DE MOTV CORPORVM COELESTIVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PERTVRBATO.

AVCT. L. EVLERO.

1.

Motus corporum coelestium censetur regularis, nullisque inaequalitatibus perturbatus, si ea ita reuoluuntur in ellipsi aliaue sectione conica, vt circa alterutrum focum areas temporibus proportionales describant. Notum autem est, huiusmodi motum regularem oriri, si corpora ad istum focum continuo sollicitentur viribus, quae sint quadratis distantiarum reciproce proportionales. Ex quo intelligitur, si vires sollicitantes ab hac lege recedant, motum proditurum esse irregularem, ita vt vel orbita non amplius sit ellipsis, vel areae circa focum descriptae rationem temporum non amplius sequantur. In motu ergo planetarum primariorum perturbatio oriri debet, si praeter vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem, qua ad solem vrgentur, aliis quoque viribus quibuscunque sollicitantur; in planetis autem secundariis seu satellitibus motus perturbatio aestimanda est ex viribus, quibus praeter eam vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem, qua ad suos planetas principales pelli concipiuntur, insuper sollicitantur.

2. Si planeta motu regulari fertur, seu per ellipsis perimetrum ita progreditur, vt circa alterutrum eius focum areas temporibus proportionales conficiat, eius motus sequenti modo ad certas leges reuocatur. Primo scilicet tam positio, quam longitudo axis transuersi ellipsis definiri debet; tum vero species eius, quae siue axe coniugato, siue parametro, siue excentricitate determinatur; tertio ad quodvis tempus propositum anomaliam planetae mediam assignare oportet, quae inuenitur, si a longitudine media longitudo aphelii seu summae absidis subtrahatur. Sicque, si tam tempus periodicum fuerit cognitum, quam momentum, quo planeta semel in abside summa fuerit versatus, inde ad quoduis tempus propositum anomalia media colligi poterit. Ex anomalia autem media porro et specie ellipsis per problema *Keplerianum* definitur anomalia vera, atque distantia planetae a foco; vnde si ad anomaliam veram longitudo absidis summae addatur, orietur tandem longitudo vera; quae eadem quoque obtinetur, si excessus anomaliae verae supra anomaliam mediam ad longitudinem mediam addatur, siue defectus ab ea subtrahatur; qui excessus, vel defectus ab Astronomis Prosthaphaeresis appellari solet.

3. In motu regulari tam positio lineae absidum seu axis transuersi, quam eius quantitas vna cum excentricitate perpetuo manent eadem, ita vt, si hae res semel fuerint cognitae, eae nulli deinceps immutationi sint obnoxiae. Harum ergo rerum constantia primarium constituit discrimen inter motum regularem, et irregularem; ita vt, si vel positio axis transuersi, vel eius quantitas,

vel

vel excentricitas mutabilis existeret, motus non amplius esset regularis, sed irregularis. Atque hinc motus quicunque irregularis ita saltem ad speciem motus regularis reuocari poterit, vt istae res tanquam variabiles considerentur. Vtcunque enim motus fuerit perturbatus, quaeuis eius portio minima ad motum regularem referri potest, dummodo situs, quantitas, et species ellipsis definiatur, ad quam spatii elementum a corpore descriptum pertineat.

4. Effectus ergo virium motum alias regularem perturbantium in hoc consistet, vt vel positionem lineae absidum immutet, vel axem ellipsis transuersum, vel eius excentricitatem. Atque si constet, quantam mutationem vires quaecunque perturbantes his tribus rebus pro quouis tempore induxerint, locus planetae inde aeque facile definietur, atque in motu regulari. Quocirca iste modus effectum virium perturbantium determinandi aptissimus atque ad vsum Astronomiae accommodatissimus videtur. Eo autem Astronomi iam reipsa vtuntur, dum in planetis principalibus loca apheliorum mobilia statuunt, et in luna non solum apogaeo, sed etiam excentricitati mutationem continuam tribuere solent. Quo igitur facilius effectum virium quarumcunque perturbantium hoc modo per calculum definire liceat, motum primo regularem, qui oritur a viribus reciproce quadrato distantiae proportionalibus ad calculum reuocabo, quo facto problemata ad motus perturbationem spectantia commodius tractari poterunt.

PROBLEMA. I.

5. *Determinare motum corporis, quod ad punctum* TAB. III.

X 2 *fixum* Fig. 6.

fixum C perpetuo sollicitatur viribus distantiae eius ab hoc puncto quadratis reciproce proportionalibus.

SOLVTIO.

In plano orbitae, quam corpus circa punctum fixum C $d e$ scribit, ducatur recta C a ad punctum coeli fixum, a quo elongatio seu longitudo corporis quouis tempore computetur. Elapso tempore t peruenerit corpus in M, ac ponatur eius a puncto C distantia $CM = x$, et longitudo seu angulus $ACM = \Phi$. Vis autem acceleratrix, qua corpus hic ad C vrgetur, sit $= \frac{C}{xx}$; vbi C denotat quantitatem constantem, qua intensitas absoluta huius vis determinatur. His positis ex legibus motus colligitur, motum huius corporis sequentibus binis aequationibus differentio-differentialibus exprimi, sumto elemento temporis dt constante:

I. $2\,dx\,d\Phi + x\,dd\Phi = 0$; II. $ddx - x\,d\Phi^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{C}{xx} = 0$.

Minus autem conuenit in his aequationibus elemento temporis dt vti; atque ad homogeneitatem seruandam praestabit loco temporis absoluti motum solis medium introducere, quippe qui aptissimam temporis mensuram suppeditat. Sit igitur distantia solis media a terra $= a$; eius longitudo media tempori t respondens $= \zeta$; et pro distantia x vis solis in terram $= \frac{A}{xx}$, quae si pro $\frac{C}{xx}$ scribatur, ponaturque $x = a$, et $\Phi = \zeta$, vt formulae traditae motum solis medium referant, ob $dx = 0$, et $dd\Phi = 0$, erit $-a\,d\zeta^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{aa} = 0$, ideoque $\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3}{A}d\zeta^2$; qui valor si substituatur, aequatio secunda abit in:

ddx

$$d\,d\,x - x\,d\,\Phi^2 + \frac{C\,a^3}{A\,x\,x}\,d\,\zeta^2 = 0.$$

At prima aequatio integrata, ob $d\,\zeta$ iam conſtans, praebet $x\,x\,d\,\Phi = E\,d\,\zeta$, vnde fit $d\,\Phi = \frac{E\,d\,\zeta}{x\,x}$, et $x\,d\,\Phi^2 = \frac{E\,E\,d\,\zeta^2}{x^3}$; ſubſtituatur hic valor in illa aequatione, vt habeatur:

$$d\,d\,x - \frac{E\,E\,d\,\zeta^2}{x^3} + \frac{C\,a^3\,d\,\zeta^2}{A\,x\,x} = 0,$$

quae multiplicata per $2\,d\,x$, et integrata dabit

$$d\,x^2 + \frac{E\,E\,d\,\zeta^2}{x\,x} - \frac{2\,C\,a^3\,d\,\zeta^2}{A\,x} + F\,d\,\zeta^2 = 0,$$

ex qua elicitur:

$$d\,\zeta = \frac{x\,d\,x}{\sqrt{(-E\,E + \frac{2\,C\,a^3\,x}{A} - F\,x\,x)}},$$

$$\text{et } d\,\Phi = \frac{E\,d\,x}{x\sqrt{(-E\,E + \frac{2\,C\,a^3\,x}{A} - F\,x\,x)}};$$

vbi E, et F ſunt quantitates conſtantes ex natura orbitae definiendae. Ponatur $x = \frac{b}{z}$, vt ſit $d\,x = \frac{-b\,d\,z}{z\,z}$, et $\frac{d\,x}{x} = \frac{-d\,z}{z}$, eritque:

$$d\,\zeta = \frac{-\,b\,b\,d\,z}{z\,z\sqrt{(-E\,E\,z\,z + \frac{2\,C\,a^3\,b\,z}{A} - F\,b\,b)}},\ \text{et}$$

$$d\,\Phi = \frac{-\,E\,d\,z}{\sqrt{(-E\,E\,z\,z + \frac{2\,C\,a^3\,b}{A}z - F\,b\,b)}},$$

quae poſtrema aequatio a quadratura circuli aperte pendet, ad eamque integrandam notandum eſt, z maximum et minimum valorem obtinere poſſe, quorum vtroque formula irrationalis in nihilum abeat. Sit igitur ad conſtantes E et F definiendas, $1 + k$ valor ipſius z maximus, et $1 - k$ valor minimus, vt 1 ſit eius valor medius; atque

$(1+k-z)(z-1+k)=-(1-kk)+2z-zz$ debebit esse factor quantitatis post signum radicale constitutae, altero factore existente EE, vnde oritur

$$\frac{Ca^3b}{A}=EE, \text{ et } Fbb=EE(1-kk),$$

fietque $\surd\left(-EEzz+\frac{2Ca^3bz}{A}-Fbb\right)=E\surd(1+k-z)(z-1+k)=E\surd[kk-(z-1)^2]$; Ergo, ob $E=\surd\frac{Ca^3b}{A}$, erit

$$d\zeta=\frac{-bbdz}{zz\surd\frac{Ca^3b}{A}[kk-(z-1)^2]}=\frac{-dz\surd\frac{Ab^3}{Ca^3}}{zz\surd[kk-(z-1)^2]};$$

$$d\Phi=\frac{-dz}{\surd[kk-(z-1)^2]}.$$

Quia $z=1+k$ est maximus, et $z=1-k$ minimus valor, quilibet medius ita exprimetur commode $z=1+k\cos. s$, eritque $\surd[kk-(z-1)^2]=k\sin. s$, et $dz=-kds\sin. s$: vnde fit

$$d\zeta=\frac{ds\surd\frac{Ab^3}{Ca^3}}{(1+k\cos. s)^2}, \text{ et } d\Phi=ds,$$

atque $x=\frac{b}{1+k\cos. s}$; hincque $\Phi=D+s$. Quia angulus $ACM=\Phi$, capiatur angulus ACP = quantitati constanti D, eritque angulus $PCM=s$; qui qualis sit respectu orbitae ex distantia $x=\frac{b}{1+k\cos. s}$ colligi poterit. Nam si sit $s=0$, quo casu CM abit in CP, erit $CP=\frac{b}{1+k}$; erit ergo P id orbitae punctum, vbi corpus minime a puncto C distat, ideoque est absis ima, seu perihelium, si C sit sol. Cum igitur distantia minima sit $=\frac{b}{1+k}$, et prodeat, si $s=0$; distantia maxima prodibit ponendo $s=180°$, fitque $=\frac{b}{1-k}$; sicque distantiae minimae e diametro erit opposita: vnde

vnde summa harum ambarum distantiarum maximae et minimae, $= \frac{2b}{1-kk}$ dabit axem transuersum orbitae, et cum, posito $s = 90^\circ$, distantia fiat semilateri recto aequalis, erit semilatus rectum $= b$; hincque axis coniugatus $= \frac{2b}{\sqrt{(1-kk)}}$. Porro axis transuersus cum sit $= \frac{2b}{1-kk}$, et distantia focorum, (quae est excessus distantiae maximae supra minimam) $= \frac{2bk}{1-kk}$, haec per axem transuersum diuisa dabit excentricitatem $= k$. Tum vero manifestum est, angulum P C M $= s$ referre anomaliam veram ab absside ima computatam, cuius longitudo seu angulus A C P si ponatur $= \omega$; erit longitudo corporis A C M $= \Phi = \omega + s$. Vnde haec nascitur problematis solutio:

Corpus mouebitur in sectione conica, cuius si fuerit 1°. semi-latus rectum $= b$; 2°. excentricitas $= k$; 3°. locus absidis imae seu angulus A C P $= \omega$; ad quoduis tempus locus corporis in orbita ita assignabitur. Pro tempore proposito, cui respondeat longitudo solis $= \zeta$, quaeratur corporis anomalia vera $= s$, ex hac aequatione: $d\zeta = \frac{ds}{(1+k\cos s)^2} \sqrt{\frac{A\,b^3}{C\,a^3}}$, qua inuenta erit longitudo corporis seu angulus A C M $= \Phi = \omega + s$, et distantia eius C M $= x = \frac{b}{1+k\cos s}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

6. Cum ergo sit $d\zeta \sqrt{\frac{C\,a^3}{A\,b^3}} = \frac{ds}{(1+k\cos s)^2}$, totum negotium redit ad integrationem formulae huius differentialis, quae euoluitur in hanc formam:

$d\zeta \sqrt{}$

$d\zeta\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = ds(1 - 2k\,\text{cos}.s + 3k^2\,\text{cos}.s^2 - 4k^3\,\text{cos}.s^3 + 5k^4\,\text{cos}.s^4 - \text{etc.})$, qui termini, nisi excentricitas k sit valde magna, tantopere conuergunt, vt sufficiat aliquot ab initio assumsisse. Verum ad integrationem absoluendam conueniet, potestates cosinus anguli s in cosinus angulorum multiplorum conuertere, secundum has formulas:

$$\text{cos}.\,s = \text{cos}.\,s$$
$$\text{cos}.\,s^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{cos}.\,s + \tfrac{1}{4}\,\text{cos}.\,3s$$
$$\text{cos}.\,s^5 = \tfrac{3\cdot5}{4\cdot6}\,\text{cos}.\,s + \tfrac{5}{16}\,\text{cos}.\,3s + \tfrac{1}{16}\,\text{cos}.\,5s$$
$$\text{cos}.\,s^7 = \tfrac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\,\text{cos}.\,s + \tfrac{21}{64}\,\text{cos}.\,3s + \tfrac{7}{64}\,\text{cos}.\,5s\ \text{etc.}$$
$$\text{cos}.\,s^9 = \tfrac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\,\text{cos}.\,s + \tfrac{21}{64}\,\text{cos}.\,3s + \tfrac{9}{64}\,\text{cos}.\,5s\ \text{etc.}$$

etc.

$$\text{cos}.\,s^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,2s$$
$$\text{cos}.\,s^4 = \tfrac{1\cdot3}{2\cdot4} + \tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,2s + \tfrac{1}{8}\,\text{cos}.\,4s$$
$$\text{cos}.\,s^6 = \tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} + \tfrac{15}{32}\,\text{cos}.\,2s + \tfrac{3}{16}\,\text{cos}.\,4s + \tfrac{1}{32}\,\text{cos}.\,6s$$
$$\text{cos}.\,s^8 = \tfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \tfrac{7}{16}\,\text{cos}.\,2s + \tfrac{7}{32}\,\text{cos}.\,4s + \tfrac{1}{16}\,\text{cos}.\,6s\ \text{etc.}$$
$$\text{cos}.\,s^{10} = \tfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10} + \tfrac{105}{256}\,\text{cos}.\,2s + \tfrac{15}{64}\,\text{cos}.\,4s + \tfrac{45}{512}\,\text{cos}.\,6s\ \text{etc.}$$

etc.

Erit ergo:

$$\begin{aligned} d\zeta\tfrac{Ca^3}{Ab^3} = {} & ds\left(1 + \tfrac{3}{2}kk + \tfrac{3\cdot5}{2\cdot4}k^4 + \tfrac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}k^6 + \tfrac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}k^8 + \text{etc.}\right) \\ & - 2\,ds\,\text{cos}.s\left(k + \tfrac{3}{2}k^3 + \tfrac{3\cdot5}{2\cdot4}k^5 + \tfrac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}k^7 + \tfrac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}k^9 + \text{etc.}\right) \\ & + ds\,\text{cos}.\,2s\left(\tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{5}{2}k^4 + \tfrac{105}{32}k^6 + \tfrac{63}{16}k^8 + \text{etc.}\right) \\ & - ds\,\text{cos}.\,3s\left(k^3 + \tfrac{15}{8}k^5 + \tfrac{21}{8}k^7 + \tfrac{105}{32}k^9 + \text{etc.}\right) \\ & + ds\,\text{cos}.\,4s\left(\tfrac{5}{8}k^4 + \tfrac{21}{16}k^6 + \tfrac{63}{32}k^8 + \text{etc.}\right) \\ & - ds\,\text{cos}.\,5s\left(\tfrac{3}{8}k^5 + \tfrac{7}{8}k^7 + \tfrac{45}{32}k^9 + \text{etc.}\right) \\ & + ds\,\text{cos}.\,6s\left(\tfrac{7}{32}k^6 + \tfrac{9}{16}k^8 + \text{etc.}\right) \end{aligned}$$

et

et integrando habebitur $\zeta \sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} =$

$$= \text{const.} + s(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3.5}{2.4}k^4 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^6 + \text{etc.})$$
$$- 2k \sin. s(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3.5}{2.4}k^4 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^6 + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{3}{4}k^2 \sin. 2s(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3 \sin. 3s(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{5}{32}k^4 \sin. 4s(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5 \sin. 5s(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{7}{192}k^6 \sin. 6s(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

COROLL. 2.

7. Patet hic coefficientem ipsius s esse $= \frac{1}{(1-kk)\sqrt{(1-kk)}}$. Quare si aequatio nostra per $(1-kk)^{\frac{3}{2}}$ multiplicetur, orietur $\zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1-kk)^3}{A b^3}} =$

$$= \text{Const.} + s - 2k \sin. s + \tfrac{3}{4}k^2(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6) \sin. 2s$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3 \sin. 3s(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4) + \tfrac{5}{32}k^4(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4) \sin. 4s$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5(1 + \tfrac{5}{6}kk) \sin. 5s + \tfrac{7}{192}k^6(1 + \tfrac{15}{14}kk) \sin. 6s$$
$$\text{etc.}$$

vbi notari conuenit, fractionem $\frac{b}{1-kk}$ exprimere semiaxem transuersum. Erit ergo $\zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1-kk)^3}{A b^3}} - \text{Const.}$ anomalia media, quippe quae tempori est proportionalis, vnde si anomalia media ponatur $= r$, quae pariter ab abside ima computetur, erit $r = \zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1-kk)^3}{A b^3}} - \text{Const.}$ atque

$$s = r + 2k \sin. s - \tfrac{3}{4}k^2(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6) \sin. 2s$$
$$+ \tfrac{1}{3}k^3(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4) \sin. 3s - \tfrac{5}{32}k^4(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4) \sin. 4s$$
$$+ \tfrac{1}{16}k^5(1 + \tfrac{5}{6}kk) \sin. 5s - \tfrac{7}{192}k^6(1 + \tfrac{15}{14}kk) \sin. 6s$$

quae formula ad excentricitates satis notabiles se extendit, ex eaque leui negotio per approximationes ad datam quamuis anomaliam mediam r, ei respondens anomalia vera s, poterit inuestigari. Quod si forte difficile videatur; ad singulos gradus anomaliae verae s quaeratur anomalia media r, qua tabula constructa sine labore inde tabula inuersa formabitur, quae ad singulos gradus anomaliae mediae r respondentes anomalias veras s exhibeat.

COROLL. 3.

8. Inventa autem anomalia vera s, quia longitudo absidis imae posita est $= \omega$, erit longitudo vera seu angulus $ACM = \Phi = \omega + s$. Hinc porro eruitur distantia $CM = x = \frac{b}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}$; pro qua, cum ex anomalia media r constet vera s, ad singulos gradus anomaliae mediae r tabula distantiarum x poterit concinnari. Diameter autem corporis ex C spectati apparens, vt et eius parallaxis horizontalis, erit, vt $1 + k\,\mathrm{cos}.s$.

COROLL. 4.

9. Motus quoque huius corporis horarius ex aequatione differentiali colligi poterit, quae est $d\zeta = \frac{ds\sqrt{Ab^3 : Ca^3}}{(1 + k\,\mathrm{cos}.s)^2}$. Nam si $d\zeta$ denotat motum horarium solis medium, erit $d\Phi$ seu ds motus horarius corporis verus, quatenus ex puncto C spectatur. Hinc ergo erit motus horarius solis medius, qui est 148″ ad motum horarium corporis, vt 1 ad $(1 + k\,\mathrm{cos}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$: vnde motus horarius corporis erit $= 148''(1 + k\,\mathrm{cos}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$. Seu cum sit $x = \frac{b}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}$, erit $(1 + k\,\mathrm{cos}.s)^2 = \frac{bb}{xx}$, ideoque motus horarius erit $= 148'' \sqrt{\frac{Ca^3b}{Ax^4}}$.

COROLL.

COROLL. 5.

10. Per excentricitatem k cognoſcitur ſpecies ſectionis conicae, quam corpus percurrit; ſi enim fuerit $k = 0$, orbita corporis erit circulus, cuius radius $= b$. Sin autem valor ipſius k ſit vnitate minor, ſiue ſit affirmatiuus, ſiue negatiuus, orbita erit ellipſis, cuius ſemilatus rectum $= b$, et ſemi-axis transuerſus $= \frac{b}{1 - kk}$, et diſtantia abſidis imae $= \frac{b}{1 + k}$, et ſummae $= \frac{b}{1 - k}$. Verum, ſi tertio ſit k vnitati aequalis; ita vt $1 - kk$ fiat $= 0$, orbita erit parabola, ſeu ellipſis in infinitum elongata: ſin autem quarto valor ipſius k ſit vnitati maior, ita, vt ſit $1 - kk$ numerus negatiuus, tum orbita erit hyperbola. His autem duobus poſterioribus caſibus, et quando orbita eſt ellipſis admodum longa, vbi k prope ad vnitatem accedit, ſeries ante inuenta, quae valorem ipſius ζ exhibebat, vel fit nimis parum conuergens, vel etiam ſi $k > 1$ diuergens et imaginaria, quibus caſibus peculiari modo integratio aequationis differentialis eſt inſtituenda, cui autem non immoror.

COROLL. 6.

11. Ex aequatione integrali §. 7. inuenta, facile colligitur tempus periodicum corporis, ſiquidem in ellipſi reuoluitur. Ponatur enim $s = 360°$, ita, vt corpus ad eandem abſidem, vnde eſt egreſſum, reuertatur, et quia ſinus omnium angulorum s, $2s$, $3s$, $4s$ etc. euaneſcunt, erit $\zeta \sqrt{\frac{Ca^2(1-kk)^{\frac{3}{2}}}{Ab^3}} = 360°$; vnde conſtat, eodem tempore, quo corpus vnam periodum abſoluit, ſolem motu medio conficere angulum $\zeta = 360° \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^2(1-kk)^3}}$, ſeu

seu cum sit semi-axis transuersus $= \frac{b}{1-kk}$, ponatur is $= f$: at tempus periodicum aequabitur illi tempori, quo sol motu medio absoluit angulum $= 360° \sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$. Haec formula, si ponatur $f = a$, et $C = A$, praebebit tempus periodicum solis, seu quantitatem anni medii, quae exprimetur per 360°. Vnde tempus periodicum corporis erit ad tempus vnius anni, vt $\sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$ ad 1, seu vt $\sqrt{\frac{f^3}{C}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3}{A}}$; vel tempus periodicum corporis propositi erit $= \sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$ annis. Hinc apparet, si plura corpora circa diuersa centra virium motu regulari in ellipsibus reuoluantur, fore eorum tempora periodica in ratione composita ex directa sesquiplicata axium transuersorum et inuersa subduplicata virium absolutarum, seu earum virium, quas centra in aequalibus distantiis exerunt.

PROBLEMA II.

12. *Si corpus in* M, *data celeritate et secundum datam directionem* Mm, *proiiciatur, inuenire eius orbitam, quam ad centrum virium* C *attractum, describit, si quidem vis, ad* C *tendens, ponatur quadratis distantiarum reciproce proportionalis.*

SOLVTIO.

Sit distantia $CM = x$, quae cognita assumitur, et vis in M, ad C tendens, $= \frac{C}{xx}$: deinde cum detur celeritas corporis in M, eiusque directio Mm, ne angulo CMm opus habeamus, resoluatur motus secundum Mm in duos laterales secundum $M\mu$ et Mn, quorum illius directio $M\mu$ sit in CM producta, huius Mn ad CM norma-

normalis. Sint autem Mμ et Mn ea ſpatiola, quae a corpore confici concipiuntur, dum Sol motu medio angulum $d\zeta$ ſeu ſpatiolum ad ζ percurrit; ac ponatur M$\mu = m\, d\zeta$ et M$n = n\, d\zeta$, ita, vt celeritas motus ſecundum Mμ ſit ad ſolis celeritatem mediam vt m ad a, et celeritas motus ſecundum Mn ad celeritatem ſolis mediam vt n ad a. Praeter x et C igitur dantur quoque quantitates m et n; tum vero etiam datur angulus ACM $= \Phi$, ſeu poſitio lineae CM reſpectu lineae fixae CAa: hinc cum angulus MCm ſit $= d\Phi$, qui tempuſculo $d\zeta$ abſoluitur, erit $d\Phi = \frac{n\,d\zeta}{x}$, et $dx = mn = m\,d\zeta$: actio enim vis $\frac{C}{xx}$, quatenus corpus de via Mm retrahit, in elementis $d\Phi$ et dx tantum differentialia ſecundi gradus producit.

His poſitis, quae ſunt cognita, ſit P orbitae, quam corpus eſt deſcripturum, abſis ima et angulus ACP $= \omega$, anomalia vera ſeu angulus PCM $= s$; ſemi-latus rectum orbitae $= b$, et excentricitas $= k$. Quae quantitates, cum quaerantur, habebimus ex problemate praecedente primo $x = \frac{b}{1 + k\, cof.s}$ deinde $d\zeta = \frac{ds}{(1 + k\, cof.s)^2} V \frac{Ab^3}{Ca^3}$; et tertio $d\Phi = ds$, ob $\Phi = \omega + s$ et angulum ω conſtantem; ideoque $ds = \frac{n\,d\zeta}{x}$: quo valore ſubſtituto fiet $x = \frac{n}{(1 + k\, cof.s)^2} V \frac{Ab^3}{Ca^3} = \frac{b}{1 + k\, cof.s}$; hincque $n V \frac{Ab}{Ca^3} = 1 + k\, cof.s$. Praeter ea ob $dx = m\,d\zeta$ aequatio $x = \frac{b}{1 + k\, cof.s}$ differentiata dat $dx = \frac{bk\,ds\, ſin.s}{(1 + k\, cof.s)^2} = m\,d\zeta = \frac{nbk\,d\zeta\, ſin.s}{x(1 + k\, cof.s)^2}$. Ergo $m(1 + k\, cof.s) = nk\, ſin.s$. Tres ergo nacti ſumus aequationes, ex quibus tres noſtras incognitas b, s et k definire oportet. Scilicet $b = x(1 + k\, cof.s)$; $n V \frac{Ab}{Ca^3} = 1 + k\, cof.s$ atque $m(1 + k\, cof.s) = nk\, ſin.s$; at valor ipſius $1 + k\, cof.s$ ex ex prima, qui est $\frac{b}{x}$ in secunda surrogatus dat $n\sqrt{\frac{A b}{C a^3}} = \frac{b}{x}$ seu $A n n x x = C a^3 b$, vnde fit $b = \frac{A n n x x}{C a^3}$; sicque iam constat latus rectum orbitae. Porro ob $\frac{A n n x x}{C a^3} = x(1 + k \cos. s)$ habebimus $1 + k \cos. s = \frac{A n n x}{C a^3} = \frac{n k \sin. s}{m}$; vnde obtinemus $k = \frac{A m n x}{C a^3 \sin. s}$: sicque erit $1 + \frac{A m n x \cos. s}{C a^3 \sin. s} = \frac{A n n x}{C a^3}$; vnde elicitur $\frac{\cos. s}{\sin. s} = \cot. s = \frac{n}{m} - \frac{C a^3}{A m n x} = \frac{A n n x - C a^3}{A m n x}$

et $\sin. s = \frac{A m n x}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^3)^2]}}$, atque

$\cos. s = \frac{A n n x - C a^3}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^3)^2]}}$.

Ex quibus definitur excentricitas:

$k = \frac{1}{C a^3} \sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^3)^2]}$

Ex datis ergo m, n, x, quibus motus, corpori initio impressus, determinatur et vi $\frac{C}{x x}$, orbita quam corpus describet, ita definietur, vt sit

1°. Eius semi-latus rectum $b = \frac{A n n x x}{C a^3}$.

2°. Eius excentricitas $k = \frac{1}{C a^3} \sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^3)^2]}$

3°. Situs lineae absidum CP ex angulo $PCM = s$ cognoscitur, cum sit $\tang. s = \frac{A m n x}{A n n x - C a^3}$: erit enim longitudo absidis imae seu angulus $ACP = ACM - s$. Denique motus corporis in hac orbita cognoscetur, seu ad motum solis medium comparabitur, ope huius formulae:

$$d\zeta \sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} = \frac{d s}{(1 + k \cos. s)^2}. \quad \text{Q. E. I.}$$

SCHOLION.

13. Quia excentricitas k formula irrationali exprimitur, dubium relinquitur, vtrum valor ipsius k sit affirmatiue accipiendus, an negatiue; vel quod eodem redit, an angulus $PCM = s$ elongationem corporis ab abside

ima

ima exhibeat, an ab abside summa? Verum hoc dubium cessabit, si ad directionem motus secundum $M\mu$ attendamus, seu ad valorem ipsius m, qui, si fuerit affirmatiuus, indicat, corporis a puncto C distantiam augeri, ex quo manifestum est, id ab abside ima ad summam progredi, ideoque punctum P absidem imam referre, vnde angulus PCM duobus rectis erit minor, hincque sin. s affirmatiuus: quam ob rem excentricitas k affirmatiue erit accipienda. Quodsi autem anomaliam semper ab abside ima computare instituamus, semper quoque valor excentricitatis k positiuus capi debet, atque tum ex expressione sinus et cosinus ipsius s intelligetur, vtrum angulus PCM sit duobus rectis maior an minor: cum sit sin $s = \frac{Amnx}{Ca^3k}$ et cos. $s = \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3k}$.

COROLL. I.

14. Si corpus in M perpendiculariter ad CM proiiciatur, vt motus $md\zeta$ euanescat, in ipso puncto M erit absis vel summa vel ima: Vtra autem ibi existat, sic explorabitur. Cum posito $m = 0$ sit $k = \pm \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3}$, prout $Annx$ sit vel maius vel minus quam Ca^3; ita vt valor ipsius k prodeat affirmatiuus; fiet cos. $s = +1$ si $Annx > Ca^3$, et cos. $s = -1$ si $Annx < Ca^3$. Priori ergo casu si $Annx > Ca^3$ in M erit absis ima, sin autem $Annx < Ca^3$ in M erit absis summa. At si $Annx = Ca^3$ planum est, orbitam fore circulum ob excentricitatem k euanescentem, hoc ergo casu, quia celeritas corporis secundum Mn est $= nd\zeta$, existente celeritate solis media $= ad\zeta$, erit celeritas corporis ad celeritatem solis vt $\sqrt{Ca}$ ad $\sqrt{Ax} = \sqrt{\frac{C}{x}} : \sqrt{\frac{A}{a}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

15. Cum sit semi-latus rectum $b = \frac{A n n x x}{C a^3}$, patet
in tantum a motu corpori secundum Mn impresso pen-
dere, atque quadrato huius celeritatis esse proportionale,
ita, vt motus secundum $M\mu$ impressus valorem lateris
recti plane non immutet. Semi-axis transuersus vero f,
quia est $= \frac{b}{1-kk}$, ob $1 - kk = \frac{2 A C a^3 n n x - (mm+nn) A A n n x x}{C C a^6}$
seu $1 - k k = \frac{A n n x}{C C a^6} [2 C a^3 - A x (mm+nn)]$, fiet
$f = \frac{C a^3 x}{2 C a^3 - A x (m m + n n)}$.

COROLL. 3.

16. Cum corpus nunc versetur in M, definiri
poterit tempus, quo ante per absidem imam P transire
debuit, si iam ante hunc motum esset prosecutum. Tem-
pus hoc designabitur angulo ζ, quem inter ea sol motu
medio absoluit, et qui per integrationem huius aequationis

$$d\zeta \sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} = \frac{ds}{(1 + k \operatorname{cos}.s)^2}$$ elici debet.

Supra autem vidimus (7) esse integratione per approxi-
mationem instituta

$$\zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1 - k k)^3}{A b^3}} = s - 2 k \operatorname{sin}.s + \mathfrak{A} k k \operatorname{sin}.2 s - \mathfrak{B} k^3 \operatorname{sin}.3 s + \mathfrak{C} k^4 \operatorname{sin}.4 s - \mathfrak{D} k^5 \operatorname{sin}.5 s + \mathfrak{E} k^6 \operatorname{sin}.6 s - \text{etc.}$$

vbi porro breuitatis gratia:

$\mathfrak{A} = \frac{3}{4}(1 + \frac{1}{6}k^2 + \frac{1}{16}k^4 + \frac{1}{32}k^6)$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}(1 + \frac{3}{8}k^2 + \frac{3}{16}k^4)$
$\mathfrak{C} = \frac{5}{32}(1 + \frac{3}{5}k^2 + \frac{3}{8}k^4)$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{16}(1 + \frac{5}{6}k^2)$; $\mathfrak{E} = \frac{7}{192}(1 + \frac{15}{14}kk)$.

Constantem autem ibi adiectam hic negligo, quia posito
angulo $s = 0$ simul tempus, quod angulo ζ refertur,
euanescere debet. Tempus ergo hoc quaesitum tantum est,
cuius interuallo sol motu medio percurrit angulum

$$\zeta = (s - 2 k \operatorname{sin}.s + \mathfrak{A} k^2 \operatorname{sin}.2 s - \mathfrak{B} k^3 \operatorname{sin}.3 s + \mathfrak{C} k^4 \operatorname{sin}.4 s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{A b^3}{C a^3 (1 - kk)^3}}.$$

vnde hoc tempus facile assignatur.

PRO-

PROBLEMA III.

17. *Si corpus, quod motu regulari* APM *circa* C *descripsit, cum peruenerit in* M *hic impetu quocunque percutiatur, vt eius celeritas et directio in* M *inde subito mutetur, inuenire orbitam, quam post hunc ictum acceptum prosequetur.* Fig. 7.

SOLVTIO.

Quia orbita, quam corpus ante ictum in M describit, ponitur data, sit CP eius absis ima et angulus $ACP = \omega$; tum sit orbitae semi-latus rectum $= b$; excentricitas $= k$, et anomalia vera seu angulus $PCM = s$, tempus autem, quo ab abside ima ad M peruenerit, exprimatur angulo ζ, quem sol interea motu medio descripserit. Sit porro angulus $ACM = \omega + s = \Phi$, et distantia $CM = x$, erit $x = \frac{b}{1 + k\cos s}$ et $\zeta = (s - 2k\sin s + \mathfrak{A}k^2\sin 2s - \mathfrak{B}k^3\sin 3s + \mathfrak{C}k^4\sin 4s - \text{etc.})\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ posita vi centrali in $M = \frac{C}{xx}$. Nunc consideretur motus verus, quem corpus in M habebit, qui resoluatur, vt ante secundum directiones $M\mu$ et Mn, quorum illius celeritas seu spatium tempusculo $d\zeta$ percursum sit $M\mu = m\,d\zeta$, huius vero $Mn = n\,d\zeta$, erit, vti ex problemate praecedenti colligere licet $n = (1 + k\cos s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $m = k\sin s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$. Nunc autem ictu in M subito facto motus corporis in M ita immutetur, vt eius celeritas secundum $M\mu$ fiat $M\mu' = m'd\zeta$, et celeritas secundum Mn fiat $Mn' = n'd\zeta$; hac vero motus mutatione facta, corpus in alia orbita progredi perget, quae sit $A'P'M$, cuius absidis imae P' longitudo sit $A'CP' = \omega'$, semi-latus rectum $= b'$, excentricitas $= k'$, et anomalia vera seu angulus $P'CM = s'$. Tempus autem, quo ex P' in M peruenisset, si iam ante in orbita hac noua cucurrisset, sit $= \zeta'$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ etc. sint valores harum litterarum, quas ob mutatum excentricitatis k valorem in k' induent: eritque $\zeta' = (s' - 2k' \sin s' + \mathfrak{A}' k'^2 \sin. 2s' - \mathfrak{B}' k'^3 \sin. 3s' + \text{etc.}) \sqrt{\frac{A\, b'^3}{C\, a^3 (1 - k'k')^3}}$. Verum ob angulum ACM et distantiam CM eadem, nunc ac ante percussionem erit $\omega + s = \omega' + s'$ et $\frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$. Praeterea vero ob motum corpori in M de nouo impressum erit $n' = (1 + k' \cos. s') \sqrt{\frac{C\, a^3}{A\, b'}}$ et $m' = k' \sin. s' \sqrt{\frac{C\, a^3}{A\, b'}}$ vnde ob $x = \frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$ per problema praecedens reperitur.

Primo $b' = \frac{A\, n'n'xx}{C\, a^3}$

Secundo $k' = \frac{1}{C\, a^3} \sqrt{[A^2 m'm'n'n'xx + (An'n'x - Ca^3)^2]}$

Tertio $\text{tang.} s' = \frac{A\, m'n'x}{An'n'x - Ca^3}$ siue

$\sin. s' = \frac{A\, m'n'x}{C\, a^3\, k'}$ et $\cos. s' = \frac{A\, n'n'x - C\, a^3}{C\, a^3\, k'}$.

Hincque ergo noua orbita, in qua corpus post acceptum impetum feretur, innotescet vna cum positione lineae absidum seu angulo $\omega' = \omega + s - s'$. Et quia tempus ab abside ima P' elapsum constat ζ', etiam post hac pro quouis tempore dato, si angulus solaris interea descriptus ad ζ' addatur, anomalia vera illi tempori respondens inuestigari, sicque locus corporis in noua orbita ad quoduis tempus assignari poterit. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Quia est pro orbita, in qua ante percussionem factam corpus mouebatur, $b = \frac{A\, nnxx}{C\, a^3}$, et pro noua $b' = \frac{A\, n'n'xx}{C\, a^3}$ erit $\frac{b'}{b} = \frac{n'n'}{nn}$ seu $b' = \frac{n'n'}{nn} b$. Vnde patet

patet, si motus secundum normalem Mn ab ictu non fuerit immutatus, tum etiam latus rectum orbitae nullum neque augmentum, neque decrementum recipere. Verum si ab ictu motus secundum Mn acceleretur, latus rectum augebitur in duplicata ratione auctae celeritatis, contra in eadem ratione diminuetur, si motus secundum Mn retardetur ab ictu.

COROLL. 2.

19. Inuento semi-latere recto nouae orbitae b', quia est $Ca^2 = \frac{An'n'xx}{b'}$, anomalia vera noua s', quae per hanc formulam $\tang.s' = \frac{Am'n'x}{An'n'x - Ca^2}$ est definita, etiam hoc simpliciori modo determinari poterit per hanc formulam $\tang.s' = \frac{b'm'}{n'(b'-x)}$. Angulo autem s' inuento excentricitas nouae orbitae k' colligetur ex formula $x = \frac{b'}{1+k'\cos.s'}$, vnde fit $k' = \frac{b'-x}{x\cos.s'}$.

COROLL. 3.

20. Hinc ergo si planeta, qui alias circa solem motu regulari ferretur, a causa quacunque subito percutiatur, atque ab hoc ictu eius vterque motus tam secundum $M\mu$ quam secundum Mn, quae est recta ad CM normalis, alteretur orbita, quam post ictum sequetur, determinabitur. Hoc enim problemate orbitae immutatae tam latus rectum b' cum excentricitate k', quam longitudo perihelii $A'CP' = \omega' = \omega + s - s'$ assignari poterit. Tum vero momento, quo percussio fit, tempus a perihelio, quod angulo solari ζ' definitur, per formulam erutam, reperitur: ad quod si deinceps tempus quodcunque

 ela-

elapsum in angulo pariter solari addatur, et summa pro ζ' scribatur, ex eadem formula anomalia vera seu longitudo planetae a nouo perihelio eruetur. Quae autem hic de percussionibus subitaneis sunt dicta, ad sollicitationes continuas facile transferri possunt, cum quaeuis sollicitatio continua in infinitas percussiones subitaneas, quae infinite paruis temporis interuallis se inuicem insequantur, resolui possit; ad quod negotium sequentis problematis solutione erit opus.

PROBLEMA IV.

28. *Si ictus, quem corpus, quod adhuc in orbita* A P M *motu regulari ferebatur, subito in* M *patitur, fuerit infinite paruus, definire tam orbitae, quam motus, quo corpus post ictum feretur, mutationem.*

SOLVTIO.

Quia ictus ponitur infinite paruus, mutatio, quae inde in motu corporis secundum directiones M μ et M n ictum resoluto, orietur, erit infinite parua. Sic cum ante celeritas corporis secundum M μ fuerit $= m\,d\,\zeta$ et secundum M $n = n\,d\,\zeta$, ponatur ictu facto celeritas secundum M $\mu = (m + dm)\,d\,\zeta$ et secundum M $n = (n + dn)\,d\,\zeta$, erit solutione praecedentis problematis huc translata, $m' = m + dm$ et $n' = n + dn$. Tum sit ante ictum locus absidis imae seu angulus A C P $= \omega$; orbitae semi-latus rectum $= b$, excentricitas $= k$, anomalia vera seu angulus P C M $= s$, et tempus ab abside ima $= t$, quod in arcu solari eodem tempore confecto exprimatur. Loco ζ autem hic malo vti littera t, quia postea ζ ad tempus quodcunque denotandum adhibebitur. Porro sit distantia

CM

CM $= x$; et angulus seu longitudo vera ACM $= \Phi$; eritque $x = \frac{b}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}$; $\Phi = \omega + s$; et $t = (s - 2k\,\mathrm{sin}\,s + \mathfrak{A}k^2\,\mathrm{sin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\mathrm{sin}.3s + \mathrm{etc.})\sqrt{\frac{A\,b^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ posita vi centrali $= \frac{C}{xx}$, vi solis $= \frac{A}{xx}$ et distantia solis a terra media $= a$. Pro orbita autem, quam corpus post ictum describet, sit, quia omnes mutationes erunt infinite paruae, longitudo absidis imae $A'CP' = \omega' = \omega + d\omega$; orbitae semi-latus rectum $b' = b + db$; excentricitas $k' = k + dk$, anomalia vera $P'CM = s' = s + ds$; et tempus ab abside ima $= t' = t + dt$, quod pro ζ' scribi debet.

Erit ergo $d\omega = -ds$, et ds cum reliquis mutationibus db, dk et dt sequenti modo inuenietur. Cum sit $m = k\,\mathrm{sin}.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $n = (1 + k\,\mathrm{cos}.s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$, quia inuenimus $b' = \frac{n'n'}{nn}b$, posito $b + db$ pro b' et $n + dn$ pro n' habebimus $db = \frac{2n\,dn}{nn}b = \frac{2\,dn}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}\sqrt{\frac{A\,b^3}{C\,a^3}}$. Deinde ob tang. $s' = \frac{b'\,m'}{n'(b' - x)}$ erit $l\,\mathrm{tang}.s' = lb' + lm' - ln' - l(b' - x)$ ideoque differentiando $\frac{ds}{\mathrm{sin}.s\,\mathrm{cos}.s} = \frac{db}{b} + \frac{dm}{m} - \frac{dn}{n} - \frac{db}{b - x}$, et ob $db = \frac{2b\,dn}{n}$ erit $\frac{ds}{\mathrm{sin}.s\,\mathrm{cos}.s} = \frac{dm}{m} + \frac{dn}{n} - \frac{2b\,dn}{n(b - x)}$ $= \frac{dm}{m} - \frac{(b + x)dn}{n(b - x)}$, vnde pro m et n substitutis valoribus erit

$$\frac{ds}{\mathrm{sin}.s\,\mathrm{cos}.s} = \left(\frac{dm}{k\,\mathrm{sin}.s} - \frac{(b + x)\,dn}{(1 + k\,\mathrm{cos}.s)(b - x)}\right)\sqrt{\frac{A\,b}{Ca^3}}.$$

et quia $x = \frac{b}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}$ et $\frac{b + x}{b - x} = \frac{2 + k\,\mathrm{cos}.s}{k\,\mathrm{cos}.s}$, erit

$$\frac{ds}{\mathrm{sin}.s\,\mathrm{cos}.s} = \left(\frac{dm}{k\,\mathrm{sin}.s} - \frac{dn(2 + k\,\mathrm{cos}.s)}{(1 + k\,\mathrm{cos}.s)k\,\mathrm{cos}.s}\right)\sqrt{\frac{A\,b}{Ca^3}},$$ ideoque

$$ds = -d\omega = \tfrac{1}{k}\left(dm\,\mathrm{cos}.s - \frac{dn(2 + k\,\mathrm{cos}.s)\,\mathrm{sin}.s}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}\right)\sqrt{\frac{A\,b}{Ca^3}}.$$

Denique ob $k' = \frac{b' - x}{x\,\mathrm{cos}.s}$ seu $lk' = l(b' - x) - lx - l\,\mathrm{cos}.s$, erit $\frac{dk}{k} = \frac{db}{b - x} + \frac{ds\,\mathrm{sin}.s}{\mathrm{cos}.s} = \frac{2b\,dn}{n(b - x)} + \frac{ds\,\mathrm{sin}.s}{\mathrm{cos}.s}$; et ob $\frac{b}{b - x} = \frac{1 + k\,\mathrm{cos}.s}{k\,\mathrm{cos}.s}$ et $n = (1 + k\,\mathrm{cos}.s)\sqrt{\frac{Ca^3}{A\,b}}$.

$$\frac{dk}{k} = \frac{2\,dn}{k\,\mathrm{cos}.s}\sqrt{\frac{A\,b}{Ca^3}} + \frac{\mathrm{sin}.s}{k\,\mathrm{cos}.s}\left(dm\,\mathrm{cos}.s - \frac{dn(2 + k\,\mathrm{cos}.s)\,\mathrm{sin}.s}{1 + k\,\mathrm{cos}.s}\right)\sqrt{\frac{A\,b}{C\,a^3}}$$ seu

feu $dk = \frac{1}{cof.s}\left(dm\, \text{fin}.s\, \text{cof}.s + 2\,dn - \frac{dn(2 + k\,cof.s\, fin.s^2)}{1 + k\,cof.s} \right) \sqrt{\frac{A\,b}{C\,a^3}}$
vel $dk = \left(dm\, \text{fin}.\,s + \frac{dn\,(2\,cof.\,s + k + k\,cof.\,s^2)}{1 + k\,cof.\,s} \right) \sqrt{\frac{A\,b}{C\,a^3}}$
Sicque iam haec tria differentialia db, dk et ds feu $d\omega$ elicuimus; reftat ergo, vt mutationem in tempore t ab abfide ortam eruamus; quod fiet differentiatione aequationis

$$t\sqrt{\frac{C\,a^3}{A\,b^3}} = (1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin}.s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin}.3s + \text{etc.})$$

ponendis b, k, s et t variabilibus, et fcribendis pro db, dk et ds valoribus iam inuentis. At eft, vt ex fuperioribus conftat $(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin}.s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin}.3s + \text{etc.})$ $= \int \frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2}$ fi in hac integratione tantum s, vt quantitas variabilis tractetur. Viciffim ergo huius formulae differentiale, fi k conftans fumatur, erit $= \frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2}$, at fi fimul k pro variabili habeatur, ponamus, effe differentiale completum $= \frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2} + S\,dk$ atque conftat differentiale primi termini $\frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2}$ pofito k tantum variabili aequale effe debere differentiali pofterioris termini $S\,dk$ pofito tantum s variabili, fit igitur $dS = V\,ds$, eritque $-\frac{2\,dk\,ds\,cof.s}{(1+k\,cof.s)^3} = V\,ds\,dk$, ac proinde $V = -\frac{2\,cof.s}{(1+k\,cof.s)^3}$: et $S = \int -\frac{2\,ds\,cof.s}{(1+k\,cof.s)^3}$. Quare huius formulae

$(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin}.s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin}.3s + \text{etc.})$
differentiale plenum, fi tam k quam s varientur, erit

$$\frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2} - 2\,dk \int \frac{ds\,cof.s}{(1+k\,cof.s)^3}$$

Verum eft $\int \frac{ds\,cof.s}{(1+k\,cof.s)^3} = \frac{1}{k}\int \frac{ds(k\,cof.s + 1 - 1)}{(1+k\,cof.s)^3} = \frac{1}{k}\int \frac{ds}{(1+k\,cof.s)^2}$ $- \frac{1}{k}\int \frac{ds}{(1+k\,cof.s)^3}$, atque huius formulae pofterioris valor integralis perinde reperietur ac prioris. Ponamus igitur, quoniam haec integralia, tanquam cognita, fpectare licet: $\int \frac{ds}{(1+k}$

$\int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} = P$

et $\int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^3} = Q$

vbi quidem k, vt quantitas constans spectatur, et integralia P et Q ita capiuntur, vt euanescant posito $s=0$.

eritque $t\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = P$ seu $t = P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, vnde cum sumto tam k quam s variabili fit $dP = \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(P-Q)$ erit

$$dt = \left[\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(P-Q) + \frac{3Pdb}{2b}\right]\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$$

quod est incrementum temporis ab abside ima elapsi, ab effectu percussionis oriundum, vbi autem pro db, ds et dk valores ante inuenti scribi debent, scilicet:

$$db = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}} \text{ seu } \frac{db}{b} = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

$$ds = \frac{1}{k}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

$$dk = \left(dm\sin.s + \frac{dn(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

qua facta substitutione, erit

$$dt = \left\{\begin{array}{l} \frac{dm\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} - \frac{2(P-Q)dm\sin.s}{k} \\ -\frac{2(P-Q)dn(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)} + \frac{3Pdn}{1+k\cos.s} \end{array}\right\}\frac{Abb}{Ca^3}$$

At hoc impulsu mutatio in loco absidis imae facta erit

$$d\omega = \frac{1}{k}\left(\frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s} - dm\cos.s\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

Quibus formulis tota mutatio tam in orbita quam in motu, quae ab impulsu infinite paruo oritur, continetur. Q. E. I.

SCHOLION.

22. Quod ad valores formularum P et Q attinet priorem P iam supra inuenimus esse:

P =

$$
\begin{aligned}
P = & \; s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \tfrac{315}{128}k^8 + \text{etc.}) \\
& - 2k\,\mathrm{fin}.s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \text{etc.}) \\
& + \tfrac{3}{4}k^2\,\mathrm{fin}.2s\,(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.}) \\
& - \tfrac{1}{3}k^3\,\mathrm{fin}.3s\,(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.}) \\
& + \tfrac{5}{32}k^4\,\mathrm{fin}.4s\,(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.}) \\
& - \tfrac{1}{16}k^5\,\mathrm{fin}.5s\,(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.}) \\
& + \tfrac{7}{192}k^6\,\mathrm{fin}.6s\,(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Simili autem modo inueniemus $Q = \int \frac{ds}{(1 + k\,\mathrm{cof}.s)^2}$, fed cum in noftra aequatione occurrat $\frac{1}{k}(P - Q) = \int \frac{ds\,\mathrm{cof}.s}{(1 + k\,\mathrm{cof}.s)^3}$, praeftabit ftatim huius formulae valorem integralem inueftigare. Cum igitur fit

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{cof}.s}{(1 + k\,\mathrm{cof}.s)^3} = & \; \mathrm{cof}.s - 3k\,\mathrm{cof}.s^2 + 6k^2\,\mathrm{cof}.s^3 - 10k^3\,\mathrm{cof}.s^4 + 15k^4\,\mathrm{cof}.s^5 - \\
& - 21k^5\,\mathrm{cof}.s^6 + 28k^6\,\mathrm{cof}.s^7 - 36k^7\,\mathrm{cof}.s^8 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

reductis poteftatibus $\mathrm{cof}.s$ ad cofinus angulorum multiplorum erit

$$
\begin{aligned}
& - k\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{4}k^2 + \tfrac{105}{16}k^4 + \tfrac{315}{32}k^6 + \text{etc.}) \\
\frac{\mathrm{cof}.s}{(1 + k\,\mathrm{cof}.s)^3} = & \; \mathrm{cof}.s\,(1 + \tfrac{9}{2}kk + \tfrac{75}{8}k^4 + \tfrac{245}{16}k^6 + \text{etc.}) \\
& - k\,\mathrm{cof}.2s\,(\tfrac{3}{2} + 5k^2 + \tfrac{315}{32}k^4 + \tfrac{63}{4}k^6 + \text{etc.}) \\
& + k^2\,\mathrm{cof}.3s\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{75}{16}k^2 + \tfrac{147}{16}k^4 + \text{etc.}) \\
& - k^3\,\mathrm{cof}.4s\,(\tfrac{5}{4} + \tfrac{63}{16}k^2 + \tfrac{63}{8}k^4 + \text{etc.}) \\
& + k^4\,\mathrm{cof}.5s\,(\tfrac{15}{16} + \tfrac{49}{16}k^2 + \text{etc.}) \\
& - k^5\,\mathrm{cof}.6s\,(\tfrac{21}{32} + \tfrac{9}{4}k^2 + \text{etc.})
\end{aligned}
$$

vnde

vnde integratione peracta reperietur:

$$\begin{aligned}\tfrac{k}{1}(P-Q)= & -\tfrac{3}{2}\,k\,s\,(1+\tfrac{5}{2}k^2+\tfrac{35}{8}k^4+\tfrac{105}{16}k^6+\text{etc.})\\ & +\text{fin.}\,s\,(1+\tfrac{9}{2}k^2+\tfrac{75}{8}k^4+\tfrac{245}{16}k^6+\text{etc.})\\ & -\tfrac{3}{4}k\,\text{fin.}\,2s(1+\tfrac{10}{3}k^2+\tfrac{105}{16}k^4+\tfrac{21}{2}k^6+\text{etc.})\\ & +\tfrac{1}{2}k^2\,\text{fin.}\,3s(1+\tfrac{25}{8}k^2+\tfrac{49}{8}k^4+\text{etc.})\\ & -\tfrac{5}{16}k^3\,\text{fin.}\,4s(1+\tfrac{63}{20}k^2+\tfrac{63}{10}k^4+\text{etc.})\\ & +\tfrac{3}{16}k^4\,\text{fin.}\,5s(1+\tfrac{49}{15}k^2+\text{etc.})\\ & -\tfrac{7}{64}k^5\,\text{fin.}\,6s(1+\tfrac{24}{7}k^2+\text{etc.})\end{aligned}$$

PROBLEMA V.

23. *Si corpus, quod ad centrum virium* C *attrahitur in ratione reciproca duplicata distantiarum, insuper in singulis punctis* M *sollicitetur viribus quibuscunque, inuenire continuam, tam orbitae, quam motus variationem, quae ab his viribus perturbantibus producetur.* Fig. 8.

SOLVTIO.

Exprimat $\frac{C}{xx}$ vim, qua corpus continuo ad centrum C vrgetur, quae si sola ageret, corpus motu regulari circa C gyraretur. Vis autem quae praeter ea in corpus agit, eiusque motum perturbat, in singulis punctis M resoluatur secundum directiones MC et MN, quarum haec ad illam sit normalis. Ponatur vis acceleratrix secundum $MC = M$ et vis acceleratrix secundum $MN = N$, quas vires M et N perturbantes vocabo. Peruenerit corpus ab his viribus sollicitatum in M, existente $CM = x$, et $ACM = \Phi$; atque si nunc vires perturbantes cessarent, corpusque posthac a sola vi $\frac{C}{xx}$ traheretur; id motu regulari incederet, orbitamque ellipticam esset descripturum; pro quo motu regulari ponamus

Longitudinem absidis imae seu angulum $ACP = \omega$

femi-latus rectum orbitae $= b$

excentricitatem $= k$

Corporis, dum in M verfatur, anomaliam veram PCM$= s$ et tempus ab abfide ima elapfum $= t$.

Quibus pofitis, erit $x = \frac{b}{1 + k \cos s}$; $\Phi = \omega + s$, atque $t = P \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, exiftente $P = \int \frac{ds}{(1 + k \cos s)^2}$, cuius valorem iam ante inuenimus. Nunc vero, quia corpus, dum in M verfatur, a duabus viribus M et N perturbantibus follicitatur, a vi M eius motus fecundum Mμ diminuetur ita, vt fecundum hunc motum tempusculo $d\zeta$ non fpatium $m d\zeta$, fed fpatium $m d\zeta - \frac{1}{2} M dt^2 = m d\zeta - \frac{M a^3}{A} d\zeta^2$ percurrat; ob vim autem N fecundum Mn fpatium conficiet eodem tempusculo $= n d\zeta - \frac{N a^3}{A} d\zeta^2$. Qui effectus quanquam tempusculo $d\zeta$ eduntur, concipiamus tamen eos fubito corpori in M imprimi; eritque propterea, folutione praecedentis problematis huc translata, $dm = -\frac{M a^3}{A} d\zeta$, et $dN = -\frac{N a^3}{A} d\zeta$. Hanc ob rem nunc quidem corpus in alia orbita apm progredi pergeret, nifi deinceps a viribus perturbantibus afficeretur atque noua haec orbita a praecedente ita differet, vt nunc fit

femi-latus rectum $= b - \frac{2 N d\zeta}{1 + k \cos s} \sqrt{\frac{a^3 b^3}{A C}}$

excentricitas $= k - d\zeta \left(M \sin s + \frac{N(2 \cos s + k + k \cos s^2)}{1 + k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^3 b}{A C}}$

locus abfidis $= \omega + \frac{d\zeta}{k} \left(M \cos s - \frac{N(2 + k \cos s) \sin s}{1 + k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^3 b}{A C}}$

anomalia vera $= s - \frac{d\zeta}{k} \left(M \cos s - \frac{N(2 + k \cos s) \sin s}{1 + k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^3 b}{A C}}$

At tempus ab abfide ima p ad M vsque elapfum erit

$$= t - d\zeta \left(\frac{M \cos s}{k(1 + k \cos s)^2} - \frac{N(2 + k \cos s) \sin s}{k(1 + k \cos s)^3} - \frac{2N(P - Q)(2 \cos s + k + k \cos s^2)}{k(1 + k \cos s)} \right) \frac{b b}{C}$$
$$- \frac{2}{k} M(P - Q) \sin s + \frac{2 N P}{1 + k \cos s}$$

Verum quia haec mutatio re vera tempusculo $d\zeta$ abfoluitur vitur, ea tum demum, cum corpus elapſo tempusculo $d\zeta$ in m peruenerit, perfecta eſt ſtatuenda, ſicque cum corpus in m verſatur, quod fit confecto angulo $MCm = d\Phi = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, vti ex problemate primo, ob $ds = d\Phi$, colligere licet, locus abſidis imae, ſemilatus rectum et excentricitas eos habebunt valores, quos modo aſſignauimus, at anomalia vera ante inuenta nunc augebitur angulo $MCm = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, et tempus ab abſide ima elapſum augebitur tempusculo $d\zeta$: ideoque nunc, dum corpus in m verſatur, erit anomalia vera $= s + d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$, et tempus ab abſide ima elapſum nunc erit

$$t + d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\begin{matrix}\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} \\ -\frac{2}{k}M(P-Q)\sin.s + \frac{3NP}{1+k\cos.s} - \frac{2N(P-Q)(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)}\end{matrix}\right)$$

Hinc ſi tum, cum corpus in m exiſtit ſecundum legem continuitatis, ponamus

locum Abſidis imae aCp	$= \omega + d\omega$
ſemi-latus rectum	$= b + db$
excentricitatem	$= k + dk$
anomaliam veram	$= s + ds$
tempus ab abſide	$= t + dt$

habebimus harum differentialium ſequentes valores,

$$db = -\frac{2Nd\zeta}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{a^3b^3}{AC}}$$

$$dk = -d\zeta\left(M\sin.s + \frac{N(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

ac ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{k}(P-Q) = R$, erit

$$dt = d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\begin{matrix}\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} + \frac{3NP}{1+k\cos.s} \\ -2MR\sin.s - \frac{2NR(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\end{matrix}\right)$$

 Supra

Supra autem vidimus, si quantitas $P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$ differentietur sumtis b, k et s variabilibus, eius differentiale fore $\left(\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2}-2R\,dk+\frac{3P\,db}{2b}\right)\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$ ob $R=\frac{1}{k}(P-Q)$ in quo, si pro ds, dk et db valores modo inuenti substituantur, eadem emergit expressio, quam pro valore dt eruimus, vnde sequitur, fore $dt=d.P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, ideoque integrando $t=P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$. Deinde continua tam orbitae, quam motus mutatio per integrationes formularum db, dk, $d\omega$ et ds debet inuestigari, quo facto ad quoduis tempus propositum orbita, in qua corpus tum mouetur, eiusque in ea locus definiri poterit. Erit autem $dx=k\,d\zeta\,\sin.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $ddx=k\,d\zeta^2\cos.s(1+k\cos.s)^2\frac{Ca^3}{Abb}-\frac{Ma^3d\zeta^2}{A}$ qui valor, cum $d\Phi=d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, satisfacit aequationibus $2dxd\Phi+xdd\Phi=-\frac{Na^3}{A}d\zeta^2$, et $ddx-xd\Phi^2=-\frac{Ca^3d\zeta^2}{Axx}-\frac{Ma^3}{A}d\zeta^2$. Q. E. I.

COROLL. 1.

24. Quia t indicat tempus, quo corpus ab abside ima p in M peruenturum fuisset, si motu regulari ita esset ingressum, vt in M eam, quam ibi iam actu habet, celeritatem acquisiuisset, patet, cum corpus iam, antequam in M peruenit, a viribus M et N fuerit in motu suo perturbatum, id re vera nunquam in puncto p esse versatum, ideoque tempore t plane non erit opus ad motum corporis cognoscendum. Atque hinc patet cum tempus t a sola corporis celeritate in M eiusque ibi directione pendeat, id quoque per solas quantitates b, k et s, quae hoc momento locum habent, determinari, neque harum quan-

quantitatum immutationes a viribus perturbantibus M et N profectas in valorem ipsius t ingredi. Quae etiam causa est, quod formulam differentialem pro dt inuentam tam expedite licuit integrare. Quin etiam sine respectu ad variationes litterarum b, k et s habito, valor ipsius t statim ex ipsa rei natura elici potuisset, cum sumtis b et k constantibus esse debeat $t\,\sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} = \int \frac{ds}{(1+k\cos s)^2} = P$.

COROLL. 2.

25. Pro quouis ergo tempore tam orbita, quam locus corporis in ea ex formulis differentialibus, quae valores elementorum db, dk, $d\omega$ et ds exhibent, debet definiri, in quibus formulis, etsi variabiles, b, k et s sunt maxime inter se permixtae, tamen si vires M et N sint admodum exiguae prae vi $\frac{C}{xx}$, ac propter ea earum effectus valde parui, facile eiusmodi methodus approximandi reperietur, cuius ope ad quoduis tempus propositum, quod littera ζ indicatur, valores b, k, et s, itemque ω inueniri queant; praecipue si excentricitas k fuerit valde parua. Peruenietur autem tandem ad huiusmodi aequationem integralem.

$$\zeta = S + \text{Const.}$$

in qua, si constans, ita definiatur, vt posito $s=0$, fiat $\zeta=0$, valor ipsius ζ indicabit tempus, quo corpus postquam de abside ima vera, ubi erat $s=0$, excesserit, ad anomaliam veram s pertigerit, vnde, si constet momentum, quo fuerit semel $s=0$, ad quoduis tempus inde elapsum, quod angulo solari ζ exprimetur, ope superioris aequationis anomalia vera s definietur, quae si addatur ad angulum ω seu longitudinem praesentem absidis imae, obtinebitur longitudo vera seu angulus A C M. Ex reliquis enim aequationibus rite tractatis pro eodem tempore valores litterarum b, k et ω elicientur, qui simul in aequationem $\zeta = S +$ Const. ingredientur, quibus inuentis erit vera corporis a centro C distantia $CM = x = \frac{b}{1 + k\,\text{cof.}s}$. Verum notandum est pro casuum diuersitate saepe numero methodos diuersas has aequationes tractandi adhiberi debere.

COROLL. 3.

26. Si axis orbitae transuersus, qui pariter erit variabilis, ponatur $= f$, cum sit $f = \frac{b}{1 - kk}$, erit $df = \frac{(1 - kk)\,db + 2bk\,dk}{(1 - kk)^2}$. Hic si pro db et dk valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$$df = \frac{-2\,d\zeta}{(1 - kk)^2} [\,M\,k\,\text{fin.}s + N\,(1 + k\,\text{cof.}s)\,]\,\sqrt{\frac{a^3 b^3}{A\,C}},$$

vnde patet, axem transuersum ab vtraque vi perturbante M et N immutari, cum contra latus rectum tantum a vi N, cuius directio est ad radium C M normalis, varietur.

COROLL. 4.

27. Si vis haec perturbans N euanescat, vt motus corporis a sola vi M, quae continuo ad centrum C tendit, perturbetur, latus rectum orbitae ob $db = 0$, perpetuo eiusdem quantitatis manebit. Pro axe transverso autem erit $df = \frac{-2Mk\,d\zeta\,\text{fin.}s}{(1 - kk)^2}$, qui ergo perinde atque excentricitas k et longitudo absidis ω continuas mutationes perpetietur. Atque excentricitas quidem k diminuetur, dum corpus ab abside ima ad summam progreditur, contra vero rursus augebitur, dum corpus ab abside sum-

ſumma ad imam reuertitur: ſicque, prout vis M fuerit comparata fieri poteſt, vt poſt quamuis reuolutionem integram excentricitas ad priſtinam quantitatem reducatur. Linea autem abſidum promouebitur, quando coſ. s eſt affirmatiuus, contra retrocedet: fierique ſimili modo poteſt, vt linea abſidum poſt integram reuolutionem in ſitum priſtinum redigatur: quo caſu linea abſidum inuariabilis erit cenſenda, quia linea abſidum eatenus tantum mobilis aeſtimari ſolet, quatenus poſt quamque reuolutionem integram de loco ſuo mota deprehenditur. Peſpicuum eſt, hoc euenire debere, ſi vis perturbans M quoque ſit quadratis diſtantiarum a puncto C reciproce proportionalis; quia tum corpus motu regulari in ellipſi immobili incedet.

SCHOLION I.

28. Quodſi autem ponatur $M = \frac{B}{xx} = \frac{B(1+k\,\text{coſ.}s)^2}{bb}$ exiſtente $N = 0$, erit b quantitas conſtans, et

$$dk = -\frac{B\,d\zeta(1+k\,\text{coſ.}s)^2\,\text{ſin.}s}{bb}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{B\,d\zeta(1+k\,\text{coſ.}s)^2\,\text{coſ.}s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\,\text{coſ.}s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{B\,d\zeta(1+k\,\text{coſ.}s)^2\,\text{coſ.}s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}};$$

vnde fit $\frac{ds}{dk} = -\frac{C}{B\,\text{ſin.}s} + \frac{\text{coſ.}s}{k\,\text{ſin.}s}$, ſeu

$Bk\,ds\,\text{ſin.}s = -Ck\,dk + B\,dk\,\text{coſ.}s$, cuius integrale eſt

$\frac{1}{2}Ckk = Bk\,\text{coſ.}s + D$; vnde ſequens calculus facile expeditur. Erit enim $k = \frac{B\,\text{coſ.}s + \sqrt{(B^2\,\text{coſ.}s^2 + 2CD)}}{C}$, hincque fit $d\omega = \frac{B\,ds\,\text{coſ.}s}{\sqrt{(B^2\,\text{coſ.}s^2 + 2CD)}}$, et integrando, $\text{ſin.}\omega = \frac{B\,\text{ſin.}s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$, ex quo patet, integra reuolutione abſoluta, tam excentricitatem k, quam locum lineae abſidum in ſtatum priſtinum reſtitui. Verum hic mirum videbitur, quod tam excentricitas

tricitas, quam linea absidum mutabilis reperiatur, cum tamen constet, motum corporis esse regularem: sed notandum est, hoc calculo non veram corporis orbitam, quae conuenit vi $= \frac{C+B}{xx}$ exhiberi, sed quouis tempore eam per calculum orbitam indicari, quam corpus motu suo prosecuturum esset, si vis B subito cessaret. Simili modo respondebitur ad dubium, quod forte ex casu petetur, quo vis M est reciproce, vt cubus distantiae, quoniam motus fieri in ellipsi mobili est demonstratus, cuius axis et excentricitas nullam mutationem subeant: cum tamen hic vtrinque variatio prodeat: scilicet iste modus, quo hic vtimur ad motum definiendum, prorsus est diuersus ab eo, quo hoc casu motus vulgo determinari solet. Verum modus hic traditus motus quoscunque perturbatos ad calculum reuocandi, tum in primis insignem habet vsum, quando subinde vires perturbantes intermittunt, motuique regulari locus conceditur; quem calculus noster statim manifestabit. Interim tamen nullum est dubium, quin etiam in perturbationibus continuis saepe vtiliter in vsum vocari possit.

SCHOLION 2.

29. Casus, quem hic sum contemplatus, quo altera vis perturbans erat $M = \frac{B}{xx}$, altera $N = 0$, meretur vlteriorem euolutionem, quoniam deducit ad aequationem maxime perplexam, cum tamen motus re vera sit regularis. Quoniam inuenimus

$d\omega = \frac{B\,ds\,\cos.s}{\sqrt{(B^2\cos.s^2 + 2CD)}} = \frac{B\,d\zeta(1 + k\cos.s)^2\cos.s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$, hinc habebimus: $d\zeta\sqrt{\frac{a^5}{ACb^5}} = \frac{k\,ds}{(1+k\cos.s)^2\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$, vbi si pro k valor inuentus substituatur, $\frac{B\cos.s + \sqrt{(B^2\cos.s^2 + 2CD)}}{C}$, prodibit

$d\zeta\sqrt{\frac{a^3}{ACb^3}} = \frac{C\,ds\,[B\cos.s + \sqrt{(B^2\cos.s^2 + 2CD)}]}{[C + B\cos.s^2 + \cos.s\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}]^2\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$,

cuius

cuius integratio maxime ardua videtur. Verum cum certum sit, hunc motum esse regularem, quia a vi $= \frac{B+C}{xx}$ oritur, iuuabit conformitatem huius formulae complicatae cum motu regulari monstrasse. Sit igitur verae orbitae, quam motu regulari corpus describit, latus rectum $= \mathfrak{C}$; excentricitas $= \varkappa$, et anomalia vera $= \sigma$: erit $x = \frac{\mathfrak{C}}{1+\varkappa \cos.\sigma}$; et distantia minima $= \frac{\mathfrak{C}}{1+\varkappa}$, maxima vero $= \frac{\mathfrak{C}}{1-\varkappa}$; Motus autem per problema primum ita erit comparatus, vt sit $d\zeta \sqrt{\frac{(B+C)a^3}{A\mathfrak{C}^3}} = \frac{d\sigma}{(1+\varkappa \cos.\sigma)^2}$. At ex formulis, pro motu perturbato, inuentis est distantia $x = \frac{Cb}{C+B\cos.s^2+\cos.s.\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$, vnde, si ponatur $s = 0$, prodit distantia minima, maxima vero si $s = 180°$, sicque erit

$$\frac{\mathfrak{C}}{1+\varkappa} = \frac{Cb}{C+B+\sqrt{(B^2+2CD)}} \text{ et } \frac{\mathfrak{C}}{1-\varkappa} = \frac{Cb}{C+B-\sqrt{(B^2+2CD)}}$$

ex quibus elicitur $\mathfrak{C} = \frac{Cb}{C+B}$ et $\varkappa = \frac{\sqrt{(B^2+2CD)}}{C+B}$. Hinc porro obtinemus

$$x = \frac{Cb}{C+B+\cos.\sigma.\sqrt{(B^2+2CD)}} = \frac{Cb}{C+B\cos.s^2+\cos.s\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$$

itaque erit $\cos.\sigma = \frac{\cos.s\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}-B\sin.s^2}{\sqrt{(B^2+2CD)}}$ et

$1+\varkappa\cos.\sigma = \frac{C+B\cos.s^2+\cos.s.\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}{C+B}$. Cum autem sit $\sin.\omega = \frac{B\sin.s}{\sqrt{(B^2+2CD)}}$ et $\cos.\omega = \frac{\sqrt{(BB\cos.s^2+2CD)}}{\sqrt{(BB+2CD)}}$, manifestum est, esse $\cos.\sigma = \cos.s\cos.\omega - \sin.s\sin.\omega$, ideoque $\sigma = s+\omega$, vnde intelligitur angulum σ a loco fixo esse computatum, prorsus vt in motu regulari fieri solet; sumitur scilicet anomalia vera σ a linea absidum, quae est immobilis. Deinde quia est $d\sigma = ds + d\omega$, at $d\omega\cos.\omega = \frac{B\,ds\cos.s}{\sqrt{(BB+2CD)}}$, erit $d\omega = \frac{B\,ds\cos.s}{\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$ et $d\sigma = \frac{ds[B\cos.s+\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}]}{\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$. Quibus valoribus pro $\mathfrak{C}$, $d\sigma$ et $1+\varkappa\cos.\sigma$ substitutis aequa-

aequatio ex motu regulari deducta $d\zeta\surd\frac{(B+C)a^3}{A\,\mathfrak{b}^3} = \frac{d\sigma}{(1+\varkappa\cos.\sigma)^2}$ induet hanc formam:

$$\frac{(B+C)^2}{CC}\,d\zeta\surd\frac{C a^3}{A b^3} = \frac{(B+C)^2\,ds[B\cos.s+\surd(B^2\cos.s^2+2CD)]}{[C+B\cos.s^2+\cos.s\surd(B^2\cos.s^2+2CD)]^2\surd(B^2\cos.s^2+2CD)}$$

quae multiplicata per $\frac{C}{(B+C)^2}$ eadem plane fit, quam ex consideratione motus perturbati elicuimus.

SCHOLION 3.

30. Quem ad modum calculus etiam secundum nostras formulas facillimus euasisset, si vim perturbantem $\frac{B}{xx}$, quia est reciproce, vt quadratum distantiae, statim cum vi centrali $\frac{C}{xx}$ coniunxissemus, quo facto vires perturbantes euanuissent, motusque regularis sponte prodiisset: ita quoque si in aliis casibus vis perturbans M partem contineat, quae fuerit quadrato distantiae reciproce proportionalis, conueniet eam partem cum vi centrali coniungere, et reliquam partem solum in M relinquere; ita vt vis M discrepantiam tantum vis secundum MC perturbantis a ratione reciproca duplicata distantiarum complectatur. Hoc etiam latius patet atque ad vires applicari potest, quae ab hac ratione prorsus diuersae videntur: Sic si vis perturbans secundum directionem MC fuerit $= \frac{B}{x^n} = \frac{B}{b^n}(1+k\cos.s)^n$ ea in huiusmodi duas partes resoluta concipi potest:

$\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2$ et $\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^n - \frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2$,

existente $E = \frac{Bbb}{b^n}$. Tum igitur pro C scribi debebit C + E, et litterae M tribuatur valor $\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2\times$

[(1+

$[(1+k\cos.s)^{n-2}-1]$; qui si excentricitas k non sit notabilis, multo erit minor, atque minores aberrationes a motu regulari producere reperietur. Ita si excentricitas k fuerit valde parua, erit $M = \frac{(n-2)Ek\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2$ et scripto C pro C+E breuitatis ergo, posito $N=0$, erit b quantitas constans et

$$dk = -\frac{(n-2)Ek\,d\zeta\,\sin.s\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{(n-2)E\,d\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{(n-2)E\,d\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

Hinc ergo elicitur $\frac{dk}{d\omega} = -\frac{k\sin.s}{\cos.s}$, et

$\frac{ds}{dk} = \frac{-C}{(n-2)Ek\sin.s\cos.s} + \frac{\cos.s}{k\sin.s}$, vnde fit

$\frac{Cdk}{(n-2)E} = dk\cos.s^2 - kds\sin.s\cos.s$, quae per k multiplicata et integrata dat $\frac{Ckk}{(n-2)E} = kk\cos.s^2 + \frac{D}{(n-2)E}$, vnde obtinetur $k = \sqrt{\frac{D}{C-(n-2)E\cos.s^2}}$. Cum iam sit

$\frac{ds}{d\omega} = \frac{C}{(n-2)E\cos.s^2} - 1$, erit $d\omega = \frac{(n-2)E\,ds\cos.s^2}{C-(n-2)E\cos.s^2}$ seu

$$d\omega + ds = \frac{+Cds}{C-(n-2)E\cos.s^2} = \frac{+Cds}{C-\frac{1}{2}(n-2)E-\frac{1}{2}(n-2)E\cos.2s}$$

At huius formulae integrale, quatenus a solo angulo s pendet, erit $+s\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}}$; ideoque $\omega = s\left(-1+\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}}\right)$, neglectis inaequalitatibus, quae a finibus angulorum $2s$, $4s$, etc. pendent: qui finus, cum euanescant, si $s=0$, $s=90$, $s=180°$, etc. patet singulis reuolutionibus anomaliae, lineam absidum promoueri angulo

$= \frac{\sqrt{C}-\sqrt{[C-(n-2)E]}}{\sqrt{[C-(n-2)E]}}\,360°$. Quare si corpus ad centrum C attrahatur vi $= \frac{C}{xx} + \frac{B}{x^n}$, fueritque excentricitas quam minima, si semi-latus rectum orbitae, seu quod hoc casu eodem redit, distantia corporis media ponatur $= b$, fiatque $E = \frac{B}{b^{n-2}}$; linea absidum orbitae, in qua corpus mouebitur, erit mobilis atque singulis reuolutionibus anomaliae conficiet angulum $= [\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{(n-2)E}{C+E})}} - 1]\, 360°$ quia pro C scribi oportet $C+E$. Vnde patet, si sit $n = 2$, lineam absidum quiescere, progredi vero, si $n-2 > 0$, at regredi, si $n-2 < 0$ vel si $n < 2$. Pro motu autem ipso definiendo, quo corpus in hac orbita mutabili proferetur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$d\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{C\, ds}{[\sqrt{(C - (n-2)E\, cos.s^2)} + cos.s \sqrt{D}]^2}$$

cuius resolutio non est difficilis.

31. Hanc autem methodum effectus virium perturbantium definiendi eum potissimum in finem excogitaui, vt eius opera perturbationes, quae in motibus planetarum ob eorum actionem mutuam euenire obseruantur, commodius indagari atque assignari queant. Hinc igitur quantum motus Saturni a Ioue, et motus Iouis a vi Saturni perturbetur, meliori cum successu inuestigari poterit, quam aliis methodis, quae adhuc adhiberi sunt solitae. Deinde si vis Iouis ad Saturnum vsque porrigitur, nullum est dubium, quin ab ea motus Martis, et Terrae, ac fortasse etiam inferiorum planetarum non nihil afficiatur. Denique etiam inuestigatio inaequalitatum motus Lunae hac methodo non parum promoueri videtur, quia vires Solis partim ad vim regularem, partim ad vires perturbantes M et N commode reuocare licet. Sed vnaquaeque harum inuestigationum tanti est momenti, vt peculiarem tractationem mereatur. Quam ob rem nunc quidem in ipsa methodi explicatione acquiesco.

PHYSICO-

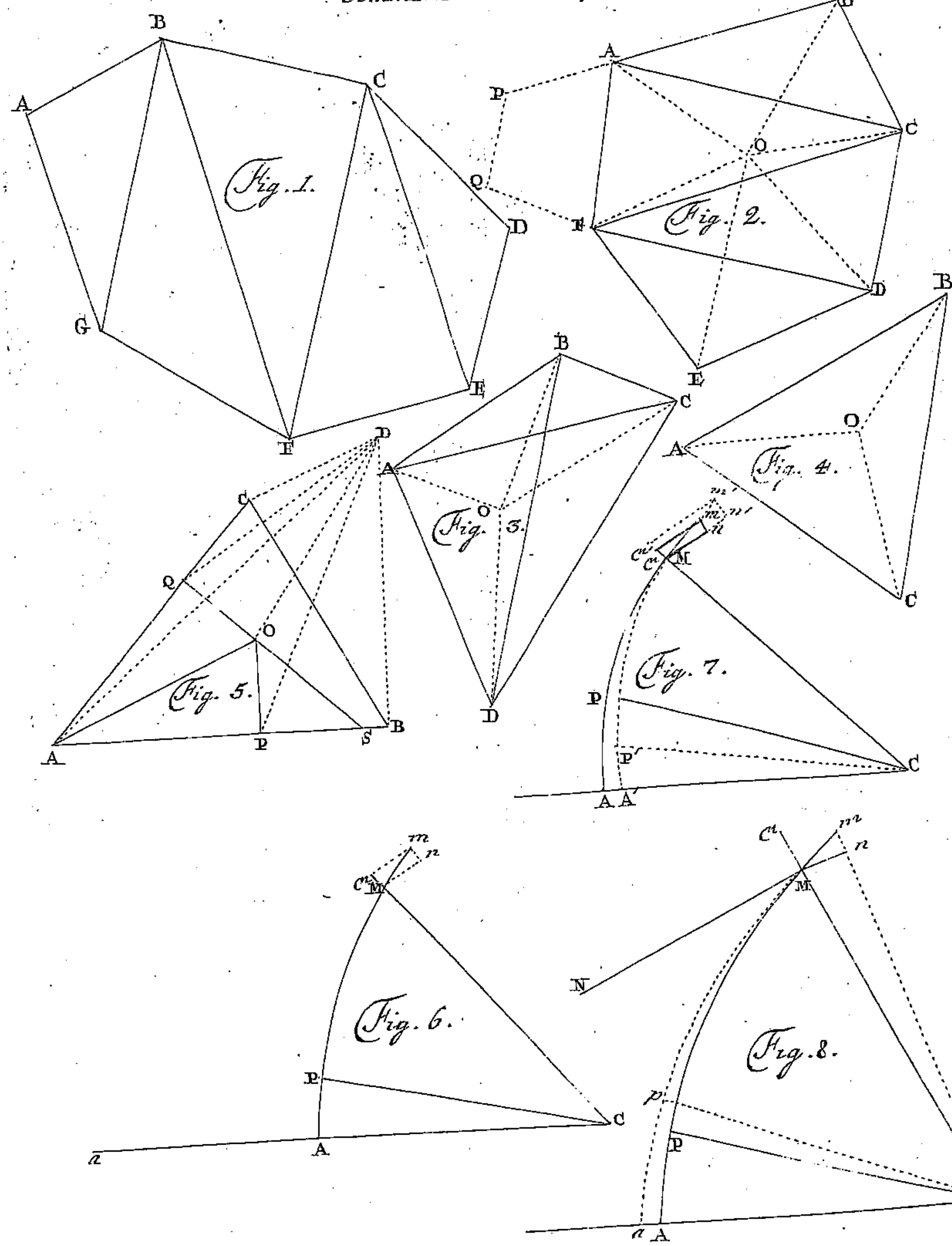
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.