



T H É O R I E
PLUS COMPLETE DES MACHINES
QUI SONT MISES EN MOUVEMENT
PAR LA RÉACTION DE L'EAU.

PAR M. EULER.

Ayant déjà expliqué en quelques Mémoires l'effet, que la Machine projetée par Mr. de Segner à Halle est capable de produire, je me propose ici de développer cette même matière plus soigneusement. Les forces, par lesquelles cette machine est mise en mouvement, sont tirées de la réaction de l'eau, dont la machine est remplie, & qui en sort en bas par des ouvertures : car, puisque cette machine est mobile autour d'un axe vertical, & que l'eau en échape horizontalement, il résulte de la réaction de l'eau un moment de forces, qui tend à faire tourner la machine autour de son axe, & qui la rend même capable de surmonter quelque résistance, ou bien de produire quelque effet. Or, dans la recherche que j'ai faite de cette machine, j'ai supposé un vaisseau cylindrique, au fond duquel sont attachés des tuyaux horizontaux, par lesquels l'eau échape, & ayant regardé le mouvement de l'eau dans le vaisseau comme connu, j'ai cherché le mouvement par les tuyaux attachés, avec la force de réaction, qu'ils en soutiennent. Cette supposition a été faite pour rendre la recherche plus facile : car, si j'avois voulu continuer les tuyaux jusqu'en haut de la surface de l'eau, la détermination de la réaction de l'eau seroit devenuë plus embarrassante. Quoique cette circonstance n'apporte aucune atteinte à la justesse de la détermination, après que j'y ai ajouté la rectification, qui lui convient à cause du mouvement de l'eau par le vaisseau cylindrique, il n'y a aucun doute que cette recherche ne seroit plus com-



plette, si l'on regardoit le vaisseau avec les tuyaux comme une seule piece continuë, & qu'on étendit le calcul à la fois sur toute la masse de l'eau, qui est mise en mouvement. Par ce moyen la théorie de cette espece de machines fera non seulement portée à un plus haut degré de perfection, mais nous en tirerons encore l'avantage, de rendre les machines mêmes plus parfaites, & d'en augmenter l'effet. Outre cela il y a tant de choses différentes, auxquelles il faut avoir égard dans cette recherche, qu'il sera de la dernière importance de développer chacune en particulier plus en détail, afin que cette matière, qui jusqu'ici a été enveloppée de quantité d'obscurités, devienne plus lumineuse, & qu'on acquierre une connoissance claire de ce, que chaque circonstance en particulier contribue à la production de l'effet de toute la machine. Je m'en vais donc détailler le plus évidemment qu'il me sera possible, tous les élémens, sur lesquels la théorie de la réaction de l'eau, & de l'effet qu'on en peut tirer, est fondée.

DEFINITION I.

I. *La réaction de l'eau est la force dont l'eau agit sur le vaisseau, qui la contient, & qui tend par conséquent à imprimer au vaisseau quelque mouvement.*

La réaction se prend communement pour la force qu'un vaisseau soutient de l'eau, entant qu'elle en sort par quelque ouverture : mais ici je prends ce terme dans un sens plus général pour marquer la force, dont l'eau agit sur le vaisseau, soit que l'eau soit en repos, ou qu'elle soit en mouvement.

COROLL. I.

II. Donc, si l'eau est en repos dans le vaisseau, les ouvertures étant fermées, le vaisseau ne soutient que le poids de l'eau tout entier : ou le vaisseau en est poussé en bas par une force égale au poids de l'eau selon une direction verticale, qui passe par le centre de gravité de la masse d'eau. Cette force est donc dans ce cas la réaction, que l'eau exerce sur le vaisseau.



C O R O L L. 2.

III. Si le vaisseau, où l'eau est enfermée sans qu'elle en puisse sortir, est agité d'un mouvement quelconque, il soutiendra outre le poids de l'eau encore les forces, dont l'eau s'oppose au mouvement, entant que le mouvement n'est pas uniforme, ou qu'il ne se fait pas en ligne droite.

C O R O L L. 3.

IV. Mais si, pendant que le vaisseau, ou est en repos, ou dans un mouvement quelconque, l'eau échape par une ou plusieurs ouvertures, la réaction de l'eau sera bien différente de celle du cas précédent. La raison en est d'un côté, puisque les parois du vaisseau ne soutiennent aucune force dans les ouvertures mêmes, & d'un autre côté puisque l'eau dans le vaisseau a un mouvement propre, dont l'action sur le vaisseau est altéré.

C O R O L L. 4.

V. Il s'agit donc de déterminer en chaque cas proposé la réaction de l'eau, ou la force que le vaisseau souffre de la part de l'eau, qu'il contient. On a donc deux choses à déterminer ; premièrement la quantité de cette force, qu'on mesurera le plus commodément par le poids d'un certain volume d'eau : & ensuite la direction de cette force.

S C H O L I E I.

VI. On voit bien, que la réaction de l'eau est le résultat de toutes les forces, dont tous les élémens des parois du vaisseau sont pressés par l'eau. Car les parois d'un vaisseau rempli d'eau soutiennent de la part de l'eau dans chacun de leurs points une certaine force, qui dépend tant de la pesanteur de l'eau, que de son mouvement. Ainsi chaque élément des parois du vaisseau étant sollicité par une certaine force, dont la direction, à ce qu'on fait, est toujours perpendiculaire aux parois, on n'aura qu'à réduire toutes ces forces élémentaires à une seule force, qui leur est équivalente, & cette force sera précisément la réaction, dont l'eau agit sur le vaisseau. Car le vaisseau ne



souffre rien de la part de l'eau, qu'entant que l'eau exerce des efforts contre les parois ; & si les parois ne soutenoient aucune pression de l'eau, ils se trouveroient dans le même état, que si le vaisseau étoit vuide, & partant il n'y auroit point de réaction. Mais si les parois sont sollicitées en tous leurs points par quelques forces, à moins que ces forces ne se détruisent pas entierement entr'elles, il en résultera une force, qui leur est équivalente, que le vaisseau soutient actuellement : & c'est cette force, qu'on doit entendre sous le terme de réaction.

S C H O L I E 2.

VII. Cette considération nous conduit d'abord à une méthode de déterminer la réaction de l'eau sur le vaisseau. Il faudra commencer par chercher les pressions que les parois du vaisseau soutiennent dans tous leurs points de la part de l'eau : ensuite on n'aura qu'à chercher la force, qui soit équivalente à toutes ces forces élémentaires prises ensemble, pour avoir la véritable quantité de la réaction. Or, quoique cette méthode semble la plus naturelle, & qu'elle ait été employée par tous les Auteurs qui ont traité cette matiere, elle renferme pourtant de si grandes difficultés, que je suis bien persuadé qu'une autre méthode, que je proposerai dans la suite, mérite bien loin la préférence. Car il est souvent extrêmement difficile, & quelquefois même impossible, de déterminer par la seule théorie les pressions, que les parois du vaisseau soutiennent dans tous leurs points : & quand on se trompe tant soit peu dans cette détermination, l'erreur qui en réjaillit sur la réaction, peut devenir très considérable. Car ordinairement la plupart de ces pressions se détruisent mutuellement, & le résultat n'est composé que de l'excès dont les pressions vers un côté surpassent celles qui leur sont contraires : donc, quand on aura commis quelque erreur dans toutes ces forces partiales, l'erreur qui en influë sur la force équivalente, pourroit devenir très énorme. Or l'autre méthode que je proposerai, n'est pas assujettie à cet inconvenient ; parce que je déterminerai pas la réaction par des forces, qui se détruisent pour la plus-part,



part, mais plutôt par de telles forces, qui étant ajoutées ensemble fournissent la réaction ; & de là nous tirerons cet avantage, que quoique l'expérience ne soit pas entièrement d'accord avec la théorie, l'erreur qui en résulte sur la réaction, ne sauroit devenir fort considérable. Or pour l'explication de cette méthode, je dois encore avancer les définitions suivantes.

D E F I N I T I O N II.

VIII. *Par les forces actuelles, qui agissent sur l'eau, j'entends toutes les forces dont l'eau est poussée de dehors, sans aucun égard à sa liaison avec le vaisseau.*

Une telle force est la gravité, dont chaque particule de l'eau est sollicitée en bas indépendamment du vaisseau ; & si l'eau dans le vaisseau étoit encore pressée par un piston, cette force du piston doit aussi être comptée parmi les forces actuelles.

C O R O L L. I.

IX. Entant que les parois du vaisseau soutiennent une pression de l'eau, l'eau en sera aussi sollicitée par une force égale & contraire : or, puisque ces forces proviennent de la liaison du vaisseau avec l'eau, je les distingue soigneusement des forces actuelles, qui agissent sur l'eau indépendamment du vaisseau : quoique l'une & l'autre espèce des forces soit également réelle par rapport à l'eau.

C O R O L L. 2.

X. Comme il n'y a point d'autres forces, qui dépendent de la liaison de l'eau & du vaisseau, que la pression que le vaisseau soutient de l'eau ; hormis ces forces de pression, toutes les autres forces, qui agissent sur l'eau, seront comprises sous le nom des forces actuelles.

C O R O L L. 3.

XI. La raison de cette distinction est assez évidente : car pour l'ordinaire toutes les forces actuelles sont données & connues, avant qu'on



qu'on cherche l'état, ou de repos, ou de mouvement de l'eau; au lieu qu'on ne sauroit assigner la pression mutuelle de l'eau & du vaisseau, sans qu'on sache exactement l'état, où l'eau se trouve.

C O R O L L. 4.

XII. Or puisqu'on voit que cette force de pression du vaisseau sur l'eau est égale & contraire à celle de l'eau sur le vaisseau, & cette force étant précisément la réaction de l'eau, il s'enfuit que la force que l'eau soutient de la part du vaisseau est égale & contraire à la réaction,

C O R O L L. 5.

XIII. Pour avoir toutes les forces, par l'action desquelles l'eau dans un vaisseau est sollicitée, il faut premièrement considérer toutes les forces actuelles, comme la pesanteur, & d'autres forces qui agissent par des pistons sur l'eau; à ces forces connus il faut ajouter encore une force égale & contraire à la réaction, & la somme renfermera toutes les forces, qui agissent sur l'eau.

C O R O L L. 6.

XIV. Il est aussi clair que tout ce qui vient d'être rapporté a également lieu, soit que le vaisseau avec l'eau se trouve en repos, soit que l'un & l'autre ayent un mouvement quelconque. Il faut seulement remarquer, que dans ce dernier cas les forces sollicitantes peuvent varier à chaque instant.

D E F I N I T I O N III.

XV. *Les forces requises, sont les forces nécessaires pour produire les changemens dans l'état, ou de repos, ou de mouvement, où l'eau se trouve.*

Car, entant que les particules d'eau changent d'état, ou que leur mouvement n'est pas uniforme, & en ligne droite, il faut une certaine force, qui soit capable de produire ce changement, & toutes ces forces prises ensemble, ou bien la force qui leur est équivalente, sont ce que je nomme ici forces requises, puisqu'elles sont requises pour le maintien du mouvement.



C O R O L L. I.

XVI. Si l'eau avec le vaisseau est en repos, puisque l'état du repos se conserve par l'inertie de chaque corps, les forces requises évanouiront dans ce cas : & la même chose arrivera, lorsque le mouvement de l'eau est tel, que toutes ses particules se meuvent uniformément en lignes droites ; car la conservation d'un tel mouvement n'exige point de forces.

C O R O L L. 2.

XVII. Or si les particules d'eau ne sont pas portées, ni d'un mouvement uniforme, ni en ligne droite ; ou bien lorsque, ou la direction, ou toutes les deux changent : ce changement exige nécessairement une certaine force, qu'on pourra déterminer sachant le changement ; & toutes ces forces prises ensemble constituent les forces requises, que je viens de définir.

C O R O L L. 3.

XVIII. Si une particule d'eau, dont la masse soit $= m$, se meut en ligne droite avec une vitesse variable u , de sorte que sa vitesse étant à présent $= u$, devienne $u + du$, pendant le tems infiniment petit dt ; on fait que cette accélération demande une force $= \frac{2m du}{dt}$, qui agisse sur la particule suivant la direction de son mouvement. Ou bien, posant l'espace parcouru dans le tems dt , $= ds$, à cause de $u = \frac{ds}{dt}$, cette force sera $= \frac{2m}{dt} d. \frac{ds}{dt} = \frac{2m dds}{dt^2}$ en prenant le différentiel dt constant.

C O R O L L. 4.

XIX. Si la particule d'eau ne se meut, ni uniformément, ni en ligne droite, & que son mouvement ne se fasse pas même dans un plan, on décomposera ce mouvement suivant trois directions fixes. Soit l'espace qu'il parcourt dans le tems dt par le premier de ces mouvemens $= dx$, par le second $= dy$, & par le troisième $= dz$, & prenant le



différentiel dt constant, ce mouvement demande trois forces, qui sollicitent la particule m suivant ces mêmes trois directions : savoir la première force fera $= \frac{2m ddx}{dt^2}$, la seconde $= \frac{2m ddy}{dt^2}$, & la troisième $= \frac{2m ddz}{dt^2}$.

S C H O L I E.

XX. Tout cela est clair par les premiers principes de la Mécanique & de l'action des forces sur les corps ; par lesquels on fait que l'accélération, ou le différentiel de la vitesse divisé par le différentiel du tems, est proportionnel à la force sollicitante divisée par la masse du corps : donc la force sollicitante est proportionnelle au produit de la masse par le différentiel de la vitesse, divisé par le différentiel du tems, ou bien à $\frac{m du}{dt}$. On pourra donc poser la force sollicitante $= \frac{a m du}{dt}$, où a marque un certain coefficient constant, qui dépend de la manière dont on veut exprimer tant la masse que la vitesse & le tems. Or, si nous exprimons la masse par le poids qu'elle auroit à la surface de la terre, la vitesse par la racine quarrée de la hauteur, de laquelle un corps tombant acquiert la même vitesse, & le tems dans le mouvement uniforme par l'espace parcouru divisé par la vitesse, on verra que le nombre 2 donnera la juste valeur du coefficient a . Car on n'a qu'à appliquer la formule générale au cas, où le corps grave m tombe librement : que dans le tems il soit déjà descendu par la hauteur $= x$, sa vitesse u fera donc $= \sqrt{x}$, avec laquelle il parcourra l'espace dx dans le tems $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, puisque le mouvement par l'espace infiniment petit dx peut être regardé comme uniforme. Ayant donc $u = \sqrt{x}$, il fera $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} dt$, & partant $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$. Donc, en vertu de notre formule générale $\frac{a m du}{dt}$, la force sollicitante fera $= \frac{1}{2} a m$: or

la



la force sollicitante est dans ce cas égale à la pesanteur du corps, ou bien à sa masse $\equiv m$; d'où il est clair, que pour qu'il devienne $\frac{1}{2} \alpha m \equiv m$; il faut qu'il soit $\alpha \equiv 2$. Et cette valeur conviendra à α , tant que nous conservons la même manière d'introduire dans le calcul les masses, les vitesses, & les tems.

T H E O R E M E I.

XXI. *Soit que le vaisseau avec l'eau soit en repos, ou que l'un & l'autre se trouvent dans un mouvement quelconque, la réaction de l'eau est égale aux forces actuelles, moins les forces requises.*

D E M O N S T R A T I O N.

Soit nommée la réaction de l'eau $\equiv R$, les forces actuelles prises ensemble $\equiv P$, & les forces requises pour l'entretien du mouvement de l'eau $\equiv Q$. L'eau sera donc sollicitée premièrement par la force P , & ensuite par une force égale & contraire à la réaction R , ou bien par une force $\equiv -R$, donc toutes les forces, dont l'eau est effectivement sollicitée, seront $\equiv P - R$. Il faut donc que tous les changemens, que subit l'eau dans le vaisseau, soient produits par cette force $P - R$: or Q comprend les forces requises pour opérer ces changemens, d'où il s'ensuit que $P - R \equiv Q$, & partant $P - Q \equiv R$, c'est à dire la réaction est égale aux forces actuelles, moins les forces requises. C. Q. F. D.

C O R O L L. I.

XXII. Puisque la réaction R agit sur le vaisseau, il faut aussi concevoir les forces P & Q comme appliquées au vaisseau. Le vaisseau soutiendra donc deux forces, une qui convient avec les forces actuelles, & à cause de $-Q$ l'autre est égale, mais contraire, aux forces requises.

C O R O L L. 2.

XXIII. Parce que nous venons de trouver $P \equiv Q + R$, nous voyons que les forces actuelles se partagent en deux parties Q ,
G g 2
& R,



& R, dont l'une est employée à produire les changemens, qui arrivent dans l'état de l'eau, & l'autre est employée à agir sur le vaisseau même, qui est la réaction. D'où l'on voit, que la réaction n'existe, qu'entant que toute la force actuelle n'est pas employée à agir sur l'eau; ce qui rend l'énoncé du Theoreme encore plus évident. Car on comprend aisément, que le vaisseau même ne sauroit soutenir que cette partie de la force actuelle, qui n'est pas employée à agir sur les particules de l'eau.

C O R O L L. 3.

XXIV. Donc, si l'on connoit premièrement les forces actuelles, par lesquelles l'eau est sollicitée, & ensuite les forces requises au mouvement de l'eau, on en pourra déterminer la force de la réaction, dont l'eau agit sur le vaisseau. Or les forces actuelles sont connues d'elles-mêmes en chaque cas, & les forces requises peuvent être déterminées en regardant le mouvement de l'eau comme connu.

C O R O L L. 4.

XXV. Si l'eau avec le vaisseau n'a aucun mouvement, ou qu'elle demeure en repos, puisque la conservation de cet état n'exige point de forces, les forces requises Q seront $= 0$, & le vaisseau soutiendra toutes les forces actuelles, par lesquelles l'eau est sollicitée: ou bien le vaisseau sera sollicité tant par le poids de l'eau tout entier, que par les forces des pistons, s'il y en a, qui pressent sur l'eau.

C O R O L L. 5.

XXVI. La même chose arrivera, lorsque toutes les parties de l'eau se meuvent uniformément en ligne droite. Ce cas aura lieu, lorsque l'eau coule uniformément par un tuyau droit, & alors le tuyau soutiendra outre le poids de l'eau les forces, dont l'eau est poussée par des pistons.

C O R O L L. 6.

XXVII. Or, lorsque toutes les forces actuelles sont employées au mouvement de l'eau, ce qui arrive quand l'eau tombe librement
d'un



d'un vaisseau cylindrique vertical, qui n'a point de fonds, l'eau tombant dans ce cas librement comme un corps solide, toute sa pesanteur est employée à accélérer son mouvement, & partant il ne reste rien pour la réaction, ou bien ce vaisseau ne souffrira rien de la part de l'eau.

S C H O L I E.

XXVIII. Comme cette matiere seroit presque inépuisable, vu la diversité infinie, qui peut avoir lieu tant à l'égard de la figure des tuyaux, par lesquels l'eau coule, que par rapport au mouvement des tuyaux & de l'eau même, pour ne pas m'étendre trop, je bornerai mes recherches à des tuyaux, qui sont mobiles autour d'un axe fixe. Ainsi je passerai les cas plus simples, où les tuyaux seroient, ou en repos, ou dans un mouvement progressif, puisque ces cas sont déjà assez suffisamment traités; & j'omettrai les cas plus compliqués, où les tuyaux seroient susceptibles d'un mouvement irrégulier, ni progressif, ni rotatoire, puisque ces cas meneroient à des calculs trop embarrassans. Mais je suis obligé d'apporter aux cas, que je me propose de développer ici, une limitation, sans laquelle le calcul deviendroit insurmontable; j'envisagerai les tuyaux comme infiniment étroits, afin que tous les points de l'eau, qui se trouvent dans la même section faite perpendiculairement à la direction du tuyau, puissent être regardés avoir le même mouvement; cependant on verra que cette restriction n'affecte presque que le calcul, & que les conclusions peuvent subsister, quand même la largeur du tuyau seroit assez considérable. Néanmoins il sera nécessaire, que cette largeur soit très petite à l'égard de sa distance à l'axe de rotation, puisque d'ailleurs le mouvement de rotation des particules d'eau, qui se trouvent dans la même section du tuyau, seroit trop inégal, pour qu'il pût être regardé comme le même par toute la section.

D E F I N I T I O N IV.

XXIX. *Le mouvement de l'eau dans le tuyau est le mouvement respectif de l'eau, par lequel elle avance d'un endroit du tuyau à un autre.*



De là on comprend aussi, ce que c'est que la vitesse respective de l'eau dans le tuyau, & celle dont l'eau sort du tuyau, qu'il faut bien distinguer de la vitesse vraie de l'eau lorsque le tuyau a lui-même quelque mouvement.

C O R O L L. I.

XXX. Si le tuyau est en repos, le vrai mouvement de l'eau n'est pas différent de son mouvement respectif à l'égard du tuyau; dans ce cas donc il seroit superflu de distinguer ces deux mouvemens, & la vitesse respective dont l'eau échape du tuyau, convient avec la vitesse vraie.

C O R O L L. 2.

XXXI. Or, lorsque le tuyau a un mouvement quelconque, la vitesse vraie de l'eau est différente de la vitesse respective à l'égard du tuyau. On fait par les principes de la Mécanique, que le mouvement vrai de l'eau est composé de son mouvement respectif & du mouvement du tuyau même; & de là on pourra toujours trouver le mouvement vrai de l'eau en sachant son mouvement respectif avec le mouvement du tuyau.

C O R O L L. 3.

XXXII. Puisque nous supposons, que dans la même section du tuyau toutes les particules de l'eau se meuvent également, si l'on connoit la vitesse respective de l'eau dans une section quelconque du tuyau, on en connoitra la vitesse respective pour toutes les autres sections au même instant, ces vitesses étant entr'elles réciproquement comme les amplitudes du tuyau.

C O R O L L. 4.

XXXIII. On commencera donc par chercher la vitesse respective de l'eau pour une section donnée du tuyau, & de là on tirera aisément la vitesse respective dans toutes les autres sections, la figure du tuyau étant connue. Or ayant trouvé la vitesse respective de l'eau, pour une section quelconque du tuyau, quand on fait le mouvement du tuyau à cet endroit, on pourra déterminer le vrai mouvement, dont l'eau dans cette section est portée.



S C H O L I E.

XXXIV. Cela remarqué, si nous supposons, pour un instant quelconque, comme connus le mouvement du tuyau, & le mouvement respectif de l'eau dans le tuyau, pour une section quelconque, nous en pourrons déterminer, tant le mouvement respectif à toutes les autres sections, que le mouvement vray. Or, pour juger des forces requises au mouvement de l'eau, & quel effet chaque force est capable d'y produire, il faut avoir égard au vray mouvement de l'eau, puisque les principes de la Mécanique, dont on doit se servir, sont établis sur le vray mouvement. Il est donc absolument nécessaire de commencer par la détermination du vray mouvement de l'eau; son mouvement respectif avec le mouvement du tuyau étant connu. Ce sera le sujet du premier problème, dont je m'en vais chercher la solution.

P R O B L E M E I.

XXXV. *Supposé que le tuyau tourne d'une vitesse donnée autour d'un axe fixe, & que la vitesse respective de l'eau dans une section du tuyau soit donnée, trouver tant le mouvement respectif que le vray de l'eau dans une autre section quelconque du tuyau.* Fig. 1.

S O L U T I O N.

Que la ligne AC représente l'axe, autour duquel le tuyau EMF tourne, & que cet axe soit perpendiculaire au plan de la planche en C, & que la section du tuyau F se trouve dans ce plan. Soit l'amplitude de cette section $F = ff$, par laquelle l'eau découle avec la vitesse $= Vv$, ou due à la hauteur v , & ce soit la vitesse respective de l'eau, dont elle sort ou se meut à cet endroit du tuyau; qui est supposée être donnée. Soit de plus Vu la vitesse dont le point F du tuyau tourne autour de l'axe AC, & par ce mouvement le point F décrira la périphérie d'un cercle dans le plan représenté par celui de la planche, dont le centre sera le point C, & la droite CF le rayon. Soit donc la distance du point F à l'axe de rotation, ou la droite $CF = b$.

Cela



Cela posé, considérons une section quelconque du tuyau M, & qu'on baiffe du point M au plan de la planche la perpendiculaire MQ, & du point Q sur ce plan à la droite CF la normale PQ; de sorte que le lieu du point M soit déterminé par les trois coordonnées CP, PQ, & QM normales entr'elles, qui soient nommées $CP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Soit de plus l'amplitude du tuyau en $M = rr$, dont la quantité fera donnée par les coordonnées x , y , & z , de même qu'on connoitra le rapport entre x , y , & z , puisque tant la figure que l'amplitude du tuyau est supposée être connue. La vitesse respective de l'eau dans la section du tuyau en M fera donc $= \frac{ffVv}{rr}$, & sa direction suivant celle du tuyau Mm . De plus, posant pour abrégier $CQ = V(xx + yy) = q$, cette ligne marquera la distance du point M à l'axe AC à cause de $MN = CQ$, donc la vitesse rotatoire du point M fera $= \frac{qVu}{b}$, étant à celle du point F, comme $MN = q$ à $CF = b$, & tirant Qq perpendiculaire à CQ dans le plan de la planche, la direction de cette vitesse fera parallèle à Qq .

Maintenant, puisque le mouvement vrai de l'eau en M est composé de son mouvement respectif & du mouvement du point M, si nous posons l'angle, que fait la direction du tuyau en M, ou l'élément Mm , avec la direction du mouvement du point M, $= \theta$, la vitesse vraie de l'eau en M fera $= V\left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qq u}{bb} + \frac{2ffqVvu}{brr} \cos\theta\right)$, comme on s'en assurera aisément par les règles de la composition du mouvement.

Or, pour connoître la direction de ce mouvement, il conviendra de le décomposer suivant les directions des coordonnées CP, PQ, & QM; pour cet effet nommant l'élément du tuyau $Mm = ds$, le mouvement respectif de l'eau en M se réduira à ces trois vitesses :



$$\text{I. Vitesse felon CP} = \frac{ff dx Vv}{rr ds};$$

$$\text{II. Vitesse felon PQ} = \frac{ff dy Vv}{rr ds};$$

$$\text{III. Vitesse felon QM} = \frac{ff dz Vv}{rr ds};$$

& on aura $ds = V(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Mais les deux premières vitesses se reduisent à deux autres suivant les directions CQ , & Qq , & on aura

$$\text{la vitesse felon } CQ = \frac{ff x dx Vv}{qrr ds} + \frac{ff y dy Vv}{qrr ds} = \frac{ff dq Vv}{rr ds},$$

$$\text{la vitesse felon } Cq = \frac{ff x dy Vv}{qrr ds} - \frac{ff y dx Vv}{qrr ds} = \frac{ff(xdy - ydx)Vv}{qrr ds}.$$

On n'aura donc qu'à ajouter à cette dernière vitesse celle du tuyau en M , qui est suivant la direction $Qq = \frac{qVu}{b}$, pour avoir le vrai mouvement de l'eau en M .

Ainsi le vrai mouvement de l'eau en M fera composé de ces trois vitesses :

$$\text{I. suivant } CQ = \frac{ff dq Vv}{rr ds};$$

$$\text{II. suivant } Qq = \frac{ff(xdy - ydx)Vv}{qrr ds} + \frac{qVu}{b};$$

$$\text{III. suivant } QM = \frac{ff dz Vv}{rr ds}.$$

De là on tirera encore la vitesse totale de ce mouvement, qui à cause de $q = V(xx + yy)$, & $ds = V(dx^2 + dy^2 + dz^2)$



fera $= V \left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qqu}{bb} + \frac{2ff(xdy-ydx)Vvu}{brrds} \right)$, qui étant la même avec $V \left(\frac{f^4 v}{r^4} + \frac{qqu}{bb} + \frac{2ffqVvu}{brr} \cos \theta \right)$, on voit que $\frac{x dy - y dx}{q ds} = \cos \theta$.

Par conséquent le vray mouvement de l'eau en M est composé de ces trois vitesses :

$$\text{I. suivant } CQ = \frac{ffdqVv}{rrds};$$

$$\text{II. suivant } Qq = \frac{ffVv}{rr} \cos \theta + \frac{qVu}{b};$$

$$\text{III. suivant } QM = \frac{ffdzVv}{rrds}.$$

C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

XXXVI. C'est donc le vray mouvement de l'eau, qui occupe la section du tuyau M à l'instant, où nous supposons, que la vitesse respective de l'eau par la section F $= ff$ est $= Vv$, & que la vitesse, dont le point F du tuyau tourne autour de l'axe AC, est $= Vu$. Et par ces formules on déterminera le vray mouvement de l'eau, dans chaque section du tuyau.

C O R O L L. 2.

XXXVII. Puisque les trois directions CQ, Qq, & QM, sont perpendiculaires entr'elles, les vitesses selon chacune auroient pû être trouvées immédiatement du mouvement respectif de l'eau en M, & du mouvement du point du tuyau M même, sans qu'on auroit eu besoin de la composition suivant les ordonnées CP, & CQ. Car la vitesse respective selon Mm est à chacune des vitesses décomposées, comme le sinus total au cosinus de l'angle, dont l'élément Mm est incliné à chacune de ces trois directions.



C O R O L L. 3.

XXXVIII. Puisque l'élément Mm fait avec la direction QM un angle dont le cosinus est $\frac{dz}{ds}$, le mouvement respectif selon Mm , dont la vitesse $= \frac{ffVv}{rr}$ donne pour la direction QM la vitesse $= \frac{ffdzVv}{rrds}$. Ensuite l'élément Mm faisant avec la direction $CQ = q$ un angle dont le cosinus est $= \frac{dq}{ds}$, la vitesse selon cette direction sera $= \frac{ffdqVv}{rrds}$. Enfin l'angle de l'élément Mm avec la direction Qq étant nommé $= \theta$, la vitesse selon cette direction sera $= \frac{ffVv}{rr} \cos \theta$, à laquelle il faut ajouter la vitesse du point du tuyau $M = \frac{qVu}{b}$, pour avoir le vrai mouvement de l'eau dans la section M du tuyau.

C O R O L L. 4.

XXXIX. L'angle θ , que je viens d'introduire dans le calcul, est très propre à rendre nos formules plus simples; & comme il renferme des différentiels, il nous épargnera dans la suite les différentiels du second degré. Au reste il est aisé de trouver l'égalité $\cos \theta = \frac{xdy - ydx}{qds}$ par une pure considération géométrique; mais pour ne pas trop charger la figure, je me suis contenté de l'avoir dérivée de la considération mécanique; sur tout puisqu'il est permis dans ces recherches de supposer les propriétés de Géométrie comme connues.

C O R O L L. 5.

XL. Il fera aussi à propos d'introduire dans le calcul l'angle FCQ . Or posant cet angle $FCQ = \omega$, nous aurons



$\sin \omega = \frac{y}{q}$, $\cos \omega = \frac{x}{q}$, & $\tan \omega = \frac{y}{x}$; d'où nous tirerons

$$d\omega = \frac{x dy - y dx}{xx + yy} = \frac{x dy - y dx}{qq}, \quad \& \text{ de là nous obtiendrons}$$

$\cos \theta = \frac{q d\omega}{ds}$. Or il est clair que $q d\omega$ exprime le différentiel Qq , qui

étant divisé par $Mm = ds$ donne ouvertement le cosinus de l'angle, que

font entr'eux les élémens Mm & Qq . Voilà donc une démonstration géométrique de la formule $\cos \theta = \frac{x dy - y dx}{q ds}$.

C O R O L L. 6.

XLI. Puisque pour la section F il devient $rr = ff$, & $q = b$, si nous posons l'angle que fait la direction du mouvement respectif de l'eau, qui sort par F , avec la direction du mouvement du point $F = \zeta$, de sorte que ζ soit la valeur de θ pour la section F , la vraie vitesse de l'eau dans la section F sera $= V(v + u + 2 \cos \zeta \cdot Vvu)$. Ainsi si l'angle ζ évanouit, cette vitesse sera $= Vv + Vu$ à cause de $\cos \zeta = 1$: or si l'angle ζ est égal à deux angles droits à cause de $\cos \zeta = -1$, cette vitesse sera $= Vv - Vu$.

S C H O L I E.

XLII. Il est évident, que dans la solution de ce problème l'amplitude du tuyau a été regardée comme infiniment petite à l'égard de la distance de chaque point du tuyau à l'axe de rotation AC . D'où l'on voit que la détermination du mouvement, que nous venons de trouver, ne sauroit avoir lieu dans la Pratique, à moins que cette condition ne soit observée, du moins à peu près. Par cette raison le tuyau doit partout être fort mince, & ensuite il doit partout être si éloigné de l'axe de rotation AC , que la raison de r à q , ou bien de rr à qq , soit très petite. Cependant on verra par la suite, que cette condition n'affecte pas sensiblement les conclusions que nous trouverons. Or ayant déterminé le vrai mouvement de chaque particule d'eau pour

l'in-



l'instant présent, il sera aisé de le déterminer aussi pour l'instant suivant, & la comparaison de ces deux mouvemens nous donnera à connoître l'accélération, ou la retardation de chaque particule, d'où nous pourrons ensuite conclure les forces requises à la production du changement, s'il y en a un dans le mouvement; cette recherche fera le sujet du problème suivant.

P R O B L E M E II.

XLIII. *Tant le mouvement respectif de l'eau dans le tuyau, que le mouvement du tuyau même, étant altéré d'une manière quelconque, trouver le changement que souffrira chaque particule d'eau dans son mouvement, & les forces requises à produire ce changement.*

S O L U T I O N.

Qu'après un tems écoulé quelconque $= t$, le tuyau ait achevé par son mouvement de rotation l'angle $BCF = \Phi$, de sorte qu'au commencement de ce tems le bout du tuyau F ait été en B , qui se trouve à l'instant présent en F , & que la vitesse du point F , dont il tourne à présent autour du point C soit $= Vu$, & la vitesse respective, dont l'eau passe par la section F , $= Vv$; & soit de plus comme nous avons supposé dans le problème précédent, la distance $CF = b$, & l'amplitude de la section $F = ff$; c'est de là que nous avons déterminé dans le problème précédent le vrai mouvement de chaque particule d'eau en M , que nous avons réduit à ces trois vitesses :

$$\text{I. Suivant } CQ = \frac{ffdqVv}{rrds};$$

$$\text{II. Suivant } QM = \frac{ffdzVv}{rrds};$$

$$\text{III. Suivant } Qq = \frac{ffVv}{rr} \cos \theta + \frac{qVu}{b}.$$

Mais supposons maintenant, que pendant le tems infiniment petit dt les vitesses Vv & Vu croissent de leurs différentiels, & que pendant



ce même instant dt l'eau qui étoit en M parvienne dans le tuyau en m , le tuyau étant cependant lui-même transporté par son mouvement de rotation. Cela posé, il est clair que nous n'aurons qu'à différentier les formules trouvées pour avoir les accélérations. Mais puisque les directions CQ & Qq ne sont pas fixes, il convient de les réduire à des directions fixes.

Pour cet effet, qu'on tire du point Q à la droite fixe la perpendiculaire QX , & soient pour le point M les trois coordonnées $CX = X$, $XQ = Y$, & comme auparavant $QM = z$. Maintenant posant la masse d'eau en $M = m$, nous aurons trois forces requises à son mouvement :

$$\text{I. une force suivant } CX = \frac{2m d dX}{dt^2};$$

$$\text{II. une force suivant } XQ = \frac{2m d dY}{dt^2};$$

$$\text{III. une force suivant } QM = \frac{2m d d z}{dt^2};$$

posant l'élément du tems dt constant : & les vitesses suivant ces directions seront $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, & $\frac{dz}{dt}$.

Or, puisque l'angle $BCF = \phi$, si nous posons l'angle $FCQ = \omega$, à cause de $CQ = q$, & l'angle $BCQ = \phi + \omega$, nous aurons
 $X = q \cos(\phi + \omega)$, & $Y = q \sin(\phi + \omega)$.

Mais les deux forces suivant CX , & XQ , se réduisent à deux autres selon :

$$CQ = \frac{2m d dX}{dt^2} \cos(\phi + \omega) + \frac{2m d dY}{dt^2} \sin(\phi + \omega) = \frac{2m}{dt^2} [d dX \cos(\phi + \omega) + d dY \sin(\phi + \omega)]$$

&

$$Qq = \frac{2m d dY}{dt^2} \cos(\phi + \omega) - \frac{2m d dX}{dt^2} \sin(\phi + \omega) = \frac{2m}{dt^2} [d dY \cos(\phi + \omega) - d dX \sin(\phi + \omega)]$$

Or

Or les valeurs de X & Y fournissent :

$$X \cos(\phi + \omega) + Y \sin(\phi + \omega) = q, \quad \& \quad Y \cos(\phi + \omega) - X \sin(\phi + \omega) = 0,$$

d'où nous tirons en différentiant :

$$dX \cos(\phi + \omega) + dY \sin(\phi + \omega) = dq, \quad \& \quad dY \cos(\phi + \omega) - dX \sin(\phi + \omega) = q(d\phi + d\omega),$$

& en différentiant encore :

$$ddX \cos(\phi + \omega) + ddY \sin(\phi + \omega) = ddq - q(d\phi + d\omega)^2,$$

$$ddY \cos(\phi + \omega) - ddX \sin(\phi + \omega) = 2dq(d\phi + d\omega) + q(dd\phi + dd\omega).$$

De là donc les trois forces requises pour le mouvement de la particule m feront :

I. Selon CQ $= \frac{2m}{dt^2} [ddq - q(d\phi + d\omega)^2] ;$

II. Selon Qq $= \frac{2m}{dt^2} [2dq(d\phi + d\omega) + q(dd\phi + dd\omega)] ;$

III. Selon QM $= \frac{2m ddz}{dt^2} ;$

& ces directions conviennent avec celles des vitesses, que nous avons assignées cy-dessus. Maintenant pour le mouvement rotatoire du tuyau, l'arc BF étant $= b\phi$, & la vitesse en F $= Vu$, nous aurons $\frac{bd\phi}{Vu} = dt$: ensuite la vitesse respective de l'eau en M étant $= \frac{ffVu}{rr}$,

& l'élément $M\bar{m} = ds$, nous aurons aussi $\frac{rr ds}{ffVu} = dt$, & partant

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{Vu}{b}; \quad \frac{ds}{dt} = \frac{ffVu}{rr}, \quad \& \quad \text{puisque} \quad d\omega = \frac{ds \cos\theta}{q}, \quad \text{encore}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{ff \cos\theta}{qrr} Vu. \quad \text{Par conséquent} \quad \frac{dd\phi}{dt} = \frac{du}{2bVu}; \quad \&$$

$$\frac{dd\omega}{dt} = \frac{ff dv \cos\theta}{2qrrVu} + ffVu \cdot d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr}.$$

Ces



Ces valeurs étant substituées, les trois forces requises seront :

$$\text{I. Selon } CQ = 2m \left(\frac{r}{dt} d. \frac{dq}{dt} - q \left[\frac{Vu}{b} + \frac{ff \cos \theta}{qrr} Vv \right]^2 \right)$$

$$\text{II. Selon } Qq = 2m \left(\frac{2dq}{dt} \left[\frac{Vu}{b} + \frac{ff \cos \theta}{qrr} Vv \right] + \frac{q du}{2 b dt Vu} + \frac{ff dv \cos \theta}{2 r r dt Vv} + \frac{ff q Vv}{dt} d. \frac{\cos \theta}{qrr} \right)$$

$$\text{III. Selon } QM = \frac{2m}{dt} d. \frac{dz}{dt}.$$

où il ne s'agit plus, quel différentiel a été supposé constant. C.Q.F.T.

C O R O L L. I.

XLIV. Nous avons ici deux sortes de quantités variables à distinguer ; les unes dépendent de la figure du tuyau, & de l'endroit où le point M est pris, ces quantités sont q , rr , & l'angle θ , & leurs différentiels auront un rapport connu tant entr'eux qu'avec le différentiel ds . Les autres quantités dépendent uniquement du tems déjà écoulé t , & sont, les vitesses Vv & Vu , qu'on doit regarder comme des fonctions de t , & partant $\frac{dv}{dt}$ & $\frac{du}{dt}$ seront des quantités déterminées, & aussi fonctions du tems t .

C O R O L L. 2.

XLV. Quoique le mouvement élémentaire nous découvre le rapport entre les différentiels ds & dt , par lequel nous avons $dt = \frac{rr ds}{ff Vv}$, il est pourtant nécessaire pour la suite de ne comparer ces divers différentiels qu'avec ceux du même genre. Ainsi les rapports $\frac{dq}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ n'ayant point cette forme, j'y substitue au lieu de dt sa valeur $\frac{rr ds}{ff Vv}$ pour avoir $\frac{dq}{dt} = \frac{ff dq Vv}{rr ds}$ & $\frac{dz}{dt} = \frac{ff dz Vv}{rr ds}$, où les rapports $\frac{dq}{ds}$ & $\frac{dz}{ds}$ sont déterminés par la forme du tuyau seulement.

C O R O L L. 3.

XLVI. Représentons donc dans chaque terme ces diverses quantités distinctement, & nous aurons :

$$\frac{dq}{dt} = ffVv \cdot \frac{dq}{rrds}, \quad \& \quad \frac{dz}{dt} = ffVv \cdot \frac{dz}{rrds},$$

dont les différentiels exprimés de la même manière seront :

$$d \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{ffdv}{2Vv} \cdot \frac{dq}{rrds} + ffVv \cdot d \cdot \frac{dq}{rrds};$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{ffdv}{2Vv} \cdot \frac{dz}{rrds} + ffVv \cdot d \cdot \frac{dz}{rrds};$$

& puisque les différentiels $d \cdot \frac{dq}{rrds}$, $d \cdot \frac{dz}{rrds}$ de même que $d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr}$, ne sont pas commensurables à dt , il y faut mettre pour dt la valeur $\frac{rrds}{ffVv}$ pour avoir :

$$\frac{1}{dt} d \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{ffdv}{2dtVv} \cdot \frac{dq}{rrds} + \frac{f^4v}{rrds} \cdot d \cdot \frac{dq}{rrds};$$

$$\frac{1}{dt} d \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{ffdv}{2dtVv} \cdot \frac{dz}{rrds} + \frac{f^4v}{rrds} \cdot d \cdot \frac{dz}{rrds};$$

$$\frac{ffVv}{dt} d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr} = \frac{f^4v}{rrds} \cdot d \cdot \frac{\cos\theta}{qrr}.$$

C O R O L L. 4.

XLVII. Si nous exprimons enforte les trois forces requises trouvées, nous les obtiendrons représentées de la manière suivante:

$$I. \text{ Force selon } CQ = 2m \left(\frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ffdq}{rrds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{dq}{rrds} - u \cdot \frac{q}{bb} - v \cdot \frac{f^4 \cos^2 \theta}{qr^4} - 2Vvu \cdot \frac{ff \cos \theta}{rr} \right)$$

$$II. \text{ Force selon } Qq = 2m \left(\frac{du}{2dtVu} \cdot \frac{q}{b} + \frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ff \cos \theta}{rr} + v \cdot \frac{2f^4 dq \cos \theta}{qr^4 ds} + v \cdot \frac{f^4 q}{rrds} d \cdot \frac{c \cos \theta}{qrr} + 2Vvu \cdot \frac{ff \cdot dq}{brrds} \right)$$

$$III. \text{ Force selon } QM = 2m \left(\frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ff dz}{rrds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{dz}{rrds} \right)$$

où chaque terme est résolu en deux facteurs, dont le premier dépend uniquement du tems t , & l'autre uniquement de la forme du tuyau.

C O R O L L. 5.

XLVIII. Puisque $d \cdot \frac{\cos \theta}{qrr} = -\frac{dq \cos \theta}{qqrr} + \frac{1}{q} d \cdot \frac{\cos \theta}{rr}$, la seconde force selon la direction Qq sera exprimée par cette formule:

$$II. \text{ Force selon } Qq = 2m \left(\frac{du}{2dtVu} \cdot \frac{q}{b} + \frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ff \cos \theta}{rr} + v \cdot \frac{f^4 dq \cos \theta}{qr^4 ds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{c \cos \theta}{rr} + 2Vvu \cdot \frac{ff dq}{brrds} \right)$$

Or on voit que cette seule force fournit un moment à l'égard de l'axe de rotation AC.

P R O B L E M E III.

XLIX. *Trouver le moment total, que produisent toutes les forces requises pour altérer le mouvement de rotation du tuyau.*

S O L U T I O N.

Supposant toutes les dénominations, dont nous nous sommes servis dans le problème précédent, nous avons trouvé les trois forces requises, que le mouvement de chaque particule d'eau exige, selon les trois directions CQ , Qq , & QM ; or il est évident que les deux forces selon CQ & QM ne contribuent rien à altérer le mouvement de rotation du tuyau, puisque leurs directions, ou passent par l'axe de rota-

rotation, ou lui sont parallèles. Il ne reste donc qu'à considérer la force selon Qq ; qui étant multipliée par la longueur du levier $CQ = q$ produit un moment à accélérer le mouvement de rotation, qui est supposé se faire dans le sens BF . Donc une particule d'eau quelconque, qui se trouve dans la section M du tuyau, dont la masse est supposée $= m$, fournit le moment suivant :

$$2m \left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} \cdot \frac{qq}{b} + \frac{dv}{2dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ffq \cos\theta}{rr} + v \cdot \frac{f^4 dq \cos\theta}{r^4 ds} + v \cdot \frac{f^4 q}{rr ds} \cdot d \cdot \frac{\cos\theta}{rr} + 2Vvu \cdot \frac{ffq dq}{brr ds} \right).$$

Il s'agit donc de chercher la somme de tous ces momens, qui répond à toute la masse d'eau contenuë dans le tuyau. Pour cet effet prenons m pour désigner la quantité élémentaire de l'eau, qui occupe l'espace du tuyau Mm . Cet espace étant un cylindre de la base $= rr$, & de la longueur $Mm = ds$, la masse de l'eau, qui y est contenuë, est $= rr ds$, & partant posant $m = rr ds$, le moment accélérateur, qui répond à cet élément d'eau, sera :

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \frac{qqrr ds}{b} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot ffq ds \cos\theta + 2v \cdot \frac{f^4 dq \cos\theta}{rr} + 2v \cdot f^4 q d \cdot \frac{\cos\theta}{rr} + 4Vvu \cdot \frac{ffq dq}{b}.$$

Puisqu'il faut chercher la somme de tous ces momens pour l'instant present, l'intégration doit être instituée en sorte, qu'on regarde toutes les quantités, qui dépendent du tems t , comme constantes: telles sont v , u , $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$, & $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$, que nous avons soigneusement

séparées des autres quantités, qui sont variables avec le point M , & qui dépendent de la figure du tuyau. L'intégrale de cette formule fera donc

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qqrr ds}{b} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int ffq ds \cos\theta + 2v \cdot \int \frac{f^4 dq \cos\theta}{rr} + 2v \int f^4 q d \cdot \frac{\cos\theta}{rr} + 2Vvu \cdot \frac{ffq}{b} + \text{Const.}$$

Or il est évident que $\int f^4 q d \cdot \frac{\cos\theta}{rr} = \frac{f^4 q \cos\theta}{rr} = \int \frac{f^4 dq \cos\theta}{rr}$; cer-



te valeur étant donc substituée, l'intégrale se réduira à cette forme :

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qqrrds}{b} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int ffqds \cos\theta + 2v \cdot \frac{f^2 q \cos\theta}{rr} + 2Vvu \cdot \frac{ffqq}{b} + \text{Const.}$$

Pour accommoder cette intégrale à toute la quantité d'eau contenue dans le tuyau, soit à l'instant présent le tuyau rempli jusqu'en E ; que la largeur du tuyau en E soit = ee , la distance du point E à l'axe ou $EA = c$; & que la direction du tuyau en E fasse avec la direction du mouvement de rotation du point E un angle = ϵ ; & que les intégrales $\int \frac{qqrrds}{b}$ & $\int ffqds \cos\theta$ commencent du point E. Cela

posé, le moment, qui résulte de la quantité d'eau contenuë dans la portion du tuyau EM, puisque au point E il devient $q = c$; $rr = ee$ & $\theta = \epsilon$, fera

$$\frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qqrrds}{b} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int ffqds \cos\theta + 2v \left(\frac{f^2 q \cos\theta}{rr} - \frac{f^2 c \cos\epsilon}{ee} \right) + 2Vvu \cdot \left(\frac{ffqq}{b} - \frac{ffcc}{b} \right).$$

Qu'on étende maintenant cette intégrale par toute la longueur du tuyau depuis E jusqu'en F, où devient $q = b$; $rr = ff$, & $\theta = \zeta$ posant ζ pour l'angle que la direction du tuyau en F fait avec l'arc FB ; & soient pour le tuyau tout entier les valeurs intégrales :

$$\int \frac{qqrrds}{b} = M \quad \& \quad \int ffqds \cos\theta = N$$

Cela posé, le moment total de toutes les forces requises, qui tend à accélérer le mouvement rotatoire du tuyau, fera :

$$\frac{M du}{dt\sqrt{u}} + \frac{N dv}{dt\sqrt{v}} + 2ff(b \cos\zeta - \frac{c ff}{ee} \cos\epsilon)v + \frac{2ff}{b}(bb - cc)Vvu$$

C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

L. Si tant le mouvement rotatoire du tuyau, que le mouvement respectif de l'eau, dont elle sort par l'ouverture F est uniforme, de sorte que $\frac{du}{dt\sqrt{u}} = 0$ & $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} = 0$, le moment des forces requises deviendra :



$$2ff(b \cos \zeta - \frac{c}{e} \cos \epsilon) v + 2ff(b - \frac{c}{b}) V u$$

Ce moment dépend donc premièrement des deux vitesses Vv & Vu , en sorte que plus ces vitesses feront grandes, plus aussi deviendra grand le moment.

C O R O L L. 2.

Ll. Ensuite, par rapport à la figure du tuyau, ce même moment dépend premièrement des quantités b , ff , & ζ , qui se rapportent à l'ouverture F, & ensuite des quantités c , ee , & ϵ , qui se rapportent à l'autre section E du tuyau, où l'eau est déterminée, de sorte que la figure intermédiaire du tuyau entre les extrémités E & F ne vient en aucune considération, dans le cas, où les deux vitesses Vv , & Vu , sont constantes.

C O R O L L. 3.

LII. De là on peut conclure dans ce cas, que quelle que soit la figure & l'amplitude du tuyau entre les extrémités E & F, le moment des forces requises sera toujours le même, & cela quand même l'amplitude du tuyau entre ces termes ne seroit pas quasi infiniment petite, par rapport à la distance de l'axe de rotation, d'où l'on voit, que cette condition, quoiqu'elle ait paru d'abord nécessaire dans le calcul, n'affecte point la conclusion, que nous venons d'en tirer.

C O R O L L. 4.

LIII. Or, lorsque la vitesse rotatoire du tuyau Vu , ou la vitesse respective de l'eau en F, Vu , ou toutes les deux ne sont pas uniformes, alors le moment des forces requises dépend outre cela de toute la figure du tuyau depuis E jusqu'en F, & de l'amplitude, qu'il a à chaque section. Car les quantités M & N renferment la figure tout entière du tuyau.

C O R O L L. 5.

LIV. Il est aussi à remarquer que l'intégrale $\int q r r d s = b M$ exprime le moment d'inertie de toute la masse d'eau par rapport à l'axe AC, puisque $r r d s$ est l'élément de la masse d'eau en Mm, & $q q$ le carré de sa distance à l'axe AC. Ensuite posant l'angle $FCQ = \omega$,

pour avoir $Qq = q d\omega$, puisque $ds \cos\theta = Qq$, l'autre intégrale fera $N = \iint q q d\omega$, ou bien $\frac{N}{ff} = \iint q q d\omega$. Or $\frac{1}{2} \iint q' q d\omega$ exprime l'aire formée par la projection du tuyau sur le plan de la planche.

C O R O L L. 6.

Fig. 2. LV. Soit donc FQB la projection de la figure du tuyau sur le plan de la planche, qu'on suppose perpendiculaire à l'axe de rotation, ou D soit la projection du point E , & posant l'aire $FCD = A$, on aura $N = 2 A ff$. De plus posant le moment d'inertie de toute la masse d'eau $= J$, on aura $M = \frac{J}{b}$, d'où l'on comprend plus évidemment comment les quantités intégrales M & N dépendent de la figure & largeur du tuyau.

S C H O L I E.

LVI. Il semble d'abord paradoxé, que dans le cas de l'uniformité des deux mouvemens, le moment des forces requises ne dépende point du tout de la figure & largeur intermédiaire; car on comprend aisément, que si le tuyau étoit en quelque endroit trop étroit, cela troubleroit considérablement le mouvement de l'eau. Mais dans un tel cas, il faut remarquer, ou que la vitesse uniforme de l'eau, Vv , deviendroit différente, ou que le mouvement ne sauroit jamais parvenir à l'uniformité. Cependant il faut remarquer, que si le tuyau étoit trop étroit, nos conclusions pourroient différer très considérablement de la vérité; mais cela par une raison tout différente. Car dans ces cas le frottement de l'eau par des tuyaux si étroits deviendroit trop grand, & arrêteroit le mouvement; & par cette raison il sera nécessaire de donner au tuyau entre les extrémités E & F partout une largeur assez considérable pour empêcher l'effet du frottement, & de là on tirera encore cet avantage, que le mouvement de l'eau arrivera d'autant plus promptement à l'uniformité.

P R O B L E M E IV.

LVII. *L'axe autour duquel le tuyau tourne étant vertical, & le mouvement tant du tuyau que de l'eau quelconque, trouver la force de réaction de l'eau pour altérer le mouvement de rotation.* Fig. 1.

S O L U T I O N.

Ayant déjà déterminé les forces requises, & le moment qui en résulte, puisque la réaction dépend tant des forces requises, que des forces actuelles, nous devons considérer, quelles sont les forces actuelles dans le cas proposé. Or puisqu'il n'y a point de pistons, dont l'eau soit poussée, les forces actuelles ne renferment que la pesanteur de l'eau, dont la direction étant verticale, & partant parallèle à l'axe de rotation AC, il n'en résultera aucun moment pour altérer le mouvement de rotation du tuyau, ou bien le moment des forces actuelles sera = 0. Or la réaction étant égale aux forces actuelles moins les forces requises, le moment de la réaction se trouvera, quand on retranche le moment des forces requises du moment des forces actuelles = 0, ou le moment de la réaction sera égal & contraire au moment des forces requises, que nous venons de déterminer dans le problème précédent. Donc, conservant toutes les dénominations expliquées dans le problème précédent, le moment de la réaction, qui tend à accélérer le mouvement de rotation dans le sens BF, fera,

$$-\frac{M du}{dtVu} - \frac{N dv}{dtVv} + 2ff\left(\frac{cc}{ee} \cos \epsilon - b \cos \zeta\right) v + 2ff\left(\frac{cc}{b} - b\right) Vvu$$

C. Q. F. T.

C O R O L L A I.

LVIII. Si donc, tant le mouvement du tuyau que celui de l'eau par la section F est uniforme, le moment de la réaction pour accélérer le mouvement du tuyau sera :

$$2ff\left(\frac{cc}{ee} \cos \epsilon - b \cos \zeta\right) v + 2ff\left(\frac{cc}{b} - b\right) Vvu$$

qui ne dépend donc point de la figure du tuyau entre les extrémités E & F.



C O R O L L. 2.

LIX. Mais, lorsque le mouvement du tuyau est varié, l'accélération diminue le moment de la réaction, or la retardation l'augmente de la quantité $\frac{M du}{dt \sqrt{u}}$; puisque la quantité M est toujours positive. Mais la quantité N pouvant être tant affirmative que négative, l'accélération du mouvement de l'eau peut tantôt augmenter tantôt diminuer le moment de la réaction.

C O R O L L. 3.

Fig. 2.

LX. Donc, pour que l'accélération du mouvement de l'eau contribue quelque chose à augmenter le moment de la réaction, il faut que l'aire de la projection du tuyau FCD devienne négative, ou que la courbe FQD tombe de l'autre côté du rayon CF : & plus cette aire sera grande, plus aussi sera augmenté le moment de la réaction par l'accélération de l'eau dans le tuyau.

C O R O L L. 4.

Fig. 1.

LXI. Par rapport à la direction du tuyau en F , le moment de la réaction sera le plus grand, lorsque l'angle ζ est égal à deux droits, c'est à dire, lorsque la direction du mouvement respectif de l'eau en F est opposée à la direction du mouvement du tuyau, ou lorsque le bout du tuyau en F est dirigé selon la direction FB . Dans ce cas, à cause de $\cos \zeta = -1$, le moment de la réaction sera :

$$-\frac{M du}{dt \sqrt{u}} - \frac{N dv}{dt \sqrt{v}} + 2ff \left(\frac{c ff \cos \epsilon}{ee} + b \right) v + 2ff \left(\frac{cc}{b} - b \right) \sqrt{vu}$$

C O R O L L. 5.

LXII. Or, puisque la plus haute surface de l'eau en E est horizontale, il faut que la direction du tuyau en E soit verticale, ou l'angle ϵ droit. Cette circonstance diminue le moment de l'inertie, qui sera :

$$-\frac{M du}{dt \sqrt{u}} - \frac{N dv}{dt \sqrt{v}} + 2b ff v + 2ff \left(\frac{cc}{b} - b \right) \sqrt{vu}$$



C O R O L L. 6.

LXIII. Si le tuyau outre cela étoit en repos, ou $u = 0$, le moment de la réaction seroit $= - \frac{N dv}{dtVv} + 2 b ffv$, & dans le cas de l'uniformité du mouvement de l'eau, ce moment sera $= 2 b ffv$: où ffv marque le volume ou le poids d'un cylindre d'eau, dont la base $= ff$ & la hauteur $= v$; or b est la longueur du levier. D'où l'on voit, que la réaction doit être estimée par le double dudit cylindre.

S C H O L I E.

LXIV. Ayant ainsi déterminé la force de la réaction, & le moment qui en résulte pour accélérer le mouvement rotatoire du tuyau, on comprendra aisément, comme il est possible de construire de telles machines, qui sont capables par cette force de vaincre quelque obstacle: & on voit comment on devroit arranger les élémens, qui entrent dans cette détermination, pour porter la réaction à la plus grande valeur, dont elle est susceptible. Mais la vitesse de l'eau Vv ne dépend pas de notre volonté; il faut la déterminer par les principes de l'Hydrodynamique, & substituer ensuite sa valeur dans la formule trouvée. Or, puisque le tuyau lui-même est supposé en mouvement, la détermination du mouvement de l'eau demande des précautions singulieres, que je tâcherai de mettre dans tout leur jour. Mais, avant que d'entreprendre cette recherche, il sera bon d'expliquer ce que c'est que l'état de pression, qu'il faut considérer dans l'eau, soit qu'elle soit en repos ou en mouvement.

D E F I N I T I O N V.

LXV. *La pression, où l'eau se trouve, est la force, dont les particules d'eau sont pressées ensemble; & par laquelle elles seroient comprimées effectivement, si l'eau étoit susceptible d'aucune compression.*

C O R O L L. I.

LXVI. Dans une eau dormante la pression est en raison de la profondeur; dans la surface elle évanouït, & à une profondeur de



deux pieds elle est deux fois plus grande qu'à une profondeur d'un pied ; & en général à une profondeur quelconque la pression est proportionnelle à la profondeur. Ce qui est clair par les premiers principes de l'Hydrostatique.

C O R O L L. 2.

LXVII. A la profondeur $= x$, sous la superficie d'une eau dormante, la pression est égale au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur est $= x$, & la base égale à la surface, qui soutient la pression. Cette surface étant $= hh$, la pression égalera le poids d'une masse d'eau, dont le volume est $= hhx$. Ainsi connoissant la profondeur $= x$, on connoitra aussi la quantité de la pression.

C O R O L L. 3.

LXVIII. Or, lorsque l'eau n'est pas en repos, la pression en chaque point demande des recherches plus profondes. Cependant, quelque grande que soit la pression, on peut toujours concevoir une profondeur dans une eau dormante, où la pression seroit la même, & cette profondeur fournira la plus juste mesure de la pression, qui subsistera à un point quelconque d'une eau agitée.

C O R O L L. 4.

LXIX. Ainsi quand je dirai, que la hauteur p exprime la pression de l'eau dans une section quelconque M du tuyau, dont il a été traité cy-dessus, cela signifie que la pression en M est précisément égale à celle qui se trouve à la profondeur $= p$ d'une eau dormante. Une telle hauteur donc nous servira de mesure de la pression, où une eau quelconque puisse se trouver.

S C H O L I E I.

LXX. Il est de la dernière importance de bien développer cette idée de la pression, puisque cette pression est la force immédiate, qui agit sur l'eau dans le tuyau, & qui y cause, ou l'accélération, ou la retardation. Ainsi considérant l'élément d'eau, qui occupe l'espace du tuyau Mm , si nous exprimons la pression de l'eau dans la section M par la hauteur $= p$, cet élément d'eau sera poussé en avant selon Mm
par



par une force égale au poids d'un volume d'eau $= p r r$, puisque $r r$ dénote l'amplitude de la section M , & l'eau est actuellement assujettie à l'action de cette force selon la direction $M m$. Or à l'autre bout de cet élément d'eau en m , la pression qui y régné, agira en sens contraire, & poussera l'eau en arrière suivant $m M$: soit donc $p + d p$ la hauteur, qui exprime la pression en m , & $r r + 2 r d r$ la section en m ; or, quelque différente que cette base m puisse être de celle en M , pourvû que la hauteur $p + d p$ soit égale à celle-là p , ces deux forces se détruiraient; donc l'équilibre n'est troublé qu'entant que la hauteur $p + d p$ est différente de p . On pourra donc regarder la base en M , & la force qui pousse en arrière selon $m M$ égale à un poids d'eau, dont le volume $= (p + d p) r r$: & partant l'élément d'eau $M m$ dont la masse $= r r d s$, est poussé en arrière suivant $m M$ avec une force $= r r d p$, qui étant divisée par la masse $r r d s$ donne la force retardatrice $= \frac{d p}{d s}$, ou bien la force accélératrice $= - \frac{d p}{d s}$.

Donc à cause de l'état de pression, où l'eau se trouve dans le tuyau, l'eau sera actuellement sollicitée suivant la direction du tuyau en M , où l'eau se trouve.

S C H O L I E 2.

LXXI. Outre cette force, l'eau est encore actuellement sollicitée par sa propre pesanteur, selon la direction verticale $M Q$, & cette force est égale au poids de l'élément d'eau $M m$, ou à sa masse $= r r d s$. Cette force en donne par la décomposition aussi une, qui agit selon la direction $M m$, qui sera à celle-là comme $- d z$ à $d s$, & partant $= - r r d z$, d'où résulte une force accélératrice selon la direction du tuyau $M m = - \frac{d z}{d s}$, & cette force avec la précédente $- \frac{d p}{d s}$, produisent immédiatement l'accélération de l'élément d'eau $M m$ suivant la direction $M m$. Il y aura bien d'autres forces, qui agissent aussi sur cet élément d'eau, comme l'autre, qui résulte de la décomposition de la pesanteur, & le tuyau lui même exercera quelques forces, entraî-



nant l'eau par son mouvement; mais les directions de ces autres forces étant perpendiculaires à la direction Mm , ne contribueront rien à l'accélération suivant la direction Mm . Donc, puisque la pression de l'eau ne produit d'autre accélération, que suivant Mm , c'est réciproquement de l'accélération de l'eau suivant cette direction Mm qu'il faut chercher la pression de l'eau; & partant pour trouver cette pression, de laquelle dépend la détermination du mouvement de l'eau dans le tuyau, ou la vitesse Vv , nous devons décomposer les forces accélératrices, dont l'eau doit être sollicitée, en une, qui agit selon la direction Mm , & en deux autres, dont les directions y sont perpendiculaires; or, puisque ces deux dernières ne contribuent rien à la recherche, dont il s'agit, nous pourrons nous en passer entièrement.

PROBLEME V.

Fig. 1. LXXII. *Des forces requises trouvées cy-dessus tirer la force accélératrice, dont l'eau en M est accélérée suivant la direction du tuyau Mm , les directions des autres forces, qui résultent outre celle-cy des forces requises, étant normales à la direction Mm .*

SOLUTION.

Ayant trouvé cy-dessus les forces requises pour un élément d'eau dont la masse = m dans la section du tuyau M , posons pour abrégier ces trois forces: la force selon $CQ = P$; la force selon $Qq = Q$; la force selon $QM = R$, de sorte que nous ayons par le §. 47.

$$P = 2m \left(\frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ffdq}{rrds} - u \cdot \frac{q}{bb} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{dq}{rrds} - v \cdot \frac{f^4 \cos^2 \theta}{qr^4} - 2Vvu \cdot \frac{ff \cos \theta}{rr} \right)$$

$$Q = 2m \left(\frac{du}{2dtVu} \cdot \frac{q}{b} + \frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ff \cos \theta}{rr} + v \cdot \frac{f^4 dq \cos \theta}{qr^4 ds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{\cos \theta}{rr} + 2Vvu \cdot \frac{ff dq}{brrds} \right)$$

$$R = 2m \left(\frac{dv}{2dtVv} \cdot \frac{ff dz}{rrds} + v \cdot \frac{f^4}{rrds} d \cdot \frac{dz}{rrds} \right).$$



Considérons d'abord la force Q , qui agit selon la direction Qq , & puisque θ marque l'angle, que fait la direction Qq avec Mm , la force qui en résulte suivant Mm sera $= Q \cos \theta$. De même manière de la force R selon QM , puisque le cosinus de l'angle, que fait QM avec Mm est $= \frac{dz}{ds}$, il résulte de cette force une suivant Mm , qui sera $= \frac{Rdz}{ds}$. Pour la force P selon CQ , elle donnera pareille-

ment pour la direction Mm une force $= \frac{Pdq}{ds}$; & les directions des autres forces, qui résultent de ces résolutions, sont perpendiculaires à la direction Mm . Donc de toutes les trois forces P, Q, R , il résulte une force suivant Mm , qui sera $= \frac{Pdq}{ds} + Q \cos \theta + \frac{Rdz}{ds}$; & substituant les valeurs pour P, Q, R , cette force proviendra $=$

$$2m \left[\frac{du}{2dtVu} \cdot \frac{q \cos \theta}{b} + \frac{dv}{2dtVu} \left(\frac{ffdq^2}{rrds^2} + \frac{ff \cos^2 \theta}{rr} + \frac{ffdz^2}{rrds^2} \right) - u \cdot \frac{qdq}{bbds} \right. \\ \left. + v \left(\frac{f^4 dq}{rrds^2} d. \frac{dq}{rrds} + \frac{f^4 \cos \theta}{rrds} d. \frac{\cos \theta}{rr} + \frac{f^4 dz}{rrds^2} d. \frac{dz}{rrds} \right) \right].$$

Mais, puisque $\cos \theta = \frac{qd\omega}{ds}$, le facteur de $\frac{dv}{2dtVu}$ fera

$$\frac{ff}{rrds^2} (dq^2 + qq d\omega^2 + dz^2) = \frac{ff}{rr},$$

à cause de $dq^2 + qq d\omega^2 + dz^2 = ds^2$, comme il est évident de la figure.



De même le facteur de v , fera

$$\frac{f^4}{ds} \left(\frac{dq}{rrds} d. \frac{dq}{rrds} + \frac{q d\omega}{rrds} d. \frac{q d\omega}{rrds} + \frac{dz}{rrds} d. \frac{dz}{rrds} \right), \quad \& \text{ partant}$$

$$\frac{f^4}{2ds} \left(d. \left(\frac{dq}{rrds} \right)^2 + d. \left(\frac{q d\omega}{rrds} \right)^2 + d. \left(\frac{dz}{rrds} \right)^2 \right) = \frac{f^4}{2ds} d. \frac{dq^2 + qq d\omega^2 + dz^2}{r^4 ds^2}$$

qui par conséquent se réduit à $\frac{f^4}{2ds} d. \frac{1}{r^4}$.

Donc la force qui agit selon Mm fera

$$\frac{m du}{dt \sqrt{u}} \cdot \frac{q \cos \theta}{b} + \frac{m dv}{dt \sqrt{v}} \cdot \frac{ff}{rr} - mu \cdot \frac{2q dq}{bb ds} + mv \cdot \frac{f^4}{ds} d. \frac{1}{r^4},$$

qui étant divisée par la masse m , donne la force accélératrice suivant la direction du tuyau Mm ,

$$\frac{du}{dt \sqrt{u}} \cdot \frac{q \cos \theta}{b} + \frac{dv}{dt \sqrt{v}} \cdot \frac{ff}{rr} - u \cdot \frac{2q dq}{bb ds} + v \cdot \frac{f^4}{ds} d. \frac{1}{r^4},$$

où j'ai encore séparé dans chaque terme les facteurs, qui dépendent du tems, de ceux qui dépendent de la figure du tuyau. C. Q. F. D.

C O R O L L. I.

LXXIII. Si le tuyau étoit en repos, l'accélération de l'eau en M selon la direction du tuyau Mm seroit $= \frac{dv}{dt \sqrt{v}} \cdot \frac{ff}{rr} + v \cdot \frac{f^2}{ds} d. \frac{1}{r^4}$; & c'est la même formule, qu'on a trouvée par les principes ordinaires pour le mouvement de l'eau dans des tuyaux immobiles. Par là on voit donc, combien cette accélération est altérée par le mouvement du tuyau.

C O R O L L. 2.

LXXIV. Or, si tant le mouvement du tuyau que celui de l'eau est uniforme, l'accélération de l'eau en M suivant la direction Mm fera:



$$-u \cdot \frac{2q dq}{bb ds} + v \cdot \frac{f^4}{ds} d \cdot \frac{1}{r^4} = -u \cdot \frac{2q dq}{bb ds} - v \cdot \frac{4f^4 dr}{r^5 ds},$$

elle est donc négative lorsque l'eau s'éloigne de l'axe, & lorsque la largeur du tuyau va en croissant.

P R O B L E M E VI.

LXXV. *Le mouvement rotatoire du tuyau, & le mouvement de l'eau par le tuyau étant donné, trouver l'état de la pression de l'eau en chaque endroit du tuyau, supposant, que l'axe de rotation soit vertical.*

S O L U T I O N.

Gardant toutes les dénominations qui ont été faites jusqu'ici, soit p la hauteur qui exprime la pression de l'eau dans la section M ; & nous avons vu, que de cette pression résulte une force accélératrice selon la direction $Mm = -\frac{dp}{ds}$. Ensuite l'axe de rotation AC étant vertical, la gravité de l'eau fournit aussi une force accélératrice selon la direction Mm qui est $= -\frac{dz}{ds}$, comme nous avons vu (69). Donc la force accélératrice entière, dont l'eau en M est actuellement sollicitée suivant la direction Mm , sera $= -\frac{dp}{ds} - \frac{dz}{ds}$, & les directions de toutes les autres forces qui agissent encore sur l'eau en M sont perpendiculaires à cette direction. Ayant donc déterminé dans le problème précédent l'accélération que l'eau en M souffre réellement selon Mm , les autres accélérations étant aussi réduites à des directions perpendiculaires à celles-cy, il faut que cette accélération réelle trouvée cy-dessus soit égale à celle, qui y agit actuellement, ce qui nous fournit cette équation :

$$-\frac{dp}{ds} - \frac{dz}{ds} = \frac{du}{dt} \sqrt{u} \cdot \frac{q \cos \theta}{b} + \frac{dv}{dt} \sqrt{v} \cdot \frac{ff}{rr} - u \cdot \frac{2q dq}{bb ds} + v \cdot \frac{f^4}{ds} d \cdot \frac{1}{r^4},$$

d'où

d'où l'on pourra déterminer la valeur de la pression p à chaque endroit du tuyau. Car multipliant par ds on aura cette équation différentielle

$$dp = -dz - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \frac{qds \cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ffds}{rr} + u \cdot \frac{2qdq}{bb} - v \cdot f^4 d \cdot \frac{1}{r^4},$$

& puisqu'il s'agit de trouver la pression p pour l'instant présent, on doit regarder comme constantes les quantités, qui ne varient qu'avec le tems, savoir, u , v , $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$, & $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$, & partant l'intégrale sera :

$$p = C - z - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qds \cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{rr} + u \cdot \frac{qq}{bb} - v \cdot \frac{f^4}{rr},$$

où je suppose que les intégrales $\int \frac{qds \cos\theta}{b}$, & $\int \frac{ffds}{rr}$ sont prises depuis la section E, où se trouve la plus haute superficie de l'eau du moins pour l'instant présent. Donc, puisque la pression à la superficie en E est nulle, & que là devient $q = c$, & $rr = ee$, si nous supposons la hauteur de E au dessus du plan horizontal B C F, ou A C = a , nous en tirerons la valeur de la constante C, de sorte que la véritable pression à un endroit quelconque M fera :

$$p = a - z + u \left(\frac{qq}{bb} - \frac{cc}{bb} \right) - v \left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4} \right) - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qds \cos\theta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{rr}$$

C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

LXXVI. Cette formule exprime donc la hauteur p , qui nous sert de mesure de la pression, & nous voyons qu'elle est composée de cinq membres :

I. $a - z$; II. $-\frac{u(cc - qq)}{bb}$; III. $-v \left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4} \right)$;

IV. $-\frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qds \cos\theta}{b}$; V. $-\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{rr}$;

le

le premier membre $a - z$ marque la profondeur AN, à laquelle la section M se trouve au dessus de la superficie E; & cette quantité marquerait la pression de l'eau en M, si le tuyau & l'eau étoient en repos.

C O R O L L. 2.

LXXVII. Le second membre $-\frac{u(cc-qq)}{bb}$ nous découvre combien le mouvement de rotation du tuyau trouble la pression, & nous voyons que cet effet est proportionel au quarré de la vitesse angulaire du tuyau, qui est $=\frac{Vu}{b}$. Nous voyons de plus, que si la distance $MN = q$, est plus grande que $AE = c$, cet effet augmente la pression, mais si $MN < AE$, il diminue la pression, puisqu'il devient alors négatif. Mais si $MN = AE$; ce membre ne change point du tout la pression.

C O R O L L. 3.

LXXVIII. Le troisième membre $-v\left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4}\right)$ est proportionnel au quarré de la vitesse respectve, dont l'eau sort par l'ouverture F, ou puisque $ffVv$ exprime la quantité d'eau qui échape par l'ouverture F dans un tems donné, ce membre étant $f^4v\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{e^4}\right)$, est proportionnel au quarré de cette quantité d'eau. Outre cela la pression sera augmentée par ce membre, lorsque $rr > ee$, ou lorsque la largeur du tuyau en M est plus grande qu'en E; mais elle en sera diminuée, si la largeur en M est plus petite qu'en E.

C O R O L L. 4.

LXXIX. Les deux autres membres dépendent de l'accélération ou du mouvement du tuyau, ou de celui de l'eau, & l'un & l'autre est négatif, lorsque les mouvemens sont accélérés; or le quatrième



redevient affirmatif, lorsque la formule $\int \frac{q ds \cos \theta}{b}$, ou l'aire de la projection du tuyau, est négative.

C O R O L L. 5.

LXXX. Mais lorsque l'un & l'autre mouvement est uniforme, les deux derniers membres évanouissent, & la pression en M sera exprimée par la hauteur $p = a - z - \frac{u(cc - qq)}{bb} - v \left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4} \right)$,

& ne renferme plus de formules intégrales. Et si outre cela $q = c$, & $rr = ee$, la pression sera $p = a - z$, ou bien la même que si le tuyau & l'eau étoient en repos.

S C H O L I E.

LXXXI. Il pourroit donc arriver que la pression en M devint même négative, & alors l'eau abandonneroit les parois du tuyau, & y laisseroit un vuide, si elle n'étoit pas comprimée par le poids de l'atmosphère. Mais l'atmosphère ne sauroit conserver la continuité de l'eau dans le tuyau, qu'entant que sa pression surpasse la pression négative : ou bien, si nous posons k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui contrebalance la pression de l'atmosphère, qu'on fait être de 32 pieds environ, la véritable pression en M, entant qu'elle est augmentée par le poids de l'atmosphère, sera

$$p = k + a - z - \frac{u(cc - qq)}{bb} - v \left(\frac{f^4}{r^4} - \frac{f^4}{e^4} \right) - \frac{du}{dt} \int \frac{q ds \cos \theta}{b} - \frac{dv}{dt} \int \frac{ff ds}{rr},$$

& pourvu que cette quantité ne devienne pas négative, l'eau demeurera continuë dans le tuyau. Mais, s'il arrivoit qu'à quelque endroit du tuyau cette quantité devint négative, l'eau abandonneroit les parois du tuyau, & y laisseroit un vuide ; or il faut bien prendre garde que cet accident n'arrive, puisqu'alors l'expérience s'écarteroit de la théorie. Cet accident seroit à craindre, si le tuyau avoit une trop grande convergence vers l'axe AC, ou si les distances q étoient plus petites que



la distance $AE = c$, & si de plus la largeur du tuyau en M étoit beaucoup plus petite que celle en E ; & de là on voit aisément, comment en chaque cas on pourra aisément prévenir cet accident. Cela remarqué, je passe à la recherche du mouvement de l'eau dans un tuyau, qui tourne autour d'un axe vertical d'un mouvement quelconque.

P R O B L E M E VII.

LXXXII. *Le mouvement, dont le tuyau tourne autour de l'axe vertical AC étant donné, déterminer la vitesse Vv , avec laquelle l'eau sortira par l'orifice F, qui se trouve au bas du tuyau.*

S O L U T I O N.

Puisque l'eau sort par l'orifice $F = ff$ librement dans l'air, la pression en F sera nulle, ou bien, si l'on fait entrer dans le calcul la pression de l'atmosphère k , elle y fera $= k$. Ayant donc trouvé dans le problème précédent la pression dans une section quelconque M du tuyau, ou la valeur de p , nous n'avons qu'à en tirer la pression qui convient à l'orifice F, où l'on aura $q = b$, $rr = ff$, & $z = 0$; or pour les intégrales qu'il faut prendre pour toute la masse d'eau contenue dans le tuyau depuis E jusqu'en F, puisque nous avons déjà supposé la valeur intégrale entière $\int ffq ds \cos \theta = N$, nous aurons $\int \frac{q ds \cos \theta}{b} = \frac{N}{b ff}$, & soit la valeur totale $\int \frac{ds}{rr} = L$. Cela posé, la pression en F sera exprimée par la hauteur :

$$a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right) - \frac{N}{b ff} \cdot \frac{du}{dt \sqrt{u}} - L ff \cdot \frac{dv}{dt \sqrt{v}},$$

qui doit être égalée à zero, puisque nous négligeons le poids de l'atmosphère.

Par conséquent nous aurons l'équation suivante à résoudre

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right) - \frac{N}{b ff} \cdot \frac{du}{dt \sqrt{u}} - L ff \cdot \frac{dv}{dt \sqrt{v}},$$



où, la quantité u avec $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$ étant une fonction donnée du tems, cette équation nous découvre l'accélération de l'eau, qui sort par l'orifice F.

Mais pour trouver la vitesse même, il faut voir, si la hauteur de l'eau dans le tuyau AC est variable, ou non? Ce dernier cas ayant lieu, lorsque à chaque instant on laisse couler par en haut autant d'eau, qu'il en sort par en bas, de sorte que le tuyau demeure constamment rempli jusqu'à la section E. Or dans le premier cas, où la hauteur est variable, & qu'il n'entre point d'eau dans le tuyau, non seulement la hauteur a avec la largeur cc fera variable, mais aussi les quantités L & N, puisqu'elles renferment les valeurs des intégrales prises pour la partie du tuyau remplie d'eau à chaque instant, d'où la résolution de l'équation deviendra extrêmement difficile.

Mais pour les cas, que je me propose de développer, la machine est toujours arrangée en sorte, que le tuyau demeure toujours plein jusqu'à la même section E, par une addition continuelle d'autant d'eau, qu'il en découle en bas. On suppose aussi que le mouvement de rotation du tuyau est uniforme, & dans cette hypothese le mouvement de l'eau devient aussi pour la plupart bientôt uniforme, de sorte que les deux derniers termes évanouiront alors. Donc, quand cela arrive, on connoitra aisément la vitesse respective dont l'eau sortira du tuyau par l'orifice F = f ; car ayant

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right),$$

on trouvera la hauteur due à cette vitesse :

$$v = \frac{a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$



C O R O L L. I.

LXXXIII. Pour ce cas donc, où le mouvement de rotation est supposé uniforme, & le tuyau toujours entretenu plein d'eau jusqu'en E, la vitesse constante, que l'eau atteint enfin en sortant du tuyau, sera :

$$Vv = V \frac{a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}},$$

Donc, lorsque la largeur de l'orifice ff est quasi infiniment plus petite que la largeur ee en haut, cette vitesse sera

$$Vv = V \left(a - u \left[\frac{cc}{bb} - 1 \right] \right).$$

C O R O L L. 2.

LXXXIV. Or, lorsque l'orifice ff a un plus grand rapport à ee , la vitesse constante Vv deviendra plus grande, & elle deviendroit même infinie, s'il étoit $ff = ee$. Mais dans ce cas il faut bien remarquer, qu'il faudroit un tems infini avant que l'eau atteignit cette vitesse, ou bien l'accélération de l'eau iroit toujours en croissant; & la même chose arriveroit, si l'orifice ff étoit plus grand que la largeur en haut ee .

C O R O L L. 3.

LXXXV. Si la distance $AE = c$ est plus grande que la distance $CF = b$, la vitesse dont l'eau sort par F, en deviendra plus petite; & il pourroit arriver, qu'il ne sortit rien par l'orifice F, si le tuyau étoit tellement convergent vers le bas, qu'il fut

$$a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) = 0, \text{ ou } \frac{cc}{bb} = \frac{a + u}{u}.$$

dans ce cas la force centrifuge empêcheroit la sortie de l'eau.



C O R O L L. 4.

LXXXVI. Or, si la distance $CF = b$ est plus grande que celle d'enhaut $AE = c$, la vitesse, dont l'eau sortira du tuyau, en fera augmentée, ou bien la force centrifuge avancera la sortie de l'eau.

S C H O L I E.

LXXXVII. Pour que la supposition, que je viens de faire, que le tuyau est toujours entretenu plein d'eau, ou qu'on y verse par enhaut continuellement autant d'eau, qu'il en échappe par enbas; pour que cette supposition, dis je, puisse avoir lieu, & que le calcul n'en souffre rien, il faut que l'eau entre dans le tuyau en E avec la même vitesse, & sous la même direction, que l'eau y baisse: or comment cette condition puisse être remplie, c'est ce qui sera expliqué plus en détail dans la suite. Je remarquerai ici seulement, qu'à moins que cette condition ne soit observée, & que l'eau qu'on y verse n'eut un mouvement différent de celui dans le tuyau, il faudroit des forces pour lui imprimer ce mouvement, qu'elle doit suivre, ce qui ne se pourroit faire sans quelque perte des forces, dont on veut faire usage dans la Mécanique. Pour cette cause je supposerai d'abord, que l'eau, dont on entretient le tuyau, y est versée avec la juste vitesse & direction, afin qu'il ne se perde rien des forces, que j'ai déterminées, ni que le mouvement que je viens d'assigner, n'en souffre aucune altération.

P R O B L E M E VIII.

LXXXVIII. *Le tuyau étant tourné uniformément autour de l'axe vertical AC, & étant constamment entretenu plein d'eau jusqu'en E, trouver la vitesse dont l'eau sortira par l'orifice F à chaque instant, après qu'on aura ouvert cet orifice.*

S O L U T I O N.

On suppose donc que l'orifice F ait d'abord été fermé, & qu'on l'a ouvert subitement, pour donner une issue à l'eau: dans ce premier instant donc la vitesse de l'eau a été $= 0$. Maintenant après un tems $= t$,



$\equiv t$, soit Vv la vitesse respective dont l'eau sort par l'ouverture $F \equiv ff$, & posant comme jusqu'ici la vitesse de rotation du tuyau en $F \equiv Vu$ constante, le rayon $CF \equiv b$, la hauteur de l'eau dans le tuyau $AC \equiv a$, & la largeur du tuyau en $E \equiv ee$, & la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{rr}$ pour toute l'étendue du tuyau depuis E jusqu'en $F \equiv L$, on aura à résoudre cette équation :

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right) - Lff \cdot \frac{dv}{dt Vv},$$

pour en tirer la valeur de la vitesse cherchée Vv .

Posons pour abréger les quantités constantes :

$$a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) = h, \quad \& \quad 1 - \frac{f^4}{e^4} = n, \quad \& \quad \text{nous avons}$$

$$h - nv = \frac{Lff dv}{dt Vv}, \quad \text{ou} \quad dt = \frac{Lff dv}{(h - nv) Vv}.$$

Soit $Vv = z$, & $\frac{dv}{2Vv} = dz$, pour que nous ayons :

$$dt = \frac{2Lff dz}{h - nzz},$$

& nous aurons trois cas à considérer, selon que $n = 0$, ou $n > 0$, ou $n < 0$.

I. Soit $n = 0$, ce qui donne le cas, où l'orifice F est égal à la section E , & on aura $t = \frac{2Lff}{h} z = \frac{2Lff}{h} Vv$; donc $Vv = \frac{ht}{2Lff}$. D'où l'on voit que la vitesse Vv croitra toujours jusqu'à l'infini, & partant que dans ce cas l'eau n'arrivera jamais à un mouvement uniforme.

II. Soit $n > 0$, ce qui est le cas où l'orifice F est moindre que la section E , & posant $V \frac{h}{n} = i$, de sorte que $dt = \frac{2Lff}{n} \cdot \frac{dz}{ii - zz}$,

&

& l'intégration donnera $t = \frac{Lff}{in} \int \frac{i+z}{i-z}$. Posant donc $\frac{in}{Lff} = v$,
pour avoir $vt = \int \frac{i+z}{i-z}$, & prenant a pour le nombre, dont le lo-

garithme = 1, nous aurons $a^{vt} = \frac{i+z}{i-z}$, ou $z = \frac{a^{vt} - 1}{a^{vt} + 1} i = Vv$.

Donc après un tems infini nous aurons $Vv = i = V \frac{h}{n}$, ou $Vv = \frac{h}{n}$.

III. Soit $n < 0$, ce qui est le cas, où l'orifice F est plus grand
que la section E, & posant $\frac{f^4}{e^4} - 1 = m$, pour avoir $dt = \frac{2Lff dz}{h + mzz}$.

Soit $V \frac{h}{m} = i$, & on aura $dt = \frac{2Lff}{m} \cdot \frac{dz}{ii+zz}$, ou $s = \frac{2Lff}{im} \cdot A \operatorname{tg} \frac{z}{i}$.

Soit $\frac{im}{2Lff} = \mu$, pour avoir $\mu t = A \operatorname{tg} \frac{z}{i}$, & partant $z = i \operatorname{tg} \mu t$,

ou $Vv = i \operatorname{tang} \frac{imt}{2Lff}$. Cette vitesse croitra donc non seulement à
l'infini, mais deviendra ensuite même négative ; ou bien il sera impos-
sible d'entretenir dans ce cas le tuyau toujours plein. C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

LXXXIX. Puisque donc dans la pratique on exige un mouve-
ment uniforme, le premier cas, & à plus forte raison le troisième, n'y
fauroit être employé. Il faut donc que le second cas ait lieu, & que
l'ouverture en F soit moindre que la section du tuyau en haut E. Le

nombre $n = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ sera donc positif, mais moindre que l'unité, &

partant il faut nécessairement que $h = a - u \left(\frac{c}{b} - 1 \right)$, soit aussi une

quantité positive, ou bien $\frac{cc}{bb} < \frac{a+u}{u}$.

C O R O L L. 2.

XC. Or pour ce cas on aura $Vv = \frac{a^{vt} - 1}{a^{vt} + 1} i$, où $i = V \frac{h}{n}$,

$v = \frac{in}{Lff} = \frac{Vhn}{Lff}$. D'où l'on voit que la vitesse Vv va toujours en croissant, & qu'elle ne parvient à l'uniformité, qu'après un tems infini; de sorte qu'il semble que ni même ce cas répond au but, qu'on se propose dans la pratique, où l'on demande une vitesse uniforme.

C O R O L L. 3.

XCI. Cependant on pourra se contenter, pourvu que la vitesse approche assés vite de la dernière vitesse $Vv = i$ si près, que la différence ne feroit plus sensible. Car, si par exemple, d'abord après une seconde la vitesse Vv arrivoit si près à la valeur i , qu'elle n'en différeroit que d'une centième partie, cela suffiroit sans doute pour la pratique, & dès la première seconde on pourroit regarder le mouvement comme uniforme.

C O R O L L. 4.

XCII. Voyons donc, combien la vitesse Vv différera encore après une seconde de la valeur i . Pour cet effet soit g la hauteur, de laquelle un corps grave tombe librement dans une seconde, & puisque le calcul donne pour le tems de cette chute $2\sqrt{g}$, posons $2\sqrt{g}$

pour t ; & soit $\frac{a^{vt} - 1}{a^{vt} + 1} i = [1 - \frac{1}{100}] i$, d'où nous tirons

$$\frac{a^{vt} - 1}{a^{vt} + 1} = 1 - \frac{1}{100}, \text{ ou bien } a^{vt} = 199, \text{ \& } v = \frac{199}{t la} = \frac{Vnh}{Lff},$$

$$\text{donc } \frac{Lff}{Vnh} = \frac{t la}{199} = \frac{0,8685890}{2,2988531} Vg, \text{ ou } L = 0,37784 \cdot \frac{Vngh}{ff}.$$



Pourvu donc que la valeur de L soit de cette grandeur, ou encore moindre, le mouvement de l'eau arrivera d'abord après la première seconde, ou encore plutôt, à l'uniformité.

C O R O L L. 5.

XCIII. Puisque $L = \int \frac{ds}{rr}$, si nous posons la largeur du tuyau rr constante, & $= \lambda ff$, & la longueur du tuyau égale à sa hauteur a , auquel cas nous aurons $c = b$, & $h = a$; nous obtiendrons $L = \frac{a}{\lambda ff}$, & partant le cas indiqué aura lieu si $a < 0,37784 \lambda \sqrt{nga}$, ou $\sqrt{\frac{a}{g}} < 0,37784 \lambda \sqrt{n}$. Or si ce est aussi $= \lambda ff$, à cause de $n = 1 - \frac{1}{\lambda \lambda}$, & de $0,37714 = \frac{1}{3}$, cela arrivera si $\lambda \sqrt{[1 - \frac{1}{\lambda \lambda}]} > \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a}{g}}$, ou $\lambda \lambda - 1 > \frac{7a}{g}$; donc si $\lambda > \sqrt{[1 + \frac{7a}{g}]}$.

C O R O L L. 6.

XCIV. Il est donc clair, que pour remplir cette condition, on n'a qu'à donner au tuyau partout une largeur suffisante, & plus grande que celle de l'ouverture ff , par laquelle l'eau échape, puisqu'il faut que $\lambda > 1$; & de plus, plus la hauteur du tuyau a fera grande, plus aussi grande doit être prise la valeur de λ . Si la hauteur du tuyau a étoit $= g$, ou de 15 pieds environ, il suffiroit pour cet effet, qu'il fût $\lambda = 3$, ou que le tuyau fut partout seulement trois fois plus large que l'ouverture ff . Donc, pourvu que la largeur du tuyau soit quelquefois plus grande que l'orifice, on peut sans aucune faute supposer, que le mouvement de l'eau se compose bientôt à l'uniformité.

S C H O L I E.

XCV. J'ai déjà remarqué, que pour éviter l'effet du frottement, il convient de rendre les tuyaux assés larges: ainsi l'élargissement du tuyau



yau nous procurera un double avantage, l'un que le mouvement ne soit pas diminué par le frottement, & l'autre, que l'eau parvienne d'autant plus vite à l'uniformité. Observant donc cette règle, nous pourrions être assurés, que le mouvement de l'eau sera non seulement conforme au calcul, mais qu'il deviendra aussi d'abord après le commencement uniforme; de sorte que dans ces sortes de machines il sera permis de regarder la vitesse de l'eau Vv comme constante, pourvu que le mouvement de rotation du tuyau soit uniforme, & que le tuyau soit toujours entretenu plein d'eau jusqu'à la section E. Or le mouvement de l'eau étant déjà devenu uniforme, voyons combien il faut d'eau pour entretenir le tuyau toujours plein jusqu'en E, & avec quelle vitesse l'eau y doit être versée.

P R O B L E M E IX.

XCVI. *Le tuyau étant tourné uniformément autour de l'axe vertical AC, & entretenu toujours plein d'eau jusqu'à la section E, trouver la quantité d'eau, que cet entretien exige par secondes, & tant la vitesse que la direction sous laquelle l'eau doit continuellement être conduite dans le tuyau.*

S O L U T I O N.

Puisqu'on suppose que le mouvement de l'eau ait déjà atteint l'uniformité, on aura cette équation $0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right)$, où il faut que ee soit considérablement plus grand que ff , & de cette équation on connoitra la vitesse Vv , dont l'eau sortira par l'embouchure $F = ff$, les autres quantités a , u , b , & c étant données de la figure du tuyau, & de son mouvement. Puisque l'eau sort par l'ouverture ff avec la vitesse $= Vv$, si nous prenons g pour marquer la hauteur de la chute d'une seconde, la quantité d'eau, qui s'en va chaque seconde sera $= 2ffVgv$: il faut donc pour entretenir le tuyau toujours plein, qu'il entre par en haut chaque seconde une pareille quantité d'eau $= 2ffVgv$.



Mais si l'eau sort par enbas avec la vitesse $\equiv Vv$, la vitesse en haut en E sera $\equiv \frac{ffVv}{ee}$, dont l'eau y descend dans le tuyau, & la direction de ce mouvement respectif est verticale, comme il a été remarqué cy-dessus, ou bien la direction du tuyau en E doit être supposée verticale. Or le tuyau étant lui-même transporté autour de l'axe AC, & la vitesse de rotation en E étant $\equiv \frac{cVu}{b}$, la vraie vitesse de l'eau en E sera $\equiv V \left(\frac{f^4v}{e^4} + \frac{ccu}{bb} \right)$, & la direction de ce vray mouvement sera inclinée à l'horizon d'un angle, dont la tangente est $\equiv \frac{bffVv}{ceeVu}$. Il faut donc, pour ne point troubler le mouvement de l'eau dans le tuyau, que l'eau soit conduite dans le tuyau en E avec une vitesse $\equiv V \left(\frac{f^4v}{e^4} + \frac{ccu}{bb} \right)$, & sous un angle avec l'horizon, dont la tangente est $\equiv \frac{bffVv}{ceeVu}$. Donc si l'eau, dont le tuyau est entretenu, se trouve dans un réservoir placé au dessus de E, il faut que la superficie de l'eau dans le réservoir soit élevée au dessus de la section E d'une hauteur $\equiv \frac{f^4v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}$, pour que l'eau, qui en découle dans le tuyau puisse acquérir la juste vitesse, & qu'elle y soit conduite par des tuyaux, qui ayent l'inclinaison, que nous venons de trouver.

C. Q. F. T.

S C H O L I E.

XCVII. Puisque le réservoir, qui fournit l'eau dans le tuyau EF, doit être en repos, le tuyau échaperoit d'abord à la veine d'eau, qui y seroit conduite. Pour remédier à cet inconvenient, il est nécessaire de ranger un grand nombre de tuyaux autour de l'axe AC, en sorte que leurs ouvertures en haut E, forment une surface unie; & alors l'eau, qui y sera conduite du réservoir par quelque canal, ne manque-



ra pas d'entrer toujours dans ces tuyaux réunis ensemble par en haut. Or ce qui vient d'être calculé pour le mouvement de l'eau dans un tuyau, aura également lieu pour plusieurs tuyaux réunis ainsi ensemble, pourvu qu'ils soient égaux entr'eux, & qu'on prenne *ff* pour marquer la somme de tous leurs orifices en bas, & *ee* la somme de leurs orifices en haut, qui formeront un espace annulaire uni. Mais, afin que l'eau soit entretenuë par tout cet espace également, le réservoir doit être garni de plusieurs tels canaux, qui forment quasi aussi une ouverture unie. De là naîtra la construction d'une telle Machine hydraulique, dont je m'en vais donner la description.

Description d'une telle Machine hydraulique.

XCVIII. Soit *OO* l'axe vertical, autour duquel la machine doit tourner uniformément ; cette machine sera composée de plusieurs tuyaux semblables, qui ont chacun leurs embouchures en bas, comme *F, F, F, &c.* par lesquelles l'eau échape, & leur ouvertures en haut soient unies dans l'espace annulaire *E, E, E, E, &c.* Il sera bon d'enfermer tous ces tuyaux dans un tambour comme *BBFF*, d'une surface bien unie & polie par le dehors, afin que la résistance de l'air n'apporte pas un obstacle sensible à son mouvement. Ce tambour creux en dedans, pour en diminuer le poids, sera affermi à l'axe de rotation par des barres transversales, afin qu'il tourne avec l'axe. Or au dessus de ce tambour mobile avec l'axe se trouve le réservoir *DDJJ*, aussi en forme d'un tambour, mais qui soit immobile, n'étant pas attaché à l'axe *OO*, qui le traverse au milieu. Au fonds de ce reservoir, se trouvent plusieurs canaux *Ji, Ji, Ji, &c.* par lesquels l'eau est conduite dans le vaisseau inférieur *BBFF*, sous une obliquité, qui a été déterminée dans le problème précédent. Et si le reservoir fournit dans le vaisseau autant d'eau, qu'il en sort par les embouchures *F, F, F, &c.* les tuyaux du vaisseau demeureront constamment pleins d'eau, jusqu'à la surface *E, E, E, &c.* & le mouvement de l'eau deviendra bientôt uniforme, pourvu que le mouvement de rotation soit uniforme, comme je suppose ; & il fera outre cela conforme aux formules, qui ont été trouvées cy-dessus.

Fig. 3.

*Application du calcul à cette Machine.*

XCIX. La hauteur de l'eau dans le vaisseau mobile au dessus des embouchures F, F, &c. ou la hauteur AC est posée $\equiv a$, la distance des embouchures à l'axe de rotation, ou CF $\equiv b$; la somme de toutes ces embouchures $\equiv ff$, la surface de l'eau en haut de ce vaisseau, ou l'espace annulaire E, E, E, $\equiv ee$; la distance moyenne à l'axe de rotation AE $\equiv c$. Ensuite soit la vitesse dont les embouchures F, F, tournent au tour de l'axe $\equiv Vu$, & la vitesse respective, dont l'eau sort par ces embouchures $\equiv Vv$. Cela posé, nous avons vû, que le mouvement uniforme sera déterminé par cette équation

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{c^4} \right),$$

& la dépense d'eau pendant chaque seconde sera $\equiv 2ffVgv$, prenant g pour la hauteur, par laquelle un corps pesant tombe dans une seconde.

C. Pour le réservoir DDJJ, qui soit toujours rempli d'eau jusqu'à G, G, G, soit la hauteur de cette surface au dessus de E, E, E, &c. ou la ligne verticale HA $\equiv k$, & il faut qu'il soit $k = \frac{f^4 v}{c^4} + \frac{ccu}{bb}$. Soit de plus la somme de toutes les embouchures i, i, i , &c. qui fournissent l'eau dans le vaisseau inférieur, $\equiv ii$, & puisque l'eau en sort avec la vitesse $\equiv Vk$, pourvu que ce réservoir soit assez large, il en sera fourni par seconde une quantité d'eau $\equiv 2iiVgk$; il faut donc qu'il soit

$$2iiVgk = 2ffVgv, \text{ ou } i^4 k = f^4 v.$$

Ensuite ces canaux Ji, Ji, descendants doivent être tellement inclinés, qu'ils fassent avec l'horizon un angle dont la tangente $\equiv \frac{bffVv}{ceeVu}$, &

partant le sinus $\equiv \frac{bffVv}{V(bb f^4 v + cce^4 u)} = \frac{ffVv}{eeVk}$, & le cosinus $\equiv \frac{cVu}{bVk}$,
&



& cette inclination doit être dirigée selon le mouvement de rotation. C'est de là qu'il faut tirer les mesures, pour l'arrangement d'une telle Machine.

CI. Puisque $f^4v = i^4k$, & $e^4k = f^4v + \frac{cce^4u}{bb}$, nous aurons en divisant cette équation par celle-là $\frac{e^4}{i^4} = 1 + \frac{cce^4u}{bbf^4v}$: d'où nous voyons que $ii < ee$, ce qui est nécessaire : car il faut bien, que l'espace annulaire E, E, E, &c. soit plus grand que la somme de tous les orifices des canaux Ji, quand même ces canaux seroient tous réunis. Mais puisque ces canaux conduisent l'eau obliquement dans le vaisseau inférieur, il est impossible que la somme des orifices ii puisse avoir un plus grand rapport à ee , que le sinus de l'obliquité $\frac{ffVv}{eeVk}$ au sinus total. Or l'équation $f^4v = i^4k$, ou $ffVv = iiVk$, nous fait voir clairement, que $ii : ee = \frac{ffVv}{eeVk} : 1$. D'où l'on voit que les canaux Ji, Ji, &c. doivent se toucher entr'eux, afin que l'eau qui en descend remplisse tout l'espace annulaire E E &c.

CII. Donc au lieu des canaux séparés Ji, Ji, comme la figure 3 les représente, il faut employer des canaux contigus représentés dans la figure 4, qui ne soient séparés entr'eux que de minces diaphragmes, Ji, Ji, &c. qui servent à diriger l'eau sous l'inclinaison requise, de sorte que sans ces diaphragmes il y auroit une ouverture unie annulaire, qui régneroit tout autour du réservoir. Or, puisque alors l'eau tomberoit verticalement par cette ouverture continue, il la faut partager par des lames minces disposées obliquement, afin que l'eau soit obligée de découler sous l'inclinaison trouvée, & pour obtenir ce but on jugera aisément à quelle distance ces diaphragmes doivent être éloignés entr'eux. On donnera donc à ces ouvertures la même largeur qu'à l'espace annulaire, ne pouvant pas lui donner une plus grande,

&



& puisque les diaphragmes ne manqueront pas de diminuer tant soit peu la quantité d'eau, qui descend, on sera obligé, ou de faire l'espace annulaire avec la largeur de ces canaux un peu plus grande, qu'on aura trouvé par le calcul, ou de donner aux diaphragmes une inclinaison un peu plus petite.

CIII. Il faut encore remarquer que la largeur de l'espace annulaire EE ne sauroit être trop grande par rapport à son demi-diamètre moyen $= c$, tant pour que le calcul ne s'écarte point de l'expérience, ayant regardé l'amplitude ee comme très petite à l'égard d'un cercle décrit du rayon c , que principalement, afin que le mouvement de rotation par tout cet espace annulaire soit assés égal, pour que la perte continuelle puisse être réparée, comme il faut, par la même obliquité. Ainsi posant la largeur de cet espace annulaire $= 2a$, de sorte que le rayon du cercle intérieur soit $= c - a$, & celui de l'extérieur $= c + a$, l'espace annulaire sera $= 4\pi ac$, ce qui donne la valeur de ee . Donc, si l'on juge que a ne sauroit surpasser $\frac{1}{2}c$, on aura $4\pi ac$, & partant $ee < cc$ à peu près.

CIV. Ayant ainsi expliqué ce qui regarde la construction d'une telle Machine en général, voyons aussi les mesures, qu'il faut donner à toutes les parties de la machine pour chaque cas proposé. Or il y a ordinairement deux choses, sur lesquelles on doit régler cette détermination : l'une est la quantité d'eau, que la source, ou rivière, fournit par secondes pour l'entretien de la machine ; & l'autre est la hauteur, qu'il sera permis de donner à toute la machine, afin que l'eau, qui sort en bas, puisse encore découler ; cette hauteur est nommée dans la Pratique la chute de l'eau. Ces deux choses ne dépendent pas communément de nôtre volonté, mais nous sont prescrites par les circonstances, & alors il faut arranger la machine en sorte qu'elle réponde à ces conditions.

P R O B L E M E X.

CV. *Lorsque tant la hauteur de la chute que la quantité d'eau est donnée, qu'on peut employer à l'entretien de la machine, trouver les*



les déterminations nécessaires pour la construction d'une telle machine hydraulique.

S O L U T I O N.

Soit la hauteur de la chute $HA + AC = h$, la quantité d'eau, qui peut être fournie par seconde à l'entretien de la machine D ; ces deux choses étant données on aura d'abord les équations suivantes :

$$D = 2ff\sqrt{gv}, \quad \& \quad h = a + k = a + \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}.$$

Or nous venons de trouver outre cela ces équations :

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v \left(1 - \frac{f^4}{e^4} \right), \quad \& \quad i^4 k = f^4 v.$$

La première équation donne $f^4 v = \frac{DD}{4g}$, & cette valeur substituée dans les autres équations fournit :

$$h = a + \frac{DD}{4ge^4} + \frac{ccu}{bb};$$

$$0 = a - u \left(\frac{cc}{bb} - 1 \right) - v + \frac{DD}{4ge^4};$$

$$\frac{DD}{4ge^4} + \frac{ccu}{bb} = \frac{DD}{4gi^4}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{DDbb(e^4 - i^4)}{4gcc e^4 i^4}.$$

Ayant ainsi éliminé la somme des embouchures, la première & troisième équation fournit $a = h - \frac{DD}{4gi^4}$, & cette valeur avec

celle de u , ou plutôt avec celle de $\frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right)$,

donne pour la seconde : $0 = h - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{4ge^4} + u - v + \frac{DD}{4ge^4}$,

d'où nous tirons : $v = h + u - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{2ge^4}$.



Voilà donc les déterminations suivantes, qu'on doit observer :

$$\text{I. } a = h - \frac{DD}{4gi^4};$$

$$\text{II. } \frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right);$$

$$\text{III. } v = h + u - \frac{DD}{2gi^4} + \frac{DD}{2ge^4} = h + u - \frac{DD}{2g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right);$$

$$\text{IV. } f^4 = \frac{DDi^4}{4gi^4(h+u) - 2DD\left(1 - \frac{i^4}{e^4}\right)} = \frac{DD}{4gv},$$

& la tangente de l'inclinaison des canaux Ji à l'horizon sera

$$\frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}} = \frac{ii}{\sqrt{e^4 - i^4}}, \quad \& \text{ le sinus} = \frac{ii}{ee}.$$

De plus il faut remarquer que ff doit être beaucoup plus petit que ee , & ii moindre que ee , & enfin $cc > ee$. C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

CVI. Les deux choses D & h étant données, le calcul renferme trois quantités ee , ii , & u qu'on peut prendre à volonté, & ensuite, puisque ce n'est que le rapport des quantités b & c , qui se détermine, l'une & l'autre demeure encore indéterminée. Cependant les valeurs de ces quantités doivent être tellement prises, qu'il devienne $cc > ee$, $ii < ee$, & $ff < \frac{1}{2}ee$, ou $< \frac{1}{3}ee$, comme il a été remarqué cy-dessus (92).

C O R O L L. 2.

CVII. Donc si nous posons $ee = \lambda ff$, $cc = \mu ee$, & $ii = \eta ee$, de sorte que η marque le sinus de l'angle, sous lequel les canaux Ji doivent être inclinés à l'horizon; & il faut qu'il soit $\mu > 1$, & $\lambda > 2$, ou $\lambda > 3$. De là nous aurons :

I.

$$\begin{aligned}
 \text{I. } a &= h - \frac{DD}{4g\eta\eta e^4}; & \text{II. } \frac{\mu ee}{bb} &= \frac{DD}{4ge^4u} \left(\frac{1}{\eta\eta} - 1 \right); \\
 \text{III. } v &= h + u - \frac{DD}{2ge^4} \left(\frac{1}{\eta\eta} - 1 \right); & \& \text{IV. } \frac{e^4}{\lambda\lambda} v &= \frac{DD}{4g}; \\
 \text{ou } \lambda\lambda DD &= 4ge^4(h+u) - 2DD \left(\frac{1}{\eta\eta} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

C O R O L L. 3.

CVIII. Ou bien si nous posons l'angle de l'inclinaison des canaux Ji à l'horizon $= \rho$, pour avoir $\eta = \sin \rho$, & $\frac{1}{\eta\eta} - 1 = \frac{\cos \rho^2}{\sin \rho^2} = \cot \rho^2$, nous aurons :

$$4ge^4(h+u) = DD(\lambda\lambda + 2\cot \rho^2), \quad \& \quad ee = \frac{DV(\lambda\lambda + 2\cot \rho^2)}{2Vg(h+u)},$$

&

$$\frac{DD}{4ge^4} = \frac{h+u}{\lambda\lambda + 2\cot \rho^2}, \quad \text{donc } v = h+u - \frac{2(h+u)\cot \rho^2}{\lambda\lambda + 2\cot \rho^2} = \frac{\lambda\lambda(h+u)}{\lambda\lambda + 2\cot \rho^2}$$

&

$$\frac{\mu ee}{bb} = \frac{(h+u)\cot \rho^2}{u(\lambda\lambda + 2\cot \rho^2)} = \frac{\mu DV(\lambda\lambda + 2\cot \rho^2)}{2bbVg(h+u)}, \quad \text{d'où l'on tire}$$

$$bb = \frac{\mu Du(\lambda\lambda + 2\cot \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{2(h+u)^{\frac{3}{2}}\cot \rho^2 Vg}, \quad \& \quad a = h - \frac{h-u}{\lambda\lambda \sin \rho^2 + 2\cot \rho^2}.$$

C O R O L L. 4.

CIX. Donc si les nombres λ & μ avec l'angle ρ sont donnés, il ne reste que la quantité u , qu'on puisse prendre à volonté, ou bien la vitesse Vu , avec laquelle les embouchures F, F , tournent autour de l'axe de la machine. Mais la considération de la réaction fournira des déterminations plus propres à la Pratique.



PROBLEME XI.

Fig. 3. CX. Une telle Machine hydraulique étant construite pour une chute & dépense d'eau donnée, trouver le moment de la réaction de l'eau, & l'effet de la machine lorsqu'elle est tournée autour de l'axe avec une vitesse donnée.

SOLUTION.

Soit comme jusqu'ici D la quantité d'eau, que le réservoir peut fournir par seconde; h la hauteur de la chute entière; a la hauteur du vaisseau tournant $BBFF$; b la distance des embouchures F, F , à l'axe; ff la somme de toutes ces embouchures; ζ l'angle que la direction des embouchures fait avec la direction de leur mouvement de rotation; Vu la vitesse de ce mouvement; Vv la vitesse respective dont l'eau sort par ces embouchures; c la distance moyenne des orifices supérieurs E, E , à l'axe; ee leur amplitude totale unie dans l'espace annulaire $E, E, E, \&c.$; ii la somme des embouchures des canaux Ji, Ji , par lesquels l'eau descend du réservoir immobile $DDJJ$ dans le vaisseau mobile $BBFF$; & g la hauteur de la chute pendant une seconde, qu'on fait être de $15\frac{1}{8}$ pieds de Rhin. Cela posé, il faut qu'on ait satisfait à ces quatre équations :

$$I. \quad a = h - \frac{DD}{4gi^4};$$

$$II. \quad \frac{cc}{bb} = \frac{DD}{4gu} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right);$$

$$III. \quad v = h + u - \frac{DD}{2g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right) = h + u - \frac{2cc}{bb}u;$$

$$IV. \quad f^4 = \frac{DD}{4gv} = \frac{DDbb}{4g[bbh + (bb - 2cc)u]}.$$

& de plus les canaux Ji doivent être tellement inclinés à l'horizon, que le sinus de leur inclinaison soit $= \frac{ii}{ee}$, & il faut que ee soit considérablement plus grand que ff , & que ee ne surpasse point cc .

Main-



Maintenant, puisque la direction des tuyaux mobiles en E est nécessairement verticale, & que l'un & l'autre mouvement est supposé uniforme, le moment de la réaction de la machine sera :

$$2ff \left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} - b \right) Vvu - 2ffb v \cos \zeta ; \text{ par le §. 57.}$$

Ce moment produira donc le même effet, que s'il y avoit appliquée à la machine en F une force égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume seroit :

$$2ff \left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} - 1 \right) Vvu - 2ffv \cos \zeta ,$$

cette force agissant perpendiculairement sur le levier $CF = b$, pour accélérer le mouvement de rotation. Or cette force se mouvant de la vitesse Vu , elle sera capable de surmonter une résistance R, & de la faire mouvoir d'une vitesse Vw , de sorte qu'il soit :

$$RVw = 2ff \left(\left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} - 1 \right) Vvu - v \cos \zeta \right) Vu ,$$

& cette expression représente l'effet de la machine. Ou si l'on veut déterminer l'effet de la machine par le produit de la résistance R, par le chemin décrit dans une seconde, qui est $2Vgw$, cet effet sera :

$$4ff \left(\left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} - 1 \right) Vvu - v \cos \zeta \right) Vgu ,$$

ou la machine sera capable de mouvoir une résistance R, par un tel espace pendant une seconde, que le produit de la résistance R par cet espace soit précisément égal à l'expression trouvée. C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

CXI. L'effet de la machine pourra donc être exprimé en sorte

$$4ffVgv \cdot \left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} u - u - \cos \zeta \cdot Vvu \right) .$$

Or puisque $2ffVgv = D$, cet effet sera :

$$2D \left(\frac{c}{b} \frac{c}{b} u - u - \cos \zeta \cdot Vvu \right) ,$$



& mettant pour $\frac{c}{b}$, & v leurs valeurs trouvées, l'effet sera encore :

$$2D \left(\frac{DD}{4g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right) - u - \cos \zeta V \left(hu + uu - \frac{DDu}{2g} \left(\frac{1}{i^4} - 1 \right) \right) \right).$$

C O R O L L. 2.

CXII. Donc, si l'on met pour abrégé $\frac{DD}{4g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right) = k$, l'effet de la machine sera $= 2D [k - u - \cos \zeta V (hu + uu - 2ku)]$, & on aura $\frac{c}{b} = \frac{k}{u}$, & outre cela : $a = h - \frac{DD}{4gi^4}$; $v = h + u - 2k$, & $f^4 = \frac{DD}{4g(h+u-2k)}$, d'où l'on déduira les déterminations nécessaires pour la construction de la machine.

C O R O L L. 3.

CXIII. Connoissant la vitesse Vu , & la distance $CF = b$, on pourra déterminer le tems, que la machine met à achever une révolution autour de l'axe AC. Car posant $1 : \pi$ pour le rapport du diamètre à la circonférence, la circonférence du cercle FF &c. est $= 2\pi b$, & puisque l'espace parcouru avec la vitesse Vu dans une seconde est $= 2Vgu$, le tems d'une révolution de la machine sera $= \frac{\pi b}{Vgu}$ secondes.

P R O B L E M E XII.

CXIV. *Les conditions du problème précédent demeurant les mêmes, trouver les déterminations nécessaires pour que l'effet de la machine devienne le plus grand, qu'il est possible.*

S O L U T I O N.

Considérons l'expression de l'effet, qui a été donné §. 112. comme la plus simple, & qui posant $\frac{DD}{4g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right) = k$

est



$$\text{est } 2 D [k - u - \cos \zeta \cdot V(hu + uu - 2ku)],$$

& pour procurer à cette expression la plus grande valeur possible, il est d'abord clair que, par rapport à l'angle ζ , elle ne sauroit devenir plus grande, que lorsque $\cos \zeta = -1$, & partant $\zeta = 180^\circ$. Voilà donc la première condition à remplir, en vertu de laquelle la direction des embouchures F, F' doit être diamétralement opposée à la direction de leur mouvement. Ayant donc rempli cette condition, l'effet de la machine sera :

$$2 D [k - u + V(hu + uu - 2ku)].$$

Maintenant cherchons quelle valeur il faut donner à u , pour rendre cette expression un *Maximum*, & on trouvera

$$1 = \frac{\frac{1}{2}h + u - k}{V(hu + uu - 2ku)}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$0 = \frac{1}{4}hh - hk + kk, \text{ ou bien } k = \frac{1}{2}h.$$

Par conséquent il faut arranger la machine en sorte qu'il soit

$$\frac{DD}{4g} \left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} \right) = \frac{1}{2}h,$$

& alors l'effet de la machine sera :

$$2 D \left(\frac{1}{2}h - u + Vuu \right) = D h,$$

& à cette heure il est évident, qu'il ne sauroit en aucune façon être rendu plus grand, puisqu'il est déterminé uniquement par la dépense d'eau D , & la hauteur de la chute entière h .

Donc, pour obtenir ce plus grand effet, la condition requise outre l'angle $\zeta = 180^\circ$ exige qu'il soit :

$$\frac{1}{i^4} - \frac{1}{e^4} = \frac{2gh}{DD}, \text{ ou } \frac{1}{i^4} = \frac{1}{e^4} + \frac{2gh}{DD},$$

& cette valeur étant substituée dans les formules précédentes donne

$$a = \frac{1}{2}h - \frac{DD}{4ge^4}; \quad \frac{cc}{bb} = \frac{h}{2u}; \quad v = u, \quad \& \quad f^4 = \frac{DD}{4gu}.$$

Nous



Nous n'avons donc plus que deux quantités indéterminées u & ee , mais qu'il faut prendre en sorte, que $\frac{D D}{g g u}$ devienne plusieurs fois plus petit que e^4 , ou posant $ee = \lambda ff$, qu'il soit $\frac{e^4}{\lambda \lambda} = \frac{D D}{4 g u}$, ou bien $ee \sqrt{g u} = \frac{1}{2} \lambda D$, ou $2 ee \sqrt{g u} = \lambda D$. C. Q. F. T.

C O R O L L. I.

CXV. La quantité du plus grand effet Dh , que la machine est capable de produire, est bien remarquable à cause de sa simplicité, par laquelle nous voyons, que la dépense d'eau par seconde D multipliée par la hauteur de la chute h donne le même produit, que la résistance multipliée par l'espace parcouru dans une seconde: pourvu qu'on exprime la résistance par un volume d'eau, au poids duquel elle est égale.

C O R O L L. 2.

CXVI. Il est aussi fort remarquable que, pour procurer le plus grand effet, la vitesse respective de l'eau par les embouchures F doit être précisément égale à la vitesse même des embouchures: d'où il s'ensuit, que la vitesse vraie, dont l'eau sort par les embouchures F évanouit: & partant l'eau en tombera perpendiculairement. Ainsi il n'y aura point à craindre que les jets d'eau, qui sortent par les embouchures, frappent les embouchures suivantes, & qu'ils causent par là quelque obstacle au mouvement de la machine.

C O R O L L. 3.

CXVII. Puisque les quantités ee & u demeurent indéterminées, & que $2 ee \sqrt{g u}$ doit du moins être quelquefois plus grand que la dépense d'eau D , il faut prendre l'amplitude ee , & la vitesse \sqrt{u} telles, que la quantité d'eau, qui couleroit dans une seconde par une ouverture $= ee$ avec la vitesse $= \sqrt{u}$, soit quelquefois plus grande que la dépense d'eau D par seconde.

C O R O L L. 4.

CXVIII. Il faut aussi considérer, que l'angle, que les canaux Ji font avec l'horizon, ne doit pas être trop petit, puisque cela demanderoit



roit trop de diaphragmes dans la Fig. 4. & diminueroit par conséquent trop considérablement la juste quantité d'eau : au lieu que, si l'eau devoit tomber perpendiculairement par ces canaux, on pourroit s'en passer entièrement. Posant donc cet angle de l'inclinaison $= \rho$, de sorte que

$$ii = ee \sin \rho, \text{ on aura } \frac{i}{e^4 \sin \rho^2} = \frac{i}{e^4} + \frac{2gh}{D D}, \text{ ou } \frac{\cos \rho^2}{e^4 \sin \rho^2} = \frac{2gh}{D D},$$

$$\text{d'où l'on tire } ee \tan \rho = \frac{D}{V 2gh}.$$

C O R O L L. 5.

CXIX. Donc, si l'on regarde l'angle ρ comme connu, on aura $ee = \frac{D}{\tan \rho V 2gh}$. De là ayant $2ee Vgu = \lambda D$, on déterminera

aussi la vitesse de rotation $Vu = \frac{1}{2} \lambda \tan \rho V 2h$; avec laquelle donc un corps parcourra dans une seconde l'espace $= \lambda \tan \rho V 2gh$. En-

suite on aura $ii = \frac{D \cos \rho}{V 2gh}$, & $a = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} h \tan \rho^2 = \frac{1}{2} h (1 - \tan \rho^2)$,

d'où l'on voit que l'angle ρ doit absolument être plus petit qu'un demi-droit : & que la hauteur du vaisseau mobile AC doit être moindre que celle du réservoir HA.

C O R O L L. 6.

CXX. Or ayant choisi convenablement l'angle ρ , & déterminé par là $ee = \frac{D}{\tan \rho V 2gh}$, $ii = ee \sin \rho$, $ff = \frac{ee}{\lambda}$, $Vu = \frac{1}{2} \lambda \tan \rho V 2h$,

& $a = \frac{1}{2} h (1 - \tan \rho^2)$, on a encore cette équation $\frac{cc}{bb} = \frac{h}{2u} = \frac{i}{\lambda \tan \rho^2}$,

ou $\frac{c}{b} = \frac{i}{\lambda \tan \rho}$. Or cc ne pouvant être plus petit que ee , si nous

posons $cc = \mu ee$, nous obtiendrons $bb = \frac{\lambda \mu D \tan \rho}{V 2gh}$, ou

$b = \lambda c \operatorname{tang} \rho$, & par là toute la machine sera déterminée : & le tems d'une révolution fera $= \frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$ secondes.

C O R O L L. 7.

CXXI. Afin que le mouvement de rotation, ou la vitesse V_u , ne devienne pas trop rapide, ce qui pourroit causer un empêchement de la part de la résistance de l'air, il faut prendre la quantité $\lambda \operatorname{tang} \rho$ aussi petite qu'il sera possible, sur tout lorsque la hauteur h est assés grande. Or on ne sauroit mettre cette valeur moindre que l'unité, puisque la vitesse de rotation de l'anneau EE , est constamment $= \frac{bV_u}{c} = V_{\frac{1}{2}h}$, donc, pour que la vitesse en F ne devienne pas plus grande, il faut qu'il soit $b = c$, & partant $\lambda \operatorname{tang} \rho = 1$.

C O R O L L. 8.

CXXII. Cependant dans ce cas il seroit à craindre, qu'on ne pût pratiquer dans le fond des ouvertures F , aussi larges qu'il faut, ou qu'il fut $ff = \frac{1}{\lambda} ee$, à moins qu'on ne donne au nombre λ une valeur plus grande. Mais alors l'angle ρ devrait être pris trop petit, & on auroit à craindre l'inconvénient des diaphragmes, dont les canaux Ji doivent être séparés entr'eux. Par cette raison il conviendra de donner à $\lambda \operatorname{tang} \rho$ une valeur plus grande que l'unité, par exemple $\lambda \operatorname{tg} \rho = \frac{3}{2}$; & mettre $\lambda = 3$; $\operatorname{tang} \rho = \frac{1}{2}$, ou l'angle $\rho = 26^{\circ}, 34'$. Alors on aura: $ee = \frac{2D}{\sqrt{2gh}}$; $cc = \mu ee$; $b = \frac{3}{2}c$; $ff = \frac{1}{3}ee$; $ii = \frac{ee}{\sqrt{5}}$, & $a = \frac{3}{4}h$, & chaque tour de la machine s'acheveroit en $\frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$ secondes.

S C H O L I E.

CXXIII. Cet arrangement de la machine paroît le plus commode pour la plûpart des circonstances, qu'on peut rencontrer. Dans
ce



ce cas donc les diaphragmes, qui séparent les canaux Ji , feront un angle de $26^{\circ}, 34'$, dont la tangente est $\equiv \frac{1}{2}$, & ces canaux avec leurs diaphragmes Ji seront disposés, comme la Fig. 5. les représente. Or pour calculer les quantités $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$ & $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$ pour chaque nombre de pieds de la hauteur que la chute h peut contenir, j'ai ajouté ici la table suivante, où je suppose la hauteur h donnée en pieds de Rhin :

la hauteur h en pieds de Rhin	valeur de $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$	valeur de $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$
1	0,35777	1,12397
2	0,25298	0,79477
3	0,20656	0,64892
4	0,17888	0,56158
5	0,16000	0,50265
6	0,14606	0,45886
7	0,13523	0,42482
8	0,12649	0,39738
9	0,11925	0,37465
10	0,11314	0,35543
11	0,10787	0,33889
12	0,10328	0,32446
13	0,09923	0,31173
14	0,09562	0,30040
15	0,09238	0,29021
16	0,08944	0,28098
17	0,08677	0,27260
18	0,08433	0,26492
19	0,08208	0,25787
20	0,08000	0,25132



Or alors la dépense d'eau fournie par seconde D doit aussi être exprimée en pieds cubiques, & on trouvera les largeurs ee , ff , ii en pieds quarrés : comme nous allons voir dans les exemples suivans.

E X E M P L E I.

CXXIV. *La dépense d'eau fournie par seconde étant $\equiv 1$ pied cubique, & la hauteur de la chute $h \equiv 6$ pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h \equiv 6$, la hauteur du vaisseau mobile AC fera $\equiv 2\frac{1}{4}$ pieds, & partant la hauteur du reservoir $HA \equiv 3\frac{3}{4}$ pieds. Ensuite, à cause de $D \equiv 1$, on aura $ee \equiv 0,14606$ pieds quarrés ; donc $ff \equiv 0,04868$ pieds quarrés. Ensuite on pourra bien prendre le rayon $c \equiv 1$ pied, & on aura $b \equiv 1\frac{1}{2}$ pieds, & le tems d'une révolution de la machine fera $0,45886$ secondes, ou de $27\frac{1}{2}$ tierces.

Ou bien si l'on veut prendre $c \equiv 2$ pieds, & $b \equiv 3$ pieds, le tems d'une révolution fera de 55 tierces, & en quelque raison qu'on prenne c plus grand, tant le rayon b que le tems d'une révolution seront augmentés dans la même raison. Or l'effet que cette machine fera capable de produire est $\equiv 1 \cdot 6 \equiv 6$.

E X E M P L E II.

CXXV. *La dépense d'eau fournie par seconde étant $\equiv 2$ pieds cubiques, & la hauteur de la chute $h \equiv 6$ pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h \equiv 6$, la hauteur du vaisseau mobile AC fera comme auparavant $a \equiv 2\frac{1}{4}$ pieds, & la hauteur du reservoir $HA \equiv 3\frac{3}{4}$ pieds. Ensuite, à cause de $D \equiv 2$, on aura l'espace annulaire $ee \equiv 0,29212$ pieds quarrés, & $ff \equiv 0,09737$ pieds quarrés. On pourra encore prendre $c \equiv 1$ pied, & $b \equiv 1\frac{1}{2}$ pieds, & le tems d'une révolution de la machine fera de $27\frac{1}{2}$ tierces.



Si l'on vouloit prendre $c = 2$ pieds, on auroit $b = 3$ pieds, & la machine devroit tourner en 55 tierces. Or l'effet de cette machine fera toujours double de celui du cas précédent, & partant $= 12$.

E X E M P L E III.

CXXVI. *La dépense d'eau fournie par seconde étant 1 pied cubique, & la hauteur de la chute $h = 12$ pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 12$ pieds, la hauteur du vaisseau mobile sera $AC = 4\frac{1}{2}$ pieds, & de l'immobile $HC = 7\frac{1}{2}$ pieds. Ensuite, à cause de $D = 1$, l'espace annulaire EE doit être pris $= 0,10328$ pieds quarrés, donc $ff = 0,03443$ pieds quarrés. Donc si l'on donne au rayon $c = 1$ pied pour avoir $b = 1\frac{1}{2}$ pied, le tems d'une révolution de la machine doit être de 0,32446 secondes, ou de $19\frac{1}{2}$ tierces : ou bien elle devroit faire environ trois tours dans une seconde, & l'effet de la machine seroit $= 12$.

Si l'on vouloit prendre $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution devroit être de 39 tierces.

E X E M P L E IV.

CXXVII. *La dépense d'eau fournie par seconde étant 2 pieds cubiques, & la hauteur de la chute $h = 12$ pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 12$ pieds, la hauteur du vaisseau mobile sera $AC = 4\frac{1}{2}$ pieds, & de l'immobile $HC = 7\frac{1}{2}$ pieds. Ensuite, à cause de $D = 2$, l'espace annulaire EE doit être pris de $ee = 0,20656$ pieds quarrés, & $ff = 0,06885$ pieds quarrés. Donc, si l'on prend $c = 1$ pieds & $b = 1\frac{1}{2}$ pieds, le tems d'une révolution de la machine sera $19\frac{1}{2}$ tierces. Or si l'on prenoit $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution seroit de 39 tierces, mais l'effet sera toujours $= 24$.



E X E M P L E V.

CXXVIII. *La dépense d'eau fournie par seconde étant de 10 pieds cubiques, & la hauteur de la chute $h = 8$ pieds, trouver la machine hydraulique la plus avantageuse.*

Puisque $h = 8$ pieds, la hauteur du vaisseau inférieur mobile sera $AC = 3$ pieds, & du réservoir $HA = 5$ pieds. Ensuite D étant $= 10$, & $h = 8$, l'espace annulaire doit être $ee = 1,26490$ pieds quarrés, & la somme de toutes les embouchures $ff = 0,42163$ pieds quarrés. Donc, puisque cc doit être plus grand que ee , si l'on prend $c = 2$ pieds, & $b = 3$ pieds, le tems d'une révolution doit être de $2.0,39738 = 0,79476$ secondes $= 47 \frac{3}{4}$ tieres. Or l'effet de la machine sera $= 10.8 = 80$.

S C H O L I E.

CXXIX. Maintenant il ne sera plus difficile d'arranger une telle machine hydraulique pour chaque cas proposé. Car ayant la dépense d'eau D fournie par seconde, & la hauteur de la chute h , toutes les parties de la machine seront déterminées. Ensuite si la résistance, qu'on veut vaincre par cette machine, ou le fardeau qu'on veut élever, est $= R$, où R marque un volume d'eau, dont le poids lui est égal, la machine sera capable de mouvoir cette résistance R dans une seconde par un espace $= \frac{Dh}{R}$. Donc, le point F faisant dans une seconde l'espace $= 2\sqrt{gu} = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$, la vitesse de la résistance sera à celle des points F comme $\frac{Dh}{R}$ à $\frac{3}{2}\sqrt{2gh}$, ou comme ff à $\frac{R}{h}$. Donc, si l'on applique la machine à cette résistance par le moyen d'un tambour, dont le rayon soit $= k$, & qui fasse une révolution, pendant que la machine en fait n , la raison trouvée $\frac{Dh}{R} : \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$ doit être $= k : nb$, d'où l'on voit que $\frac{3}{2}Rk\sqrt{2gh} = nDbh = \frac{3}{2}nDch$;
ou



ou $Rk = \frac{nDch}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}nceeh$. Ou bien, posant le tems d'une révo-

lution de la machine $= \tau$ secondes, à cause de $\frac{c}{\sqrt{2gh}} = \frac{\tau}{2\pi}$, on

aura $\frac{n\tau}{2\pi} Dh = Rk$, & partant $\frac{k}{n} = \frac{\tau Dh}{2\pi R}$; & de là on tirera aisé-

ment les plus commodes valeurs pour k & n , d'où l'on réglera en-
suite l'application de la machine à la résistance proposée. Souvent,
comme dans les moulins, on ne connoit que le moment de la résis-

tance, qui est exprimé ici par Rk : donc si Rk est le moment de la résis-

tance d'une meule, on aura d'abord le nombre $n = \frac{2\pi Rk}{\tau Dh}$, qui
marque combien de fois on doit faire tourner la machine, pendant
que la meule fait un tour.

