{3}{4}\, D\,a$$

LIV. Ainsi, après cette double diminution, l'effet est encore égal à trois quarts de la force mouvante, & partant encore plus de trois fois plus grand que l'effet des machines ordinaires, quand même celles-cy ne seroient assujetties à aucune diminution de la part du frottement & de la résistance de l'air : mais comme celles-cy en sont également affoiblies, on pourra soutenir que l'effet actuel de cette nouvelle machine est toujours plus de 4 fois plus grand, que celuy des machines ordinaires, en employant une égale force mouvante.

LV. Cependant il ne faut pas oublier en construisant une telle machine, de faire usage de tous les moyens pour diminuer tant le frottement de la machine, que la résistance de l'air. Pour ce dernier on couvrira la machine tout autour d'une surface parfaitement ronde

&

& unie, & on fera auſſi les tuyaux embas, par où l'eau ſort, auſſi petits qu'il eſt poſſible ; au côté oppoſé des trous par où ils eſſuyent la réſiſtance de l'air, il ſera à propos de les façonner en ſorte qu'ils rencontrent la moindre réſiſtance.

LVI. Pour comprendre mieux cette conſtruction des ouvertures, par où l'eau ſort de la machine, la figure premiere repréſente la ſection horizontale du vaiſſeau, qui paſſe par les ouvertures, & qui eſt par conſéquent presque au fond de la machine : il y a donc autour de cette ſection un certain nombre de trous, qui reçoivent autant de bouts de tuyaux repliés A, B, C, D, E, F, par lesquels l'eau ſort en *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ſelon des directions horizontales & perpendiculaires aux plans verticaux, qui paſſent par l'axe de la machine O & l'ouverture de chacun de ces tuyaux. Ainſi, l'eau ſautant tout autour en même ſens de ces ouvertures, fera tourner par la force de réaction la machine dans le ſens A B C D E F autour de ſon axe. Fig. 1.

LVII. Je remarque de plus, que pour faciliter le mouvement de la machine, il n'eſt pas néceſſaire que toute la cavité du corps du vaiſſeau ſoit remplie d'eau ; mais qu'il ſuffit, qu'il y ait embas un creux, avec lequel les ouvertures communiquent, qui contienne l'eau : la machine aura donc en dedans une paroi, qui forme avec le contour extérieur ce creux. Cependant ce creux doit être aſſés ſpacieux & pluſieurs fois plus large, que la ſomme de toutes les ouvertures priſes à la fois, afin que l'eau ſe puiſſe mouvoir librement ; ce qui eſt néceſſaire pour que ſon mouvement ſoit conforme à la théorie.

LVIII. La machine aura donc la figure d'une cloche à peu près creuſe dans ſon contour, & ouverte en haut BB, pour y recevoir l'eau de l'auge T V. Il n'eſt pas néceſſaire que cette ouverture ſoit trop large, afin que l'eau par ſa force centrifuge ne s'éléve pas trop vers les bords : pour cet effet on pourra couvrir la machine en haut vers les bords, & y pratiquer quelques diaphragmes, contre leſquels Fig. 2.

quels l'eau V choque en entrant : car ce choc pourra auſſi contribuer quelque choſe à faire tourner la machine.

LIX. On voit bien que la machine ne doit pas être trop pleine d'eau pour empêcher le débordement, quoique cela ne faſſe aucun tort au mouvement de la machine ; mais l'eau débordée ſe perdroit inutilement, & partant il vaudra mieux d'avoir une moindre hauteur de l'eau dans le vaiſſeau, comme jusqu'à *bb*, que d'en perdre quelque choſe. Ainſi, l'eau deſcendra de la cavité ſupérieure B D B en bas par le creux des côtés D F, où elle ſort pas les orifices H. Ou, pour diminuer encore davantage le poids de la machine, on pourroit conduire l'eau du baſſin en haut B D B à chaque orifice H par un canal particulier, & laiſſer le reſte du contour vuide.

LX. O O repréſente l'axe de la machine, autour duquel elle tourne : & il faut que cet axe ſoit aſſez fort, pour ſoutenir la machine, & qu'il tourne librement ſur ſes pivots tant en haut qu'en bas en G. Les barres E F & E K ſervent à affermir mieux la machine à l'axe O O, pour la maintenir toujours dans ſa juſte poſition. Du reſte l'axe O O aura en haut un pignon, moyennant duquel & d'une roue, il mette en mouvement le tambour qui travaille immédiatement à vaincre la réſiſtance, à quoi la machine eſt deſtinée.

LXI. Ayant à préſent expliqué en général ce qui regarde la conſtruction de cette machine, je paſſerai à ſon application à toute ſorte d'ouvrages, auxquels on ſe ſert des machines ordinaires. Car, quelque avantageuſe que ſoit cette machine, lorsqu'elle eſt juſtement arrangée, on en gagneroit fort peu, ſi l'on n'obſervoit pas aſſez exactement les régles preſcrites de la théorie. Cette recherche ſera donc le ſujet des problèmes ſuivans.

PROBLEME I.

LXII. La quantité d'eau, qu'un reſervoir fournit par ſeconde, avec la hauteur de ſa chûte, étant donnée ; & outre cela le moment de la

Tab. V.

ad pag. 287.

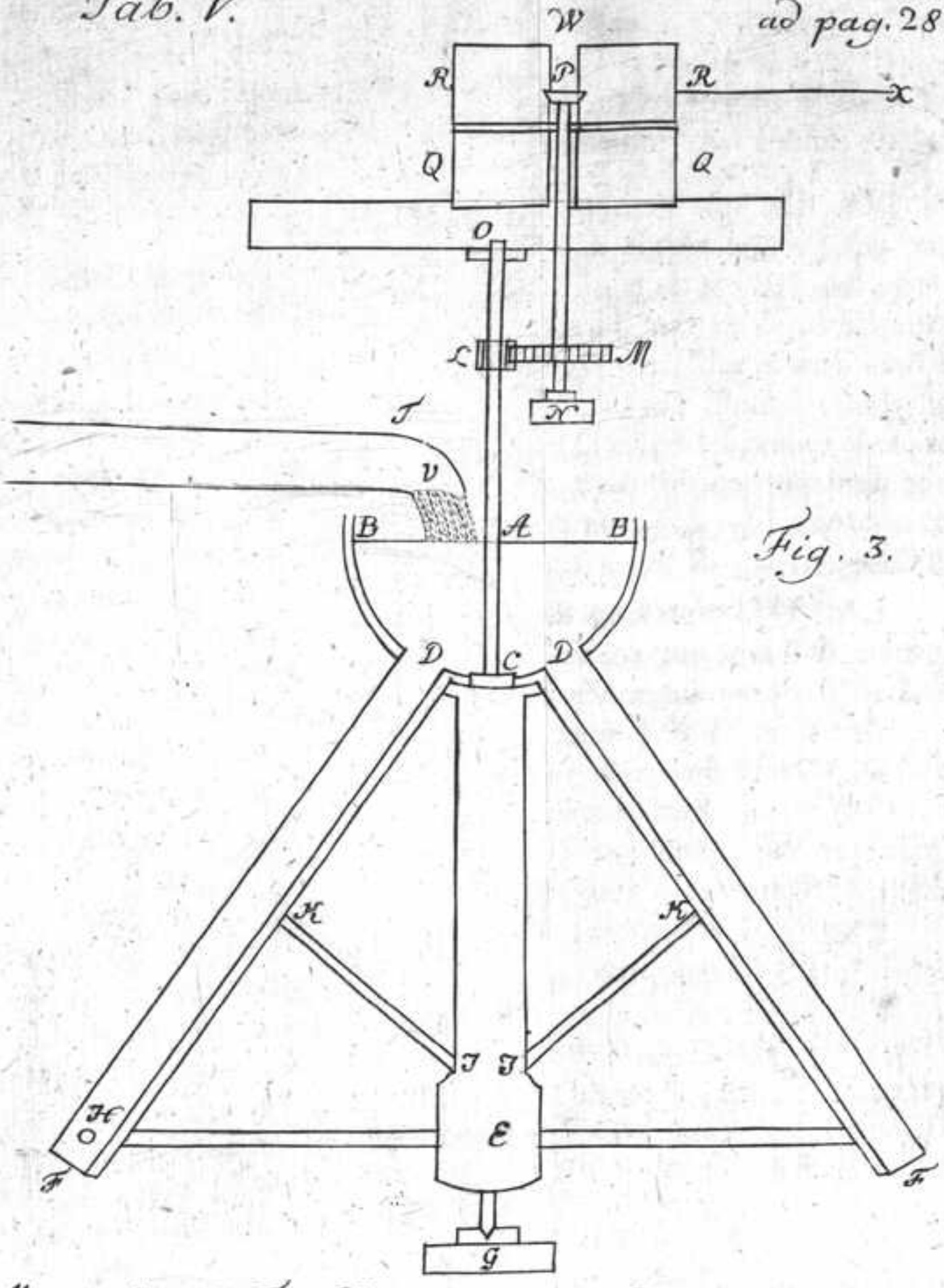

Fig. 3.

Mem de l'Acad. Tom. VII.

ad pag. 356.

la réſiſtance, qu'il faut vaincre ; déterminer l'effet ou la viteſſe, avec laquelle cette réſiſtance pourra être ſurmontée à l'aide d'une telle machine.

SOLUTION.

Soit D la quantité d'eau, que le reſervoir eſt capable de fournir dans le baſſin de la machine B D B chaque ſeconde : & que la chûte ſoit telle, qu'on puiſſe commodément donner à la machine une hauteur E à $= a$, de ſorte que a marque la hauteur de l'eau dans la machine au deſſus des orifices H ; & le produit de ces deux quantités D a exprimera ce que je nomme ici la force mouvante. Enſuite, quelque ouvrage qui doive être exécuté par le ſecours d'une telle machine, on le peut toujours regarder comme une réſiſtance, qui s'oppoſe au mouvement de la machine. Il y aura donc une certaine roue, ou un tambour immédiatement appliqué à cette réſiſtance ; & avant que la machine y ſoit jointe, on pourra déterminer un moment de forces, qui eſt capable de ſurmonter cette réſiſtance, ou de mettre en mouvement le tambour. Suppoſons donc qu'une force égale au poids d'une maſſe d'eau $= Q$, étant appliquée à une diſtance $= c$ de l'eſſieu de ce tambour, ſoit capable de vaincre la réſiſtance ; & le produit Qc exprimera le moment de la réſiſtance. Ainſi, on ſuppoſe que les quantités D, a, & Qc ſont données, & on cherche avec quelle viteſſe cette réſiſtance pourra être vaincue ; ou avec quelle viteſſe la force mouvante ſera capable de faire tourner le tambour : car on comprend aiſément, que plus cette viteſſe ſera grande, plus auſſi ſera grand l'effet de la machine. Poſons donc, pour ce qu'il faut chercher, que le tambour étant pouſſé par la machine, puiſſe faire v révolutions autour de ſon axe dans une ſeconde : & nous avons vû, que cette formule $2\pi v Qc$ exprime l'effet actuel de la machine ; donc, puiſque Qc eſt donné, il s'agit de déterminer le nombre v.

Or nôtre premiere équation, après avoir eu égard au frottement & à la réſiſtance de l'air, donne $2\pi v Qc = \frac{3}{4} D a$, de ſorte que l'effet

total de la machine peut être eſtimé égal à trois quarts de la force mouvante $D\,a$: de là nous trouvons le nombre des révolutions du tambour dans une ſeconde $v = \frac{3\,D\,a}{8\,\pi\,Q\,c}$. Ou, puisque $\pi = 3,14159$, on aura aſſez exactement ; $v = \frac{8}{25}\cdot\frac{D\,a}{Q\,c}$, ou bien à peu près $v = \frac{1}{3}\cdot\frac{D\,a}{Q\,c}$.

COROLL. 1.

LXIII. Donc ſi le moment de la réſiſtance $Q\,c$ eſt égal à la force mouvante, le tambour mettra 8 ſecondes à achever un tour autour de ſon axe : or ſi la force mouvante $D\,a$ eſt huit fois plus grande que le moment $Q\,c$, le tambour achevera chaque ſeconde un tour.

COROLL. 2.

LXIV. Sachant donc le rapport de la force mouvante au moment de la réſiſtance, on en connoitra d'abord le nombre des tours v, que le tambour pourra achever dans une ſeconde : pourvû que la machine ſoit arrangée ſelon les régles expliquées auparavant.

COROLL. 3.

LXV. On comprend auſſi aiſément, que ſi le frottement de la machine, ou la réſiſtance de l'air étoit plus grande, que nous l'avons ſuppoſée ici, au lieu de la fraction $\frac{3}{4}$, on devroit emploier une plus petite, de ſorte qu'on auroit alors ou $2\,\pi\,v\,Q\,c = \frac{2}{3}\,D\,a$, ou même $2\,\pi\,v\,Q\,c = \frac{1}{2}\,D\,a$: & partant, ou $v = \frac{1}{6}\cdot\frac{D\,a}{Q\,c}$, ou $v = \frac{1}{12}\cdot\frac{D\,a}{Q\,c}$.

COROLL. 4.

LVI. Cependant, quand même les obſtacles ſeroient ſi grands, qu'il falût prendre l'égalité $2\,\pi\,v\,Q\,c = \frac{1}{2}\,D\,a$ ou $v = \frac{1}{12}\cdot\frac{D\,a}{Q\,c}$, cette

cette machine produiroit pourtant encore un effet plus de deux fois plus grand, que les machines ordinaires, même en leur ſuppoſant le plus haut degré de perfection.

REMARQUE.

LXVII. Le moment de la réſiſtance Qc eſt ſouvent immédiatement connu; car, lorsqu'il s'agit d'élever un poids par le moyen d'une corde qui s'envelope autour du tambour, ce poids multiplié par le rayon du tambour donne d'abord la valeur du moment Qc, & $2\pi vc$ la hauteur, à laquelle ce poids ſera élevé dans une ſeconde. Il en eſt de même lorsque la machine eſt appliquée à faire jouër des pompes; car en connoiſſant la force qu'il faut pour élever & baiſſer les piſtons, avec la longueur du levier dont la machine y agit, on aura d'abord la valeur du moment Qc. Or ſouvent il faut recourir à l'expérience pour connoitre ce moment; comme lorsqu'il s'agit de vaincre la réſiſtance d'un frottement, par exemple, quand un grand fordeau doit être trainé ſelon une direction horizontale: car, quoiqu'on ait des régles pour déterminer la quantité d'un tel frottement, il vaut mieux de chercher par des expériences la force requiſe à le vaincre, ayant égard à la diſtance de l'application de cette force à l'eſſieu du mouvement. A' cette eſpece de machines il faut rapporter les moulins, où toute la force eſt employée à faire tourner la meule de deſſus RR ſur la meule giſſante QQ. Dans ce cas la réſiſtance dépend tant de la quantité des grains, qui ſe trouve entre les meules, que du poids de la meule de deſſus: pour connoitre donc cette réſiſtance, il faut avant que d'appliquer la machine elle même à ce deſſein, eſſayer quels efforts il faut employer pour vaincre cette réſiſtance. Pour cet effet ayant appliqué à la meule un levier RX, on cherchera par des eſſais la force, dont il faut pouſſer ce levier dans un certain point X, pour être en état de mouvoir la meule: on réduira cette force enſuite à un volume d'eau, comptant environ 64 livres ſur un pied cubique, & ce volume multiplié par la longueur du levier PX donnera le mo- Fig. 3.

ment Qc. Il ſeroit bon de déterminer par de telles expériences la valeur de ce moment Qc pour toutes ſortes de meules ; car alors il ſeroit aiſé de déſigner la viteſſe, que chaque force mouvante eſt capable d'imprimer à chaque meule, d'où dépend l'effet des moulins : & enſuite la conſtruction de toute la machine n'auroit plus la moindre difficulté, au lieu qu'au défaut de cette connoiſſance les machines deviennent ſouvent très defectueuſes.

PROBLEME 2.

LXVIII. L'effet, que la machine doit produire, étant propoſé, ou la viteſſe avec laquelle la réſiſtance doit être miſe en mouvement, trouver la force mouvante, qui ſera capable de produire cet effet.

SOLUTION.

On connoit donc premièrement le moment de la réſiſtance Qc, qui doit être vaincuë par la force de la machine, & enſuite la viteſſe de ce mouvement eſt auſſi donnée : ou bien le nombre des révolutions eſt préſcrit, que le tambour, qui travaille immédiatement ſur la réſiſtance, doit achever par ſeconde. Soit donc v ce nombre ; & pour la force mouvante, que nous cherchons, ſoit D la quantité d'eau fournie par ſeconde, & a la hauteur de ſa chûte, ou plutôt la hauteur du vaiſſeau, qui eſt toujours un peu plus petite que la chûte même. Cela poſé, nôtre premiere équation nous donne d'abord la force mouvante $Da = \frac{8}{3}\pi v Qc$, ou à peu près $Da = 8 v Qc$. Ainſi, ſachant la hauteur de la chûte a, on en connoitra d'abord la quantité d'eau D, que l'entretien de la machine exige par ſeconde : ou réciproquement cette quantité d'eau D étant donnée, on trouvera la chûte néceſſaire a pour produire cet effet.

COROLL. 1.

LXIX. Puisque l'effet de la machine eſt proportionel à la force mouvante, ou au produit Da, on voit que plus la chûte a eſt grande,

Tab. IV.

ad pag. 291.

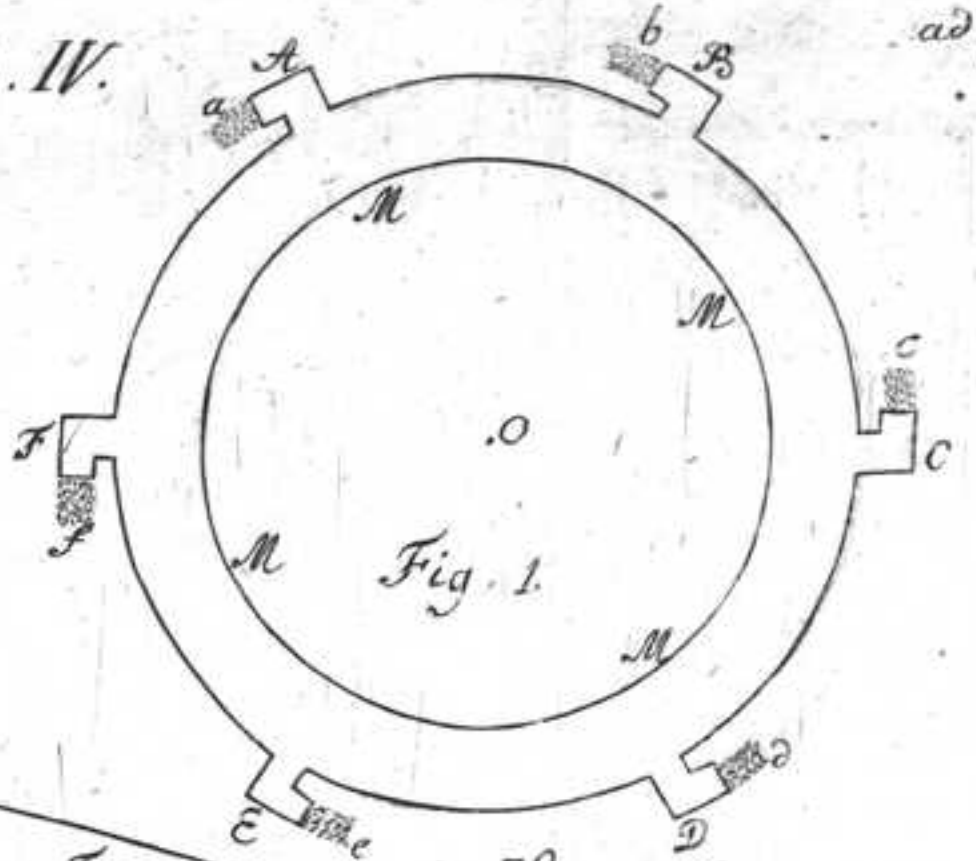

Fig. 1.

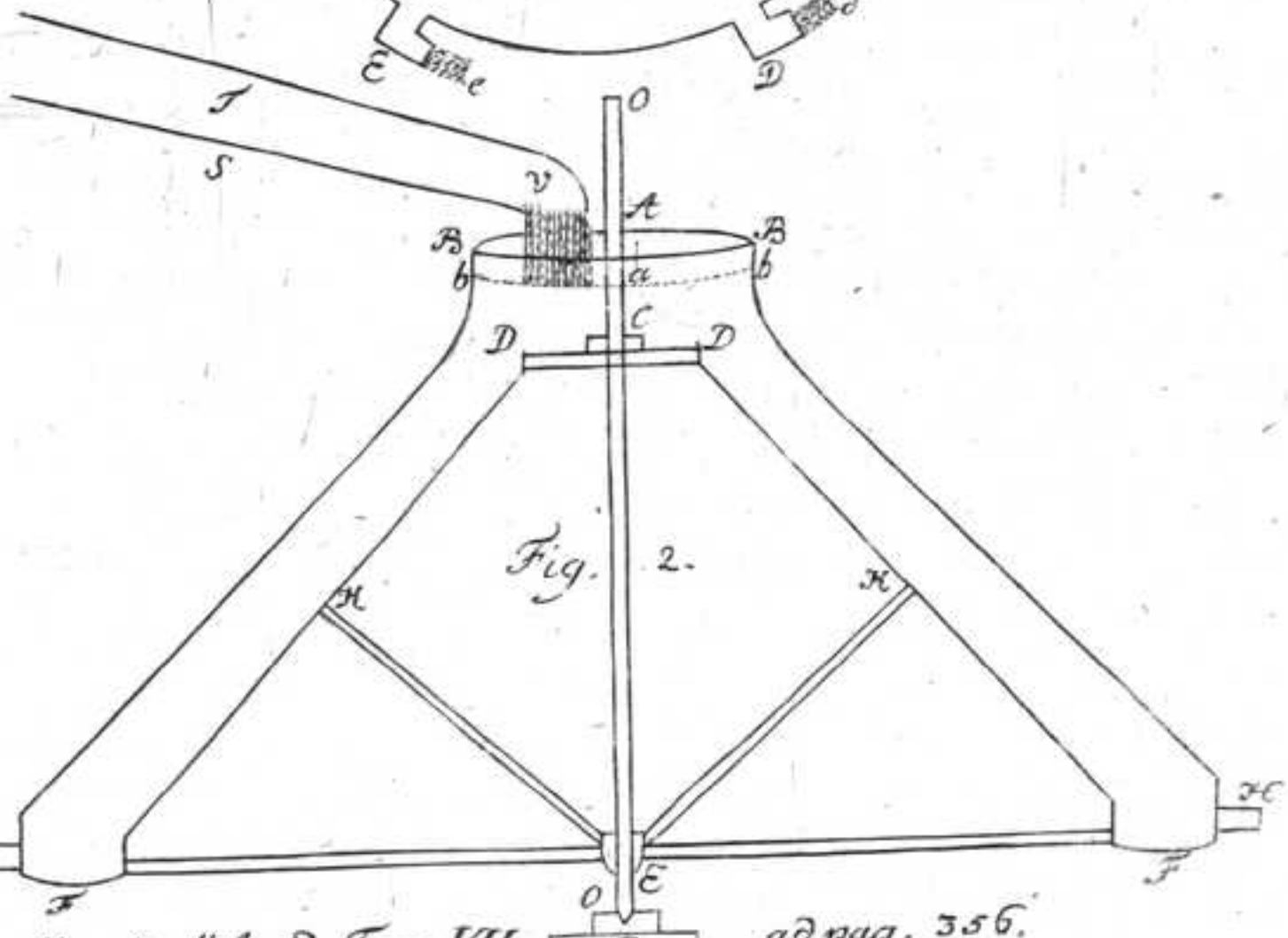

Fig. 2.

Mem. de l'Acad. Tom VII.

ad pag. 356.

de, la quantité d'eau D ſera autant de fois plus petite, pour qu'on en puiſſe tirer le méme effet.

COROLL. 2.

LXX. Pour connoitre donc la force mouvante, on multipliera le moment de la réſiſtance Qc par le nombre des tours v, qu'on veut que le tambour acheve dans une ſeconde, & ce produit pris environ 8 fois donnera la force mouvante, ou le produit Da.

COROLL. 3.

LXXI. J'ai ici déjà eu égard au frottement & autres obſtacles du mouvement de la machine: mais quand on juge ces obſtacles plus grands, que je ne les ai ſuppoſés, au lieu du nombre 8 il faudra employer un nombre plus grand: & alors la force mouvante ſe trouvera auſſi plus grande en méme raiſon.

EXEMPLE.

LXXII. Suppoſons que la machine doive étre appliquée à un moulin, & que pour vaincre la réſiſtance de la meule de deſſus, il faille appliquer une force de 32 ℔ à un levier PX de deux pieds. On aura donc $Q = \frac{1}{4}$ pied cubique & $c = 2$, de ſorte que le moment de la réſiſtance ſera $Qc = 1$. Suppoſons de plus que cette meule doive achever chaque tour dans une ſeconde, & ayant $v = 1$ & $vQc = 1$, la force mouvante requiſe Da ſera exprimée par 8. Donc, pour produire cet effet, ou un pied cubique d'eau fourni par ſeconde avec une chûte de 8 pieds ſera ſuffiſant, ou deux pieds cubiques d'eau par ſeconde avec une chûte de 4 pieds, ou 4 pieds cubiques avec une chûte de 2 pieds, ou bien 8 pieds cubiques avec une chûte d'un pied.

REMARQUE.

LXXIII. J'ai déjà remarqué, que la hauteur de l'eau dans le vaiſſeau $aE = a$ eſt toujours un peu plus petite que la chûte véritable de

l'eau, puisque la ſurface de l'eau dans le vaiſſeau *b a b* doit être un peu au-deſſous du bord B A B, & celui-cy doit être plus bas que le niveau de l'eau dans le reſervoir : enſuite les orifices en bas H ne ſauroient être non plus exactement au niveau de l'eau en bas, mais il faut qu'ils ſoient tant ſoit peu élevés au-deſſus ; d'où l'on comprend que la hauteur *a* E = *a* ſera toujours environ d'un demi pied moindre que la chûte entiere de l'eau. Donc, ſi un pied cubique d'eau fourni par ſeconde avec une chûte de $8\frac{1}{2}$ pieds, eſt capable de produire l'effet propoſé, afin que huit pieds cubiques produiſent le même effet, il faut que leur chûte ſoit de $1\frac{1}{2}$ pieds : de ſorte que plus la chûte eſt petite, plus on en perd de ſa force, & ſi la chûte n'étoit qu'un demi-pied, la machine deviendroit tout à fait impraticable, puisque ſa hauteur devroit entièrement evanouïr. Par cette raiſon il eſt toujours plus avantageux d'employer une chûte plus grande, & de ſe contenter d'une moindre quantité d'eau, que de ſe ſervir d'une petite chûte avec une grande quantité d'eau. Cependant il n'y a aucun doute qu'on puiſſe ſe ſervir encore avec bien du ſuccés d'une chûte de deux pieds, pourvû que l'eau ſoit en abondance ; mais alors il faut que le vaiſſeau ſoit très large en haut, pour recevoir une ſi grande quantité d'eau.

PROBLEME 3.

LXXIV. La force mouvante D a & l'effet de la machine étant déjà donnés, avec la largeur du vaiſſeau en bas, ou la diſtance des orifices H à l'axe de la machine, trouver le nombre des révolutions, que la machine doit faire pendant chaque ſeconde.

SOLUTION.

Pour cet effet il ne ſuffit pas de ſavoir la force mouvante D *a* ; il faut auſſi ſavoir la chûte, ou la hauteur de l'eau dans la machine *a* E = *a* ; & ſi nous poſons le demi-diametre de la baſe de la machine, ou la diſtance des orifices à l'axe E H = *b*, & le nombre des tours

tours, que la machine fait par ſeconde $= \mu$, nous aurons $\mu b = \frac{7}{8} Val$, ayant ſuppoſé la fraction $\delta = \frac{1}{8}$, de laquelle dépend la quantité de l'effet. De là puisque les quantités a, b, & l ſont données, le nombre des révolutions de la machine achevées dans une ſeconde ſera $\mu = \frac{7 Val}{8 b}$. Le rapport de ce nombre μ au nombre ν ſervira à combiner la machine avec le tambour, qui eſt immédiatement appliqué à la réſiſtance. Car, puisque le tambour R R doit faire ν révolutions, pendant que le vaiſſeau B B F F en fait μ, ſi le tambour eſt mis en mouvement par la rouë M, pouſſée par le pignon L, qui ſe trouve à l'axe du vaiſſeau O E ; il faut que le pignon L faſſe μ tours pendant que la rouë M en fait ν, ou que le pignon L faſſe $\frac{\mu}{\nu}$ tours, peudant que la rouë M en fait un. Par conſéquent il faut que le nombre des dents du pignon L ſoit au nombre des dents de la rouë M comme ν à μ. C'eſt donc cette juſte proportion entre le pignon L & la rouë M, d'où dépend l'effet de la machine ; car, ſi cette proportion n'étoit pas obſervée exactement, la machine ne produiroit pas l'effet le plus grand, qui a été déterminé dans les problèmes précedens. Fig. 3.

COROLL. 1.

LXXV. Il a déjà été remarqué, qu'il eſt bon de faire la machine en bas auſſi large qu'il eſt poſſible, pour que le nombre μ devienne auſſi petit qu'il eſt poſſible. Car par ce moyen ou ſurmonte d'autant plus aiſément le frottement de l'eſſieu de la machine.

COROLL. 2.

LXXVI. Cependant il faut auſſi remarquer, que le rapport des nombres μ & ν doit être tel, qu'il puiſſe être réduit à des nombres aſſez ſimples : ou bien on mettra le rapport entre le pignon L & la rouë M auſſi approchant qu'il eſt poſſible, en nombres entiers.

CO-

COROLL. 3.

LXXVII. Et en cas que ce rapport ne ſe laiſſe pas exécuter par un ſeul pignon & une ſeule rouë, on mettra entre deux un troiſième axe avec une rouë & pignon, qui étant mis en mouvement par l'axe principal EO, faſſe tourner l'axe du tambour PN.

EXEMPLE.

LXXVIII. Soit propoſé le cas du §. LXXII. où le moment de la réſiſtance étoit $Qc = 1$, & $v = 1$; & ayant trouvé pour ce cas la force mouvante $Da = 8$, ſoit la chûte ou hauteur $Ea = a = 8$ pieds, & la quantité d'eau fournie par ſeconde $D = 1$ pied cubique. Soit de plus le demi-diametre du fond de la machine $EH = b = 5$ pieds, & à cauſe de $l = 3\frac{1}{8}$ pieds, nous aurons $\mu = \frac{7\sqrt{25\frac{1}{3}}}{40}$, & à peu près $\mu = \frac{7}{8}$: de ſorte que $v : \mu = 8 : 7$. On donnera donc au pignon L 8 fuſeaux, & à la rouë M 7 dents.

Si l'on faiſoit le demi-diametre du fond de la machine $b = 8$ pieds, on auroit à peu près $\mu = \frac{35}{64}$, & $v : \mu = 64 : 35$, à laquelle raiſon approche le plus en petits nombres $9 : 5$; donc le pignon ou la rouë L auroit 9 dents, & la rouë M cinq. Or dans ce cas il vaudra mieux de donner à la rouë M la forme d'un pignon ou d'une lanterne, & à L celle d'une rouë dentée: donc le nombre des dents doit être d'autant plus grand, plus on donne à la machine de largeur en bas.

PROBLEME 4.

LXXIX. La machine étant conſtruite pour produire un effet propoſé ſelon les problèmes précedens, trouver la largeur des orifices en bas d'où l'eau écoule.

SOLUTION.

Que D marque comme jusqu'ici la quantité d'eau fournie par ſeconde, a la hauteur de l'eau dans la machine, & b le demi-diametre du

du fond de la machine en bas. Soit n le nombre des orifices, & bb la largeur de chacun ; cela posé, donnant à la fraction δ la valeur $\frac{1}{8}$, nôtre troisième équation (36) donnera

$$nbb = \frac{8D}{9\pi} V\frac{1}{4al} = \frac{4D}{9\pi V al},$$

ou à peu près $nbb = \frac{29D}{205 V al}$; ou bien $nbb = \frac{D}{7 V al} = \frac{D}{8\mu b}$ d'où ayant déjà fixé le nombre des orifices, on connoitra la largeur de chacun, ou réciproquement. Or il faut remarquer, que lorsque la valeur nbb se trouve assez grande, il vaut mieux augmenter le nombre des orifices, que de les faire trop larges ; car si le diametre des trous H étoit déjà une partie considérable de la hauteur entiere de l'eau a, la viteſſe dont l'eau échape par ces trous, ne répondroit plus à la théorie.

COROLL. 1.

LXXX. On voit donc que, plus la quantité d'eau fournie par seconde sera grande, & la hauteur a petite, la valeur de nbb deviendra plus grande. Dans ces cas donc, où l'on se sert d'une grande quantité d'eau & d'une petite chûte, il faut employer un grand nombre d'orifices, pour que leurs diametres ne deviennent pas trop grands.

COROLL. 2.

LXXXI. Il n'eſt pas auſſi néceſſaire de donner à ces orifices une figure circulaire ; mais, lorsque la hauteur de la machine sera petite, il vaudra mieux de leur donner une figure allongée, de sorte que la hauteur soit plus petite que la largeur.

COROLL. 3.

LXXXII. Mais quand la dépense d'eau D eſt fort petite & la chûte a grande, la quantité nbb devient fort petite ; de sorte qu'une

ſeule ouverture ſeroit ſuffiſante. Cependant il faut toujours employer au moins deux vis à vis, afin que les forces ſe maintiennent en équilibre, & que le mouvement de la machine en devienne plus libre.

EXEMPLE.

LXXXIII. Dans le cas conſidéré cy-deſſus où $D = 1$; $a = 8$, nous aurons $nbb = \frac{1}{7\sqrt{25\frac{1}{2}}} = \frac{1}{35}$ pieds quarrés, ou bien $nbb = \frac{1}{9}$ pouce quarré, quelle que ſoit la largeur de la machine en bas ou la quantité b. Dans ce cas donc deux ouvertures ſeroient ſuffiſantes, & chacune deviendroit de $2\frac{1}{18}$ pouces quarrés : & ſi l'on vouloit faire ces trous circulaires, leur diametre ſeroit de 1, 617 pouces.

Mais ſi en employant la même force mouvante, on prenoit $D = 8$ pieds cubiques & $a = 1$ pied, on auroit.

$$nbb = \frac{8}{7\sqrt{3\frac{1}{8}}} = 0,413 \text{ pieds quarrés}$$

donc $nbb = 59\frac{1}{2}$ pouces quarrés. Il ſeroit donc bon de pratiquer du moins 12 ouvertures, & de donner à chacune une figure allongée, qui n'ait qu'un pouce de hauteur ſur environ 5 de largeur.

REMARQUE.

LXXXIV. Mais, quelques ſoins qu'on apporte à calculer exactement la grandeur des orifices, on ne ſauroit pourtant s'y fier trop : car la moindre circonſtance pourroit être cauſe, que les orifices fuſſent ou trop grands ou trop petits. Ainſi, le plus ſur moyen ſera de conſtruire ces ouvertures, en ſorte qu'on les puiſſe aiſément, ou élargir, ou rétrécir à volonté; ſelon que les circonſtances l'exigeront, & alors il ſuffira de connoitre l'amplitude totale des orifices à peu près. Après avoir pris cette précaution par rapport aux orifices, il ſera fort aiſé

aiſé de maintenir la machine toujours dans une action convenable. Car ſi l'on remarque que l'eau baiſſe dans le baſſin BDB, ou qu'elle n'y atteint pas la juſte hauteur, on diminuera l'amplitude d'un, ou quelques uns, ou de tous les orifices, jusqn'à ce que l'eau ſe conſerve à la hauteur preſcrite. Mais s'il arrive, que l'eau y monte trop haut & qu'elle déborde, alors on n'aura qu'à élargir un peu les orifices. Or il eſt d'autant plus néceſſaire, qu'on puiſſe changer les orifices à volonté, puisqu'il peut arriver fort ſouvent, ou que la quantité d'eau D fournie par ſeconde devienne plus grande ou plus petite, ou que le moment de la réſiſtance Q*c* ſouffre quelque changement ; & dans l'un & l'autre cas on ſera obligé de changer quelque choſe aux orifices, pour maintenir la machine dans ſon action. Ainſi, dans la ſuite je ſuppoſerai que les orifices ayent toujours la juſte grandeur qu'il leur faut, pour que l'eau tienne dans le vaiſſeau la hauteur convenable, & pour cette raiſon je ne tiendrai plus compte de la grandeur des orifices.

PROBLEME 5.

LXXXV. Une telle machine hydraulique étant conſtruite pour vaincre une réſiſtance donnée, déterminer l'effet qu'elle produira, lorsqu'elle eſt entretenuë par une certaine quantité d'eau, qui s'y dégorge par ſeconde.

SOLUTION.

On ſuppoſe donc connu premièrement le moment de la réſiſtance Q*c*, qui doit être ſurmontée. En ſecond lieu, puisque la conſtruction de la machine eſt donnée, ou aura la hauteur de l'eau dans le vaiſſeau $= a$, le demi-diametre du fond E H $= b$ & outre cela le rapport des rouës L & M ; ſoit donc le nombre des dents de la rouë M à celui de la rouë L comme $\lambda : 1$, ou bien on aura $\lambda : 1 = \mu : \nu$, ou $\mu = \lambda\nu$. Enfin la quantité d'eau, qui entre dans le vaiſſeau par ſeconde ſoit $=$ D ; & je ſuppoſe, que quel que

ſoit l'effet de la machine, les orifices H ſoient tels, que l'eau eſt conſtamment entretenuë dans le vaiſſeau à la hauteur $= a$. Ainſi, les quantités données ſont Qc; a; b; D & le nombre λ, & il s'agit de trouver le nombre μ ou ν, puisque de ν dépend l'effet de la machine. Or d'abord je ſuppoſerai, que ni le frottement ni la réſiſtance de l'air n' affoibliſſent pas l'action de la machine, & partant nous aurons ces deux égalités,

$$\text{I. } 2\pi\nu Qc = (1-\delta)Da, \quad \& \quad \text{II. } \mu b = \tfrac{1}{2}(1-\delta)\sqrt{\frac{al}{2\delta}}$$

car la dernière, qui regarde la grandeur des orifices, n'entrera pas en conſidération. Ayant donc $\mu = \lambda\nu$, la ſeconde égalité diviſée par la premiere donnera :

$$\frac{\lambda b}{2\pi Qc} = \frac{1}{2Da}\sqrt{\frac{al}{2\delta}} \text{ ou } \frac{\lambda Dab}{\pi Qc} = \sqrt{\frac{al}{2\delta}}$$

d'où nous tirons $\delta = \frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DDabb}$: & enſuite

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda DDabb - \pi\pi QQccl}{4\pi\pi\lambda\lambda DQcbb}$$

Par conſéquent l'effet entier de la machine ſera

$$2\pi\nu Qc = \frac{2\lambda\lambda DDabb - \pi\pi QQccl}{2\pi\pi Dbb} = Da - \frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda Dbb}.$$

Mais pour tenir compte du frottement & de la réſiſtance de l'air, on n'a qu'à prendre le moment de la réſiſtance Qc plus grand, qu'il n'eſt en effet ; car, lorsque l'employ de la machine ne differe pas beaucoup de celui auquel elle a été deſtinée par ſa conſtruction, cet expédient réüſſira aſſez bien : quoiqu'il puiſſe tromper énormement, lorsque la force mouvante actuelle Da eſt fort différente de celle qu'on a eu en vuë dans la conſtruction de la machine.

COROLL. I.

LXXXVI. Si l'on veut eſtimer le frottement & la réſiſtance de l'air ſur le pied, dont nous nous ſommes ſervi cy-deſſus, il faut multiplier

tiplier le moment de la réſiſtance actuelle Qc par $\frac{7}{8}$; ou l'augmenter d'une ſixième partie: & employer ce moment ainſi augmenté au lieu de Qc, dans les formules que nous venons de trouver.

COROLL. 2.

LXXXVII. De là on connoitra d'abord, ſi la machine eſt bien arrangée au deſſein, auquel on la veut employer, ou non? Car ſi la valeur de la fraction $\frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DD\overline{abb}}$ provient environ égale à $\frac{1}{8}$, c'eſt une marque que la machine eſt parfaitement bien diſpoſée à l'ouvrage qu'on veut exécuter, & qu'elle produira le plus grand effet dont elle eſt capable.

COROLL. 3.

LXXXVIII. Mais ſi la valeur de la fraction $\frac{\pi\pi QQccl}{2\lambda\lambda DD\overline{abb}}$ différe conſiderablement de $\frac{1}{8}$, on en conclura, que la machine n'eſt pas propre à l'ouvrage, auquel on la veut employer: & qu'elle produira un effet bien au deſſous de celui qu'on pourroit attendre, ſi elle étoit mieux arrangée.

COROLL. 4.

LXXXIX. Or il ſera aiſé de remédier à ce defaut, en changeant convenablement le rapport des deux rouës L & M; on n'aura qu'à donner à λ une telle valeur, que cette fraction devienne égale à peu près à $\frac{1}{8}$; d'où l'on tire $\lambda = \frac{2\pi Qc\sqrt{al}}{D\overline{ab}}$; & partant il faudra changer ces rouës, en ſorte que le nombre des dents de la rouë M ſoit à celui de la rouë L, comme $2\pi Qc\sqrt{al}$ à $D\overline{ab}$.

COROLL. 5.

XC. Ainſi, quand on conſtruit une telle machine, en ſorte qu'on puiſſe changer à volonté le rapport des rouës L & M, elle

pourra être renduë propre à toutes ſortes d'ouvrages, où il ſe trouve la même chûte de l'eau.

COROLL. 6.

XCI. On voit donc que, pour tirer d'une telle machine le plus grand effet qu'il eſt poſſible, tout revient au rapport des deux roues L & M, qui doit être conforme à la régle, que je viens de donner; d'où l'on tirera aiſément pour tout cas propoſé la juſte valeur de λ.

EXEMPLE.

XCII. Soit conſtruite une telle machine, dans laquelle l'eau puiſſe être entretenuë à la hauteur $a = 6$ pieds ; & que le rayon du fond de cette machine ſoit $b = 6$ pieds. Soit de plus la quantité d'eau, qui y coule par ſeconde $D = 2$ pieds cubiques, & que le moment de la réſiſtance ſoit $Qc = \frac{3}{4}$: pour lequel prenons à cauſe des obſtacles du mouvement $Qc = 2$: & il eſt queſtion d'arranger les deux roues L & M, en ſorte que cette machine produiſe le plus grand effet.

Nous aurons donc $\lambda = \frac{4\pi\sqrt{6l}}{72} = \frac{7}{9}$ à peu près : ainſi le nombre des dents de la roue M doit être au nombre des dents de la roue L comme 7 à 9: & alors l'effet de la machine ſera le plus grand qu'il eſt poſſible, & il ſurpaſſera bien quatre fois l'effet qu'une machine hydraulique ordinaire ſauroit produire, en employant la même quantité d'eau avec la même chûte.

REMARQUE.

XCIII. Après ce que je viens d'expoſer ici, il eſt évident que cette eſpece de machines hydrauliques mérite une très grande préférence ſur toutes les autres machines, qui ont été en uſage jusqu'ici, vû que l'effet, qu'elles ſont capables de produire, eſt bien quatre fois plus grand : ce qui eſt un avantage, dont on n'a peut être guères d'exem-

d'exemples dans la Mecanique. Cet avantage devient encore plus conſidérable par la maniere aiſée dont ces ſortes de machines peuvent être appliquées à toutes ſortes d'ouvrages. Car, quoiqu'une telle machine ſoit dabord conſtruite à un certain deſſein, & arrangée ſur une certaine quantité d'eau, qui doit ſervir à ſon entretien, & ſur un certain moment de réſiſtance, qui doit être ſurmontée ; cependant la même machine peut être appliquée, lorsque l'un & l'autre ſont entièrement changés ; on n'a alors qu'à donner aux rouës L & M le juſte rapport, que les circonſtances exigent : & ce rapport paroit auſſi aiſé d'être exécuté dans la pratique, qu'il ſe trouve par la théorie. Car par la machine même on connoit dabord les quantités a & b, & l'uſage auquel on la veut employer découvre les quantites D & Qc, d'où l'on tire $\lambda = \frac{2\pi Qc\,Val}{Dab}$; & alors il faut arranger les rouës L & M en ſorte, que le nombre des dents de la rouë L ſoit à celui de la rouë M comme Dab à $2\pi Qc\,Val$. Par ce moyen la machine ſera miſe en état de produire le plus grand effet qu'on ſauroit eſpérer.

EXPERIENCE.

XCIV. M. *Segner* ayant eu occaſion d'examiner un moulin ordinaire, m'en a communiqué les meſures ſuivantes.

Le diametre de la rouë pouſſée par l'eau étoit d'11 pieds; à chaque révolution de cette rouë la meule en fait 12.

Le diametre de la meule étoit de 3 pieds, & ſa hauteur d'un pied. Quand ce moulin fût en plein travail, il fût arrété, & M. *Segner* chargea la rouë principale d'un poids, qu'il impoſa ſur l'aube horizontale, pour connoitre la force requiſe à vaincre la réſiſtance du moulin. Il trouva ce poids de 44 livres, ou bien de $\frac{2}{3}$ pieds cubiques d'eau : donc le moment de cette force étant $= \frac{2}{3} . \frac{11}{12} = \frac{11}{18}$, le moment de réſiſtance de la machine, qui j'ai ſuppoſé $= Qc$, ſera pour ce moulin $Qc = \frac{11}{18} . \frac{1}{12}$ ou très à peu près $= \frac{1}{20}$. M. *Segner* a auſſi obſervé que la meule tournoit deux fois par ſeconde.

Donc

Donc, ſi un tel moulin doit être mis en mouvement par la nouvelle machine, ayant $Qc = \frac{1}{3}$ & $\nu = 2$, on trouvera d'abord la force mouvante, qui y eſt requiſe, $D\,a = 8\,\nu\,Q\,c = \frac{16}{3}$. Et partant la hauteur de la machine a étant donnée en pieds, la quantité d'eau requiſe par ſeconde ſera $D = \frac{16}{3}.\frac{1}{a}$ pieds cubiques: ainſi aux diverſes valeurs de a répondront les valeurs ſuivantes de D

$a =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$D =$	$5\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$1\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{15}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{4}{9}$

Enſuite, poſant le rayon de la machine en bas $= b$, & le nombre des révolutions de la machine par ſeconde $= \mu$, on aura pour l'arrangement de la machine $\mu b = \frac{7}{8}\sqrt{al}$, ayant mis $l = 3\frac{1}{6}$ pied. Donc, ſi $a = 6$, & $D = \frac{8}{9}$, ayant $\mu b = 3,82 = 3\frac{5}{8}$ pieds: on pourroit mettre $\mu = 1$, pour avoir $b = 3\frac{5}{6}$ pieds; & dans ce cas on auroit pour les ouvertures, $nbb = \frac{D}{7\sqrt{al}} = \frac{D}{8\,\mu b} = \frac{3D}{92} = \frac{2}{69}$ pieds quarrés ou $nbb = 4\frac{1}{6}$ pouces quarrés. Donc, ſi l'on pratiquoit 4 ouvertures, chacune devroit être de $1\frac{1}{24}$ pouces quarrés.

RECHER-