

R E C H E R C H E  
 SUR UNE NOUVELLE MANIERE D'ÉLEVER DE  
 L'EAU PROPOSÉE  
 PAR M. DE MOUR,  
 PAR M. EULER.

I.

Cette maniere d'élever de l'eau se trouve dans le Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'Ann. 1732 N<sup>o</sup>. 363. Elle paroît d'abord très simple, n'étant composée que d'un tuyau incliné à l'horizon  $CD$ , & attaché à un axe vertical  $OO$ , autour duquel il est mobile. Pour mettre cette machine en action, on l'enfonce sous l'eau  $VV$ , & lorsqu'on tourne le tuyau  $CD$  assez vite autour de l'axe  $OO$ , l'eau montera par ce tuyau, en y entrant en  $Cc$ , & se déchargera par l'autre bout  $Dd$ . On voit bien qu'on peut attacher au même axe  $OO$  d'une manière semblable plusieurs tuyaux  $CD$  également inclinés, pour rendre l'effet de la machine d'autant plus considérable.

Fig. 1.

II. Or l'élévation de l'eau dépend premièrement de la longueur du tuyau incliné  $CD$ ; en second lieu de son inclinaison à l'horizon; troisièmement de son élongation de l'axe  $OO$ ; & enfin de la vitesse de rotation, dont le tuyau tourne autour de l'axe. Car on comprend aisément, qu'il y a un certain degré de vitesse, que le mouvement de la machine doit surpasser, avant que l'eau monte par le tuyau: de sorte que si la machine tournoit plus lentement, l'eau ne seroit

élevée qu'à une certaine hauteur dans le tuyau, sans monter plus haut.

III. Il est aussi évident, qu'au lieu de faire le tuyau CD droit & partout de la même largeur, on lui pourroit donner une figure quelconque, & en varier la largeur à volonté. Mais, avant que d'étendre mes recherches à ce degré de généralité, je les bornerai au cas particulier que l'Auteur paroît avoir en vuë. Ainsi le tuyau CD sera droit & partout de la même largeur; ensuite il sera tellement incliné à l'horizon, qu'il se trouve avec l'axe OO dans un même plan vertical.

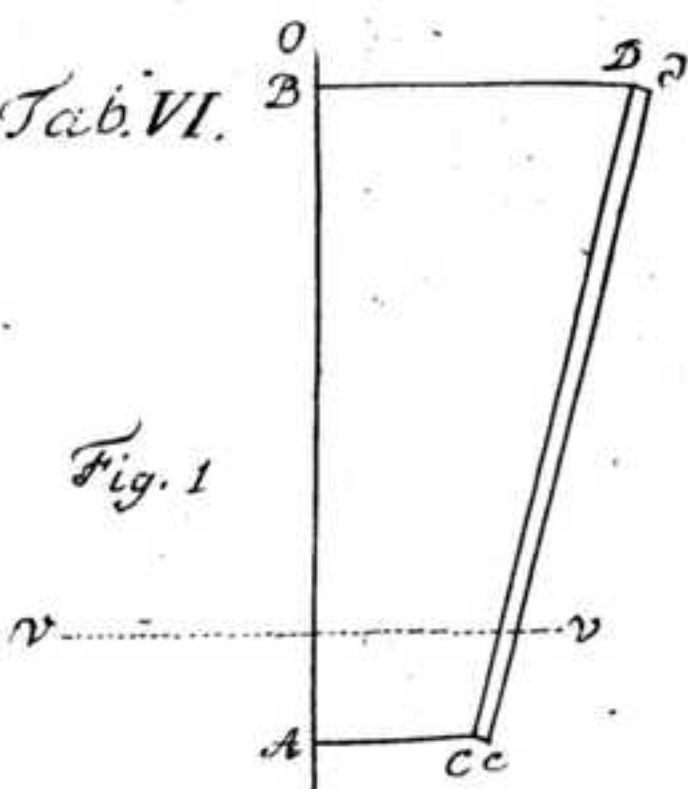
IV. Soit donc la longueur du tuyau  $CD = b$ . Sa largeur ou son amplitude  $= bb$ , qui lui convient par toute son étendue; & l'inclinaison à l'horizon  $= \theta$ , qui soit dans le même plan avec l'axe OO, de sorte que  $\theta$  marque le complément de l'inclinaison du tuyau à l'axe OO. Ensuite ayant tiré à l'axe les droites horizontales AC & BD, soit  $AC = c$ , & on aura  $BD = c + b \cos \theta$ , & la hauteur AB sera  $= b \sin \theta$ . Enfin supposons, que le mouvement de rotation du tuyau CD soit tel, qu'à une distance de l'axe  $= a$ , la vitesse de rotation soit  $= Vk$  ou duë à la hauteur  $k$ , de sorte que la vitesse de rotation absoluë soit  $= \frac{Vk}{a}$ .

V. Soit  $Vv$  la vitesse, avec laquelle l'eau monte par le tuyau, à l'instant présent, qui étant commune à toute l'eau contenuë dans le tuyau, elle se déchargera avec la même vitesse par l'orifice en haut Dd: & partant la quantité d'eau dégorgée en Dd sera exprimée par  $bbVv$ . Soit enfin la profondeur, à laquelle l'ouverture inférieure Cc se trouve au dessous de la surface de l'eau,  $VV = e$ .

VI. Ce mouvement étant regardé comme connu, de sorte que  $v$  sera une certaine fonction du tems  $t$ , que je suppose déjà écoulé depuis le commencement du mouvement; il faut chercher les forces, dont chaque particule d'eau dans le tuyau doit être sollicitée, pour  
qu'elle

Tab. VI.

Fig. 1



ad pag. 308.

Fig. 2.

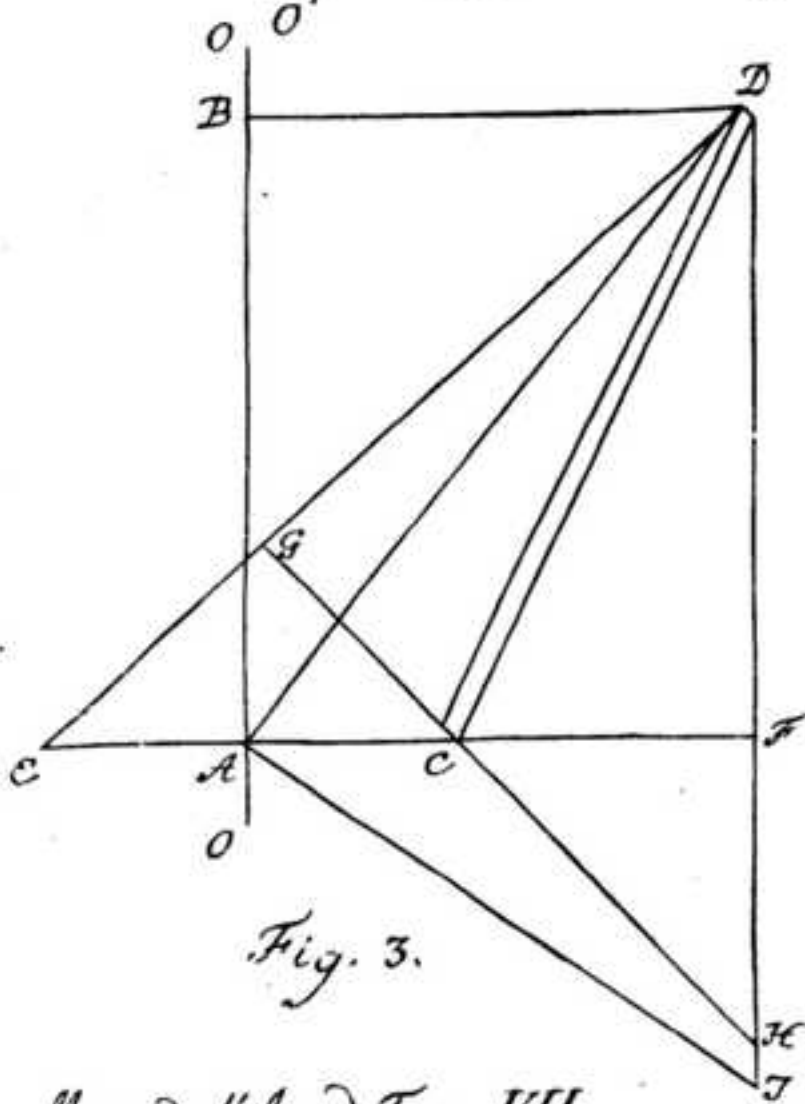
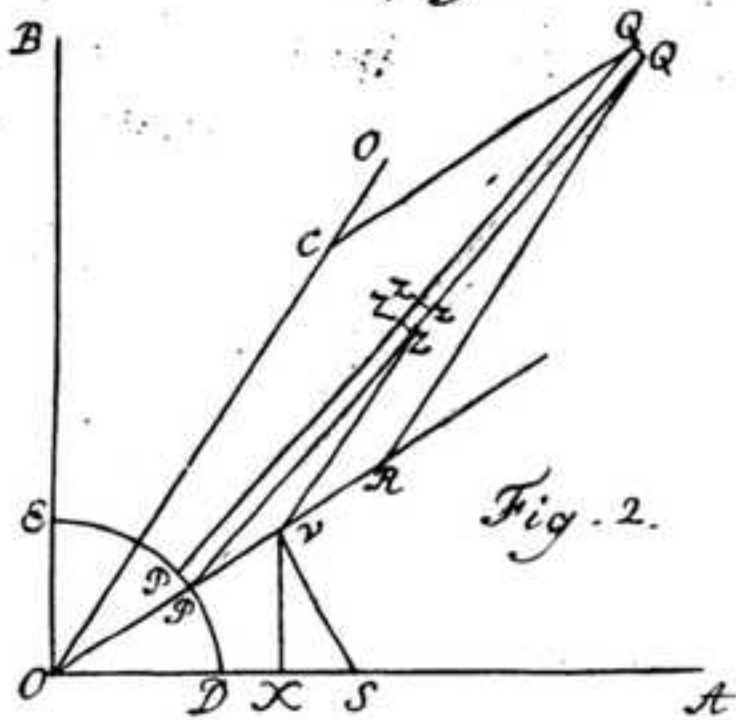


Fig. 3.

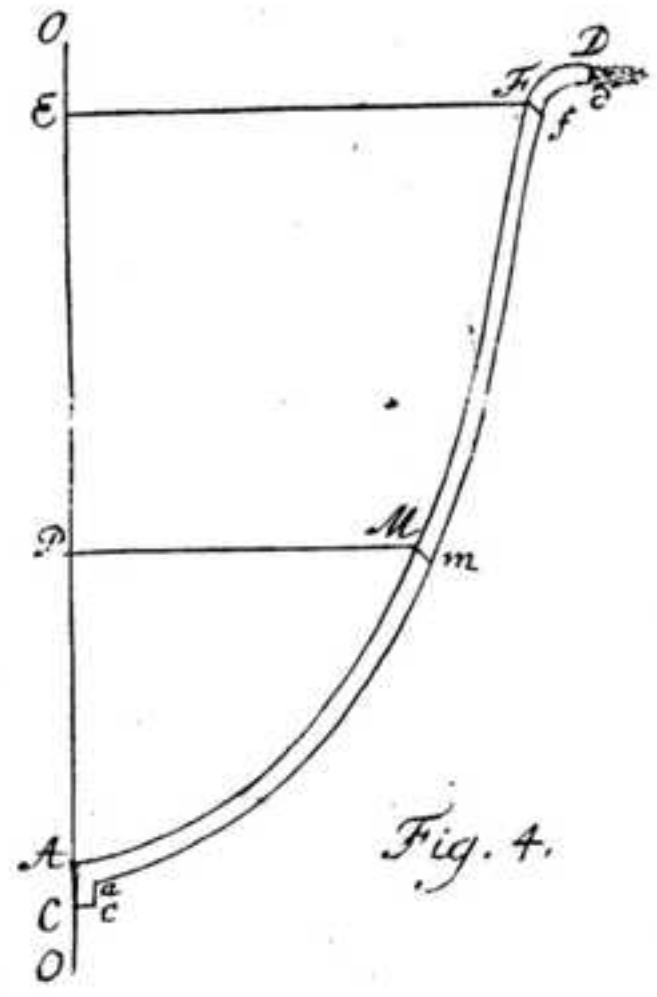


Fig. 4.

qu'elle poursuive le mouvement supposé. Car ce sera de ces forces comparées à celles, dont l'eau est sollicitée actuellement, qu'on pourra déterminer non seulement le mouvement actuel, mais aussi la force, qu'il faut employer pour maintenir la machine dans le mouvement.

VII. Pour cet effet, rapportons le mouvement à trois axes fixes, perpendiculaires entr'eux, dont l'un  $OO$  soit vertical, & le même autour duquel la machine tourne, & les deux autres  $OA$  &  $OB$  soient pris dans le plan horizontal, sur lequel on décrit avec le rayon  $OD = c$  le cercle  $DPE$ , & après un tems quelconque  $= t$ , où la vitesse de l'eau par le tuyau est supposée  $= Vv$ , le tuyau se trouve dans la situation  $PQ$ , ayant depuis le commencement déjà décrit par son mouvement de rotation l'angle  $DOP = \phi$ . Donc, puisque la vitesse, dont le point  $P$  est porté vers  $E$ , est  $= \frac{cVv}{a}$ , dont il par-

Fig. 2.

court dans le tems  $dt$  l'arc  $= cd\phi$ , nous aurons  $d\phi = \frac{dtVv}{a}$ , &

partant  $\phi = \frac{tVv}{a}$ , ou bien  $t = \frac{a\phi}{Vv}$ , de sorte que l'angle  $DOP = \phi$  nous servira de mesure du tems.

VIII. Considérons maintenant un élément d'eau quelconque dans le tuyau  $Zz$ , posant la distance  $PZ = s$ , & ayant  $Zz = ds$ , la masse de cet élément d'eau sera  $= bbd s$ . Du point  $Z$  tirons la verticale  $ZY$ , & à cause de l'angle  $YPZ = \theta$ , nous aurons  $YZ = s \sin \theta$  &  $PY = s \cos \theta$ . Et si la goutte d'eau en  $Z$  parvient en  $z$  après le tems  $dt$ , nous aurons  $Zz = ds = dt Vv$ . Tirons de plus du point  $Y$  à l'axe  $OA$  la perpendiculaire  $YX$ , & à cause de l'angle  $AOY = \phi$ , on aura  $OX = (c + s \cos \theta) \cos \phi$ , &  $XY = (c + s \cos \theta) \sin \phi$ .

IX. Nommons ces trois coordonnées  $OX = x$ ,  $XY = y$  &  $YZ = z$ , de sorte que

Qq 2

 $x =$

$x = (c + s \cos \theta) \cos \Phi$ ;  $y = (c + s \cos \theta) \sin \Phi$  &  $z = s \sin \theta$ ;  
 & prenant l'élément du tems  $dt$  constant, il faut par les principes de Méchanique, que la particule d'eau en Z soit sollicitée par trois forces accélératrices, qui sont

selon la direction OX  $= \frac{2 d d x}{d t^2}$

ou bien  $= \frac{2}{d t^2} \left( \begin{array}{l} -c d d \Phi \sin \Phi - c d \Phi^2 \cos \Phi + d d s \cos \theta \cos \Phi - d s d \Phi \cos \theta \sin \Phi \\ -s d d \Phi \cos \theta \sin \Phi - s d \Phi^2 \cos \theta \cos \Phi \end{array} \right)$

selon la direction XY  $= \frac{2 d d y}{d t^2}$

ou bien  $= \frac{2}{d t^2} \left( \begin{array}{l} c d d \Phi \cos \Phi - c d \Phi^2 \sin \Phi + d d s \cos \theta \sin \Phi + 2 d s d \Phi \cos \theta \cos \Phi \\ + s d d \Phi \cos \theta \cos \Phi - s d \Phi^2 \cos \theta \sin \Phi \end{array} \right)$

selon la direction YZ  $= \frac{2 d d z}{d t^2}$

ou bien  $= \frac{2}{d t^2} (d d s \sin \theta)$

X. Si nous tirons YS perpendiculaire à la droite OY, les deux premières forces se réduiront à deux autres selon les directions OY & YS, dont celle-là selon OY sera  $= f$ , OX  $\cos \Phi + f$ , XY  $\sin \Phi$ , & celle-cy selon YS  $= f$ , OX  $\sin \Phi - f$ , XY.  $\cos \Phi$ . Par conséquent nous aurons pour le point d'eau en Z ces trois forces accélératrices

I. selon OY  $= \frac{2}{d t^2} (-c d \Phi^2 + d d s \cos \theta - s d \Phi^2 \cos \theta)$

II. selon YS  $= \frac{2}{d t^2} (-c d d \Phi - 2 d s d \Phi \cos \theta - s d d \Phi \cos \theta)$

III. selon YZ  $= \frac{2}{d t^2} \cdot d d s \sin \theta$

XI. Or ayant  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V k}{a}$  &  $\frac{ds}{dt} = Vv$ , il sera  $\frac{dd\Phi}{dt^2} = 0$   
 $\frac{dds}{dt^2} = \frac{dv}{2dt Vv}$  &  $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{k}{aa}$  &  $\frac{ds d\Phi}{dt^2} = \frac{Vkv}{a}$  : donc nos  
trois forces accélératrices seront

I. selon OY =  $-\frac{2ck}{aa} + \frac{dv \cos \theta}{dt Vv} - \frac{2ks \cos \theta}{aa}$

II. selon YS =  $-\frac{4 \cos \theta Vkv}{a}$

III. selon YZ =  $\frac{dv \sin \theta}{dt Vv}$ .

XII. Si ces forces n'agissoient pas sur chaque particule d'eau, elles poursuivroient leur mouvement en vertu de leur inertie : c'est donc l'impénétrabilité des parois du tuyau, qui fournit ces forces ; & par conséquent ces parois seront réciproquement sollicitées par des forces égales en sens contraire. Or de ces trois forces il n'y a que celle qui agit selon YS, qui s'oppose au mouvement de rotation de la machine. Cette force motrice pour l'élément  $Zz = b b ds$  sera donc =  $\frac{4 b b ds \cos \theta Vkv}{a}$ , dont le moment est =  $\frac{4 b b}{a} ds(c + s \cos \theta) \cos \theta Vkv$ . Et partant de toute l'eau contenuë dans le tuyau résultera le moment suivant, qui s'oppose au mouvement de la machine

$$\frac{2 b b}{a} (2 b c + b b \cos \theta) \cos \theta Vkv = \frac{2 b b b \cos \theta}{a} (2c + b \cos \theta) Vkv.$$

XIII. Ensuite la particule d'eau en Z sera poussée selon la direction du tuyau en haut, ou selon ZQ, par la force accélératrice = force OY.  $\cos \theta$  + force YZ.  $\sin \theta$ , qui sera par conséquent =  $\frac{dv}{dt Vv}$

$\frac{2ck \cos \theta}{aa} - \frac{2ks \cos \theta^2}{aa}$ . Il faut donc que l'eau en Z soit actuellement sollicitée par cette force selon la direction du tuyau ZQ.

XIV. Or il y a actuellement deux forces qui agissent sur l'eau en Z, la première est la gravité, dont la direction étant ZY ne produit aucun moment à l'égard du mouvement de la machine, mais l'eau en Z en sera sollicitée selon ZP avec la force, accélératrice  $= \sin \theta$ . L'autre force résulte de l'état de compression de l'eau dans le tuyau. Soit donc la pression en Z exprimée par la hauteur  $= p$ , & en z par  $p + dp$ : & de là chaque particule d'eau en Zz sera poussée vers le bas du tuyau selon ZP par la force accélératrice  $= \frac{dp}{ds}$ . Ajoutant ces deux forces ensemble, nous en tirerons cette équation

$$\frac{dv}{dtVv} - \frac{2ck \cos \theta}{aa} - \frac{2ks \cos \theta^2}{aa} = - \sin \theta - \frac{dp}{ds} \text{ ou bien}$$

$$dp = - \frac{dv}{dtVv} \cdot ds + \frac{2ck ds \cos \theta}{aa} + \frac{2ks ds \cos \theta^2}{aa} - ds \sin \theta$$

XV. Comme  $v$  est une fonction du tems  $t$ , & que nous cherchons pour l'instant présent l'état de compression dans chaque endroit du tuyau, nous devons regarder l'expression  $\frac{dv}{dtVv}$  comme une quantité constante, d'où nous aurons en intégrant

$$p = C - \frac{sdv}{dtVv} + \frac{2ck s \cos \theta}{aa} + \frac{ks s \cos \theta^2}{aa} - s \sin \theta$$

Or en Q, où l'eau sort, la pression doit évanouir; cette circonstance sert à déterminer la constante C, qui sera

$$C = \frac{bdv}{dtVv} - \frac{2bck \cos \theta}{aa} - \frac{bbk \cos \theta^2}{aa} + b \sin \theta$$

& marquera l'état de compression de l'eau à l'orifice en bas P.

XVI.



XVI. Or cet orifice se trouvant sous l'eau à la profondeur  $= e$ , puisque l'eau est supposée d'y entrer avec la vitesse  $= Vv$ , la pression y doit être  $= e - v$ , d'où nous gagnons cette équation

$$e - v = \frac{bdv}{dtVv} - \frac{2bck \cos \theta}{aa} - \frac{bbk \cos^2 \theta}{aa} + b \sin \theta$$

dont je ne m'embarasserai pas à chercher l'intégrale, puisque le mouvement parvient bientôt dans un état d'uniformité, qu'il suffit de connoître. Soit donc  $Vv$  la vitesse, dont l'eau monte uniformément par le tuyau, & nous aurons d'abord cette équation

$$v = e + \frac{bk \cos \theta}{aa} (2c + b \cos \theta) - b \sin \theta$$

où  $b \sin \theta - e$  marque la hauteur de l'orifice supérieur du tuyau au dessous du niveau  $VV$ .

XVII. De cette valeur trouvée nous voyons d'abord, que si la machine est en repos, ou  $k = 0$ , l'eau ne sauroit monter par le tuyau, à moins qu'il ne fût  $c > b \sin \theta$ , ou que l'orifice  $D$  se trouve au dessous du niveau  $VV$ . Donc, pour que l'eau soit élevée par le tuyau, il faut que le mouvement de rotation surpasse une certaine limite, ou il faut qu'il soit

$$\frac{k}{aa} > \frac{b \sin \theta - e}{b \cos \theta (2c + b \cos \theta)}$$

Car s'il étoit  $\frac{k}{aa}$  plus petit que cette valeur, l'eau ne monteroit jamais

au bout supérieur  $Dd$ : & si  $\frac{k}{aa}$  étoit exactement égal à cette valeur, l'eau monteroit bien jusqu'à  $Dd$ , mais elle y subsisteroit en repos sans se décharger.

XVIII. Supposons que le mouvement de rotation soit tel, que chaque révolution entière de la machine réponde aux oscillations

Fig. 1



tions d'un pendule de la longueur  $\equiv q$ , & on aura  $\frac{k}{aa} = \frac{2}{q}$ ;

& partant,

$$v = \frac{2b \cos \theta}{q} (2c + b \cos \theta) - b \sin \theta + e;$$

& donc il faut qu'il soit

$$q < \frac{2b \cos \theta (2c + b \cos \theta)}{b \sin \theta - e}$$

& le moment de forces, qui s'oppose au mouvement de la machine sera  $\equiv 2bbb \cos \theta (2c + b \cos \theta) \sqrt{\frac{2v}{q}}$ . Donc, si l'eau ne sort pas en haut du tuyau, il n'y aura besoin d'aucune force pour conserver la machine en mouvement; mais dès que l'eau se décharge en haut, il y faudra employer d'autant plus de forces, que le mouvement sera plus vite.

Fig. 3.

**XIX.** Cette limite au dessous de laquelle doit être la longueur du pendule  $q$ , se peut construire aisément de cette manière. Ayant pris  $AE = AC = c$ , qu'on baïsse de  $D$  sur la ligne horizontale  $EAC$  la perpendiculaire  $DF$ . Qu'on tire  $DE$ , & qu'on mene par  $C$  sur  $DE$  la perpendiculaire  $GCH$ , jusqu'à la rencontre de la verticale  $DF$  prolongée; & supposant la droite  $EF$  le niveau d'eau, de sorte que  $e = 0$ , il faut qu'il soit  $q < 2FH$ .

**XX.** Or ces déterminations demandent encore une correction, à l'égard de la pression de l'eau en  $C$ , que nous avons supposée  $\equiv c - v$ , qui seroit bien juste, si l'orifice du tuyau  $C$  étoit en repos, ce qui arriveroit s'il étoit  $c = 0$ ; de sorte que dans le cas  $c = 0$  nos formules n'auroient point besoin de correction. Mais si l'orifice  $C$  tourne autour de l'axe  $OO$  avec la vitesse  $\equiv \frac{c\sqrt{k}}{a}$ , il en est de même, que si, le tuyau demeurant en repos, l'eau tournoit avec une vitesse égale



égale autour de l'axe  $OO$ . Or dans ce cas la pression de l'eau en  $C$  seroit plus grande à cause de la force centrifuge, de manière qu'au lieu de la hauteur  $e$  il faut écrire  $e + \frac{cc k}{AA}$ ; & partant, j'aurois dû écrire  $e + \frac{cc k}{AA} - v$  au lieu de  $e - v$ , dans l'équation du §. 16.

XXI. Donc, puisque  $\frac{k}{AA} = \frac{2}{q}$ , si nous mettons  $e + \frac{2cc}{q}$  pour  $e$ , nous aurons cette équation.

$$v = \frac{2}{q} (c + b \cos \theta)^2 - b \sin \theta + e$$

ou bien, si nous regardons la hauteur  $e$  comme infiniment petite, ou que nous considérons seulement la partie de la machine, qui est au dessus de l'eau, nous aurons :

$$v = \frac{2}{q} (c + b \cos \theta)^2 - b \sin \theta$$

Donc, pour que l'eau monte actuellement dans le tuyau, il faut qu'il soit

$$q < \frac{2(c + b \cos \theta)^2}{b \sin \theta}$$

Pour construire la valeur de cette formule on n'a qu'à tirer la droite  $DA$ , & y joindre en  $A$  la perpendiculaire  $AJ$ , qui coupe la verticale  $DF$  en  $J$ , & alors il faut qu'il soit  $q < 2 FJ$ .

XXII. Si l'on veut que l'eau monte par le tuyau avec une vitesse donnée  $Vv$ , on peut déterminer la vitesse de rotation, dont il faut tourner la machine : car chaque révolution se doit achever dans le tems d'une oscillation d'un pendule, dont la longueur est

$$q = \frac{2(c + b \cos \theta)^2}{v + b \sin \theta}; \text{ ou bien } \frac{2}{q} = \frac{v + b \sin \theta}{(c + b \cos \theta)^2}$$

Et alors le moment de forces requis pour conserver la machine en mouvement sera  $= \frac{2bb \cos \theta (2c + b \cos \theta)}{c + b \cos \theta} \sqrt{v} (v + b \sin \theta)$

Il faudra donc employer ces formules au lieu des précédentes, si le tuyau est coudé en bas jusqu'à l'axe O, pour y puiser l'eau.

XXIII. Or, à moins qu'il ne soit  $c = 0$ , l'eau qui entre dans l'orifice en C fera aussi quelque effort contraire au mouvement de la machine, & ayant égard à cet effort, le moment de forces total, qui s'oppose au mouvement de la machine, sera  $= \frac{2bb}{a} (c + b \cos \theta)^2 \sqrt{kv}$ .

Donc, puisque  $\frac{\sqrt{k}}{a} = \sqrt{\frac{2}{g}} = \sqrt{\frac{v + b \sin \theta}{(c + b \cos \theta)^2}}$ , ce moment sera  $= 2bb (c + b \cos \theta) \sqrt{v} (v + b \sin \theta)$

XXIV. Mais, pour mettre dans tout son jour le fondement des corrections, qu'il faut apporter à l'égard de la distance AC = c, où l'orifice inférieur puise de l'eau; le meilleur moyen sera de considérer le tuyau courbé selon une figure quelconque, & de lui donner une largeur variable. Car cette généralité servira à nous faire voir la différence qu'il y a, soit que la distance AC = c soit évanouissante, ou non; puisqu'on peut toujours concevoir la figure du tuyau telle, que son orifice d'embas C puise près de l'axe même, de sorte qu'il n'y ait plus de difficulté du côté de la distance c.

Fig. 2.

XXV. Posons donc que le tuyau PQ ait une figure quelconque, qui soit pourtant dans le même plan avec l'axe OO, & posant la partie PZ = s, soit la largeur du tuyau en Z = rr, or la largeur au bout QQ comme auparavant = bb, où l'eau sorte avec la vitesse =  $\sqrt{v}$ . Donc la vitesse de l'eau en Z sera  $= \frac{bb \sqrt{v}}{rr}$ , avec laquelle

elle achevera dans l'élément du tems dt l'espace ds  $= \frac{bb dt \sqrt{v}}{rr}$

où



où il faut remarquer que  $rr$  est une fonction de  $s$  indépendante du tems  $t$ , dont la quantité  $v$  est fonction.

XXVI. Soit de plus  $ZY = z$  &  $OY = u$ , qui feront les coordonnées pour la figure du tuyau, de laquelle dépend le rapport entre les quantités  $s$ ,  $z$  &  $u$ . Soit donc  $dz = ds \sin \omega$  &  $du = ds \cos \omega$ , ou bien  $dz = \frac{bb dt \sin \omega Vv}{rr}$  &  $du = \frac{bb dt \cos \omega Vv}{rr}$

Ensuite, posant comme cy-dessus  $OX = u \cos \Phi = x$  &  $XY = u \sin \Phi = y$ , les trois forces accélératrices, qui doivent agir sur l'eau en  $Z$ , feront :

I. Selon  $OX = \frac{2ddx}{dt^2}$  : II. selon  $XY = \frac{2ddy}{dt^2}$  ; III. selon  $YZ = \frac{2ddz}{dt^2}$

XXVII. Or puisque  $dx = du \cos \Phi - u d\Phi \sin \Phi$  &  $dy = du \sin \Phi + u d\Phi \cos \Phi$  nous aurons

la force  $OX = \frac{2}{dt^2} (ddu \cos \Phi - 2dud\Phi \sin \Phi - u dd\Phi \sin \Phi - u d\Phi^2 \cos \Phi)$

la force  $XY = \frac{2}{dt^2} (ddu \sin \Phi + 2dud\Phi \cos \Phi + u dd\Phi \cos \Phi - u d\Phi^2 \sin \Phi)$

d'où résultent selon les directions  $OY$  &  $YS$

selon  $OY = \frac{2}{dt^2} (ddu - u d\Phi^2)$

selon  $YS = \frac{2}{dt^2} (-2dud\Phi - u dd\Phi)$

& la troisième selon  $YZ = \frac{2bb}{dt} \left( \frac{d\omega \cos \omega Vv}{rr} - \frac{2dr \sin \omega Vv}{r^2} + \frac{dv \sin \omega}{2rr Vv} \right)$

XXVIII. Ensuite ayant  $\frac{du}{dt} = \frac{bb \cos \omega Vv}{dt}$  &  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Vv}{a}$ , nous

aurons  $\frac{2ddu}{dt^2} = \frac{2bb}{dt} \left( -\frac{d\omega \sin \omega Vv}{rr} - \frac{2dr \cos \omega Vv}{r^2} + \frac{dv \cos \omega}{2rr Vv} \right)$

$$\frac{2u d\Phi^2}{dt^2} = \frac{2ku}{aa}; \quad \frac{4 du d\Phi}{dt^2} = \frac{4bb \cos \omega \cdot Vkv}{arr}; \quad dd\Phi = 0$$

donc les forces feront

$$\text{selon OY} = - \frac{2bb d\omega \sin \omega \cdot Vv}{rr dt} - \frac{4bb dr \cos \omega \cdot Vv}{r^3 dt} + \frac{bb dv \cos \omega}{rr dt Vv} - \frac{2ku}{aa}$$

$$\text{selon YS} = - \frac{4bb \cos \omega \cdot Vkv}{arr}$$

XXIX. Cette dernière force étant uniquement opposée au mouvement de la machine, la force motrice qui en résulte sera  $= \frac{4bb ds \cos \omega Vkv}{a}$  & le moment  $= \frac{4bb u du Vkv}{a}$  : & partant le

moment total sera  $= \frac{2bb uu Vkv}{a}$ . Ou bien, si le tuyau commence en P & finit en Q, & qu'on baïsse de Q la perpendiculaire, le moment total, qui résulte de toute l'eau contenuë dans le tuyau est

$$\frac{2bb Vkv}{a} (OR^2 - OP^2)$$

XXX. Depuis la force accélératrice, qui pousse l'eau selon la direction du tuyau vers Q, fera

$$- \frac{4bb dr Vv}{r^3 dt} + \frac{bb dv}{rr dt Vv} - \frac{2ku \cos \omega}{aa}$$

qui devant être  $= - \frac{dp}{ds} - \sin \omega$ , supposant la pression en Z  $= p$  nous aurons

$$dp = - ds \sin \omega + \frac{4bb ds dr Vv}{r^3 dt} - \frac{bb dv}{dt Vv} \cdot \frac{ds}{rr} + \frac{2ku ds \cos \omega}{aa}$$

or puisque  $\frac{ds}{dt} = \frac{bb Vv}{rr}$ , &  $ds \cos \omega = du$  &  $ds \sin \omega = dz$

cette

cette équation deviendra

$$dp = -dz + 4b^4v \cdot \frac{dr}{r^5} - \frac{bbdv}{dtVv} \cdot \frac{ds}{rr} + \frac{2kudv}{aa}$$

dont l'intégrale est

$$p = C - z - \frac{b^4v}{r^4} + \frac{kuv}{aa} - \frac{bbdv}{dtVv} \int \frac{ds}{rr}$$

XXXI. Soit pour toute la longueur du tuyau  $\int \frac{ds}{rr} = F$ , & puisque en Q la pression doit évanouir, où devient  $z = QR$ ,  $u = OR$ ,  $rr = bb$ , nous aurons

$$C = QR + v - \frac{k}{aa} \cdot OR^2 + \frac{bbdv}{dtVv} \cdot F$$

Donc, si la largeur du tuyau en P est supposée =  $ff$ , la pression en P fera

$$QR + v - \frac{k}{aa} \cdot OR^2 + \frac{bbdv}{dtVv} \cdot F - \frac{b^4v}{f^4} + \frac{k}{aa} \cdot OP^2$$

ou bien cette pression fera

$$\frac{Fbbdv}{dtVv} + QR - \frac{k}{aa} (OR^2 - OP^2) + v \left( 1 - \frac{b^4}{f^4} \right)$$

XXXII. Maintenant, si nous posons que  $OP = 0$ , ou que le tuyau, de quelque figure qu'il soit, ait une courbure en bas, de sorte que son orifice d'embas P soit près de l'axe ; il n'y a aucun doute que

la pression n'y soit =  $e - \frac{b^4v}{f^4}$ , d'où nous tirons

$$e = \frac{Fbbdv}{dtVv} + QR - \frac{k}{aa} \cdot OR^2 + v$$

& si le mouvement est déjà devenu uniforme, il fera

$$v = \frac{k}{aa} \cdot OR^2 - QR + c$$

& le moment de forces =  $\frac{2bb \sqrt{kv}}{a} \cdot OR^2$

XXXIII. A` présent il est clair, qu'il est toujours avantageux de courber le tuyau tellement en bas, que son orifice soit si près de l'axe, qu'il est possible ; puisqu' alors le terme affirmatif  $\frac{k}{aa} \cdot OR^2$  dans l'expression de  $v$  devient sans contredit le plus grand, & partant la vitesse la plus grande : au lieu, que si l'orifice inférieur étoit éloigné de l'axe, on devroit diminuer  $OR^2$  du quarré de cette distance. Ainsi pour rendre cette machine aussi parfaite qu'il est possible, le bout d'embas du tuyau doit se trouver auprès de l'axe  $OO$ .

Fig. 4.

XXXIV. Soit donc  $OO$  l'axe de la machine, &  $AMED$  la figure d'un tuyau, dont l'orifice inférieur  $Cc$  puise l'eau tout proche de l'axe  $OO$ , & que l'orifice supérieur  $Dd$  soit plié en dehors pour mieux dégorger l'eau ; dont l'ouverture soit =  $bb$ . Pour la largeur du tuyau dans les autres endroits  $Mm$ , il est indifférent de la faire ou plus grande ou plus petite que  $bb$  ; mais pour diminuer l'obstacle du frottement, & pour rendre le mouvement de l'eau plus libre, il conviendra de donner au tuyau en bas une plus grande largeur.

XXXV. Ce tuyau étant donc tourné autour de l'axe si vite, que chaque révolution répond à une oscillation d'un pendule de la longueur =  $q$ , à cause de  $\frac{k}{aa} = \frac{2}{q}$ , l'eau montera par le tuyau avec la vitesse  $\sqrt{v}$  de sorte que

$$v = \frac{2 \cdot EF^2}{q} - AE$$

supposant que  $AE$  soit la hauteur au dessus du niveau d'eau, & pour main-

maintenir la machine dans ce mouvement, il y faut employer une force dont le moment est

$$2bb. EF^2 \sqrt{\frac{2v}{g}}$$

la force étant exprimée par un volume d'eau, dont le poids lui est égal.

XXXVI. Ainsi, si le tems d'une révolution de la machine est donné par le pendule  $g$ , il faut qu'il soit  $EF^2 > \frac{1}{2}g. AE$ . Mais, puisqu'il est également nécessaire que l'eau soit élevée au dessus de chaque endroit moyen, il faut qu'il soit aussi  $PM^2 > \frac{1}{2}g. AP$ . Car, s'il étoit  $PM^2 < \frac{1}{2}g. AP$ , l'eau ne sauroit être élevée jusqu'à  $M$ ; & à plus forte raison elle ne monteroit pas jusqu'à  $Dd$ , quoiqu'il fût  $EF^2 > \frac{1}{2}g. AE$ .

XXXVII. De là on comprend que la plus propre figure, qu'on puisse donner au tuyau  $AMF$ , est la parabolique, dont l'axe soit l'axe de la machine, & le sommet en  $A$ . Soit donc la figure du tuyau  $AMF$  une parabole, dont le parametre soit  $=g$ , de sorte que  $PM^2 = g. AP$  &  $EF^2 = g. AE$ , & la vitesse de l'eau, qui sera déchargée en haut, est due à la hauteur  $v = \left(\frac{2g}{g} - 1\right) AE$ ; & pour entretenir la machine en mouvement, il y faut appliquer une force, dont le moment est  $= 2bb. EF^2. \sqrt{\frac{2v}{g}} = \frac{2bb}{g}. EF^3 \sqrt{4 - \frac{2g}{g}}$ , ou bien ce moment sera  $= \frac{2gbb}{g}. AE \sqrt{AE(4g - 2g)}$

XXXVIII. Il faut donc que le parametre de cette parabole  $g$  soit plus grand que  $\frac{1}{2}g$ . Soit donc  $\frac{2g}{g} - 1 = \alpha$ , ou bien le parametre de la parabole  $g = \frac{1}{2}(\alpha + 1)g$ ; & la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée  $AE = \alpha$ ; & on aura  $v = \alpha\alpha$ , & le moment requis pour mettre la machine en action  $= (\alpha + 1)bb\alpha \sqrt{2\alpha\alpha g}$ .

XXXIX.





XXXIX. Soit  $l$  la hauteur, par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, dont la valeur est de 15, 625 pieds de Rhin; & s'il étoit  $v = l$ , la masse d'eau dégorcée dans une seconde seroit  $= 2bb l$ ; donc puisque  $v = aa$ , le volume d'eau élevée dans une seconde sera  $= 2bb \sqrt{aal}$ .

XL. Soit de plus  $M$  le moment de forces, qu'on veut employer pour mettre la machine en mouvement, & on aura  $M = (a + 1)abb \sqrt{2aaq}$ : d'où l'on tire  $bb = \frac{M}{(a + 1)a \sqrt{2aaq}}$ : &

partant la quantité d'eau élevée pendant une seconde sera  $\frac{2M}{(a + 1)a} \sqrt{\frac{l}{2g}}$ : d'où l'on voit que, plus on fait rapide le mouvement de la machine, plus deviendra aussi grande la quantité d'eau qu'on fera en état d'élever. Ensuite on voit aussi, que pour augmenter l'effet de la machine, il convient de faire la valeur de  $a$  aussi petite que cela se pourra.

XLI. Mais on comprend aussi aisément que ces diminutions ne peuvent aller à l'infini: car en diminuant  $a$  &  $q$  l'orifice supérieur du tuyau  $bb$  en devient augmenté, & puisque l'inférieur ne sauroit être plus petit, son étendue s'éloigneroit trop de l'axe, de sorte que la supposition faite à cet égard ne sauroit plus avoir lieu. Pour cette raison il faut donner au paramètre de la parabole  $g$  une valeur raisonnable, en sorte que  $Cc$  soit beaucoup plus petit que  $EF$ : & puisqu'il est  $Cc$  au moins égal à  $b$ : il faut que  $EF^2$  ou  $\frac{1}{2}(a + 1)aq$  surpasse considérablement la valeur de  $bb = \frac{M}{(a + 1)a \sqrt{2aaq}}$ , ou qu'il soit  $\frac{1}{2}(a + 1)^2 aaq \sqrt{2aaq} > M$ , & cela de beaucoup.

XL. Posant donc  $\frac{1}{2}(a + 1)^2 aaq \sqrt{2aaq} = \beta M$ , de sorte que  $\beta$  soit un nombre beaucoup plus grand que l'unité, & on aura  $\sqrt{q} = \sqrt[3]{\frac{2\beta M}{(a + 1)^2 aa \sqrt{2aa}}}$ ; & de là la quantité d'eau élevée par

seconde



seconde fera  $= \sqrt[6]{\frac{4\alpha l^3 M^4}{(\alpha+1)^2 \beta \beta a}}$ , d'où l'on voit que cette quantité deviendra la plus grande si  $\alpha = 1$ .

XLIII. Soit donc  $\alpha = 1$ , & on aura  $g = q$ ;  $\sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\frac{\beta M}{2aa\sqrt{2a}}}$   
 ou  $q = \sqrt[3]{\frac{\beta \beta MM}{8a^5}}$ ;  $bb = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{MM}{\beta aa}}$ ; & la quantité d'eau élevée  
 par seconde fera  $= \sqrt[6]{\frac{l^3 M^4}{\beta \beta a}}$ : où il faut remarquer que  $\frac{bb}{q} = \frac{a}{\beta}$ ,  
 ou  $q = g = \frac{\beta bb}{a}$ .

XLIV. Posons qu'on veuille employer la force d'un ou plusieurs hommes pour mettre la machine en action: comme la force d'un homme dépend de la vitesse dont il agit, supposons qu'il parcoure par seconde l'espace  $= i$ , & qu'avec cette vitesse il exerce une force égale au poids d'un volume d'eau  $= A$ , que cet homme travaille à faire tourner une rouë, de l'axe de laquelle il soit éloigné à une distance  $= d$ ; de sorte que le moment de sa force fera  $= Ad$ . De plus posons, que pendant qu'il fait avec cette rouë un tour, la machine fasse  $\mu$  tours.

XLV. Cet homme fera donc un tour en  $\frac{2\pi d}{i}$  secondes, & partant le tems d'une révolution de la machine fera  $= \frac{2\pi d}{\mu i}$  secondes, qui doit répondre au tems d'une oscillation du pendule  $q$ ; soit  $k$  la longueur du pendule à secondes, & on aura  $\frac{2\pi d}{\mu i} = \sqrt{\frac{q}{k}}$ . Or puisque  $l$  marque la hauteur de la chute dans une seconde, on aura  $k = \frac{2l}{\pi\pi}$ , & partant  $\frac{2d}{\mu i} = \sqrt{\frac{q}{2l}}$ ; d'où l'on tire  $q = \frac{8ddl}{\mu\mu ii}$ .

XLVI. Le moment de force, que l'homme exerce immédiatement sur la machine, sera donc  $= \frac{1}{\mu} A d$ ; puisque la machine est supposée faire  $\mu$  tours, pendant que l'homme en fait un. Et partant nous aurons  $M = \frac{1}{\mu} A d$ ; donc  $q = \sqrt[3]{\frac{\beta \beta d d A N}{8 \mu \mu a^5}} = \frac{8 d d l}{\mu \mu i i}$ ; d'où nous tirons;  $d^4 = \frac{\beta \beta \mu^4 i^5 A A}{8^4 a^5 l^3}$ . Et enfin la quantité d'eau élevée par seconde sera  $= \sqrt[6]{\frac{d^4 l^3 A^4}{\beta \beta \mu^4 a}} = \frac{i A}{4 a}$ ; d'où l'on voit que cette quantité ne dépend plus ni de  $\beta$  ni de  $\mu$ , mais uniquement de  $A, i$  &  $a$ .

XLVII. Or, pour déterminer la machine même, la force  $A$  avec l'espace  $i$ , qu'elle parcourt dans une seconde, & la hauteur  $a$  à laquelle l'eau doit être élevée, étant données, on aura d'abord  $d d = \frac{\beta \mu \mu A i^3}{64 a a l \sqrt{a l}}$  &  $d = \frac{\mu i}{8 a} \sqrt[3]{\frac{\beta A i}{l \sqrt{a l}}}$ ; d'où l'on trouve  $q = g = \frac{\beta A i}{8 a a \sqrt{a l}}$  &  $b b = \frac{A i}{8 a \sqrt{a l}}$ : où il est  $l = 15,625$  pieds de Rhin.

XLVIII. Si l'on met la quantité d'eau, que la machine élève dans une seconde  $= D$ , on aura  $D = \frac{A i}{4 a}$  & partant  $D a = \frac{1}{4} A i$ . Ici  $D a$  exprime l'effet de la machine dans une seconde, &  $A i$  marque l'action, que l'homme exerce en même tems. Donc l'effet de la machine s'égalé à la quatrième partie de l'action: ou il n'y a que la quatrième partie de l'action, qui est proprement employée à élever de l'eau. Car, puisque l'homme pourroit élever la quantité d'eau

A

A par la hauteur  $i$  dans une seconde, cet effet seroit  $= Ai$ : donc le même homme, en appliquant ses forces à la machine, ne produit que le quart de cet effet.

XLIX. Si l'on ne veut pas supposer que  $EF^2$  surpasse un certain nombre de fois l'ouverture  $bb$ , de sorte que le nombre  $\alpha$  demeure indéterminé, on aura les déterminations suivantes

$$q = \frac{8 d d l}{\mu \mu i i}; g = \frac{4(\alpha + 1) d d l}{\mu \mu i i}; bb = \frac{A i}{4(\alpha + 1) a \sqrt{a a l}}$$

& la quantité d'eau élevée  $D = \frac{A i}{2(\alpha + 1) a}$ ,

d'où l'on voit que l'effet de la machine  $D a$  peut devenir plus grand que  $\frac{1}{4} Ai$ ; & il pourroit même devenir  $= \frac{1}{2} Ai$ , s'il étoit permis de mettre  $\alpha = 0$ . Ainsi, il fera avantageux de rendre la valeur de  $\alpha$  si petite qu'il est possible; mais il faut prendre garde que  $16(\alpha + 1)^2 a a d d l \sqrt{a a l}$  soit plusieurs fois plus grand que  $\mu \mu Ai^3$ , ou bien

$$\frac{d d}{\mu \mu} > \frac{A i^3}{16(\alpha + 1)^2 a a l \sqrt{a a l}}$$

L. Puisque donc il est permis de déterminer la quantité  $\frac{d}{\mu}$  comme les circonstances l'exigent, on pourra donner à  $\alpha$  une valeur aussi petite qu'on voudra; & de cette manière l'effet de la machine approchera tant de  $\frac{Ai}{2a}$ , que la différence deviendra imperceptible.

Ainsi prenant  $\alpha = \frac{1}{100}$  la quantité d'eau élevée dans une seconde sera  $D = \frac{50 Ai}{101 a}$  de sorte qu'on ne perd que la  $\frac{1}{101}$ me partie sur l'effet total.

Or alors il faut que  $\frac{d d}{\mu \mu}$  soit considérablement plus grand que

$$\frac{6250 Ai^3}{10201 a a l \sqrt{a a l}}; \text{ \& on aura } bb = \frac{250 Ai}{a \sqrt{a a l}}; q = \frac{d d}{\mu \mu} \cdot \frac{8 l}{i i} \text{ \& } g = \frac{101}{201} \cdot \frac{d d l}{i i}$$



LI. Si l'on veut employer la force d'un homme pour mettre la machine en mouvement, & cela avec le plus grand avantage, il faut que l'homme agisse avec une vitesse de deux pieds par seconde, & alors la force sera environ de 30 livres. Donc, prenant nos mesures en pieds, on aura  $A = \frac{1}{2}$ , puisqu'un demi-pied cubique d'eau pèse environ 30 livres &  $i = 2$ , d'où nous tirons à cause de  $l = 15$ , 625 pieds les valeurs suivantes :

$$D = \frac{50}{101a}; \quad bb = \frac{\sqrt{4000}}{a\sqrt{a}}; \quad q = 31\frac{3}{4} \cdot \frac{dd}{\mu\mu}, \quad g = \frac{101}{200} \cdot q$$

& puisque  $EF = ga = \frac{505}{32} \cdot \frac{add}{\mu\mu}$ ; il faut que  $\frac{dd}{\mu\mu}$  soit plusieurs

fois plus grand que  $\frac{32\sqrt{4000}}{505aa\sqrt{a}}$  ou que  $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$ .

LII. Rien n'est plus aisé, que de satisfaire à cette condition, puisque la valeur de  $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$  devient pour l'ordinaire extrêmement petite, de sorte qu'on peut mettre  $\mu = 1$ , sans que la distance  $d$  devienne trop grande. Or si  $\mu = 1$ , on fera travailler l'homme immédiatement à la machine, en la tournant en haut avec une manivelle, dont le rayon est à peu près d'un demi-pied; & alors à cause de  $\mu = 1$  &  $d = \frac{1}{2}$ , le parametre de la parabole sera  $g = 3,9453125$  pieds, qui produit une machine assez commode. Et si l'on avoit pris  $d$  tant soit peu plus petit, on auroit trouvé  $g = 3$  pieds.

LIII. Si la hauteur est fort grande, à laquelle l'eau doit être élevée, on peut mettre encore plus petit le parametre de la parabole, & ne lui donner que deux pieds, ou bien seulement un, afin que la machine ne devienne trop large par en haut; car on voit que plus la hauteur  $a$  est grande, plus devient petite l'expression  $\frac{4}{aa\sqrt{a}}$ ,  
de

de sorte que dans ces cas la valeur de  $\frac{dd}{\mu\mu}$ , & partant aussi le parametre  $g$  pourra être pris beaucoup plus petit.

LIV. Puisque l'effet de la machine approche d'autant plus du plus grand  $\frac{1}{2} Ai$ , plus on fait petite la valeur de  $\alpha$ ; & qu'en diminuant  $\alpha$ , l'orifice  $bb$  est augmenté; il sera convenable de faire d'abord cet orifice aussi grand, que les circonstances le permettent. Ainsi  $bb$  fera une quantité donnée, de laquelle on connoitra la valeur de  $\alpha$ , par cette équation

$$(\alpha + 1) Va = \frac{Ai}{4abbVat}$$

D'où l'on voit, que plus l'action de la force mouvante  $4i$  sera grande, plus aussi deviendra grande la fraction  $\alpha$ : & partant en se servant de la même machine, l'effet  $Da$  croit dans une moindre raison que l'action de la force  $Ai$ .

LV. Or, pour rendre l'ouverture  $Dd$  d'autant plus grande, on peut augmenter le nombre des tuyaux, jusqu'à ce qu'ils viennent à se toucher; & puisqu'il n'est pas nécessaire, qu'ils soyent séparés entr'eux, tous ces tuyaux forment un creux autour du noyer  $AMF$  en forme d'une cloche renversée; ou bien la machine sera semblable à un moule, dont on se sert pour y fondre les cloches. Ce creux sera donc formé par la révolution de la figure  $CAMmFfDd$ , autour de l'axe  $OO$ , où le cercle décrit par  $Cc$  donne l'ouverture d'enbas, & celle d'enhaut fera la surface cylindrique formée par la révolution de la ligne  $Dd$  autour de l'axe.

LVI. Cependant pour mieux affermir ensemble les deux surfaces conoïdiques,  $AMFD$  &  $camfd$ , qui renferment entr'elles le creux de la machine, cela se fera le plus commodément par des diaphragmes, qui s'étendent depuis la fente d'enhaut jusqu'enbas. Ces diaphragmes partageront donc le creux en plusieurs

parties, dont chacune représentera un tuyau, tel que j'ai considéré dans le calcul.

LVII. L'ouverture en haut étant donc une fente tout autour du conoïde, dont la largeur est  $Dd$ , elle sera  $= 2\pi \cdot EF \cdot Dd$ . Or l'ouverture en bas étant un cercle décrit du rayon  $Cc$ , son aire sera  $= \pi \cdot Cc^2$ : qui doit être à peu près égale ou plus grande que  $2\pi \cdot EF \cdot Dd$ : afin que l'eau puisse passer assez librement. Dans le cas d'égalité nous aurons donc  $Dd = \frac{Cc^2}{2EF}$ , & par la même raison pour les largeurs moyennes  $Mm = \frac{Cc^2}{2 \cdot PM}$ . Or  $Cc$  doit être pris plusieurs fois plus petite que  $EF$ .

LVIII. Ayant donc construit une telle machine conoïdique, dont la hauteur  $AE$  soit  $= a$ , le parametre de la parabole  $AMF = g$ , & l'ouverture entière en haut  $2\pi \cdot EF \cdot Dd = bb$ , qu'on fera aussi grande, que les circonstances le permettent: cette machine sera propre à puiser l'eau par l'orifice  $Cc$ , & à la dégorger en haut par la fente annulaire  $Dd$ .

LIX. Pour cet effet on doit tourner la machine autour de son axe  $OO$ , avec une telle vitesse, que chaque révolution réponde à une oscillation d'un pendule  $q = \frac{2g}{a+1}$ . Donc, puisque  $a > 0$ , on aura  $q < 2g$  & partant les révolutions de la machine doivent être plus rapides que les oscillations d'un pendule, dont la longueur est double du parametre de la parabole  $AMF$ .

LX. Si l'on employe la force  $A$ , qui doit agir avec la vitesse  $i$ , pour mettre la machine en mouvement, la valeur de la lettre  $a$  sera déterminée par cette équation :

$$bb = \frac{Ai}{4(a+1)a \cdot \sqrt{aal}}, \text{ ou bien } (a+1)\sqrt{a} = \frac{Ai}{4abb \sqrt{al}}: \text{ ou } l$$

marque



marque la quantité de 15, 625 pieds. Donc, puisque  $\alpha$  devient extrêmement petit, on aura à peu près  $V\alpha = \frac{Ai}{4abb\sqrt{al}}$  ou

$\alpha = \frac{AAii}{16a^3b^4l}$ : d'où l'on tirera encore plus près,

$$V\alpha = \frac{4abbAi\sqrt{al}}{AAii + 16a^3b^4l} \quad \& \quad \alpha = \frac{16a^3b^4l\ A^2ii}{(AAii + 16a^3b^4l)^2}.$$

LXI. Ayant trouvé la valeur de  $\alpha$ , on en connoitra d'abord la quantité d'eau  $D$ , que cette force sera capable d'élever dans une seconde; car ayant  $\alpha + 1 = \frac{Ai}{4abb\sqrt{al}}$ , cette quantité d'eau

$$\text{fera } D = 2bb\sqrt{al} = \frac{8aab^4l\ Ai}{AAii + 16a^3b^4l}, \text{ ou bien } D = \frac{Ai}{2a + \frac{AAii}{8aab^4l}}.$$

Et les révolutions de la machine répondront aux oscillations d'un

$$\text{pendule } q = \frac{2g}{1 + \frac{AAii}{16a^3b^4l}}, \text{ ou bien on aura } q = \frac{4agD}{Ai}.$$

LXII. Or, pour que cette force  $A$ , que nous supposons agir avec une vitesse, qui parcourt l'espace  $i$  dans une seconde, soit en état de mouvoir la machine avec ce degré de vitesse, il faut qu'elle y soit appliquée de telle manière, qu'il soit  $\frac{dd}{\mu\mu} = \frac{iiq}{8l} = \frac{2iig}{8l + \frac{AAii}{2a^3b^4}}$ ;

ou, puisque cette application ne se peut faire avec la dernière précision, il suffit de mettre  $\frac{d}{\mu} = \frac{1}{2}i\sqrt{\frac{g}{l}}$ .

LXIII. On fera donc travailler la force donnée  $A$  à une rouë, en forte que le point de l'application soit éloigné de l'axe de la rouë



à une distance  $\equiv d$  ; & cette rouë est tellement liée avec la machine, que, pendant que la rouë fait une révolution, la machine en fasse  $\mu$  tours : & si les circonstances permettent de poser  $\mu = 1$ , on pourra faire travailler la force A immédiatement à l'axe de la machine OO, de sorte qu'elle en soit éloignée à la distance  $\equiv d$ .

LXIV. La force ainsi appliquée seroit bien capable d'entretenir la machine dans le mouvement, qui vient d'être marqué, s'il n'y avoit point de frottement du côté de l'axe, autour duquel la machine est mobile. Mais pour tenir aussi compte du frottement, on n'a qu'à rabattre une certaine partie de la force mouvante A, qui sert à vaincre le frottement, & n'introduire dans le calcul, que le reste, qui est employé actuellement à mouvoir la machine.

### *Description de la Machine.*

Fig. 5.

LXV. La Machine aura donc la forme d'un entonnoir creux en dedans, dont la surface intérieure AMMD est un conoïde parabolique, formé par la révolution de la parabole AMD autour de l'axe AE. La surface extérieure *ammdd*, est un conoïde à peu près semblable & plus large, pour former avec la surface intérieure la cavité, par laquelle l'eau puisse monter. Et pour affermir ces deux surfaces ensemble, la cavité sera partagée de bas en haut par quelques diaphragmes.

LXVI. Ces deux surfaces laisseront en haut entr'elles une fente, qui régne tout autour de la base supérieure du conoïde, par laquelle l'eau puisse se décharger, & en bas il y a une ouverture *cc*, par laquelle l'eau entre dans l'entonnoir autour de l'axe ACO. Pour cet effet la machine sera plongée dans l'eau, dont la surface soit LL, de sorte que le bout cylindrique d'embas *aa cc* se trouve sous l'eau, & en conséquence de cela on réglera la hauteur de ce cylindre *aa cc*.

LXVII. La Machine est ensuite librement mobile autour de l'axe OO, qui passe par le milieu de l'entonnoir, & qui tourne sur des pivots

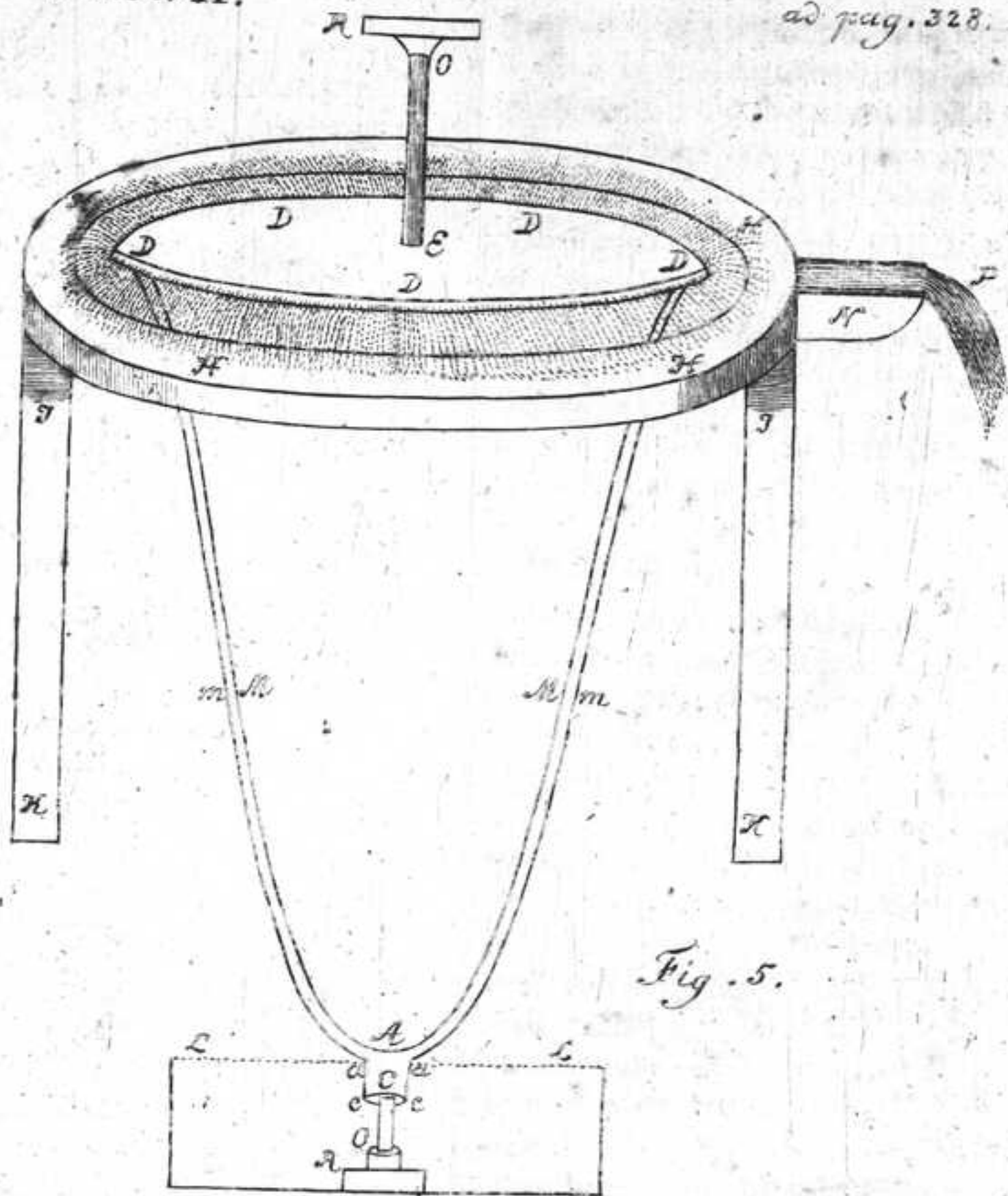


Fig. 5.

pivots R, R, affermis en haut & en bas. Cet axe fera auffi attaché à l'entonnoir par des bras, pour que la machine foit d'autant plus ferme. Cependant il faut prendre garde que cet axe ne foit pas trop épais à l'endroit, où il traverse le petit cylindre *aa cc*, afin qu'il y reste une assez grande ouverture pour l'entrée de l'eau, & qu'elle ne s'étende pas trop du milieu de l'axe.

LXVIII. Pour recevoir l'eau, qui se dégorge par la fente annulaire d'en haut à *DD dd*, on mettra autour du bord supérieur, où la fente est repliée en dehors, afin que l'eau en découle plus librement, une auge circulaire *HHHH*, soutenue par les piliers *IK, IK*, dans laquelle l'eau se dégorge, & d'où elle découle ensuite en *P* par le canal *N*.

LXIX. J'ai déjà expliqué, comment on doit appliquer à la machine la force, qui doit mouvoir la machine, afin qu'on en tire le plus grand avantage : & selon que cette force doit être appliquée immédiatement à l'axe de la machine, ou par le moyen d'une rouë, la manoeuvre & les autres parties, qui composeront la machine, en seront aisément réglées.

### E X E M P L E.

LXX. Soit, par exemple, la hauteur de l'entonnoir  $AE = 15\frac{1}{2}$  pieds où  $a = 1$ ; & le parametre de la parabole  $g = 3$  pieds, & le demi-diametre de la base de l'entonnoir en haut fera de 6,846 pieds, & à cause du repli du bord supérieur ce demi-diametre montera bien à 7 pieds. Ensuite posant le diametre du cylindre en bas *cc* d'un pied environ : l'ouverture de la fente d'en haut pourra être  $\frac{1}{5}$  pieds ; & toute l'ouverture de la fente fera  $bb = 0,88$  pieds quarrés, ou bien  $bb = \frac{8}{9}$ .

LXXI. Qu'on veuille employer la force d'une homme, qui agisse avec une vitesse de deux pieds par seconde, & en rabattant une partie pour vaincre le frottement, on pourra mettre  $A = \frac{1}{2}$ , & on

aura  $\frac{8}{v} = \frac{1}{6aa(a+1)\sqrt{a}}$ , ou  $(a+1)\sqrt{a} = 0,000768$ , d'où l'on tire  $\sqrt{a} = 0,000768$ , &  $a = 0,00000059$ , de sorte qu'on pourra regarder la valeur de  $a$  comme  $= 0$ . Donc la quantité d'eau, que la machine élèvera par seconde, sera  $= \frac{A^2}{2a} = 0,021333$  pieds cubiques. Donc dans une heure un homme fera capable d'élever à la hauteur de  $15\frac{5}{8}$  pieds, à peu près 77 pieds cubiques d'eau.

LXXII. Chaque révolution de la machine s'achevera dans le tems d'une oscillation d'un pendule de 6 pieds, ou bien en  $1\frac{1}{3}$  seconde, ou la machine doit faire environ 45 tours dans une minute. Pour cet effet l'homme doit être tellement appliqué à la machine, qu'il soit  $\frac{d}{\mu\mu} = 0,192$  &  $\frac{d}{\mu} = 0,4381$ . Ainsi on pourra mettre l'homme immédiatement à l'axe de la machine en posant  $\mu = 1$ , & le faire travailler à une manivelle, dont l'ouverture est presque d'un demi-pied, & cette manivelle pourra être appliquée le plus commodément à l'axe en haut, en laissant passer l'axe par son soutien R d'en-haut, ou autrement selon les circonstances.

