



DISCUSSION
PLUS PARTICULIERE
DE DIVERSES MANIERES D'ELEVER DE L'EAU
PAR LE MOYEN DES POMPES AVEC LE PLUS GRAND
AVANTAGE,
PAR M. EULER.

I

Dans mon Mémoire précédent, que je lûs sur cette matiere d'élever de l'eau par le moyen des pompes, j'ai borné mes recherches aux forces, qui agissent immédiatement sur les pistons des pompes, desquelles j'ai déterminé premièrement le tems, que les pistons mettent à achever leur jeu, ensuite la quantité d'eau, qui en sera fournie au réservoir, & enfin la pression, que le tuyau montant doit soutenir. Or on se sert ordinairement de quelque machine pour mettre les pistons en mouvement, la machine même étant agitée par des forces qu'on tire des efforts, ou des hommes, ou des animaux, ou du courant d'une riviere, ou du vent, ou enfin d'autres efforts, dont les corps naturels sont revêtus. Il faut donc bien distinguer entre la force, par l'opération de laquelle la machine même est mise en mouvement, & entre la force, qui agit immédiatement sur les pistons, & qui résulte de la première, étant ou plus grande, ou plus petite selon la disposition de la machine. Car on sçait qu'on peut toujours arranger chaque machine en sorte, qu'une force quelconque soit en équilibre avec une autre force, quelque grande ou petite qu'elle soit.



II. Donc, pour mieux distinguer ces deux forces, je nommerai celle, qui est appliquée à la machine même pour la mettre en mouvement, la force absolue, & l'autre qui en résulte sur les pistons, pour les faire jouer, tiendra lieu du fardeau, qui doit être mis en mouvement. Car c'est presque toujours le but de toutes les machines, que par le moyen d'une force donnée on fasse mouvoir un fardeau donné; & il est clair, que dans les machines, dont on se sert pour faire jouer les pompes, la force absolue doit vaincre la résistance des pistons, de sorte que c'est la force requise pour faire jouer les pistons, qu'il faut considérer comme le fardeau. Ayant donc déterminé dans mon Mémoire précédent ce fardeau, ou la force qui doit agir sur les pistons en chaque cas, je rechercherai ici les forces absolues, qui sont capables de vaincre ce fardeau.

III. Cette recherche fera donc le principal objet de la construction des machines, qui sont destinées à élever de l'eau par le moyen des pompes: car on y doit principalement regarder la force absolue, qui étant appliquée à la machine la met en mouvement; puisqu'il n'est guères souvent en nôtre pouvoir d'augmenter cette force au delà d'un certain degré: mais on est obligé de profiter de cette force, telle que les circonstances la fournissent, & de tâcher d'en tirer le plus grand avantage, qui soit possible. Voilà donc la principale question, que j'aurai ici en vuë: La force absolue étant donnée, d'arranger la machine avec les pompes & le tuyau montant, en sorte que la plus grande quantité d'eau en soit élevée dans le réservoir, qu'il est possible? On comprend aisément que la résolution de cette question est de la plus grande importance dans la pratique, & que sans elle il est impossible de réussir dans ces sortes d'entreprises.

IV. Or il ne suffit pas de considérer ici la force absolue en elle-même par rapport à sa quantité; il faut aussi avoir égard à la vitesse dont elle agit; de laquelle dépend la vitesse du mouvement de toute la machine, & par conséquent aussi celle des pistons, par l'action desquels
l'eau



l'eau est élevée. Car tandis que la force absolue est en repos, & qu'elle ne tient qu'en équilibre le fardeau, toute la machine demeurera dans une inaction, & ne produira aucun effet. Donc, puisque la machine doit être mise en mouvement, il faut absolument, que la force agisse avec une vitesse, afin que les pistons en obtiennent un mouvement convenable pour pousser l'eau par le tuyau montant dans le réservoir.

V. Mais, de quelque nature que soit la force absolue, sa quantité dépend aussi de la vitesse, avec laquelle elle agit. Car, si l'on se sert des hommes ou des animaux pour faire jouer la machine, on voit bien, que plus ils seront obligés d'aller vite, & moins ils seront capables d'exercer des forces sur la machine: & si la machine dans l'endroit, où les hommes ou les animaux lui sont appliqués, alloit si vite, qu'ils auroient toute la peine de la suivre avec leurs corps, ils n'y pourroient plus exercer aucune force. Or on fait que les hommes & les animaux ne sont susceptibles que d'un certain degré de vitesse, & partant les forces, qu'ils sont en état d'appliquer à la machine, seront d'autant plus petites, plus leur mouvement approchera de ce degré de vitesse. Il en est de même des forces, qu'on tire du courant d'une rivière, ou du vent, qui seront toujours plus petites, plus la machine ira vite: mais je me propose d'examiner cette diminution plus soigneusement dans la suite.

VI. De quelque force naturelle donc, qu'on se serve pour mettre la machine en mouvement, il faut d'abord avoir égard à la vitesse, avec laquelle elle agit, puisque c'est de là principalement, que dépend aussi la quantité de cette force. Cette vitesse sera celle, qu'aura la machine dans l'endroit, où la force lui est appliquée, & sachant la vitesse de la machine dans un endroit, on saura les degrés de vitesse, avec lesquels toutes les autres parties de la machine se meuvent, & par conséquent aussi celle des pistons, ou de la force, qui y agit immédiatement. Car, de quelques roues & lanternes que la machine soit composée, on fait toujours le mouvement relatif de toutes les parties entr'elles, de
forte



forte que si la vitesse d'un seul point de la machine est connue, on fera en état d'en déterminer les vitesses de tous les autres points, & par conséquent le mouvement de toute la machine.

VII. Pour faciliter l'application à la pratique, j'exprimerai chaque vitesse par le chemin, qu'elle fait dans le tems d'une seconde, & j'exprimerai ce chemin de même que toutes les grandeurs, qui entrent dans le calcul, en pieds de Rhin. Soit donc α la vitesse de la force absolue qui agit sur la machine, où α marquera le nombre des pieds, que cette force parcourra dans une seconde: & la force même, qui dépend aussi de cette vitesse soit $= F$; qui soit exprimée par le poids d'une masse d'eau, dont le volume est donné en pieds cubiques. Ensuite soit K la force, qui agit immédiatement sur chaque piston, & que \mathcal{C} marque la vitesse de cette force, ou l'espace qu'elle parcourt dans une seconde; cette vitesse sera déterminée par la hauteur & le tems du jeu de chaque piston. Or je suppose qu'il n'y a que deux pompes dans la machine, qui jouent alternativement, de sorte que pendant, qu'une attire l'eau par aspiration, l'autre refoule; & par conséquent qu'il n'y ait jamais plus d'une force K , qui agit à la fois, quoiqu'il y ait deux pompes. Mais, s'il y a plusieurs couples de pompes, dont la machine seroit garnie, j'ai montré dans mon Mémoire précédent, comment on peut réduire ce cas, à celui d'une seule couple.

VIII. Afin que la force absolue F avec la vitesse α fasse mouvoir la force K avec la vitesse \mathcal{C} , il est évident en quel endroit de la machine il faut appliquer les pistons; car ce sera là, où la vitesse de la machine est à celle où la force absolue est appliquée comme \mathcal{C} à α . Si la machine étoit un simple essieu à deux bras, & que la force F fut appliquée à un de ces bras, & que l'autre agit sur les pistons, la longueur du premier devroit être à celle de l'autre comme α à \mathcal{C} . Et si la machine est plus composée, on connoitra d'abord en considérant la construction, lequel de ses points se mouvra avec la vitesse \mathcal{C} , pendant que le point, qui soutient la force F , se meut de la vitesse α . Et en général

ral



ral la raison des vitesses α & \mathcal{C} étant donnée il sera aisé d'arranger la machine en sorte, & de l'appliquer tellement aux pistons, que leur vitesse tienne à celle de la force mouvante cette raison.

IX. Pour trouver le rapport entre les forces F & K , avant que la machine se trouve dans son mouvement, il faut que la force F soit plus grande, qu'il ne faut pour soutenir le fardeau K en équilibre; puisque la production du mouvement dans la machine même demande une partie de la force. Mais, dès que la machine est réduite en un état uniforme de mouvement, pour la conserver dans cette uniformité, il suffit que la force F soit aussi grande, qu'il faut pour l'état de l'équilibre, en faisant abstraction du frottement, dont il n'est pas difficile de tenir compte, en augmentant dans le calcul le fardeau K d'une partie, qui répond à la quantité du frottement. Par cette considération le fardeau K , qui doit être mis en mouvement, sera plus grand que la force, qui agit sur les pistons immédiatement, & il le faut encore augmenter de la force, qui est requise pour faire monter l'autre piston, pendant que celui sur lequel agit la force, est poussé en bas. Or il ne sera pas difficile d'estimer en chaque cas proposé cette augmentation de la force K .

X. Puisque donc, lorsque la machine se trouve entièrement dans son jeu, la force F doit tenir à K la même raison, que dans le cas d'équilibre, le principe général de toutes les machines nous fournira cette raison. Car en vertu de ce principe il faut, que la force F multipliée par le chemin, qu'elle parcourt, si l'on conçoit la machine en mouvement, soit égale au fardeau K multiplié par le chemin, qu'il parcourt en même tems. Donc, puisque le fardeau K doit parcourir le chemin \mathcal{C} pendant que la force F parcourt le chemin α , il faut qu'il soit $K\mathcal{C} = F\alpha$. Je nommerai ce produit d'une force par le chemin, qu'elle parcourt dans une seconde, son moment de mouvement, de sorte que $F\alpha$ soit le moment de mouvement de la force F , & $K\mathcal{C}$ celui de la force ou du fardeau K : il faut donc, que les momens de mouvement de la force &



du fardeau soient égaux entr'eux; ce qui est une loi générale pour toutes les machines, de quelque nature qu'elles soient.

XI. Ayant donc considéré dans mon Mémoire précédent, non seulement la force K qui agit sur les pistons, & qui tient ici lieu du fardeau, mais aussi le tems pendant lequel les pistons achevent leur jeu, avec l'étenduë de ce jeu, on en déterminera le chemin que les pistons, & partant aussi la force K , doit parcourir dans une seconde. Ce chemin étant nommé $= \mathcal{E}$, on connoitra le moment de mouvement de la force mouvante, pour qu'elle soit capable de faire jouer les pistons avec cette vitesse déterminée. Donc, si la vitesse a est donnée par la nature des forces, qu'on veut employer à ce dessein, on trouvera la quantité de la force F même, qui sera $F = \frac{K\mathcal{E}}{a}$: pourvu qu'on ajoute à la force K , tant la résistance du frottement de toute la machine, que la force, qu'il faut pour élever les pistons.

XII. Avant que d'introduire la force absolue F avec sa vitesse a dans le calcul, il sera à propos de rapporter le résultat des calculs de mon Mémoire précédent. Là ayant nommé :

1. Le diametre de chaque pompe $= a$.
2. La hauteur, qui est celle du jeu des pistons $= b$.
3. Le diametre du tuyau montant $= c$, que je suppose partout de la même largeur.
4. La hauteur du réservoir au dessus des pompes $= g$.
5. La longueur du tuyau de conduite $= l$.
6. La force qui agit sur chaque piston $= K$.
7. Le tems du jeu des pistons $= t$ secondes.
8. La quantité d'eau élevée dans une heure $= M$.
9. La pression, que le tuyau soutient en bas $= p$.

j'ai trouvé les équations suivantes :

$t =$



$$t = \frac{0,4484 \, aa \, V \, bl}{c \, V \, (K - \frac{1}{4} \pi a a g)} \text{ secondes}$$

$$M = 12611 \, c \, V \, \frac{b}{l} \, (K - \frac{1}{4} \pi a a g)$$

$$p = \frac{4K}{\pi a a}$$

où π marque la circonférence d'un cercle dont le diametre $= 1$.

XIII. La moitié du tems t étant employée à monter les pistons par l'espace b , & l'autre moitié pour les faire descendre par le même espace, il est clair que la force K parcourra dans le tems de t secondes l'espace de $2b$ pieds: donc dans une seconde cette force parcourt l'espace de $\frac{2b}{t}$ pieds. Ainsi ce que j'ai nommé cy-devant \mathcal{C} sera à present $= \frac{2b}{t}$: & partant si la force, qui agit sur la machine destinée à faire jouer les pompes, est nommée $= F$, & la vitesse de cette force $= a$, nous aurons cette équation $Fa = \frac{2Kb}{t}$; qui donne $K = \frac{Fat}{2b}$; d'où nous connoissons la force K qui agit immédiatement sur les pistons.

XIV. Puisque K est plus grande que $\frac{1}{4} \pi a a g$, la formule $p = \frac{4K}{\pi a a}$ sera plus grande que la hauteur du réservoir g , & partant le tuyau de conduite portera en bas un plus grand poids que celui d'une colonne d'eau de la hauteur $= g$. Comme la connoissance de cette pression est un article essentiel dans la conduite des eaux, pour qu'elle tombe plus clairement sous les yeux, je mettrai $p = \lambda g$, de sorte que λ soit un nombre plus grand que l'unité, marquant combien de fois la pression du tuyau montant en bas est plus grande, que la simple hauteur de la colonne d'eau g . On aura donc $\lambda = \frac{4K}{\pi a a g}$; & si nous re-



mettons pour K la valeur trouvée $\frac{F\alpha t}{2b}$, nous aurons $\lambda = \frac{2F\alpha t}{\pi aabg}$.

XV. Les valeurs de M & t , que j'ai déterminées dans le Mémoire précédent, étant multipliées ensemble, donnent

$$Mt = 12661.0,4484 aab = 5654,8 aab;$$

or de la formule précédente il est $aab = \frac{2F\alpha t}{\pi\lambda g}$, d'où nous tirons

$$Mt = \frac{11309,7 F\alpha t}{\pi\lambda g}, \text{ \& à cause de } \pi = 3,14159, \text{ il sera } Mt = \frac{3600F\alpha t}{\lambda g}$$

ou $M = \frac{3600F\alpha}{\lambda g}$. Cette formule est fort remarquable, puisque nous

en connoissons d'abord la quantité d'eau élevée dans une heure, sachant seulement le moment de mouvement de la force mouvante $F\alpha$, avec la pression, que le tuyau de conduite doit soutenir en bas, laquelle est toujours plus grande que la hauteur g . Donc la hauteur g à laquelle l'eau doit être élevée, étant donnée, la quantité d'eau sera d'autant plus grande, plus le moment de mouvement de la force mouvante sera grand, & plus on diminuë la pression de l'eau dans le tuyau. La diminution de la pression étant en elle-même déjà un grand avantage, puisqu'on y peut employer des tuyaux moins forts, elle est outre cela jointe avec un profit très réel, parce que par ce moyen la quantité d'eau élevée se trouve augmentée.

XVI. Ayant $K = \frac{1}{4}\lambda\pi aag$, il sera $V(K - \frac{1}{4}\pi aag) = V\frac{1}{4}(\lambda - 1)\pi aag$, & cette valeur étant substituée dans celle de t nous aurons :

$$t = \frac{0,4484 aaVbl}{cV\frac{1}{4}(\lambda - 1)\pi aag} = \frac{0,8968 V aab l}{cV(\lambda - 1)\pi g},$$

or il est $aab = \frac{2F\alpha t}{\pi\lambda g}$, d'où nous obtiendrons:

$$t =$$



$$t = \frac{0,8968 V_2 F a t l}{\pi c g V \lambda (\lambda - 1)} \quad \& \quad \text{partant } V t = \frac{0,8968 V_2 F a l}{\pi c g V \lambda (\lambda - 1)},$$

$$\& \text{ de là nous aurons : } t = \frac{0,16297 F a l}{\lambda (\lambda - 1) c c g g}.$$

$$\text{Ensuite il fera } a a b = \frac{0,32594 F F a a l}{\pi \lambda \lambda (\lambda - 1) c c g^3} = \frac{0,10375 F F a a l}{\lambda \lambda (\lambda - 1) c c g^3}.$$

Enfin la vitesse des pistons ou de la force K fera

$$\mathcal{E} = \frac{2b}{t} = \frac{2\lambda(\lambda-1) b c c g g}{0,16297 F a l} = \frac{12,272 \lambda(\lambda-1) b c c g g}{F a l},$$

& la pression sur le tuyau en son plus bas endroit vaudra la hauteur $p = \lambda g$.

XVII. Donc si la hauteur g du réservoir au dessus des pompes est donnée, avec la longueur du tuyau de conduite l , & qu'on veuille employer pour l'élevation de l'eau la force F avec la vitesse a ; on saura

d'abord la quantité d'eau élevée dans une heure $M = \frac{3600 F a}{\lambda g}$ pieds

cubiques; & afin que cette quantité devienne la plus grande, qu'il est possible, il faut prendre pour λ un nombre, qui excède tant soit peu l'unité: & la pression dans le tuyau en bas vaudra la hauteur $p = \lambda g$. Ensuite il faut régler les diametres des pompes a , & du tuyau montant c avec la hauteur des pompes b enforte, qu'il soit

$a a b c c = \frac{0,10375 F F a a l}{\lambda \lambda (\lambda - 1) g^3}$; où si l'on regarde a comme connue, on

aura $b c c = \frac{0,10375 F F a a l}{\lambda \lambda (\lambda - 1) a a g^3}$. Cette valeur étant remise dans celle

de \mathcal{E} , la vitesse des pistons proviendra $\mathcal{E} = \frac{1,2732 F a}{\lambda a a g}$; & partant

le rapport de cette vitesse à celle de la première force mouvante a fera

$$\frac{\mathcal{E}}{a} = \frac{1,2732 F}{\lambda a a g}.$$



XVIII. Si nous regardons la vitesse des pistons \mathcal{E} comme donnée nous aurons $F\alpha = \frac{\lambda \mathcal{E} a a g}{1,2732}$. Cette valeur étant substituée dans

l'équation précédente, donnera $bcc = \frac{0,064 \mathcal{E} \mathcal{E} a a l}{bccg}$, d'où nous tirerons :

$$\lambda = 1 + \frac{0,064 \mathcal{E} \mathcal{E} a a l}{bccg}.$$

Donc, puisqu'il faut tâcher de rendre la valeur λ aussi petite qu'il sera possible, on voit, qu'on satisfera à cette condition, en augmentant autant qu'il se peut, tant la hauteur des pompes b que la largeur du tuyau montant; & en diminuant la vitesse des pistons \mathcal{E} , avec le diametre des pompes a & la longueur du tuyau l , or ce sont les mêmes conditions, qui sont renfermées dans les règles étalées dans le Mémoire précédent.

XIX. Pour la pluspart il arrive, que la force F qui agit sur la machine, est variable, devenant tantôt plus grande tantôt plus petite; cependant la machine demeure la même par rapport à sa disposition, & partant aussi le rapport des vitesses α à \mathcal{E} . Il ne reste rien à changer dans la machine, que le nombre des pompes qu'on fait jouer, & ce changement se réduit à la quantité aa , qui exprimant la somme des amplitudes de toutes les pompes qui sont mises en jeu, croitra ou décroitra à mesure qu'on augmente ou diminue le nombre des pompes. Soit donc $\mathcal{E} = i\alpha$, & pendant que $F\alpha$ change, voyons quels changemens il faut faire dans aa & dans le nombre λ . Nous aurons donc .

$$aa = \frac{1,2732 F}{\lambda i g}, \text{ \& } \lambda(\lambda-1) = \frac{0,0815 F a a i l}{bccg^2}, \text{ d'où nous tirons :}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{0,0815 F a a i l}{bccg^2}\right)}, \text{ ou à peu près; si } \lambda \text{ ne differe}$$

$$\text{pas beaucoup de l'unité, il sera: } \lambda = 1 + \frac{0,0815 F a a i l}{bccg^2},$$

d'où



d'où l'on voit, que si la force mouvante devient plus petite, la valeur de λ , & aussi celle de aa , proviendra plus petite.

XX. Dans ces cas donc, où la force mouvante est variable, on n'aura qu'à arranger la machine en sorte, que lorsque la force est la plus grande, la valeur de λ , & partant aussi la pression sur le tuyau, soit assez petite, car si ensuite la force mouvante devient plus petite, & qu'on diminue convenablement le nombre des pompes, de sorte que leur nombre soit à peu près comme la force mouvante F , la pression sur le tuyau deviendra plus petite, & on aura encore moins à craindre que les tuyaux crévent. Aussi alors la quantité d'eau élevée fera-t-elle à proportion plus grande à cause de la diminution du nombre λ . Mais si l'on ne diminue pas le nombre des pompes, qui sont mises en jeu, à mesure que la force mouvante décroît, elle ne sera plus capable de faire mouvoir la machine avec la juste vitesse α , mais si le nombre des pompes est trop grand, le mouvement de la machine deviendra plus lent, & il pourroit même arriver, que la force ne fut plus capable de mouvoir la machine. Il est donc fort nécessaire dans ces cas, de multiplier le nombre des pompes, afin qu'on soit le maître d'en faire jouer autant qu'on juge à propos.

XXI. Puisque donc le nombre $i = \frac{6}{\alpha}$ doit demeurer constant,

à quelque variation soit sujette la force mouvante F & son moment de mouvement $F\alpha$, cette force étant supposée donnée on déterminera la construction de la machine, qui doit être employée à élever de l'eau, par les formules suivantes :

$$I. \quad \lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{0,0815 F \alpha \alpha i l}{b c c g^2}\right)},$$

où il faut tâcher de régler les quantités b, c, i, l , entant qu'elles sont en nôtre pouvoir, en sorte que la valeur de λ devienne la plus petite, qu'il soit possible. Ensuite, si le nombre de toutes les pompes, qu'on veut faire jouer, lorsque la force mouvante est la plus grande, est
posé



posé $\equiv 2n$, ou qu'on veuille alors employer n paires de pompes, le diametre de chacune étant $\equiv a$, il faut écrire dans nos formules précédentes naa au lieu de aa , & ayant déjà déterminé la valeur de λ pour la plus grande force mouvante F , on aura pour le diametre des pompes cette seconde équation

$$\text{II. } aa = \frac{1,2732 F}{\lambda ing}, \text{ ou } a = \sqrt{\frac{1,2732 F}{\lambda ing}}.$$

XXII. Ayant déterminé toutes ces quantités, qui renferment la construction de la Machine, puisque le diametre des pompes a est invariable, il faut que le nombre λ soit toujours proportionnel à la force F , ou si le nombre λ est très à peu près $\equiv 1$, ce nombre n fera proportionnel à F . Donc, lorsque la force mouvante F diminue, il faut diminuer le nombre des pompes, qu'on fait agir dans la même raison, ce qui se pourra pratiquer d'autant plus aisément, plus le nombre de toutes les pompes sera grand. Or, quoiqu'on ne puisse toujours estimer si exactement les changemens, qui arrivent dans la force F , il ne sera pas difficile de trouver pour chaque tems le juste nombre des pompes, qui doivent jouer. Car sachant la vitesse, avec laquelle la machine doit agir, ou tourner, quand on voit qu'elle tourne ou trop vite ou trop lentement, on augmentera ou diminuera le nombre des pompes, jusqu'à ce que le mouvement de la machine acquerre à peu près le juste degré de vitesse.

XXIII. Toutes ces choses étant réglées, on saura combien d'eau fera fourni dans le réservoir pendant une heure, car cette quantité est

$$M = \frac{3600 Fa}{\lambda g}, \text{ \& la pression de l'eau sur le tuyau montant dans son}$$

plus bas endroit sera exprimée par la hauteur $p = \lambda g$; d'où résulte une double raison, qui oblige de rendre la valeur du nombre λ aussi petite qu'il sera possible. Or le tems que chaque piston met à achever son jeu, qui a été nommé $\equiv t$ seconde, se trouvera de la formule

$$t =$$



$\mathcal{C} = \frac{2b}{t} = ia$ d'où l'on voit que ce tems sera $= \frac{2b}{ia}$ secondes. Enfin la force qui agit immédiatement sur chaque piston, sera $K = \frac{1}{4} \lambda \pi a a g = \frac{F}{in}$; puisqu'il doit être $nK\mathcal{C} = Fa$, & qu'il est $\mathcal{C} = ia$; & de là on tire la plus avantageuse construction de toute la machine, & on en connoit en même tems l'effet, qu'elle produira.

XXIV. Pour augmenter autant qu'il est possible la quantité d'eau, qui sera élevée, il faut tâcher de rendre le moment de mouvement de la force mouvante F aussi grand qu'il est possible. Donc, de quelque force naturelle qu'on veuille se servir pour mettre la machine en mouvement, comme ces forces deviennent d'autant plus petites, plus sera grande la vitesse, avec laquelle elles doivent agir, il faut chercher ce degré de vitesse, d'où résulte le plus grand moment de mouvement de la force; car il se trouve ici toujours un *maximum*, auquel il est fort important d'avoir égard. Et ayant trouvé cette vitesse il faut disposer la machine en sorte, que son endroit, où la force est appliquée, se puisse mouvoir précisément, ou à peu près, avec ce même degré de vitesse: & c'est à quoi aboutissent les autres déterminations, que je viens de trouver. Il s'agit donc d'examiner les diverses especes de forces naturelles, pour en découvrir leur plus grand moment de mouvement.

1. De la force des hommes.

XXV. On comprendra d'abord, qu'on ne peut rien décider avec précision sur cet article, puisque les hommes different trop entr'eux tant par rapport à leurs forces, qu'au degré de vitesse, dont ils sont capables. Cependant regardant la chose en général, la réflexion suivante ne manquera pas de nous fournir quelques lumieres, pour se servir avec avantage de la force des hommes. Soit f la force, dont un homme est capable d'agir sur une machine étant en repos, & Φ la



plus grande vitesse dont il peut marcher, l'un & l'autre sans qu'il se fatigue trop. La lettre Φ marque ici le chemin, qu'il peut parcourir par secondes; de sorte que si l'homme est obligé de marcher avec cette vitesse, il ne soit plus capable d'exercer aucune force, tous ses efforts se consumant en sa course. Que ω marque un autre degré de vitesse moindre que Φ , & que p soit la force, dont il peut encore agir se mouvant avec cette vitesse ω ; il s'agit de déterminer le rapport des forces f & p , sachant celui des vitesses Φ & ω .

XXVI. D'abord il est clair que la détermination de la force p doit avoir ces conditions :

1. Que si $\omega = 0$ il devienne $p = f$
2. si $\omega = \Phi$ il devienne $p = 0$.

Comme il n'est pas possible de trouver cette détermination par l'origine des forces humaines, on pourra se contenter d'une formule assez simple, qui satisfasse à ces deux conditions. Or la recherche des forces de l'eau semble confirmer cette formule : $p = f \left(1 - \frac{\omega}{\Phi} \right)^2$,

& il semble même que cette formule s'accorde assez bien avec les expériences, entant qu'on peut tirer quelques conclusions. Ainsi un homme étant d'un côté capable de la force f étant en repos, & de l'autre côté de la vitesse Φ , cet homme étant mû avec la vitesse ω sera en état d'exercer une force $= f \left(1 - \frac{\omega}{\Phi} \right)^2$.

XXVII. Le moment de mouvement donc de la force d'un homme, qui marche avec la vitesse ω , sera $= f \omega \left(1 - \frac{\omega}{\Phi} \right)^2$; lequel devenant $= 0$, tant si $\omega = 0$, que si $\omega = \Phi$, il est clair que ce mouvement deviendra le plus grand dans un certain cas. Pour trouver ce cas, ou le degré de vitesse auquel répond le plus grand moment de mou-



mouvement, on n'a qu'à différentier la formule $f\omega \left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right)^2$, en ne supposant que la vitesse ω variable, & mettre le différentiel égal à zero, ce qui donne, $f d\omega \left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right)^2 - 2 \frac{f\omega d\omega}{\Phi} \left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right) = 0$,

d'où nous tirons $1 - \frac{\omega}{\Phi} - \frac{2\omega}{\Phi} = 0$, ou $\omega = \frac{1}{3} \Phi$.

Pour obtenir donc le plus grand moment de mouvement, il faut que l'homme marche avec le tiers de la plus grande vitesse dont il est capable, & alors sa force p fera $= \frac{4}{9} f$, & le moment de mouvement $= \frac{4}{27} f\Phi$.

XXVIII. Pour réduire cela à la pratique, autant que la variabilité des circonstances le permet, on peut supposer qu'un homme en repos peut exercer un effort de 60 livres, sans qu'il se fatigue trop, & qu'il peut parcourir un chemin de 6 pieds par secondes; de sorte que $f = 60 \text{ lb}$ & $\Phi = 6$ pieds. Donc, pour employer la force d'un homme le plus avantageusement à une machine, il faut qu'il fasse en marchant 2 pieds par seconde, & alors la force vaudra $\frac{4}{9} \cdot 60 \text{ lb} = 26 \frac{2}{3} \text{ lb}$, qui étant réduite au poids d'un volume d'eau, à raison de 70 lb le pied cubique, cette force fera $\frac{3}{8}$ pied cubique. Nous pourrions donc supposer que la force d'un homme, lorsqu'il est employé le plus avantageusement, c'est à dire, lorsque sa vitesse est de 2 pieds par seconde, vaut le poids de $\frac{3}{8}$ d'un pied cubique d'eau.

XXIX. Donc, si le nombre des hommes, qu'on veut employer à une machine, est posé $= m$, & que ces hommes marchent en devant la machine d'une vitesse de 2 pieds par secondes, leur force qui a été nommée $= F$ fera $F = \frac{3m}{8}$ pieds cubiques d'eau. Puisque donc leur vitesse est de deux pieds par secondes, on aura $a = 2$, & le mo-



ment de mouvement de cette force sera $F a = \frac{3}{4} m$. Par conséquent, si la machine pour élever de l'eau doit être mise en mouvement par des hommes dont le nombre soit $= m$, & la vitesse de chacun de 2 pieds par seconde, la quantité d'eau qui en sera élevée dans une heure sera

$M = \frac{2700 m}{\lambda g}$. Or comme une partie de la force doit être employée

à vaincre le frottement & à élever les pistons pour attirer l'eau par aspiration, la quantité M sera plus petite, ou il faudra outre le nombre d'hommes m encore employer quelques uns exprés pour vaincre les obstacles.

XXX. Pour ce qui regarde la force requise pour l'elevation de l'eau dans les pompes, il est aisé de conclure par la formule trouvée, que cela dépend de la hauteur des tuyaux aspirans, par lesquels l'eau doit monter pour entrer dans les pompes. Donc, si l'on augmente la hauteur g , qui a exprimé jusqu'ici la hauteur du réservoir au dessus des pompes, encore de la hauteur des tuyaux aspirans, la formule

$M = \frac{3600 F a}{\lambda g}$, renfermera tant la hauteur, à laquelle l'eau doit être

refoulée, que celle, par où il faut monter pour entrer dans les pompes. Ainsi, si l'on prend g pour marquer toute la hauteur du réservoir au dessus du niveau d'eau, d'où les pompes puisent, on n'aura plus besoin d'avoir égard à la force, qui est requise pour attirer l'eau dans les pompes : & alors ce sera le seul frottement qui causera quelque déchet dans la force mouvante. Mais, quand il s'agit de déterminer la pression de l'eau dans le tuyau montant, il ne faut donner à g , que la hauteur du réservoir au dessus du plus bas endroit du tuyau.

XXX. Substituant donc dans nos formules l'action de m hommes pour F & 2 pieds pour a , nous aurons.

$$I. \quad \lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{0,1222 m l}{b c c g g} \right),$$

&



& posant le nombre de toutes les pompes, qui sont en action $= 2n$, le diametre de chacune a fera

$$\text{II. } a = \sqrt{\frac{0,4774m}{\lambda i n g}},$$

où à cause de $\alpha = 2$, la vitesse des pistons fera $= 2i$ pieds par seconde, & le jeu de chacun s'achevera en $\frac{b}{i}$ secondes. La force qui agira

immédiatement sur chaque pompe fera : $K = \frac{3m}{8in}$; & la pression,

que le tuyau doit soutenir en bas vaudra la hauteur $= \lambda g$, prenant pour g la hauteur du réservoir au dessus de cet endroit. Ces formules serviront donc à disposer la machine en sorte, qu'on tire le plus grand avantage des hommes qu'on veut mettre en action.

2. De la force des chevaux.

XXXII. On déterminera de la même maniere l'action la plus avantageuse, qu'on sauroit tirer de la force des chevaux: car si f marque la force, dont un cheval est capable de tirer étant en repos, & Φ la vitesse avec laquelle il peut courir sans se fatiguer trop; la force, qu'il fera en état d'exercer, lorsqu'il marche avec une vitesse quelconque ω , sera exprimée par $f \left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right)^2$, & le moment de mouvement de cette

force $f \omega \left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right)^2$, qui deviendra le plus grand lorsque $\omega = \Phi$;

& alors la force d'un cheval fera $= \frac{4}{9}f$, & son moment $= \frac{4}{27}f\Phi$. Or on peut supposer que la force d'un cheval vaut 7 fois la force d'un homme, & partant 420 livres; & que sa plus grande vitesse Φ est environ 12 pieds par seconde. Donc, pour que son action soit la plus grande, il faut qu'il marche avec une vitesse de 4 pieds par seconde, & alors sa force sera $= 186 \frac{1}{3}$ lb, ou $2 \frac{2}{3}$ pieds cubiques d'eau.



XXXIII. Soit m le nombre des chevaux, qu'on veut employer pour mettre la machine en mouvement, & il faudra régler ce mouvement en forte, que chaque cheval parcoure 4 pieds par seconde, ou qu'il soit $\alpha = 4$. Ensuite la force de tous ces chevaux fera $F = \frac{8}{3} m$: & le moment de mouvement $F\alpha = \frac{32}{3} m$. Donc la quantité d'eau, qui sera élevée par heure fera $M = \frac{3600 \cdot \frac{32}{3} m}{\lambda g} = \frac{38400 m}{\lambda g}$, & la vitesse des pistons étant $4i$ pieds par seconde, on aura

$$\text{I. } \lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{3,4773 \text{ mil}}{b c c g g}\right)}.$$

Le nombre des pompes, qui sont en action, étant posé $= 2n$, le diamètre de chacune fera

$$\text{II. } a = \sqrt{\frac{3,3952 m}{\lambda i n g}}.$$

& le tems du jeu de chaque piston de $\frac{b}{2i}$ secondes. Enfin la pression que le tuyau aura à soutenir en bas sera exprimée par la hauteur λg .

3. De la force d'un courant d'eau.

Fig. 1.

XXXIV. Soit A B C D E &c. la rouë, qui tourne autour de son axe O, garnie des aubes Aa, Bb, Cc, &c. qui reçoivent successivement les impulsions du courant d'eau lm : & que cette rouë par son mouvement fasse agir la machine en question. Soit m le centre des efforts de l'eau sur l'aube Aa, qui tombera à peu près dans son milieu, & qu'on nomme

1. Le rayon de la rouë jusqu'à ce centre $Om = r$.
2. La hauteur des aubes $Aa = h$.
3. La longueur des aubes, ou la largeur de la rouë $= f$,
de forte que la surface de chaque aube soit $= fh$.
4. Que la vitesse de la rouë au point m soit $= v$ pieds par seconde.
5. Et la vitesse du courant d'eau $lm = e$ pieds par seconde.

Que



Que l'aube Aa soit dans la situation verticale, & que l'eau ne frappe alors que cette aube, les voisines Hh , Bb étant élevées au dessus de la surface de la riviere.

XXXV. Cela posé, la vitesse relative de l'eau sur l'aube fera de $e - v$ pieds par seconde, qui soit la vitesse due à la hauteur u . Donc, puisque la hauteur de 15,625 pieds donne une vitesse de 31,25 pieds par seconde il sera: $(e - v)^2 : u = 31,25^2 : 15,625$,

$$\text{d'où nous aurons } u = \frac{15,625 (e - v)^2}{31,25 \cdot 31,25} = \frac{(e - v)^2}{62,5} = \frac{2}{125} (e - v)^2$$

Or la force de l'eau sur cette aube est égale au poids d'un volume d'eau $= fhu = \frac{2fh}{125} (e - v)^2$, d'où le moment de mouvement de

cette force sera $= \frac{2fhv}{125} (e - v)^2$: lequel deviendra le plus grand

qu'il est possible, si $v = \frac{1}{3}e$. Donc, pour jouir de cet avantage, il faut disposer la machine en sorte, que la rouë tourne avec un tel mouvement, que sa vitesse au centre des aubes m soit le tiers de la vitesse du courant d'eau de la riviere: & alors la force de l'eau qui agit sur

$$\text{la rouë sera } = \frac{4}{9} \cdot \frac{2eefh}{125} = \frac{8}{1125} eefh.$$

XXXVI. Si donc nôtre machine est mise en mouvement par une telle rouë, nous aurons la force $F = \frac{8}{1125} eefh$, & la vitesse

de la rouë à la distance $Om = r$ du centre sera $= \frac{1}{3}e$ qui est la va-

leur de α , de sorte que $\alpha = \frac{1}{3}e$, & $F\alpha = \frac{8}{3375} e^3fh$. Donc la

quantité d'eau, qui pourra être élevée dans une heure par cette ma-

chine, sera $M = \frac{8 \cdot 3600}{3375 \lambda g} e^3fh$, ou $M = \frac{123}{15} \cdot \frac{e^3fh}{g\lambda}$. De plus la



vitesse des pistons étant posée $= \frac{1}{3} ie$, la valeur de λ sera :

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{ie^4 fhl}{15529 bccgg}\right)}$$

qu'il faut rendre aussi petite qu'il sera possible. Ensuite posant le nombre des pompes $= 2n$, le diametre de chacune doit être $a = \sqrt{\frac{2eefh}{221\lambda ing}}$.

Le tems du jeu de chaque piston sera $= \frac{6b}{ie}$, & enfin la pression que le tuyau montant aura à soutenir en bas sera exprimée par la hauteur, λg .

XXXVII. Une telle machine est pratiquée à Paris, au pont Nôtre-Dame, pour élever de l'eau à la hauteur de 81 pieds au dessus du niveau de la Seine. Il y a deux rouës poussées par le courant de la riviere, dont chacune fait jouer un équipage à part. Ces rouës sont semblables à celle que je viens de considérer ici, & selon la description qu'en donne M. *Belidor*, la hauteur des aubes est de 3 pieds, & la longueur de 18 pieds, en sorte que $h = 3$ & $f = 18$. Ensuite la vitesse de la riviere est estimée de 9 pieds par seconde de sorte que $e = 9$, & la hauteur $g = 81$, à laquelle est égale la longueur des tuyaux montans l , parce qu'ils montent perpendiculairement. Ainsi, si cette machine étoit bien ménagée, elle seroit capable d'élever par heure la

quantité de l'eau $M = \frac{4147}{\lambda}$ pieds cubiques, & partant les deux équi-

pages ensemble la quantité de $\frac{8294}{\lambda}$ pieds cubiques, qui sera d'autant plus grande, plus on diminuera la valeur de λ .

XXXVIII. Mais de la maniere que cette Machine est disposée elle ne fournit que 100 pouces d'eau : donc un pouce donnant 28 livres par minute, & 1680 livres par heure, ce qui fait 24 pieds cubiques, toute la quantité d'eau élevée dans une heure par l'action des deux



deux rouës fera de 2400 pieds cubiques, M. *Belidor*, dans la description qu'il en donne, reconnoit, que cette quantité d'eau est trop petite, & qu'on en pourroit bien tirer le double, si l'on dispoſoit la machine plus avantageuſement. Les remarques, qu'il fait ſur ce ſujet ſont fort belles, par leſquelles il montre, que le mouvement des rouës eſt trop lent, étant moindre au centre des aubes, que le tiers de celui de la riviere. Enſuite il propoſe des corrections à faire dans les ſoupapes, pourque le mouvement de l'eau rençontre moins d'obſtacles: & par le moyen de ces corrections il prétend, que la quantité d'eau élevée pourroit être augmentée au delà de 200 pouces.

XXXIX. Or nous voyons de la formule, que je viens de trouver, qu'il ſeroit poſſible d'augmenter cette quantité encore beaucoup plus conſidérablement, en déterminant les meſures de la machine en forte, que la valeur de λ devienne ſi petite qu'elle n'excede que tant ſoit peu l'unité: au lieu que dans l'état actuel, où ſe trouve cette machine, nous voyons que la valeur de λ eſt fort conſidérable étant $= \frac{8294}{2400}$ ou environ $\lambda = 3 \frac{1}{2}$, de forte que le tuyau montant a à ſoutenir plus que 3 fois la colonne d'eau. D'où l'on voit que cette machine eſt encore fort défectueuſe, puisqu'elle ne fournit non ſeulement trop peu d'eau, qu'on aura lieu de prétendre, mais que ce défaut même augmente encore ſi conſidérablement la preſſion dans les tuyaux; de forte que ce même défaut, qui eſt la cauſe de la diminution de la quantité d'eau élevée, tend encore à la deſtruction de la machine même.

XL. Voyons donc de quelle maniere on pourroit porter cette machine au plus haut degré de perfection, dont elle ſeroit ſuſceptible. Pour cet effet il ſ'agit de rendre la valeur de λ auſſi petite, qu'il ſera poſſible. Or, puisque $e = 9$, $f = 18$, $h = 3$, $l = g = 81$, il fera

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{3,55bcc}\right)}.$$



Pour faire mieux l'application de cette formule, supposons que pendant chaque tour des rouës, chaque piston jouë μ fois : donc, puisque le jeu des pistons s'acheve en $\frac{2b}{3i}$ secondes, & que le rayon r étant $8\frac{1}{2}$ pieds, le tour d'une rouë s'acheve en 17,8 secondes, on aura $\mu = \frac{26,7}{b}i$, & partant $i = \frac{\mu b}{26,7}$, d'où nous aurons

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{95cc}\right)}.$$

Le nombre μ étant dans la machine, tantôt 4 tantôt 6, on voit, qu'il sera toujours avantageux de le diminuer. Or posons $\mu = 6$, & $cc = 2$, & on aura à peu près $\lambda = 1 \frac{3}{100}$, d'où la pression dans les tuyaux sera aussi petite, qu'on la fauroit souhaiter.

LXI. La quantité d'eau élevée dans une heure par une rouë sera donc $M = 4026$ pieds cubiques, & celle des deux rouës de 8052 pieds cubiques : or il en faut rabattre quelque chose à raison de la force requise pour vaincre les frottemens, de sorte qu'il semble qu'on puisse compter au moins sur 7200 pieds cubiques, ce qui seroit le triple de ce qu'elle fournit actuellement. Or pour ce qui regarde le diametre des pompes, dont je suppose le nombre $= 2n$, il sera à cause de $i = \frac{6b}{26,7}$, & $\lambda = 1,03$; $a = \sqrt{\frac{48060}{22763nb}} = \frac{1,453}{\sqrt{nb}}$ pieds: supposons qu'on ne veuille appliquer à chaque rouë que deux pompes pour avoir $n = 1$, & le diametre de chacune doit être $a = \frac{1,453}{\sqrt{b}}$. Selon la description b est $1\frac{1}{2}$ pied; donc retenant cette valeur on aura $a = 1 \frac{186}{1000}$ pieds. Mais si l'on donnoit au jeu des



pistons l'étenduë $b = 3$ pieds, il seroit $a = \frac{84}{100}$ pieds, ou de 10 pouces à peu près.

XLII. On voit par là, qu'on pourroit encore perfectionner cette machine en plusieurs manieres différentes, de sorte qu'on en put toujours tirer le même profit de plus de 7200 pieds cubiques par heure. Comme la rouë tourne à peu près en 18'', six jeux de pistons dans ce tems semblent encore trop vites, & l'ouvrage réussiroit peut être mieux, si l'on ne faisoit jouer que quatre fois chaque piston. On auroit donc $\mu = 4$, $i = \frac{4b}{26,7}$, & $\lambda = \frac{1}{2} + V\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{95cc}\right)$, qu'on pose encore $cc = 2$, ou $c = \sqrt{2}$, & il deviendra $\lambda = 1,002$ plus petit que dans le cas précédent, & partant M plus grand, & le diametre de chaque pompe devra être $a = \frac{1,804}{\sqrt{bn}}$. Donc, si l'on met l'étenduë du jeu des pistons $b = 1\frac{1}{2}$ pieds, & qu'on applique à chaque rouë 12 pompes, de sorte que $n = 6$, on aura $bn = 9$, & partant $a = 0,601$, ou le diametre des pompes fera de $7\frac{1}{2}$ pouces. Enfin les tuyaux montans ne porteront sensiblement plus, que la hauteur de la colonne d'eau, qu'ils contiennent actuellement.

XLIII. Puisque les formules générales, qui coulent de l'action de l'eau sur la rouë, deviennent plus faciles à être appliquées à la pratique, si au lieu du nombre i nous y introduisons le nombre des jeux, que chaque piston acheve pendant un tour de la rouë; soit ce nombre de jeux $= \mu$, & puisque le tems du jeu d'un piston est $\frac{6b}{ie}$ secondes, & la circonférence de la rouë, qui répond au rayon r est $= 2\pi r$, le tems d'une révolution de la rouë fera $= \frac{6\pi r}{e}$, d'où nous tirons

$$Y =$$

$$\mu =$$



$\mu = \frac{\pi ir}{b}$, & $i = \frac{\mu b}{\pi r}$. Cette valeur étant substituée, nous aurons :

$$\lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu e^4 f h l}{15529 \pi r c c g g} \right),$$

$$\& a = V \frac{2 \pi r e e f h}{221 \lambda \mu n b g},$$

& remettant pour π la valeur 3,1459, il fera :

$$\lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu e^4 f h l}{48786 r c c g g} \right),$$

$$\& a = 0,1686 V \frac{r e e f h}{\lambda \mu n b g},$$

desquelles formules il est aisé de faire l'application pour chaque cas proposé.

4. De la force des moulins à vent.

Fig. 2.

XLIV. Que le plan de la planche soit perpendiculaire à la quille d'une aile du moulin à vent, & que MLM soit la section de l'aile dans cet endroit, le point L celle de la quille, & que la ligne LB représente la direction de mouvement du point L. Il est clair que la direction du vent DL se trouvera dans le même plan, & qu'elle sera perpendiculaire à la ligne LB. Cela remarqué, soit la largeur de l'aile dans cet endroit $MM = y$, son inclinaison à la direction du vent ou l'angle $DLM = \Phi$; soit de plus la vitesse du vent $DL = e$, la vitesse du point de l'aile L selon LB, qui soit $LF = v$; & comme l'aile échappe en partie à l'action du vent, on trouve par les règles de mécanique que l'effet seroit le même, que si un vent exprimé par la diagonale GL tomboit dans la même direction GL sur l'aile considérée en repos.

XLV. Or il est aussi reconnu, que dans ce cas la force du vent sera $= GL^2 \cdot \sin GLM^2 \cdot y$. Mais la considération du triangle
GLH



GLH fournit GL. $\sin \text{GLM} = \text{GH} \cdot \sin \text{LHF} = \text{GH} \sin \phi$. Or ayant $\text{LF} = v$, il fera $\text{FH} = \frac{v}{\text{tang} \phi}$, donc $\text{GH} = e - \frac{v}{\text{tang} \phi}$, & partant GL. $\sin \text{GLM} = e \sin \phi - v \text{ cof} \phi$. Par conséquent la force du vent sur la ligne MM fera $= y (e \sin \phi - v \text{ cof} \phi)^2$, & si les lettres e & v marquent le nombre de pieds, qui leur convient par seconde, cette force sera égale au poids d'un volume d'air $= \frac{2}{125} y (e \sin \phi - v \text{ cof} \phi)^2$. Mais comme l'air est environ 800 fois plus léger que l'eau, cette force se réduira à une masse d'eau, dont le volume $= \frac{1}{50000} y (e \sin \phi - v \text{ cof} \phi)^2$ en pieds quarrés, supposé que la largeur de l'aile MM $= y$ soit aussi exprimée en pieds, car comme nous ne considérons qu'une ligne, il manque encore à l'effet une dimension pour en avoir trois.

XLVI. Mais la direction de cette force étant perpendiculaire sur l'aile, elle poussera selon la direction LN, l'angle BLN étant $= \text{DLM} = \phi$: il faut donc faire la réduction de cette force sur la direction LB, selon laquelle le point L se meut, & alors la force du vent, qui sollicite la ligne MM dans la direction LB fera $= \frac{y \text{ cof} \phi}{50000} (e \sin \phi - v \text{ cof} \phi)^2$: & si nous donnons à cette ligne MM une largeur infiniment petite dx , sur laquelle le vent agisse avec la même force, alors la force, qui en résulte pour faire tourner l'aile selon la direction LB fera $= \frac{y dx \text{ cof} \phi}{50000} (e \sin \phi - v \text{ cof} \phi)^2$ en pieds cubiques d'eau. Cette formule étant trouvée, il ne sera pas difficile d'en faire l'application à celle, qui agit sur une aile entière d'un moulin à vent.



Fig. 3.

XLVII. Soit donc $OAABB$ une aile entière d'un moulin à vent, & O l'axe, autour duquel l'aile tourne, en sorte que l'axe tombe dans la direction du vent. Soit la longueur entière de cette aile $OC = f$, & en prenant une partie quelconque $OL = x$, soit la largeur qui y répond $MLM = y$, & l'inclinaison de la direction du vent sur l'élément $MMmm$ soit $= \Phi$. De plus soit u la vitesse de l'aile au point D , & puisque $u : f = v : x$, la vitesse au point L fera $v = \frac{xu}{f}$; donc la force du vent sur l'élément $MMmm = y dx$ selon

la direction de son mouvement fera $= \frac{y dx \cos \Phi}{50000} \left(e \sin \Phi - \frac{xu}{f} \cos \Phi \right)^2$ en pieds cubiques d'eau, prenant e pour l'espace en pieds, que le vent parcourt dans une seconde. Cette force élémentaire étant multipliée par la vitesse $\frac{xu}{f}$, que l'aile a dans cet endroit, donnera l'élément du moment de mouvement de la force du vent sur l'aile, qui fera $= \frac{xyu dx \cos \Phi}{50000 f} \left(e \sin \Phi - \frac{xu}{f} \cos \Phi \right)^2$.

XLVIII. Soit comme l'on fait ordinairement l'angle Φ par toute la longueur de l'aile le même, & que l'aile ait aussi par tout la même largeur $AA = BB = h$: à cause de $y = h$ l'élément du moment de mouvement fera :

$$\frac{hu \cos \Phi}{50000 f} \cdot x dx \left(e \sin \Phi^2 - \frac{2eux}{f} \sin \Phi \cos \Phi + \frac{uuxx}{ff} \cos \Phi^2 \right)$$

dont l'intégrale fera :

$$\frac{hu \cos \Phi}{50000 f} \left(\frac{1}{2} e x x \sin \Phi^2 - \frac{2eux^3}{3f} \sin \Phi \cos \Phi + \frac{uux^4}{4ff} \cos \Phi^2 - C \right)$$

cette constante C doit être telle que posant $x = OC$, l'intégrale évanouisse. Soit $OC = k$, & cette constante fera :

$$C =$$

$$C = \frac{1}{2} e e k k \sin \Phi^2 - \frac{2 e u k^3}{3 f} \sin \Phi \cos \Phi + \frac{u u k^4}{4 f f} \cos \Phi^2 .$$

Posons maintenant $x = O D = f$: & le moment de mouvement sur toute l'aile sera :

$$\frac{h u \cos \Phi}{50000 f} \left(\frac{1}{2} e e (f f - k k) \sin \Phi^2 - \frac{2 e u}{3 f} (f^3 - k^3) \sin \Phi \cos \Phi + \frac{u u}{4 f f} (f^4 - k^4) \cos \Phi^2 \right)$$

& si le moulin est garni de quatre telles ailes, le moment de mouvement de la force du vent fera :

$$F \alpha = \frac{h u \cos \Phi}{12500 f} \left(\frac{1}{2} e e (f f - k k) \sin \Phi^2 - \frac{2 e u}{3 f} (f^3 - k^3) \sin \Phi \cos \Phi + \frac{u u}{4 f f} (f^4 - k^4) \cos \Phi^2 \right) .$$

XLIX. Donc, pour que ce moment devienne le plus grand qu'il est possible, on trouvera la vitesse u , dont les ailes doivent tourner à leurs extrémités D. Car prenant les différentiels, en supposant la seule quantité u variable, on aura :

$$\frac{1}{2} e e (f f - k k) \sin \Phi^2 - \frac{4 e u}{3 f} (f^3 - k^3) \sin \Phi \cos \Phi + \frac{3 u u}{4 f f} (f^4 - k^4) \cos \Phi^2 = 0 ,$$

d'où l'on tire :

$$u = \frac{e f \operatorname{tang} \Phi}{9 (f^4 - k^4)} \left(8 (f^3 - k^3) \pm (f - k) \sqrt{10 f^4 + 20 f^3 k + 84 f f k k + 20 f k^3 + 10 k^4} \right) .$$

Du signe ambigu \pm il faut que l'inférieur $-$ ait lieu : car le supérieur donne le cas, où l'aile échappe presque tout à fait à l'impulsion du vent, ce qui est un cas où le moment du mouvement devient le plus petit, comme l'autre a lieu si $u = 0$. Donc, pour que ce moment soit le plus grand, il faut faire valoir le signe inférieur $-$, de sorte que le signe radical devienne soustractif.

L. Puisque la distance $O C = k$ est ordinairement extrêmement petite par rapport à la longueur entière des ailes $O D = f$, nous pourrons poser $k = 0$, & nous obtiendrons :

$$u = \frac{e \operatorname{tang} \Phi}{9} (8 \pm \sqrt{10})$$

Soit pour abrégé $\frac{8 \pm \sqrt{10}}{9} = \delta$, de sorte que $u = \delta e \operatorname{tang} \Phi$, & le moment du mouvement de toute la force du vent deviendra :

$$Fa = \frac{\delta e^3 f h \sin \Phi^3}{12500} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \delta + \frac{1}{4} \delta \delta \right) = \frac{\delta e^3 f h \sin \Phi^3}{12500} \cdot \frac{11 \mp 2 \sqrt{10}}{81}$$

donc $Fa = \frac{68 \mp 5 \sqrt{10}}{729} \cdot \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{12500}$,

d'où l'on voit que le signe inférieur donne le plus grand moment du mouvement. Ainsi il faut établir la vitesse de l'extrémité des ailes

$$u = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \cdot e \operatorname{tang} \Phi = 0,537525 e \operatorname{tang} \Phi, \text{ \& l'on aura :}$$

$$Fa = \frac{68 + 5 \sqrt{10}}{729} \cdot \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{12500} = \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{108726}.$$

LI. Il semble de là que plus l'angle Φ feroit grand, plus aussi forte feroit l'action du vent, & qu'elle deviendroit la plus grande, si l'angle Φ étoit pris droit ; mais il faut considérer, que la vitesse u deviendroit alors infinie : or on comprend aisément, que ce cas seroit inexécutable, à cause de $\alpha = \infty$ & $F = 0$. On prend communément cet angle de 55° , de sorte que $\operatorname{rang} \Phi = \sqrt{2}$, & dans ce cas on aura :

$$u = 0,76018 e$$

$$\& \quad Fa = \frac{e^3 f h}{199743}.$$

Or si l'on mettoit $\Phi = 60^\circ$, on auroit :

$$u = 0,93102 e$$

$$\& \quad Fa = \frac{e^3 f h}{167395}.$$

Mais



Mais si l'on ne faisoit cet angle Φ que de 45° , on auroit :

$$u = 0,53752 e$$

$$\& \quad F \alpha = \frac{e^3 f h}{307525}.$$

XLII. Supposons donc qu'on employe un moulin à vent pour élever de l'eau à l'aide des pompes, & que le plan des ailes fasse avec la direction du vent un angle $\Phi = 54^\circ, 45'$ ou donc la tangente soit $= \sqrt{2}$. Et puisque la vitesse à la distance $= f$ de l'axe est $= 0,76018 e$ pieds par seconde, la circonference étant $= 2 \pi f$, les ailes doivent faire une révolution entiere en $\frac{2 \pi f}{0,76018 e}$ secondes $=$

$8,2654 \frac{f}{e}$ secondes. Posons comme auparavant, que pendant une révolution des ailes chaque piston jouë μ fois, & le tems du jeu sera $\frac{8,2654 f}{\mu e} = t$ secondes, donc $\frac{2 b}{i a} = \frac{8,2654 f}{\mu e}$, & partant

$$i = \frac{2 \mu b e}{8,2654 a f} = \frac{0,24197 \mu b e}{a f}.$$

d'où l'on trouvera les déterminations suivantes,

$$\lambda = \frac{1}{4} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{0,01972 \mu e \cdot F \alpha \cdot l}{f c c g g} \right)$$

$$\& \quad a = V \frac{5,2617 f \cdot F \alpha}{\lambda \mu n b e g}.$$

LIII. Or dans le cas, que nous supposons, nous avons trouvé

$$F \alpha = \frac{e^3 f h}{199743}, \text{ laquelle valeur étant substituée donne}$$



$$\lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu e^4 h l}{10128960 c c g g} \right)$$

$$\& a = V \frac{e e f f h}{37962 \lambda \mu n b g} = \frac{e f}{195} V \frac{h}{\lambda \mu n b g}$$

D'où l'on déterminera les quantités $a, b, c,$ & $\mu,$ en sorte que la valeur de λ devienne la plus petite. Alors non seulement la pression sur les tuyaux en bas, qui vaut la hauteur $= \lambda g,$ fera la plus petite, mais

aussi la quantité d'eau élevée dans une heure $M = = = \frac{3600 e^3 f h}{199743 \lambda g}$

fera aussi la plus grande. Or il fera $M = = = \frac{e^3 f h}{55 \frac{1}{4} \lambda g}$

pieds cubiques ; où il faut se souvenir, que e marque la vitesse du vent, f la longueur des ailes, & h la largeur ; & que les ailes doi-

vent achever leurs révolutions en $8,2654 \frac{f}{e}$ secondes.

5. De l'application la plus avantageuse des forces d'une nature quelconque.

LIV. De quelque nature que soit la force, par laquelle on veut mettre la machine, qui doit élever de l'eau, en mouvement, il y a toujours un certain degré de vitesse, sous lequel le moment de cette force devient le plus grand. Soit donc α ce degré de vitesse, comme nous avons supposé jusqu'ici, & F la force même, de sorte que $F \alpha$ soit ce plus grand moment, & que cette force agisse, comme il se pratique ordinairement, sur une rouë dont le rayon soit $= r.$ La circonference sera donc $= 2 \pi r,$ que la force décrira en $\frac{2 \pi r}{\alpha}$ secondes. Que les pistons des pompes achevent μ jeux pendant chaque tour

tour de la rouë, & le tems d'un jeu sera $= \frac{2 \pi r}{\mu a}$ fecondes. Ce tems ayant été cy - deffus déterminé de $\frac{2 b}{i a}$ fecondes, nous aurons $\frac{b}{i} = \frac{\pi r}{\mu}$, & $i = \frac{\mu b}{\pi r}$.

LV. Pour la quantité d'eau, qui fera élevée dans une heure elle fera, comme auparavant, $M = \frac{3600 F a}{\lambda g}$ pieds cubiques, & la pression fur le tuyau en bas $= \lambda g$. Or mettant pour i la valeur trouvée, celle de λ se trouvera par cette formule :

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{0,0815 \mu F a a l}{\pi r c c g g} \right)}$$

& depuis le diametre des pompes sera

$$a = \sqrt{\frac{1,2732 \pi r F}{\lambda \mu n b g}}$$

où $2 n$ marque le nombre des pompes. Et si nous posons pour π la valeur 3,14159 ces formules deviendront

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu F a a l}{38,547 r c c g g} \right)}$$

$$a = \sqrt{\frac{4 r F}{\lambda \mu n b g}} = 2 \sqrt{\frac{F r}{\lambda \mu n b g}}$$

ou il sera $a a b = \frac{4 F r}{\lambda \mu n g}$, quantité proportionelle à la capacité d'une pompe.

LVI. Comme le nombre 1,2732 étant multiplié par π produit exactement 4, il sera à propos de rechercher de même l'origine



du nombre 0,0815, pour voir d'un coup d'œil, de quels nombres il est résulté. Or si nous remontons successivement à la première source, nous verrons, que tant la réduction du tems en secondes que le rapport du diametre à la circonference y concourent. Car les origines successives se trouvent :

$$\begin{aligned} \text{I. } 0,0815 &= \frac{1}{12,272} ; & \text{II. } 12,272 &= \frac{2}{0,16297} \\ \text{III. } 0,16297 &= \frac{2 \cdot 0,8968^2}{\pi \pi} ; & \text{IV. } 0,8968 &= 2 \cdot 0,4484 \\ \text{V. } 0,4484 &= \frac{1800 \pi}{12611} ; & \text{VI. } 12611 &= 2 \cdot 3557 \sqrt{\pi} \\ \text{VII. } 3557 &= \frac{900 \cdot 125}{\sqrt{1000}} ; & \text{VIII. } 900 &= \frac{3}{4} \cdot 3600 \end{aligned}$$

Donc, si nous remettons ces valeurs, nous en obtiendrons les valeurs originaires de ces nombres :

$$12611 = \frac{1800 \cdot 125 \sqrt{\pi}}{\sqrt{1000}} ; \quad 0,4484 = \frac{\sqrt{1000} \pi}{125} ; \quad 0,8968 = \frac{2}{125} \sqrt{1000} \pi$$

$$0,16297 = \frac{2}{\pi \pi} \cdot \frac{4}{125^2} \cdot 1000 \pi = \frac{8000}{125^2 \pi} = \frac{64}{125 \pi} ; \quad 12,272 = \frac{125 \pi}{32}$$

$$\& \text{ enfin } 0,0815 = \frac{32}{125 \pi}.$$

LVII. Si donc le moment de la force $F\alpha$ est donné, & que chaque piston fasse μ jeux, pendant une révolution de la rouë principale, à laquelle la force F est appliquée, nous aurons :



$$I. \lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{32 \mu F a a l}{125 \pi r c c g g} \right)$$

$$II. a = 2 V \frac{F r}{\lambda \mu n b g}$$

III. La pression au bas des tuyaux montans $p = \lambda g$

IV. La quantité d'eau élevée par heure $= \frac{3600 F a}{\lambda g}$.

V. Le tems d'un jeu de pistons fera $= \frac{2 \pi r}{\mu a}$ secondes.

Où il faut se souvenir, que a marque le chemin, que la force F étant appliquée à la distance r de la rouë, fait par seconde, c est le diamètre du tuyau montant, g la hauteur du réservoir à laquelle l'eau doit être élevée, l la longueur des tuyaux de conduite, $2n$ le nombre des pompes, a le diamètre de chaque pompe, & b leur hauteur, ou plutôt l'étendue du jeu des pistons, toutes ces quantités étant exposées en pieds de Rhin.

LVIII. Il faut donc satisfaire aux conditions marquées dans les *numeros* I & II en y réglant la machine, pour que la force F appliquée à la distance r de la rouë principale puisse se mouvoir avec la vitesse prescrite a , & par là imprimer à la machine le mouvement convenable. Or j'ai fait voir, de quelque force qu'on se serve pour cet effet, que la quantité même de la force dépend du degré de vitesse, dont elle se meut, & qu'il y a un tel degré de vitesse, auquel répond le plus grand moment de mouvement de cette force, qu'il est toujours avantageux d'employer dans la pratique; puisque par ce moyen on est en état d'élever la plus grande quantité d'eau dans un tems donné, pourvu qu'on rende la valeur de λ aussi petite, qu'il sera possible. Voyons donc par rapport aux différentes especes des forces, quelles seront les conditions, sur lesquelles il faudra régler la machine.



LIX. Supposons donc 1°. qu'on veuille employer m hommes à la machine, qui appliquent leurs forces à la distance r de la roué: & nous avons vû que leur moment fera le plus grand, si leur vitesse est de deux pieds par seconde, de sorte qu'il soit $a = 2$, & la force même vaudra $\frac{3}{8} m$ pieds cubiques d'eau; il fera donc $Fa = \frac{3}{4} m$, & $Faa = \frac{3}{2} m$. Pour mettre la machine en état que ces m hommes puissent marcher avec la vitesse $a = 2$, il la faudra régler sur les conditions suivantes :

$$\text{I. } \lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{48 \mu m l}{125 \pi \pi r c c g g} \right).$$

$$\text{II. } a = 2 V \frac{3 m r}{8 \lambda \mu n b g} = V \frac{3 m r}{2 \lambda \mu n b g}.$$

Et alors il fera :

la pression dans les tuyaux en bas $= \lambda g$

la quantité d'eau fournie par heure $= \frac{2700 m}{\lambda g}$ pieds cubiques

& le tems d'un jeu de pistons $= \frac{\pi r}{\mu}$.

LX. Supposons 2°. qu'on veuille employer m chevaux pour mettre la machine en mouvement, & leur moment fera le plus grand, si leur vitesse est de 4 pieds par secondes. Nous aurons donc $a = 4$ & la force fera $F = \frac{5}{3} m$: ou, de peur que cette force ait été supposée trop grande, posons seulement $F = \frac{5}{2} m$; de sorte que $Fa = 10 m$ & $Faa = 40 m$: & la machine doit être réglée suivant ces formules:

$$\text{I. } \lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{1280 \mu m l}{125 \pi \pi r c c g g} \right).$$

$$\text{II. } a = 2 V \frac{5 m r}{2 \lambda \mu n b g} = V \frac{10 m r}{\lambda \mu n b g}.$$

Or la machine se trouvant dans cet état, les chevaux pourront suivre leur mouvement de 4 pieds par seconde, & la pression dans les tuyaux en



en bas vaudra la hauteur $= \lambda g$ & la quantité d'eau fournie par heure $= \frac{36000m}{\lambda g}$ & le tems d'un jeu de pistons fera $= \frac{\pi r}{2\mu}$ secondes.

D'où l'on voit qu'un cheval vaut plus que 13 hommes dans cet ouvrage, le reste étant égal.

LXI. Supposons en troisième lieu, qu'on se serve de la force d'un courant d'eau, qui vienne frapper sur une rouë, dont

la longueur des aubes soit $= f$ pieds

la hauteur des aubes soit $= h$ pieds

& que la vitesse de la riviere soit de e pieds par seconde: soit le rayon de la rouë jusqu'au centre des forces de l'eau $= r$, & pour que le moment soit le plus grand, il faut qu'il soit $a = \frac{1}{3}e$, & il sera

$$F = \frac{8}{1125} ecfh; \text{ donc } Fa = \frac{8}{3375} e^3fh \text{ \& } Faa = \frac{8}{10125} e^4fh.$$

De là les conditions de la machine feront :

$$\text{I. } \lambda = \frac{1}{2} + V \left(\frac{1}{4} + \frac{256\mu e^4fh}{125 \cdot 10125 \pi \pi r c c g g} \right).$$

$$\text{II. } a = 2 V \frac{8 ecfhr}{1125 \lambda \mu nbg} \text{ ou } a^2b = \frac{32 ecfhr}{1125 \lambda \mu ng}.$$

Et il deviendra $p = \lambda g$, $M = \frac{128}{15} \cdot \frac{e^3fh}{\lambda g}$ pieds cubiques

& le tems d'un jeu de pistons $t = \frac{6\pi r}{\mu e}$.

LXII. Soit maintenant 4°. la force du vent, qui doit mettre la machine en mouvement, & qu'on se serve pour cet effet d'un moulin garni de quatre ailes, dont chacune ait f pieds de longueur sur h pieds de largeur, & que la surface des ailes fasse avec l'axe ou la direction du vent un angle $= \phi$. Cela posé, si la vitesse du vent est de e pieds par seconde, le moment de la force du vent fera le plus grand, si la vitesse des extrémités des ailes est :

$$= \frac{8 - \sqrt{10}}{9} e \operatorname{tang} \Phi = 0,537525 e \operatorname{tang} \Phi ;$$

& alors le moment fera :

$$F a = \frac{68 + 5\sqrt{10}}{729} \cdot \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{12500} = \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{108726} .$$

Pofons donc $a = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} e \operatorname{tang} \Phi = 0,537525 e \operatorname{tang} \Phi ,$

& le rayon $r = f$, puisque la vitesse a répond à ce rayon f , & les formules supérieures donneront les conditions requises. D'où il s'enfuit que la quantité d'eau fournie dans une heure fera :

$$M = \frac{4(68 + 5\sqrt{10})}{81.125} \cdot \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{\lambda g} = \frac{10}{302} \cdot \frac{e^3 f h \sin \Phi^3}{\lambda g} .$$

LXIII. Les valeurs de $F a$ & a érat multipliées & divisées enfemble donneront :

$$F a a = \frac{e^4 f h \sin \Phi^4}{202271 \operatorname{cof} \Phi} , \quad \& \quad F = \frac{e e f h \sin \Phi^4 \operatorname{cof} \Phi}{58443} .$$

Donc les conditions du meilleur état de la machine feront :

$$\text{I. } \lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu e^4 h l \sin \Phi^4}{790121 \pi \pi c c g g \operatorname{cof} \Phi} \right)} .$$

$$\text{II. } a = 2 \sqrt{\frac{e e f f h \sin \Phi^2 \operatorname{cof} \Phi}{58443 \lambda \mu n b g}} .$$

Le tems du jeu des pistons fera donc :

$$t = \frac{\pi f}{0,26876 \mu e \operatorname{tang} \Phi} \text{ secondes, } = \frac{11,6892f}{\mu e \operatorname{tang} \Phi} ,$$

d'où l'on pourra en chaque cas proposé définir la plus avantageuse disposition de toute la machine.

ad pag. 184.

Tab. II

Fig. 1.

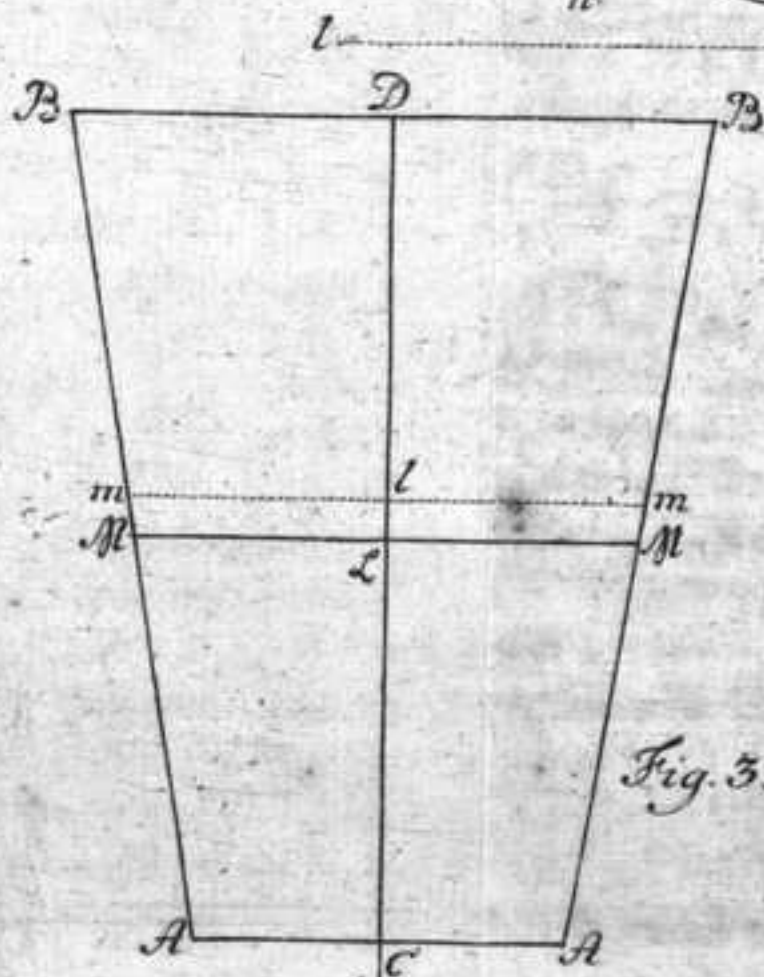
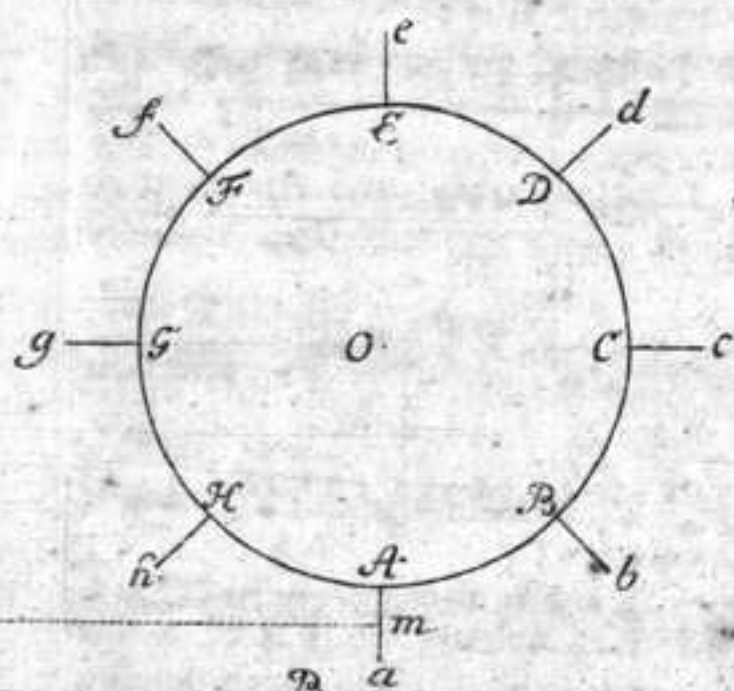


Fig. 3.

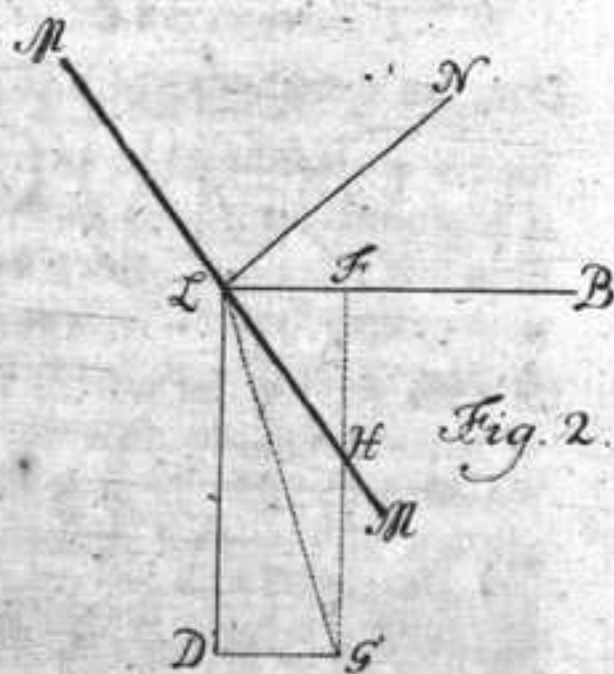


Fig. 2.

pour la Classe des Mathematiques du Tom. VIII.