



RECHERCHES
PLUS EXACTES SUR L'EFFET DES MOULINS
À VENT.

PAR M. EULER.

I.



Lorsque je traitai cette matiere, il y a quelques années, j'ai fondé mes calculs sur l'hypothese commune, que l'effet d'un fluide, qui heurte contre une surface, est en raison composée du quarré de la vitesse, & du quarré du sinus de l'angle d'incidence : non que je croyois, que cette hypothese étoit entierement conforme à la vérité, mais plutôt, puisque la véritable loi de ces forces est encore inconnue. Je conviens même que, dans la détermination de la force du vent, cette hypothese peut s'écarter très considérablement de la verité, à cause de la grande force de la pression de l'atmosphère, qui peut être fort dérangée par l'impulsion du vent, tandis que la même hypothese, lorsqu'il s'agit de déterminer l'impulsion de l'eau, se trouve plus d'accord avec les expériences ; quoique les aberrations y deviennent aussi souvent assés remarquables. Donc, si j'ai employé cette hypothese defectueuse dans mes recherches sur l'effet des moulins à vent, c'est uniquement à elle qu'il faudra attribuer les erreurs, que la comparaison du calcul avec les expériences nous donnera à connoitre.



II. Or il est certain, qu'un corps en repos, qui reçoit l'impulsion d'un fluide, en est également frappé, que si ce même corps se mouvoit dans le fluide avec la même vitesse : & partant ce qu'on nomme impulsion dans le premier cas, ne differe point de ce qu'on nomme résistance dans l'autre. C'est donc une complete connoissance de la résistance, qui nous manque encore dans ces sortes de recherches ; & avant qu'on parvienne à cette connoissance, on ne sauroit espérer, que la théorie sur les effets des machines, qui sont agitées par l'impulsion de quelque fluide, soit parfaitement d'accord avec l'expérience. Il y a longtems qu'on a remarqué, que l'hypothese commune de la résistance satisfait fort peu à quantité d'expériences, qu'on a faites sur la résistance des fluides : cependant on n'en a pu decouvrir jusqu'ici la véritable théorie, qui semble même demander des recherches trop profondes, pour que nous puissions espérer d'y arriver si tôt. On ne doit donc pas être surpris, si dans le calcul on s'arrête encore à cette hypothese, qu'on n'ignore pas être insuffisante.

III. Pour peu qu'on examine aussi les fondemens, sur lesquels cette hypothese est établie, on les trouve d'abord très foibles & entièrement chimériques. On s'est représenté la résistance comme l'effet d'un choc, qu'un corps éprouve à chaque instant, en traversant un fluide : & afin que chaque partie du fluide, qui a déjà essuyé le choc, ne trouble pas le suivant, on s'imagine, comme si elle étoit subitement anéantie, & que le corps rencontre à chaque instant une nouvelle couche du fluide en repos, contre laquelle il choque avec sa vitesse entière. Or on voit d'abord que toute cette représentation est chimérique, & que lorsqu'un corps se meut dans un fluide, celui-ci en est d'abord mis dans un certain mouvement, par lequel le corps pousse le fluide devant lui, qui découle ensuite autour du corps pour remplir l'espace, qu'il laisse vuide derriere lui. Dans cet état le fluide exerce tout autour du corps une certaine pression sur lui, & la résistance n'est autre chose, que l'excès de la pression du fluide sur la partie antérieure, sur celle que la postérieure soutient ; d'où il est evident que la
resis-



résistance est fort mal représentée par une continuelle répétition d'un choc, que le corps exerce sur les parties du fluide.

IV. Cependant il faut convenir que, quelque contraires que soient ces fondemens de l'hypothese commune à la vérité, il y a pourtant des cas, où elle ne s'écarte pas beaucoup de la vérité, & où l'on s'en peut servir sans tomber dans des erreurs trop énormes. Cela arrive à peu près, lorsque la pression naturelle du fluide sur le corps est fort petite, comme si la question roule sur la résistance qu'un corps, qui nage sur l'eau, ou qui n'y est pas profondement submergé, éprouve. Mais, quand un corps est jetté dans l'air, la diverse pression de l'atmosphere peut causer de si grands desordres, que la résistance devienne très différente de celle que l'hypothese commune indique. On n'a qu'à concevoir le cas, où le corps se meut plus vite, que l'air ne sauroit occuper subitement les lieux, que le corps vient de quitter, de sorte qu'il se trouve toujours derriere le corps un espace vuide d'air, & on verra qu'outre la résistance ordinaire il s'oppose au mouvement du corps toute la pression de l'atmosphere; qui agissant sur la partie antérieure du corps, & n'étant pas contrebalancée par une semblable pression sur la partie postérieure, doit très considérablement augmenter la résistance.

V. Aussi voit-on par les Expériences que Mr. *Robins* a faites sur le mouvement des boulets à canon, que la résistance est de beaucoup plus grande, qu'elle devoit être selon l'hypothese commune. Car, quand même leur vitesse n'est pas si grande, qu'ils laissent après eux un espace vuide, l'air y doit toujours être moins dense que devant le corps; & alors, pour avoir la résistance entiere, il y faut encore ajouter l'excès de la pression d'avant sur celle de derriere. Il est aussi clair que, plus le mouvement du corps est lent, plus petit aussi doit être cet excès: & il y a apparence que cet excès croit dans une raison moindre que celle des quarrés de la vitesse, puisqu'il devient enfin constant. D'où il s'ensuit que la résistance totale est composée de deux parties, dont l'une est proportionnelle au quarré de la vitesse,
mais



mais l'autre à une fonction des vitesses, qui croit moins que leur carré. Par conséquent la véritable résistance des corps mûs dans l'air, sera non seulement plus grande que l'hypothèse commune l'indique, mais encore, en augmentant la vitesse, elle croitra suivant une raison moindre que celle des carrés de la vitesse.

VI. Or, si la résistance qu'un corps jetté dans l'air éprouve, est plus grande que selon l'hypothèse commune, il s'ensuit nécessairement, qu'un corps exposé à l'impulsion du vent, en est poussé par une plus grande force que si on l'estimoit conformément à la même hypothèse. Ou bien il souffrira, outre la force qu'on attribue communément au choc, encore l'excès de la pression de l'atmosphère que la partie exposée au vent soutient sur celle de derrière. Car si un corps, comme une voile, est opposé à la force du vent, on conçoit aisément, que derrière ce corps la densité, & partant aussi la pression de l'air, ne sauroit être si grande, que si l'air étoit en repos; & cela par la même raison, qu'un corps lancé dans l'air avec une fort grande vitesse laisse après lui un espace vuide. On pourroit s'assurer de cet effet en plaçant derrière la voile pendant un grand vent un barometre, qui montreroit infailliblement une moindre hauteur, que s'il étoit assés éloigné de la voile. Plusieurs expériences de cette espèce fourniront aussi le plus sur moyen de nous donner à connoître cet effet: puisque la théorie est encore trop peu développée pour nous conduire à cette connoissance.

VII. Lorsque je déterminai dans le VIII. Volume de ces Mémoires la quantité d'eau, qu'un moulin à vent est capable d'élever à une hauteur donnée, je n'ai eu égard qu'à la partie de la force, qu'on attribue à l'impulsion, ayant fondé mes calculs uniquement sur l'hypothèse ordinaire. Mais, dans un Mémoire inséré au IX. Volume sur le mouvement des bombes, j'ai observé que la résistance actuelle est environ trois fois plus grande, que si on la déterminoit par l'hypothèse commune. Donc, puisqu'il est à présumer, que la force actuelle du vent reçoit une pareille augmentation à peu près, il n'y a aucun doute que



que l'effet des moulins à vent ne surpasse très considérablement celui que je leur avois assigné, & qu'il ne puisse devenir jusqu'à trois fois plus grand : lorsqu'on observe tous les avantages, dont ces machines sont susceptibles. Cependant, puisque la théorie nous manque, je n'oserois prononcer rien de précis là dessus : & il n'y a d'autres moyens pour nous éclaircir sur cet article que les expériences, lesquelles étant faites avec toutes les précautions possibles, & sous des circonstances assez différentes, pourroient bien suppléer au défaut de la théorie.

VIII. Mr. *Lulofs*, très célèbre Professeur de l'Université de Leyde, & Membre de notre Académie, vient de me communiquer des expériences faites sur des moulins à vent, dont on se sert en Hollande pour mettre à sec les lieux marécageux. Il me marque qu'un tel moulin, lorsque le vent parcourt environ 30 pieds par seconde, est capable d'élever 1500 pieds cubiques d'eau par minute à la hauteur de 4 pieds, la rouë étant garnie de 4 ailes, dont chacune avoit 43 pieds de longueur sur $5\frac{1}{2}$ de largeur. Ces ailes n'étoient pas partout également inclinées à la direction du vent, qui donnoit presque perpendiculairement sur les extrémités. Or prenant un milieu, il estime l'angle d'incidence moyen du vent sur les ailes de 73° . Il ne me marque pas le tems d'une révolution de la rouë; mais, si ce tems avoit été de $3\frac{3}{4}$ secondes, qui produiroit selon ma théorie le plus grand effet, cette machine n'auroit dû élever que 757 pieds cubiques d'eau dans une minute. Donc, puisqu'elle a actuellement élevé 1500 pieds cubiques, ce qui est presque le double, il s'ensuit que l'impulsion du vent est plus que deux fois plus grande, que je ne l'avois estimée par l'hypothèse commune; vû que je n'ai pas tenu compte du frottement, & que la vitesse de la rouë n'étoit peut être pas telle, que le plus grand avantage exigeoit.

IX. Mr. *Lulofs* remarque outre cela, que l'effet de ces moulins à vent ne suit pas la raison des cubes de la vitesse absolue du vent, comme la théorie fondée sur l'hypothèse commune montre; mais que la raison de l'effet, ou de la quantité d'eau élevée dans un tems donné,



ne surpasse guères celle des quarrés de la vitesse du vent. De là on pourroit conclure, ce qui étoit déjà très probable, que la force de l'impulsion du vent croit suivant une moindre raison que celle des quarrés de la vitesse. Cependant, pour mieux juger de la raison, que l'effet de ces machines tient à la vitesse du vent, il faut principalement avoir égard au frottement de ces machines : article que j'ai négligé dans mes recherches sur cette matiere, & qui augmente encore davantage la force de l'impulsion du vent, sur celle qui convient à l'hypothese commune. Car, si une telle machine, nonobstant le frottement, produit un effet deux fois plus grand, que la théorie indique : il faut bien que l'impulsion soit encore plus que deux fois plus grande, que celle de la théorie, où le frottement est négligé.

X. Après ces observations, je me propose de traiter de nouveau cette matiere sur l'effet des moulins à vent, en ayant égard à cette augmentation de la force du vent, que l'expérience nous fait remarquer. Car, quoique la loy de cette augmentation soit inconnue, je l'introduirai en sorte dans le calcul, qu'elle demeure indéterminée, afin qu'en comparant ensuite le calcul avec plusieurs expériences, on en puisse trouver la quantité ; ce qui semble le plus sûr moyen pour parvenir à une théorie de ces sortes de machines, tandis que les veritables loix de l'impulsion du vent nous sont cachées. Ensuite j'aurai aussi égard au frottement, qui constitue dans ces machines un article très essentiel, puisqu'il entre dans l'arrangement le plus avantageux, auquel répond le plus grand effet. Car j'ai fait voir, que sans considérer le frottement, l'effet des moulins à vent n'auroit point de bornes, & qu'il seroit toujours susceptible de nouvelles augmentations en approchant davantage d'un angle droit l'angle d'incidence du vent sur les ailes, pourvu qu'on augmentât conformément au calcul la vitesse des ailes. Mais, puisqu'alors le moment du frottement devient plus grand, on conçoit aisément, que c'est le frottement qui doit mettre des bornes au plus grand effet possible.



XI. Je commencerai donc par établir une formule convenable pour exprimer la force de l'impulsion, que le vent exerce sur une surface plane; puisque celle des ailes est telle, ou peut être considérée comme telle. Soit donc une surface plane $AB = aa$, en repos, qui reçoive perpendiculairement selon les directions aA , bB l'impression du vent, dont la vitesse soit due à la hauteur $= c$; & puisqu'on peut considérer la force, dont le vent agit sur le plan, comme composée de deux parties, dont la première est celle qu'on attribue communément au choc, & l'autre qui résulte de la raréfaction de l'air derrière le plan: la première sera la même qu'on trouve par l'hypothèse commune. Elle sera donc égale au poids d'une masse d'air, dont le volume est $= aac$: ou bien, si nous voulons exprimer les forces par des volumes d'eau dont les poids leur sont égaux, en posant la gravité spécifique de l'air m fois plus petite que celle de l'eau, cette force sera $= \frac{1}{m} aac$, dont la direction est perpendiculaire au plan; ce qui est une règle générale pour toutes les pressions.

Fig. 1.

XII. L'autre partie de l'impulsion du vent résulte de ce que la pression de l'atmosphère est diminuée derrière le plan. Pour mieux comprendre cette diminution, nous n'avons qu'à concevoir, que l'air étant en repos, le plan AB s'y meuve avec une pareille vitesse, selon les directions Aa & Bb : & alors il est clair, que l'air ne sauroit parfaitement remplir les espaces derrière le plan: le mouvement de l'air chassé par avant, seroit bien détourné derrière le plan à peu près selon les directions $A\alpha$ & $B\beta$, d'où il se répandroit à cause de son ressort par l'espace $A\alpha B\beta$; mais il est évident que sa densité y fera moindre, & cela d'autant plus, plus le mouvement est rapide. On conviendra aussi, que cette raréfaction ne sauroit être la même partout derrière le plan; elle sera sans doute plus grande vers le milieu C que vers les bords A & B , autour desquels l'air se répand plus promptement. Mais si derrière le plan AB par toute l'étendue l'air est en repos, il se remet-



tra d'abord au même degré de densité & d'élasticité ; qui fera par conséquent moindre qu'avant le plan, ou à des distances, qui en sont assez éloignées.

XIII. Supposons donc que la pression naturelle de l'atmosphère soit égale au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur $= k$; mais que derrière le plan AB, la pression de l'air soit équivalente à celle d'une colonne d'eau, dont la hauteur soit $= q$, & il est certain qu'il y aura $q < k$. Or pour déterminer au juste valeur de q , c'est en quoi la théorie nous abandonne, de sorte que nous sommes obligés de nous en tenir à quelques estimations, dans lesquelles il conviendra d'introduire quelque quantité indéterminée, par la détermination de laquelle on puisse ensuite mettre d'accord le calcul avec les expériences. Pour cet effet je remarque, que cette hauteur q doit être d'autant plus petite, plus la vitesse du vent, ou la hauteur c qui lui est due, fera grande ; d'où je conclus que q est exprimée par une certaine fonction de c , dont nous connoissons ces deux qualités : 1°. qu'au cas de $c = 0$, où le vent cesse entièrement, il soit $q = k$: & 2°. qu'au cas de $c = \infty$, la hauteur q soit réduite à zero, puisqu'il se trouvera alors un vuide parfait derrière le plan.

XIV. Ayant donc ces deux conditions à remplir, que

I. posant $c = 0$ il soit $q = k$

II. posant $c = \infty$ il soit $q = 0$

il sera aisé d'imaginer une infinité de formules qui satisfassent. Les plus simples seront :

$$q = \frac{a k}{a + c}, \quad q = \frac{k}{1 + a c + \epsilon c c}; \quad q = k e^{-c:b}$$

dont la première ne renferme qu'une indéterminée a , la seconde deux a & ϵ , de même que la troisième, où e pourroit marquer un nombre quelconque, positif & plus grand que l'unité, pendant que b marqueroit une ligne quelconque positive. Or de laquelle de ces formules, qu'on



qu'on veuille faire usage, on peut se promettre un assez bon succès; pourvu qu'on fixe la valeur des indéterminées par des expériences bien constatées.

XV. Or, quelque valeur qu'on choisisse pour la hauteur q , la pression de l'atmosphère sur la face postérieure du plan AB étant $\equiv aaq$, pendant que la pression sur la face antérieure est $\equiv aak$, la seconde partie de l'impulsion du vent sera $\equiv aa(k - q)$: d'où l'on tire la force entière de l'impulsion $\equiv \frac{1}{m} aac + aa(k - q)$
 $\equiv aa\left(\frac{c}{m} + k - q\right)$. On pourroit ici objecter, que la pression de l'atmosphère sur la face antérieure devrait être augmentée par la même raison, que celle de la face postérieure a été diminuée; je conviens aisément de cette augmentation, mais je dis qu'elle est déjà précisément comprise dans le terme $\frac{c}{m}$. Car, puisqu'il ne se fait point de choc proprement ainsi dit, tout l'effet du vent consiste uniquement dans la différence des pressions sur les deux faces du plan: & partant $k + \frac{c}{m}$ répond à la pression entière du vent sur la face antérieure.

XVI. Puisque la colonne d'eau, qui mesure la pression de l'atmosphère sur la face antérieure, est $\equiv k\left(1 + \frac{c}{mk}\right)$; au lieu de cette formule on pourroit bien se servir de celle-ci $k e^{\frac{c}{mk}}$ en prenant pour e le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $\equiv 1$. Car tant que c est beaucoup plus petit que mk , la valeur de $e^{\frac{c}{mk}}$ ne diffé-



re pas sensiblement de $1 + \frac{c}{mk}$: car, comme $k = 32$ pieds à peu près, & $m = 700$, la hauteur mk devient $= 22400$ pieds, à laquelle répond une vitesse, qui feroit 1182 pieds par seconde: d'où il n'y a aucun doute que la vitesse du vent ne se trouve toujours fort au des-

sous de ce nombre. Maintenant, si $ke^{\frac{c}{mk}}$ exprime la pression en avant, la ressemblance nous fait conjecturer, que celle de derriere

pourroit bien être exprimée par cette formule $ke^{-\frac{c}{mk}}$, qui satisfait aussi aux deux propriétés requises. De là nous aurions pour toute la force

de l'impulsion du vent $akk \left(e^{\frac{c}{mk}} - e^{-\frac{c}{mk}} \right)$ qui ne s'écartera peut-être pas sensiblement de la vérité. Cependant je ne veux rien décider là dessus, puisque les vrais principes, d'où il faudroit puiser ces éclaircissemens, nous sont encore trop inconnus.

XVII. Cette augmentation de la force du vent est donc uniquement causée par la moindre pression de l'atmosphère derriere le plan. Or on voit que ce n'est qu'immédiatement près du plan, que la pression est si petite : à quelque distance de là, comme en α , ξ la pression ne différera plus de la naturelle. Donc, si l'on attachoit au plan AB un corps $A\alpha\xi B$, convergent en arriere, à peu près comme la poupe d'un vaisseau, il y éprouveroit partout l'entiere pression de l'atmosphère; & partant la force du vent sur la face antérieure AB en feroit considérablement diminuée, & à peu près conforme à l'hypothese commune. De là nous pouvons tirer une remarque fort importante touchant la figure de la poupe d'un vaisseau, pour diminuer la résistance. Car il est clair, que si la prouë étoit terminée en arriere par un plan, la force de l'eau sur la face d'avant, ou la résistance, seroit pareille-



reillement augmentée par la diminution de la pression de l'eau en arriere. D'où l'on voit, qu'une poupe bien allongée & façonnée est fort propre à diminuer la résistance d'un vaisseau ; de sorte qu'elle ne dépend point uniquement de la figure de la prouë, comme on s'imagine ordinairement. De plus, puisque la hauteur k entre dans cette détermination, il s'ensuit, que plus un vaisseau a de profondeur, & plus la figure de la poupe peut concourir à la diminution de la résistance.

XVIII. Ayant établi des formules propres à marquer la force du vent, lorsqu'un plan en est frappé perpendiculairement, il reste à voir, combien cette force sera diminuée, quand le vent vient frapper obliquement le même plan. Soit comme auparavant la surface du plan $AB = aa$, & c la hauteur due à la vitesse du vent, le plan étant supposé en repos ; or que ϕ soit l'angle, que fait la direction du vent avec la surface. Cela posé, on soutient que la premiere partie de l'impulsion est diminuée en raison du quarré du sinus de l'angle ϕ : donc

Fig. 2.

cette force sera $= \frac{1}{m} aa c \sin \phi^2$, prenant l'unité pour marquer le

sinus total. Pour la diminution de la pression en arriere, on voit aussi qu'elle sera diminuée par l'obliquité : car, si l'angle ϕ évanouïssoit entierement, la densité de l'air ne souffriroit aucune diminution derriere le plan, & partant la seconde partie de la force d'impulsion deviendra aussi d'autant plus petite, plus l'angle ϕ sera petit. Cependant il est incertain, si cette diminution suit la raison du quarré du sinus de l'angle ϕ , ou quelque'autre fonction.

XVIII. Donc l'autre partie de l'impulsion du vent, qui étoit pour l'impulsion perpendiculaire $= aa(k - q)$, deviendra aussi d'autant plus petite, plus l'angle d'incidence ϕ s'écarte d'un droit, & puisqu'il faut multiplier la premiere partie par $\sin \phi^2$, il semble fort probable que l'autre partie doit être diminuée selon la même raison. De là nous aurons pour la force du vent, qui frappe obliquement, cette formule $aa \left(\frac{c}{m} + k - q \right) \sin \phi^2$, où il faut donner à q une valeur

con-



convenable décrite cy-dessus. Donc, si nous prenons selon la première formule $q = \frac{b k}{b+c}$, la force du vent sera $= a a \left(\frac{c}{m} + \frac{c k}{b+c} \right) \sin \phi^2$,

or posant selon la troisième formule $q = k e^{\frac{-c}{b}}$, nous aurons pour la

force du vent $a a \left(\frac{c}{m} + k - k e^{\frac{-c}{b}} \right)$: laquelle ne diffère pas sen-

siblement de la première, lorsque c est beaucoup plus petite que b . Or b est ici une quantité indéterminée, qu'il conviendra laisser telle, pour pou-

voir accorder la théorie avec quelques expériences: dans cette vue j'employerai la formule $a a \left(\frac{c}{m} + \frac{c k}{b+c} \right) \sin \phi^2$, ou $a a c \left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c} \right) \sin \phi^2$, comme la plus simple.

Fig. 3.

XX. Mais, puisque le vent ne rencontre pas les ailes du moulin en repos, il faut voir, combien le mouvement des ailes change la force du vent, ce qui se pourra faire sans le secours de la théorie, qui étoit insuffisante pour les recherches précédentes. Soit donc VC la direction du vent, qui représente en même tems sa vitesse $= Vc$; & que le plan $AB = aa$ se meuve d'un mouvement parallèle selon la direction CU , qui en représente aussi la vitesse $= Vu$: or je suppose que le plan AB soit perpendiculaire au plan représenté par les deux directions CV & CU , puisque cela arrive dans les moulins à vent. Qu'on conçoive imprimé à tout l'espace un mouvement contraire & égal à celui du plan AB , afin que ce plan soit réduit en repos, & ce mouvement imaginaire se fera selon la direction Cu , avec la vitesse $Cu = CU = Vu$. Par là le mouvement du vent selon Cv sera réduit au mouvement représenté par la diagonale Cs du parallélogramme formé des deux côtés $Cv = Vc$, & $Cu = Vu$.



XXI. Qu'on prenne $CS = Cs$ dans la même direction, & la droite SC donnera la direction & la vitesse du vent, qui produiroit sur le plan AB en repos le même effet, que le vent proposé produit sur le plan AB mù, comme je viens de le supposer. Pour trouver cette force, posons l'angle $VCU = vCu$ que fait la direction du vent VC avec celle du plan $CU = a$, & l'angle Cvs étant $= 180 - a$, & les côtés $Cv = Vc$ & $vs = Cu = Vu$, nous aurons la diagonale

$$Cs = V(c + u + 2 \cos a. Vcu)$$

qui exprime la vitesse du vent SC , & sa direction, dont il faut concevoir, qu'il frappe le plan AB en repos. L'angle d'incidence fera donc $= BCS$, & pour trouver son sinus, soit l'angle $BCV = \omega$, pour avoir $BCS = \omega - VCS$, &

$$\sin BCS = \sin \omega \cos VCS - \cos \omega \sin VCS.$$

$$\text{Mais } \cos VCS = \cos vCs = \frac{2c + 2 \cos a. Vcu}{2Vc(c + u + 2 \cos a. Vcu)}$$

$$\sin VCS = \sin vCs = \frac{\sin a. Vu}{V(c + u + 2 \cos a. Vcu)}$$

d'où il s'enfuit :

$$\sin BCS = \frac{\sin \omega (Vc + \cos a. Vu) - \cos \omega \sin a. Vu}{V(c + u + 2 \cos a. Vcu)}$$

XXII. Donc, si le vent, qui souffle dans la direction VC avec la vitesse $= Vc$, frappe sous l'angle $BCV = \omega$ le plan $AB = aa$, qui se meut lui-même avec la vitesse $= Vu$ selon la direction CU , qui fait avec celle du vent un angle $VCU = a$, l'effet du vent sur ce plan mù fera le même, que si le plan étoit en repos, & que le vent vint frapper là dessus avec une vitesse $= V(c + u + 2 \cos a. Vcu)$, & sous une telle obliquité dont le sinus fut :

$$\frac{\sin \omega (Vc + \cos a. Vu) - \cos \omega \sin a. Vu}{V(c + u + 2 \cos a. Vcu)}$$



d'où l'on pourra estimer la force par la règle donnée cy-dessus. Ayant ainsi réduit le cas à celui, où le plan seroit en repos, il est évident que la résistance, que le plan rencontre de l'autre côté, y est déjà comprise, & qu'il seroit hors de saison, d'en vouloir encore tenir compte dans le calcul. Mais il faut bien remarquer, que le plan AB est supposé ici perpendiculaire au plan déterminé par les deux directions VC & CU : & si le plan AB y étoit incliné, il en faudroit tenir compte, ce qui rendroit la dernière formule plus compliquée ; mais nous n'avons point besoin de ce cas dans nos recherches sur les moulins à vent.

Fig. 4. XXIII. Après avoir établi ces principes, considérons l'aile d'un moulin à vent OGGHH, étendue autour du rayon OEF, que nous supposons perpendiculaire à l'axe du moulin, autour duquel cette aile tourne. Qu'on conçoive cette aile partagée en des parallélogrammes infiniment petits MmmM par des droites MM, mm perpendiculaires au rayon OF ; & posant la distance OP = x, soit la largeur de l'aile MM = y, & partant l'aire MmmM = y dx. Comme l'aile tourne autour de l'axe O, soit à l'extrémité F la vitesse = Vv, ou bien v la hauteur due à cette vitesse ; & la distance OF = f. De là nous aurons la vitesse dont le point P tourne autour de l'axe O, = $\frac{xVv}{f}$. Puisque l'axe du moulin doit toujours être tourné vers le vent, la direction du vent fera partout parallèle à cet axe : posons donc que la direction du vent fasse avec le plan du parallélogramme MmmM un angle = ω, que je regarderai comme variable par rapport à la distance OP = x, de même que la largeur de l'aile MM = y. Cependant cette variabilité de l'angle ω n'empêchera pas, qu'on ne puisse regarder la surface entière de l'aile comme l'intégrale $\int y dx$.

Fig. 5. XXIV. Qu'on conçoive un plan parallèle à l'axe du moulin, qui passe par la section MM, & que la planche (fig. 5) représente ce plan, sur lequel la droite VP marque la direction du vent, dont la vitesse = Vc, qui fasse avec MM l'angle VPM = ω. Or le plan

plan MM aura un mouvement selon la direction P U perpendiculaire à VP, avec la vitesse $= \frac{xVv}{f}$; de sorte que ce qui a été nommé

ci-dessus Vu , est maintenant $= \frac{xVv}{f}$, & l'angle α sera ici droit,

enfin pour aa il faudra mettre ici $y dx$. Donc le vent produira sur cet élément de l'aile $MM = y dx$ le même effet, que si cet élément

étoit en repos, & que la vitesse du vent fût $= V \left(c + \frac{xxv}{ff} \right)$

à cause de $\alpha = 90^\circ$ & $u = \frac{xxv}{ff}$, & qu'il y tombât sous un angle, dont le sinus seroit

$$\frac{\sin \omega \cdot Vc - \frac{xxv}{f} \cos \omega}{V \left(c + \frac{xxv}{ff} \right)}$$

On doit donc mettre cette dernière valeur à la place de $\sin \phi$, & l'autre à la place de Vc .

XXV. Or nous avons trouvé ci-dessus (19) cette formule pour exprimer la force du vent, $aac \left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c} \right) \sin \phi^2$; où nous devons mettre les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lll} y dx & \text{au lieu de} & aa \\ c + \frac{xxv}{ff} & \text{au lieu de} & c \end{array}$$

$$\left(\sin \omega \cdot Vc - \cos \omega \cdot \frac{xxv}{f} \right)^2 \text{ au lieu de } c \sin \phi^2$$

& partant la force du vent sur l'élément $MmmM$ de l'aile sera égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume est



$$y dx \left(\sin \omega \cdot \sqrt{c} - \cos \omega \cdot \frac{x \sqrt{v}}{f} \right)^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{ff k}{(b+c)ff + xxv} \right)$$

Mais la direction de cette force étant perpendiculaire au plan selon PN, il la faut décomposer selon la direction Pv parallèle à l'axe, & la direction du mouvement PU: or l'angle NPU étant égal à l'angle MPV = ω , la force qui agit selon la direction du mouvement PU sera

$$y dx \cos \omega \left(\sin \omega \cdot \sqrt{c} - \cos \omega \cdot \frac{x \sqrt{v}}{f} \right)^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{ff k}{(b+c)ff + xxv} \right)$$

XXVI. Si nous multiplions cette force par la vitesse de l'élément

Mmmm, qui est = $\frac{x \sqrt{v}}{f}$, nous aurons l'élément du moment d'im-

pulsion qui repond à l'élément de l'aile Mmmm, & partant le moment d'impulsion sur l'aile entière sera

$$\int \frac{xy dx \sqrt{v}}{f} \cos \omega \left(\sin \omega \cdot \sqrt{c} - \cos \omega \cdot \frac{x \sqrt{v}}{f} \right)^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{ff k}{(b+c)ff + xxv} \right).$$

Dans cette intégration la quantité y & l'angle ω doivent être regardés comme des fonctions de x , pendant que les autres quantités $f, v, k, b, c,$ & m sont constantes; & après avoir trouvé l'intégrale, il faut l'étendre par toute la surface de l'aile. Ensuite il faut la multiplier par 4, puisque les moulins sont ordinairement garnis de quatre ailes, & alors on obtiendra l'entier moment d'impulsion, que le vent exerce sur les ailes, & auquel le moment d'effet, que la machine est capable de produire, sera égal. Or, pour faciliter cette intégration, on pourra re-

garder le terme $\frac{ff k}{(b+c)ff + xxv}$ comme constant, attendu que

dans le dénominateur la partie xxv est extrêmement petite par rapport à la partie $(b+c)ff$: car l'indéterminée b est apparemment fort grande.

XXVII. Posons donc le dernier facteur de notre formule, puisque nous le pouvons regarder comme constant,

$$= \frac{1}{m} + \frac{ffk}{(b+c)ff+xxv} = \frac{n}{m}$$

de sorte qu'au lieu de l'indéterminée b nous ayons à déterminer le nombre n , d'où ensuite il sera aisé de connoître la constante b , ayant à peu

près $\frac{b+c}{k} = \frac{m}{n-1}$ ou $b = \frac{mk}{n-1} - c$. Cela posé, si le moulin est garni de 4 ailes semblables, le moment entier d'impulsion du vent sera

$$\frac{4nVv}{mf} \int xy dx \cos \omega \left(\sin \omega \cdot Vc - \cos \omega \cdot \frac{xVv}{f} \right)^2$$

ou bien

$$\frac{4ncVv}{mf} \int xy dx \cos \omega \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)^2$$

auquel le moment d'effet de la machine est égal, pourvu qu'on y tienne compte du frottement. Considérons d'abord la figure des ailes comme connue, de même que son inclinaison à la direction du vent, & voyons quel effet la machine sera capable de produire; ensuite nous chercherons les arrangemens les plus avantageux pour obtenir le plus grand effet, ce qui sera le sujet des problèmes suivans.

P R O B L E M E I.

XXVIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent; si l'on connoit tant la vitesse du vent, que celle dont les ailes tournent, trouver le moment d'impulsion.*

S O L U T I O N.

Soit la largeur constante de chaque aile $GG = MM = HH = h$, Fig. 4.
de sorte que $y = h$; & la longueur $OF = f$; que v marque la hauteur due à la vitesse, dont l'extrémité F tourne autour de l'axe O , & c celle qui est due à la vitesse du vent, dont la direction fasse un angle



constant $\equiv \omega$ avec les faces des ailes. Donc, puisque l'angle ω est constant, notre expression pour le moment d'impulsion

$$\frac{4\pi c h \cos \omega \cdot Vv}{mf} \int x dx \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)^2$$

s'intégrera aisément : car l'intégrale étant

$$\frac{4\pi c h \cos \omega \cdot Vv}{mf} \left(\frac{1}{2} x x \sin \omega^2 - \frac{2x^3 Vv}{3fVc} \sin \omega \cos \omega + \frac{x^4 v}{4ffc} \cos \omega^2 \right)$$

Si nous posons $x \equiv f$, le moment d'impulsion sur toutes les quatre ailes sera exprimé en sorte :

$$\frac{4\pi c f h \cos \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos \omega^2 \right).$$

C O R O L L. I.

XXIX. C'est donc à cette quantité que sera égal le moment d'effet de la machine, ou bien le produit de la résistance par la vitesse dont elle sera vaincue, pourvu qu'on y comprenne aussi le frottement. Car c'est une règle générale pour toutes les machines que le moment d'impulsion est égal au moment d'effet.

C O R O L L. 2.

XXX. Cette égalité étant fondée sur l'état d'équilibre suppose l'uniformité dans l'action de la machine. Or au premier instant, où la machine est encore en repos, il faut bien que l'impulsion soit plus forte que la résistance, pour mettre la machine en mouvement, mais ensuite le mouvement devient de plus en plus uniforme, & ce n'est qu'alors, que les deux momens mentionnés deviennent égaux.

C O R O L L. 3.

XXXI. La formule que je viens de trouver pour le moment d'impulsion dépend principalement de la vitesse des ailes Vv , & elle deviendrait même infinie, si l'on augmentoit cette vitesse à l'infini ; puisque

que

que le dernier facteur $\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2 \sqrt{v}}{3 \sqrt{c}} \sin \omega \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos \omega^2$ ne sauroit jamais évanouir, ou devenir négatif.

S C H O L I E.

XXXII. Cependant il est très certain que le moment d'impulsion ne sauroit jamais surpasser de certaines limites, de sorte que l'augmentation de la vitesse \sqrt{v} est nécessairement restreinte à quelque détermination. Il est donc bien important d'examiner cette détermination, que la considération de notre analyse nous découvrira d'abord. Car puisque le vent, qui frappe sur les ailes mises en mouvement, y exerce la même force, que si les ailes étoient en repos, & que le vent y frappât avec une vitesse $= \sqrt{c + \frac{x x v}{f f}}$ sous un angle dont le sinus seroit

$$= \frac{\sin \omega - \frac{x \sqrt{v}}{f} \cos \omega}{\sqrt{c + \frac{x x v}{f f}}},$$

il est clair que, si ce sinus deve-

noit négatif, la force du vent repousseroit les ailes en arriere. Or, puisque le carré de ce sinus entre dans notre formule, il semble que l'effet devoit être le même, soit que ce sinus soit négatif ou positif; & on se tromperoit énormément si l'on vouloit appliquer notre formule à des cas, où le sinus d'incidence deviendroit négatif: car alors il faudroit absolument regarder l'impulsion comme négative. Donc, pour que notre formule soit conforme à la vérité, il faut que l'expression $\sin \omega \sqrt{c} - \frac{x \sqrt{v}}{f} \cos \omega$, ne devienne nulle part négative; donc notre théorie suppose absolument, que pour tous les élémens des ailes cette condition ait lieu, qu'il soit $\tan \omega > \frac{x \sqrt{v}}{f \sqrt{c}}$; d'où l'on voit que



la vitesse Vv ne sauroit être augmentée à volonté. Donc, notre formule trouvée pour le moment d'impulsion ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût pour tous les élémens des ailes $\text{tang } \omega > \frac{x V v}{f V c}$: & s'il arrivoit que pour quelque partie des ailes la quantité $\frac{x V v}{f V c}$ devint plus grande que $\text{tang } \omega$, il en résulteroit une force contraire au mouvement des ailes, quoique le calcul ne le montrât point. Voilà donc une condition très essentielle, & sans laquelle le moment d'impulsion trouvé ne seroit jamais juste, qui exige que la quantité $\frac{x V v}{f V c}$ ne surpasse nulle part $\text{tang } \omega$. Et partant dans le cas de notre probleme, où l'angle ω est constant, la valeur de $\frac{x V v}{f V c}$ fera toujours moindre que $\text{tang } \omega$, pourvû que $\frac{V v}{V c}$ ne surpasse point $\text{tang } \omega$, d'où il est évident que dans le cas présent la formule donnée pour le moment d'impulsion exige nécessairement qu'il soit $V v < \text{tang } \omega \cdot V c$ & que sans cette condition elle seroit infailliblement fausse. La vitesse des ailes Vv obtient par là un terme qu'elle ne doit jamais passer, & le dernier degré étant $V v = \text{tang } \omega \cdot V c$ donne le moment d'impulsion $= \frac{n c f h V c}{3}$ $\sin \omega^3$, qui est encore juste. Mais, si l'on augmentoit la vitesse Vv au delà, l'impulsion diminueroit certainement, quoique le calcul la montrât plus grande.

P R O B L E M E II.

XXXIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent, si l'on connoit la structure de la machine, & la résistance qui doit être vaincue, déterminer l'action de la machine, qui sera produite par un vent donné.*

SOLU-



S O L U T I O N.

Soit comme auparavant la largeur des ailes $MM = h$, leur longueur $OF = f$, & l'inclinaison de leurs faces à la direction du vent $= \omega$, dont la vitesse soit due à la hauteur $= c$. Maintenant, de quelque manière que la machine soit construite, on la peut toujours réduire à l'action d'un tambour $RSRS$, fixé sur l'axe des ailes OO , autour duquel passe une corde TZ , qui élève un poids P , pendant que les ailes tournent. Soit donc le rayon de ce tambour $= r$, & le poids P égal à celui d'une masse d'eau, dont le volume $= p^3$; de sorte que la lettre r renferme la construction de la machine, & p^3 la résistance qu'il faut surmonter. Supposons que la machine soit déjà parvenue à l'uniformité de mouvement, & que les extrémités des ailes F tournent avec la vitesse $= Vv$, & la vitesse, dont le poids P monte,

Fig. 6

fera $= \frac{rVv}{f}$: donc le moment d'effet de la machine doit être estimé $= \frac{p^3 r Vv}{f}$: lequel étant égal au moment d'impulsion trouvée

ci-dessus donnera l'équation suivante, après avoir divisé par Vv :

$$\frac{4ncfh \cos \omega}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos \omega^2 \right) = \frac{p^3 r}{f}.$$

Mais, avant que la machine puisse parvenir à l'état d'uniformité, il faut que d'abord, lorsque la machine est encore en repos, l'impulsion soit plus forte que la résistance: il faut donc qu'il soit

$$\frac{2ncfh}{m} \sin \omega^2 \cos \omega > \frac{p^3 r}{f}, \text{ ou } c > \frac{m p^3 r}{2nffh \sin \omega^2 \cos \omega}, \text{ \& tant que}$$

la vitesse du vent seroit moindre, la machine demeureroit en repos. Or, par les raisons alléguées dans le §. préc: il faut aussi qu'il soit $Vv < \text{tang } \omega \cdot Vc$, puisqu'ailleurs le calcul seroit contraire à la vérité. Ayant donc bien remarqué ces deux circonstances, nous pourrons trouver la vitesse des ailes Vv , qui conviendra au mouvement unifor-



me : pour rendre cette recherche plus aisée, posons $\frac{Vv}{Vc} = z \text{ tang } \omega$,
& notre équation prendra cette forme :

$$\frac{4ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} z + \frac{1}{4} z^2 \right) = \frac{p^3 r}{f}$$

d'où nous tirons

$$z^2 - \frac{8}{3} z + 2 = \frac{m p^3 r}{n c f f h \sin \omega^2 \cos \omega}$$

$$\& z = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \sin \omega^2 \cos \omega} - \frac{2}{9} \right)}$$

par conséquent

$$\frac{Vv}{Vc} = \frac{4}{3} \text{ tang } \omega \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos \omega^3} - \frac{2}{9} \text{ tang } \omega^2 \right)}.$$

Mais il faut qu'il soit $\frac{Vv}{Vc} < \text{tang } \omega$, d'où il est évident que le
signe $+$ devant le radical ne sauroit avoir lieu, & le signe $-$ ne
sauroit subsister, à moins qu'il ne fût

$$\frac{Vv}{Vc} = \frac{4}{3} \text{ tang } \omega - \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos \omega^3} - \frac{2}{9} \text{ tang } \omega^2 \right)} < \text{tang } \omega$$

$$\text{ou } \frac{1}{3} \text{ tang } \omega < \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{n c f f h \cos \omega^3} - \frac{2}{9} \text{ tang } \omega^2 \right)}$$

& partant prenant les quarrés :

$$\frac{1}{9} \text{ tang } \omega^2 < \frac{m p^3 r}{n c f f h \cos \omega^3} \quad \text{ou bien}$$

$$c < \frac{3 m p^3 r}{n f f h \sin \omega^2 \cos \omega}$$

Or la première condition exige, qu'il soit

$$c > \frac{m p^3 r}{2 n f f h \sin \omega^2 \cos \omega}.$$

Done



Donc, à moins que la vitesse du vent ne soit entre ces deux limites, le mouvement uniforme ne sauroit avoir lieu ; car, si elle étoit au dessous de la moindre limite, la machine ne produiroit aucune action, & si elle étoit au dessus de la plus grande, le mouvement de la machine seroit continuellement accéléré, sans qu'il parvint jamais à l'état d'uniformité. Or, tant que la vitesse du vent subsiste entre ces deux limites, la formule irrationnelle trouvée sera toujours réelle, & on pourra assigner la vitesse, dont les ailes tourneront dans l'état d'uniformité : d'où l'on connoitra aussi la vitesse du fardeau, & partant le moment d'effet de la machine.

C O R O L L I.

XXXIV. Il est d'abord clair que le vent doit avoir quelque force, avant qu'il soit en état de mettre la machine en mouvement.

Si nous posons pour abrégé $\frac{p^3 r}{ffh \sin \omega^2 \cos \omega} = u$, la hauteur due à la vitesse du vent c doit être plus grande que $\frac{mu}{2n}$, & tant que le vent est plus foible, la machine demeure sans action.

C O R O L L 2.

XXXV. Cette quantité u dépend donc 1°. de la longueur f , de la largeur h , & de l'inclinaison des ailes, ou de l'angle ω , supposé que tant la largeur que l'inclinaison soit par tout la même : 2°. de la structure de la machine, qui est renfermée dans la quantité r : & 3°. de la grandeur du fardeau, qu'il faut élever p^3 , ou en général de la résistance qu'il faut vaincre.

C O R O L L 3.

XXXVI. Donc, pour que le vent soit capable de mettre la machine en action, il faut qu'il soit $c > \frac{mu}{2n}$: & alors ayant $x =$



$\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{m u}{n c} - \frac{2}{9}\right)}$, la vitesse des ailes à leur extrémité sera $V v = \varepsilon \operatorname{tang} \omega \cdot V c$; ou bien

$$V v = \operatorname{tang} \omega \left(\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{m u}{n c} - \frac{2}{9}\right)} \right) V c$$

De là on connoitra la vitesse $\frac{r V v}{f}$, dont le fardeau sera élevé.

C O R O L L 4.

XXXVII. Il est aussi évident, que plus la vitesse du vent augmente, plus aussi la quantité ε , & partant à plus forte raison la vitesse des ailes $V v$, deviendra grande. Cependant notre formule n'a lieu, que tandis que la hauteur due à la vitesse du vent c est moindre que $\frac{3 m u}{n}$; lorsqu'elle devient plus grande, la valeur de $V v$ ne sera plus conforme à notre formule.

C O R O L L 5.

XXXVIII. Or, si $c = \frac{3 m u}{n}$, qui contient la plus grande force du vent, à laquelle notre formule puisse être appliquée, nous aurons $\varepsilon = \frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)} = 1$. & partant on aura pour la vitesse des ailes $V v = \operatorname{tang} \omega \cdot V c = \operatorname{tang} \omega \cdot V \frac{3 m u}{n}$: & pour la vitesse du fardeau $\frac{r V v}{f} = \frac{r \operatorname{tang} \omega}{f} V \frac{3 m u}{n}$.

S C H O L I E.

XXXIX. Quand le vent augmente au delà de ce degré, notre formule ne fauroit plus avoir lieu; car, puisque alors le mouvement des ailes devient plus rapide, ou $\frac{V v}{V c} > \operatorname{tang} \omega$, l'effet du vent sur

les



les extrémités des ailes fera négatif, ou les ailes y seront frappées du côté opposé, ce qui diminuera la force d'impulsion, au lieu que notre calcul change cette diminution en augmentation. La force de l'impulsion étant donc dans ces cas plus petite, que notre calcul l'indique, l'effet de la machine en fera aussi diminué. Et partant un vent plus fort, en faisant tourner plus vite les ailes, produira bien un plus grand effet, mais cet effet fera de beaucoup moindre, que selon le calcul; ce qui est sans doute le cas que Mr. *Lulofs* a en vuë, quand il dit avoir observé que les effets des vent plus rapides ne croissent pas dans la raison du cube de leur vitesses, & pas même dans celle de leurs quarrés. Cela n'est donc pas contraire à ce que j'avois avancé, que l'effet du vent croissoit dans la raison du cube de sa vitesse; car je parlois alors des plus grands effets, que chaque vent est capable de produire; or cet avantage exige pour chaque vitesse du vent un arrangement particulier dans la disposition de la machine. Mais, lorsque l'arrangement demeure le même, il est également vray, que l'effet des vents les plus forts suive une raison beaucoup plus petite que celle des cubes de leur vitesse, quoiqu'il fût possible en changeant la disposition de la machine, ou la quantité r , d'en tirer un effet, qui seroit à peu près proportionnel au cube de la vitesse. Dans le problème présent j'ai supposé l'arrangement de la machine, ou la quantité r , la même pour tous les degrés du vent; & il est clair que cet arrangement ne sauroit être le plus avantageux que pour un seul degré de vitesse; & par la raison alléguée il est clair, que lorsque $c > \frac{3mu}{n}$, on perd principalement beaucoup sur l'effet que la machine seroit capable de produire, si l'on y changeoit convenablement la quantité r , d'où depend celle de u .

P R O B L E M E III.

XL. Si dans le cas du problème précédent la vitesse du vent est si grande, que notre calcul n'y sauroit plus être appliqué, déterminer l'action de la machine, qu'un tel vent sera capable de produire.



SOLUTION.

Fig. 4.

Dans ce cas toute la difficulté revient à ce que les ailes tournent si vite, qu'une partie vers leurs extrémités est frappée en derrière par le vent, dont l'effet par conséquent est contraire au mouvement de la machine. Soit donc la vitesse des ailes à leur extrémité $F = Vv$, & que la partie TT HH reçoive le choc du vent par la face de derrière, tandis que la partie GG TT le reçoit par avant : posons la distance $OS = s$, & le moment d'impulsion pour la partie GG TT fera

$$\frac{4nchss \cos \omega \cdot Vv}{mf} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2sVv}{3fVc} \sin \omega \cdot \cos \omega + \frac{ssv}{4ffc} \cos^2 \omega \right).$$

Or la partie TT HH fournira, pour ainsi dire, un moment de répulsion, qui fera

$$+ \frac{4ncfh \cos \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \cdot \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos^2 \omega \right)$$

$$- \frac{4nchss \cos \omega \cdot Vv}{mf} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2sVv}{3fVc} \sin \omega \cdot \cos \omega + \frac{ssv}{4ffc} \cos^2 \omega \right).$$

Retranchant celui-ci de celui-là, il restera le moment de l'impulsion actuelle, qui fera :

$$+ \frac{8nchss \cos \omega \cdot Vv}{mf} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2sVv}{3fVc} \sin \omega \cos \omega + \frac{ssv}{4ffc} \cos^2 \omega \right)$$

$$- \frac{4ncfh \cos \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos^2 \omega \right)$$

Or, puisque en TT est la séparation des impulsions positives & négatives, il y aura $\sin \omega Vc - \frac{sVv}{f} \cos \omega = 0$, ou $s = f \tan \omega \cdot \frac{Vc}{v}$, & cette valeur étant substituée à la place de s , on aura le vrai moment d'impulsion des cas en question

$$\frac{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{2c \sin \omega^2}{3v \cos \omega^2} - 2 + \frac{8Vv}{3Vc} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega} - \frac{v \cos \omega^2}{c \sin \omega^2} \right)$$

&



& cette formule aura lieu toutes les fois que $\frac{Vv}{Vc} > \text{tang } \omega$. C'est donc à cette formule qu'il faut évaluer le moment d'effet $\frac{F^3 r Vv}{f}$, lorsqu'il y aura $c > \frac{3mp^3 r}{nffh \sin \omega^2 \cos \omega^2}$. Posons comme auparavant pour abrégier $\frac{p^3 r}{ffh \sin \omega^2 \cos \omega^2} = u$, de sorte que nous ayons à considérer les cas où $c > \frac{3mu}{n}$ & l'équation d'où il faut tirer la vitesse des ailes Vv fera

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2c \sin \omega^2}{3v \cos \omega^2} - 2 + \frac{8Vv}{3Vc} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega} - \frac{v \cos \omega^2}{c \sin \omega^2}$$

Soit encore $\frac{Vv}{Vc} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega} = z$ ou $\frac{Vv}{Vc} = z \text{ tang } \omega$, pour avoir

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - zz$$

d'où l'on voit qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ ou $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3}$, il y aura $z = 1$.

Soit donc $c > \frac{3mu}{n}$, & partant $\frac{mu}{nc} < \frac{1}{3}$; & voyon quelle sera

la valeur de z . Posons pour cet effet $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3} - v$, & $z = 1 + \xi$,

en regardant v & ξ comme des fractions fort petites, de sorte

que $\frac{1}{zz} = 1 - 2\xi$ & $zz = 1 + 2\xi$, & nous aurons :

$$\frac{1}{3} - v = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\xi - 2 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}\xi - 1 - \xi = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\xi$$

donc $\xi = \frac{3}{2}v$ ou $z = \frac{3}{2} - \frac{3mu}{2nc}$ Par conséquent, lorsque la

vitesse du vent surpasse tant soit peu la limite marquée, ou qu'il y

$c = a$



$c = \frac{3 m u}{(1 - 3 v) n}$, marquant par v une fraction extrêmement petite,

nous aurons $\frac{V v}{V c} \cdot \frac{\text{cof } \omega}{\text{fin } \omega} = 1 + \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} - \frac{3 m u}{2 n c}$, donc

$$V v = \frac{1}{2} \text{tang } \omega \left(V c - \frac{m u}{n V c} \right) \text{ à peu près.}$$

Ou bien si $c = \frac{3 m u}{(1 - 3 v) n} = \frac{3 m u}{n} (1 + 3 v)$, nous aurons

$$V v = \text{tang } \omega (1 + 3 v) V \frac{3 m u}{n}.$$

C O R O L L. 1.

XLI. Donc, si la vitesse du vent surpasse infiniment peu la limite trouvée $c = \frac{3 m u}{n}$, de sorte que $c = \frac{3 m u}{n} (1 + 3 v)$, la vitesse des ailes à leur extrémité fera

$$V v = \frac{c \text{ tang } \omega}{V \frac{3 m u}{n}}$$

C O R O L L. 2.

XLII. Or on trouve le même rapport, si la vitesse du vent est tant soit peu plus petite que ladite limite, de sorte que près de cette limite la vitesse des ailes, & partant aussi celle du fardeau, ou l'effet de la machine, est proportionnelle au quarré de la vitesse du vent.

C O R O L L. 3.

XLIII. Mais, si la vitesse du vent surpasse considérablement cette limite, l'effet ne croitra plus dans la même raison. Posons $c = \frac{6 m u}{n}$, ou que la vitesse du vent soit à celle de la limite comme $\sqrt{2}$ à 1, ou le



le quarré deux fois plus grand, & on aura à résoudre l'équation, $\frac{1}{3} =$

$$\frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - 2z \text{ ou celle cy}$$

$$z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{1}{3}z^2 - 2 = 0$$

d'où l'on tire à peu près $z = \frac{1}{3}$ & $Vv = \frac{1}{3} \text{ tang } \omega \sqrt{\frac{6mu}{n}}$

C O R O L L 4.

XLIV. Or dans le cas $c = \frac{3mu}{n}$, on a $Vv = \text{tang } \omega \sqrt{\frac{3mu}{n}}$:

donc, lorsque le quarré de la vitesse du vent devient deux fois plus grand, la vitesse des ailes, ou l'effet, sera augmenté dans le rapport de 1 à $\frac{4}{3} \sqrt{2}$ ou de 1 à $\sqrt{\frac{32}{9}}$; & cette augmentation est moindre que si elle suivoit la raison du quarré des vitesses du vent.

C O R O L L 5.

XLV. Posons la vitesse du vent deux fois plus grande que dans la limite, ou soit $c = \frac{12mu}{n}$, & l'équation à résoudre sera

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - 2z, \text{ ou } z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^2 - 2 = 0,$$

d'où l'on trouve à peu près $z = \frac{1}{3}$, & partant $Vv = \frac{1}{3} \text{ tang } \omega \sqrt{\frac{12mu}{n}}$. Donc l'effet sera $\frac{4}{3}$ ou 3 fois plus grand, qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ quoique le quarré de la vitesse soit 4 fois plus grand.

C O R O L L 6.

XLVI. De la même maniere on trouvera, que quand même la vitesse du vent deviendroit 100 fois plus grande qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$, l'effet ne seroit que $\frac{1}{7}$. 100 ou 157 fois plus grand ; de sorte qu'enfin les effets ne suivront que la raison simple de la vitesse du vent.



S C H O L I O N.

XLVII. Si l'on donne l'exclusion à ces cas où $c > \frac{3mu}{n}$, la machine décrite ne peut servir que lorsque la vitesse du vent est renfermée entre ces deux limites, $c = \frac{mu}{2n}$ & $c = \frac{3mu}{n}$, de sorte que la vitesse du plus fort ne surpasse celle du plus foible que dans la raison de $\sqrt{6}$ à 1. Or, quand le vent se trouve entre ces deux limites, il est aisé de déterminer la vitesse des ailes Vv , & partant aussi celle que le vent imprimera à la machine. Il fera donc bon de calculer les cas principaux, afin qu'on les puisse mieux comparer avec ceux que je viens de développer ici, quand $c > \frac{3mu}{n}$.

$c = \frac{mu}{2n}$	$Vv = 0$
$c = \frac{mu}{n}$	$Vv = 0,44141 \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{3mu}{2n}$	$Vv = 0,66666 \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{2mu}{n}$	$Vv = 0,80628 \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{5mu}{2n}$	$Vv = 0,91170 \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{3mu}{n}$	$Vv = \text{tang } \omega. Vc$
$c = \frac{6mu}{n}$	$Vv = \frac{4}{3} \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{12mu}{n}$	$Vv = \frac{16}{3} \text{ tang } \omega. Vc$
$c = \frac{30000mu}{n}$	$Vv = \frac{1}{3} \text{ tang } \omega. Vc$



Comparons ensemble les cas $c = \frac{3mu}{2n}$ & $c = \frac{3mu}{n}$, où la raison des quarrés des vitesses du vent est 1 : 2, & celle des effets $\frac{2}{3} : \sqrt{2}$, qui est un peu plus grande que celle-là ; & nous verrons, que l'observation de Mr. *Lulofs* est assez bien d'accord avec ce calcul : par lequel nous voyons aussi, que la disposition de la Machine demeurant la même, les effets sont à peu près dans la raison du quarré de la vitesse du vent, pourvu qu'on on excepte les cas, où le vent est, ou très foible, ou extrêmement fort. Or, ce nonobstant, je soutiens qu'il est possible d'augmenter l'effet en raison du cube de la vitesse du vent : mais alors il faut changer la disposition de la machine, représentée par la quantité r , & pour chaque vitesse du vent on pourra déterminer une valeur de r , qui produise le plus grand effet : quoique je suppose, que les ailes demeurent les mêmes, & qu'on ait le même fardeau p^3 à élever, ou en général la même résistance à vaincre. Ce sera le sujet du problème suivant.

P R O B L E M E IV.

XLVIII. *La largeur des ailes, & leur inclinaison à la direction du vent étant par tout les mêmes & données, de même que la résistance, qui doit être vaincûe, trouver la disposition de la machine, pour que le plus grand effet soit produit, pour chaque vitesse du vent, en faisant abstraction du frottement.*

S O L U T I O N.

Les choses données sont donc la longueur de chaque aile $OF = f$, la largeur $HH = h$, l'inclinaison à la direction du vent $= \omega$: ensuite la résistance à vaincre, représentée par le poids d'un volume d'eau $= p^3$, & enfin la vitesse du vent, qui soit duë à la hauteur $= c$. Or nous cherchons la disposition de la machine, qui, quelque composée qu'elle soit, se réduit au rapport entre les vitesses du fardeau & de la force, qui étant supposé comme r à f , tout revient à la détermination

Fig. 4.



de la quantité r , que nous avons représentée par le rayon du tambour RRSS (fig. 5) Or cette quantité r dépend de la vitesse Vv , dont les ailes tournent à leurs extrémités ; & puisque le moment d'effet est égal au moment d'impulsion, nous n'avons qu'à chercher la vitesse Vv , pour que le moment d'impulsion devienne le plus grand. Or le moment d'impulsion étant trouvé

$$\frac{4ncfh \operatorname{cof} \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \operatorname{cof} \omega + \frac{v}{4c} \operatorname{cof} \omega^2 \right)$$

posons pour abrégier $\frac{Vv}{Vc} = z \operatorname{tang} \omega$, & l'expression suivante

$$\frac{4ncfhz \sin \omega^3 \cdot Vc}{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{4}z^2 \right)$$

doit être réduite à un *maximum*, par la détermination de la variable z . Nous aurons donc à égaler à un *Maximum* cette formule $2z - \frac{2}{3}zz + z^3$. d'où nous tirons

$$2 - \frac{1}{3}z + 3zz = 0 \text{ \& partant}$$

$$z = \frac{Vv}{Vc} \operatorname{cotang} \omega = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$$

Mais, pour que notre expression du moment d'impulsion ait lieu, il faut que $Vv < \operatorname{tang} \omega \cdot Vc$ ou $z < 1$, d'où l'on voit que l'ambiguïté des signes se réduit au signe —, de sorte que nous ayons

$$Vv = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \operatorname{tang} \omega \cdot Vc$$

Et substituant cette valeur, le moment d'impulsion sera

$$\frac{ncfh \sin \omega^3 Vc}{m} \cdot \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \cdot \frac{44 + 8\sqrt{10}}{81}$$

ou
$$\frac{ncfh \sin \omega^3 \cdot Vc}{m} \cdot \frac{272 + 20\sqrt{10}}{729}$$

Pofons



Posons pour abrégér ces facteurs irrationnels

$$\frac{8 - \sqrt{10}}{9} = \lambda = 0,537514$$

$$\frac{44 + 8\sqrt{10}}{81} = \mu = 0,855544$$

$$\frac{272 + 20\sqrt{10}}{729} = \nu = 0,459873$$

de sorte que $\nu = \lambda \mu$, & la vitesse des ailes fera

$$V\nu = \lambda \operatorname{tang} \omega. Vc$$

& le moment d'impulsion, qui est le plus grand

$$\frac{\nu n c f h \sin \omega^3 Vc}{m}$$

auquel doit être égal le moment d'effet $\frac{p^3 r V\nu}{f}$, d'où nous tirons

$$\frac{\lambda p^3 r \operatorname{tang} \omega. Vc}{f} = \frac{\nu n c f h \sin \omega^3. Vc}{m}$$

$$\text{ou } p^3 r = \frac{\mu n c f f h \sin \omega^2. \operatorname{cof} \omega}{m},$$

$$\text{donc } r = \frac{\mu n c f f h \sin \omega^2. \operatorname{cof} \omega}{m p^3},$$

d'où l'on connoit la disposition de toute la machine.

C O R O L L I.

XLIX. Done, pour qu'une telle machine produise le plus grand effet, il faut que pour chaque vitesse du vent on donne à la quantité r une valeur particulière : laquelle est proportionnelle au quarré de la vitesse du vent.



C O R O L L 2.

L. La disposition de la machine doit donc être telle, que le rapport entre les vitesses du fardeau & de la rouë principale, ou le rapport entre f & r , puisse être changé : ou bien que le rayon du tambour r puisse être augmenté & diminué dans la raison doublée de la vitesse du vent.

C O R O L L 3.

LI. Donc, si le tambour a une grandeur fixe, comme nous l'avons supposé dans les propositions précédentes, il n'y a qu'un seul degré du vent, où la machine produise le plus grand effet, ce qui arrive lorsque $c = \frac{mp^3 r}{\mu n f f h \sin \omega^2 \cos \omega}$. Tous les autres vents produiront un moindre effet, qu'ils ne seroient capables de produire, l'on pouvoit changer la disposition de la machine, ou la quantité r .

C O R O L L 4.

LII. Or, si l'on donne à r pour chaque vent la valeur convenable $r = \frac{\mu n c f f h \sin \omega^2 \cos \omega}{mp^3}$, la machine produira le plus grand effet, dont le moment sera $= \frac{v n c f h \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$. Cet effet est donc proportionnel au cube de la vitesse du vent ; pendant qu'il en suit à peine la raison du quarré, si la valeur de r demeure fixe.

C O R O L L 5.

LIII. On voit aussi que ce plus grand effet est proportionnel à la surface des ailes, ou à $f h$, & outre cela aussi au cube du sinus de l'angle d'incidence du vent ω . D'où il est evident, qu'il est fort avantageux d'approcher ce angle ω autant d'un droit, qu'il est possible.

S C H O L I O N. I.

LIV. \sqrt{c} entre dans nos formules, entant qu'il exprime la vitesse du vent, & il sera aisé d'introduire à sa place l'espace que le vent parcourt dans une seconde. Que g marque la hauteur, par laquelle



un corps tombe dans une seconde, & $2 \sqrt{gc}$ fera l'espace, que le vent parcourt dans une seconde : posant maintenant $2 \sqrt{gc}$ à la place de \sqrt{c} , l'expression $\frac{2vncfh \sin \omega^3 \cdot \sqrt{gc}}{m}$ donnera l'effet de la machine

produit dans une seconde, ou bien la résistance multipliée par l'espace, par lequel elle avance dans une seconde. Et si la machine est employée à élever de l'eau, cette même expression définit la quantité d'eau élevée par seconde, multipliée par la hauteur, à laquelle l'eau est élevée. Soit donc a la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée, & M la masse d'eau élevée dans une seconde, qu'il faut exprimer en pieds cubiques, si les quantités c , f , h , & g , sont données en pieds, & on aura $M a = \frac{2vncfh \sin \omega^3 \sqrt{gc}}{m}$, d'où l'on aura la quantité d'eau M , qui sera élevée par seconde à la hauteur donnée a .

$$M = \frac{2vncfh \sin \omega^3 \cdot \sqrt{c}}{m a.}$$

Pour en donner un exemple, supposons selon le cas proposé par Mr. *Lulofs*

$f = 43$ pieds, $h = 5\frac{1}{2}$ pieds, $a = 4$ pieds, & l'angle $\omega = 73^\circ$ ensuite $2 \sqrt{gc} = 30$ pieds : donc à cause de $g = 15\frac{1}{2}$ pieds, il y aura $c = 7\frac{1}{2}$ pieds, d'où nous obtiendrons,

$$\sin \omega^3 = \frac{7}{8} \text{ \& } M = \frac{30 \cdot 72 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8} \cdot \frac{v n}{m} \text{ pieds cubiques,}$$

$$\text{ou } M = \frac{89497}{4} \cdot \frac{v n}{m} = 10289 \cdot \frac{n}{m} \text{ pieds cubiques.}$$

Prenons $m = 700$, & nous aurons $M = 14\frac{7}{10} n$. Donc dans une minute cette machine élèvera $882 n$ pieds cubiques d'eau à la hauteur de 4 pieds. Donc, si cette machine élevoit 1500 pieds cubiques, il faudroit mettre $n = \frac{1500}{882}$: d'où il est évident que la valeur de n

est encore plus grande, puisque d'un côté j'ai négligé ici le frottement, & d'un autre côté il n'est pas probable, que la disposition de la machine

chine



chine ait été conforme au plus grand avantage. J'ai supposé ici la gravité spécifique de l'air 700 fois plus petite que celle de l'eau, au lieu que dans mes premiers calculs je l'avois prise 850 fois moindre, & c'est la raison que j'ai trouvé ici le nombre 882 au lieu de 757, que j'ai rapporté cy dessus (§. 8). Cependant je ne voudrois encore rien décider sur la véritable valeur de la lettre π , puisque le cas de l'expérience n'est pas assez d'accord avec celui, auquel j'ai appliqué ici le calcul. Car Mr. *Lulofs* a marqué exprès, que l'inclinaison des ailes au vent n'étoit pas par toute leur longueur la même ; mais que l'angle ω étoit moindre près de l'axe, & plus grand vers les extrémités, que 73° , & qu'il avoit pris un milieu. Or il est encore fort douteux, si un tel milieu est équivalent ; je différerai donc la décision, jusqu'à ce que j'aurai examiné le cas, où l'angle ω est variable par la longueur des ailes.

LV. Il est ici fort remarquable que l'effet de ces machines est proportionnel au cube du sinus de l'angle d'inclinaison ω , d'où il s'enfuit que, pour produire le plus grand effet, il faudroit rendre cet angle droit. Cependant il est très certain qu'alors le vent n'exerceroit plus aucune force sur les ailes ; & qu'il ne seroit pas capable de vaincre la moindre résistance : aussi trouvons-nous pour ce cas $r = 0$ à cause de $\cos \omega = 0$, de sorte que le moment de la résistance évanouiroit tout à fait, & la vitesse des ailes V v deviendroient infinie. Par cette raison on voit bien que ce cas est impossible, puisque les ailes rencontrent toujours par leur tranchant une résistance de la part de l'air, laquelle croissant dans la raison des quarrés de la vitesse arrêteroit bientôt l'accélération ultérieure des ailes, quand même la résistance de la machine évanouiroit. Mais, quoiqu'il fut $r = 0$, où la force de la résistance seroit réduite à rien, le moindre frottement de la machine rendroit ce cas inutile, & l'arrêteroit en repos. De là il est évident qu'on ne sauroit négliger, ni le frottement, ni la résistance de l'air, que les ailes souffrent par leur tranchant, dès que l'angle ω approche fort d'un droit, & que la vitesse des ailes devient fort rapide : puisqu'alors ces
deux



deux circonstances fournissent les principales déterminations de la machine & de son mouvement. Il est donc de la dernière importance, qu'en traitant ce problème on ait égard tant au frottement qu'à la résistance de l'air, & ce sera de là qu'on pourra déterminer, jusqu'à quel point on puisse augmenter l'angle ω , afin que le véritable effet devienne le plus grand. Or le seul frottement mettra déjà de telles bornes à la vitesse des ailes, qu'on pourra se dispenser d'avoir égard à la résistance de l'air, tant puisqu'elle n'est pas fort considérable, quand le mouvement des ailes n'est pas extrêmement rapide, que puisque son effet peut être réuni à peu près avec celui du frottement. Car, quoique celui-cy suive la raison simple de la vitesse, & celui-là la doublée, on pourra bien se passer de la petite différence qui en résulteroit.

P R O B L E M E V.

LVI. *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver la disposition de la machine, afin qu'elle produise le plus grand effet, en ayant égard au frottement, auquel la machine est assujettie.*

S O L U T I O N.

Pour vaincre le frottement soit requise la force F , qui étant appliquée à l'extrémité d'une aile, contrebalance précisément le frottement. Cette force étant contraire à la force d'impulsion, son moment, qui est FVv , doit être retranché du moment d'impulsion, de sorte que, pour mettre la machine en action, on aura ce moment d'impulsion

$$\frac{4\pi cfh \cos \omega \cdot Vv}{m} \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc} \sin \omega \cos \omega + \frac{v}{4c} \cos \omega^2 \right) - FVv$$

qu'il faut rendre un *maximum*. Posons comme auparavant pour abrégé $\frac{Vv}{Vc} = z \operatorname{tang} \omega$, & nous aurons :

$$\frac{\pi cfh z \sin \omega^3 Vc}{m} \left(2 - \frac{2}{3} z + z z \right) - F z \operatorname{tang} \omega \cdot Vc$$



Soit de plus $\frac{m F \operatorname{tang} \omega}{n c f h \sin \omega^3} = \Phi$, & il faudra rendre un *maximum*

$$2z - \frac{8}{9} z^2 + z^3 - \Phi z, \quad \text{d'où nous tirons}$$

$$3z^2 - \frac{16}{9} z + 2 - \Phi = 0 \quad \& \text{ partant :}$$

$$z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}$$

C'est donc le nombre Φ , qui renferme l'effet du frottement, ayant

supposé $\Phi = \frac{m F}{n c f h \sin \omega^2 \operatorname{cosec} \omega}$, & de là nous aurons pour

la vitesse des ailes :

$$Vv = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9} \operatorname{tang} \omega. Vc$$

Ensuite, puisque $F = \frac{n c f h \sin \omega^2 \operatorname{cosec} \omega}{m} \Phi$, le plus grand moment d'impulsion sera :

$$\frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9} \cdot \frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81} \cdot \frac{n c f h \sin \omega^3 \cdot Vc}{m}$$

ou $\frac{272 - 648\Phi + (20 + 54\Phi)\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{729} \cdot \frac{n c f h \sin \omega^3 \cdot Vc}{m}$

auquel doit être égal le moment de l'effet $\frac{p^3 r Vv}{f}$, d'où l'on tire

$$\frac{p^3 r}{f} = \frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81} \cdot \frac{n c f h \sin \omega^2 \operatorname{cosec} \omega}{m}, \quad \& \text{ partant}$$

$$r = \frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81} \cdot \frac{n c f h \sin \omega^2 \operatorname{cosec} \omega}{m p^3}$$

COROLL.



COROLL. I.

LVII. Donc, après avoir posé $\phi = \frac{m F}{n c f h \sin \omega^2 \cos \omega}$, nous venons de trouver $z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27 \phi)}}{9}$, & de là nous avons la vitesse des ailes à leurs extrémités $V v = z \operatorname{tang} \omega . V c$, & le moment d'impulsion, ou plutôt celui de l'effet, $= \frac{n c f h z \sin \omega^3 V c}{m} (2 - \frac{8}{3} z + z z - \phi)$, puisque nous avons déjà retranché le frottement de l'impulsion actuelle. Enfin, pour la disposition la plus avantageuse, nous aurons $r = \frac{n c f f h \sin \omega^2 \cos \omega}{m p^3} (2 - \frac{8}{3} z + z z - \phi)$, si l'on donne à z la valeur trouvée.

COROLL. 2.

LVIII. Sans avoir égard à la disposition la plus avantageuse, il faut, que la machine étant encore en repos, ou $z = 0$, la force du vent soit au moins capable de vaincre le frottement; d'où il faut qu'il soit $\phi < 2$. Ensuite, pour qu'elle puisse aussi vaincre la résistance, il faut qu'il soit $\frac{n c f f h \sin \omega^2 \cos \omega}{m} (2 - \phi) < p^3 r$. Enfin, par la raison alléguée cy-dessus, z doit être moindre que l'unité, ou $z < 1$.

COROLL. 3.

LIX. Donc, puisque $\phi = \frac{m F}{n c f h \sin \omega^2 \cos \omega}$, il est absolument nécessaire qu'il soit $\frac{m F}{n c f h \sin \omega^2 \cos \omega} < 2$, & partant $c > \frac{m F}{2 n f h \sin \omega^2 \cos \omega}$ d'où l'on connoit quelle force doit avoir le vent, avant qu'il soit capable de vaincre le frottement. Or, pour empêcher que la valeur

C c 2 de

de ϕ ne devienne trop grande, il est évident, que l'angle ω ne sauroit être ni trop petit, ni trop approchant d'un droit.

C O R O L L. 4.

LX. Or, si $\phi < 2$; on trouve toujours pour z une valeur positive moindre que l'unité, par laquelle on déterminera la plus avantageuse disposition de la Machine, ou la quantité r . Où l'on peut remarquer que la formule trouvée se change aisément dans cette forme.

$$r = \frac{[8 - \sqrt{(10 + 27\phi)}] [8 + 2\sqrt{(10 + 27\phi)}]}{81} \cdot \frac{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}{m p^3}.$$

Et le moment de l'effet sera alors

$$\frac{[8 - \sqrt{(10 + 27\phi)}]^2 [8 + 2\sqrt{(10 + 27\phi)}]}{729} \cdot \frac{ncfh \sin\omega^3 \sqrt{c}}{m}.$$

C O R O L L. 5.

LXI. Ce plus grand moment, dès qu'il commence à devenir réel, ou que $\phi < 2$, augmente avec la vitesse du vent ; & lorsque le vent devenoit infiniment rapide, ce moment, ou l'effet de la machine, suivroit encore la raison du cube de la vitesse du vent. Or, si la vitesse du vent diminue, la valeur de ϕ augmente, & rend le coefficient irrationnel plus petit, d'où l'effet décroitra dans une raison plus grande que celle des cubes de la vitesse.

C O R O L L. 6.

LXII. Or ce coefficient irrationnel $[8 - \sqrt{(10 + 27\phi)}]^2 [8 + 2\sqrt{(10 + 27\phi)}]$ évanouit lorsque $\phi = 2$, & pendant que la valeur de ϕ décroît, ou que la vitesse du vent augmente, il deviendra de plus en plus grand, & approchera de $[8 - \sqrt{10}]^2 (8 + 2\sqrt{10})$, qui est sa valeur pour le cas $\phi = 0$; ou la vitesse du vent infinie. Donc, puisque ce coefficient croît avec la vitesse du



du vent, il est clair que le plus grand effet de la machine croit dans une plus grande raison, que celle des cubes de la vitesse du vent.

S C H O L I O N.

LXIII. Nous avons considéré ici l'inclinaison des ailes à la direction du vent, ou l'angle ω comme donné; or on voit que le plus grand effet qu'on obtient, si l'on donne à la machine la disposition prescrite, dépend beaucoup de cet angle ω . Car, si l'on faisoit l'angle ω à peu près de 90° , ce qui seroit le cas le plus avantageux s'il n'y avoit point de frottement, le facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$ deviendroit bien le plus grand, mais le facteur irrationnel diminueroit l'effet, à cause de la valeur de ϕ , qui est réciproquement proportionnelle à $\sin \omega^2 \cos \omega$: & nous avons vû, que si $\phi = 2$ ou même plus grand que 2, la machine ne sauroit plus être mise en mouvement. Il faut donc prendre l'angle ω en sorte qu'il en résulte une valeur pour ϕ , qui soit moindre que 2, & pour cet effet il faut exclure, tant les cas où l'angle ω est trop petit, que ceux où il approche trop d'un angle droit, puisque l'un & l'autre cas augmente la valeur de ϕ . En ne regardant que l'angle ω comme variable, la valeur de ϕ devient la plus petite si l'on prend $\sin \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$ & $\cos \omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$, ou bien l'angle $\omega = 54^\circ, 44'$, auquel cas on aura $\phi = \frac{3mF\sqrt{3}}{2ncfh}$, qui est sa plus petite valeur. Mais, soit qu'on prenne l'angle ω plus grand ou plus petit que $54^\circ, 44'$, la valeur de ϕ deviendra plus grande, de sorte qu'il y a toujours deux angles pour ω , qui donnent la même valeur pour ϕ , dont l'un est plus grand que $54^\circ, 44'$, & l'autre plus petit. Or il est évident que de ces deux valeurs il est toujours bon de choisir la plus grande, puisque alors $\sin \omega^3$, ou le dernier facteur devient plus grand, le premier irrationnel demeurant le même: ainsi ces deux angles $\omega = 45^\circ$, & $\omega = 64^\circ, 5', 11''$ donnent la même valeur $\sin \omega^2 \cos \omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, & partant aussi la même pour ϕ . Cepen-



dant, en prenant $\omega = 64^\circ, 5', 11''$ au lieu de $\omega = 45^\circ$, l'effet de la machine sera $\approx \frac{1}{17}$ fois plus grand. On comprend aussi qu'il est plus avantageux de prendre l'angle ω plus grand que $54^\circ, 44'$; car, quoique la valeur de ϕ devienne plus grande, & partant le facteur irrationnel $\frac{[8 - \sqrt{(10 + 27\phi)]^2 [8 + 2\sqrt{(10 + 27\phi)}]}{729}$

plus petit, l'autre facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$, prend en échange une plus grande valeur, de sorte que le produit de ces deux formules, devient plus grand: car, si l'on augmente tant soit peu l'angle ω au delà de $54^\circ, 44'$, le nombre ϕ , & partant aussi le facteur irrationnel, n'en change point, tandis que l'autre facteur en reçoit une augmentation sensible. Il est donc important de déterminer l'angle ω , sous lequel il faut incliner les ailes à la direction du vent, afin que la machine produise le plus grand effet; ce que nous ferons dans le problème qui suit.

P R O B L E M E VI.

LXIV. *Quand les ailes sont partout également larges, & également inclinées à la direction du vent, trouver quelle inclinaison il leur faut donner, afin que la machine produise le plus grand effet, en tenant compte du frottement.*

S O L U T I O N.

Après avoir posé comme ci-dessus $\frac{Vv}{Vc} = z \operatorname{rang} \omega$, le moment d'impulsion diminué de celui du frottement est

$$\frac{ncfhz \sin \omega^3 \cdot \sqrt{c}}{m} (2 - \frac{2}{3}z + z^2) - Fz \operatorname{rang} \omega \sqrt{c}$$

qu'il s'agit de rendre un *maximum*. Or, puisqu'on demande l'angle le plus convenable ω , en supposant qu'on ait déjà donné à z la valeur, que la plus avantageuse disposition de la machine exige, savoir

$$z =$$

$$z = \frac{8 - \sqrt{10 + 27\Phi}}{9}, \text{ ayant posé } \Phi = \frac{mF}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega},$$

il faut différentier l'expression du moment en supposant tant z que l'angle ω variable. Or le différentiel qui résulte de la variabilité de z évanouit déjà, si l'on donne à z la valeur trouvée ; il ne reste donc qu'à considérer l'angle ω seul comme variable, & posant le différentiel = 0 nous aurons cette équation.

$$\frac{3ncfhz \sin \omega^2 \cos \omega \sqrt{c}}{m} (2 - \frac{8}{3}z + zz) - \frac{Fz\sqrt{c}}{\cos \omega^2} = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{3ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} (2 - \frac{8}{3}z + zz) - \frac{F}{\cos \omega^2} = 0$$

Posons pour F la valeur $\frac{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} \Phi$ pour avoir

$$3 (2 - \frac{8}{3}z + zz) - \frac{\Phi}{\cos \omega^2} = 0$$

ou

$$\Phi = 3c\omega^2 (2 - \frac{8}{3}z + zz) = \frac{c\omega^2 [8 - \sqrt{10 + 27\Phi}] [8 + 2\sqrt{10 + 27\Phi}]}{27}$$

Donc nous aurons

$$\frac{27\Phi}{\cos \omega^2} = 44 - 54\Phi + 8\sqrt{10 + 27\Phi}$$

Mais, puisque $\Phi = \frac{mF}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}$, posons pour abrégé

$$\frac{mF}{ncfh} = \frac{4a}{27}, \text{ de sorte que } 27\Phi = \frac{4a}{\sin \omega^2 \cos \omega}, \text{ \& nous aurons}$$

$$\frac{a}{\sin \omega^2 \cos \omega^3} = 11 - \frac{2a}{\sin \omega^2 \cos \omega} + 2\sqrt{10 + \frac{4a}{\sin \omega^2 \cos \omega}}$$

ou

$$a + 2a \cos \omega^2 - 11 \sin \omega^2 c\omega^3 = 2 \sin \omega c\omega^2 \sqrt{10 \sin \omega^2 c\omega^2 + 4a c\omega}$$

qui



qui étant délivrée des irrationnels prendra cette forme

$$\alpha \alpha (1 + 2 \cos \omega^2)^2 - 2 \alpha \sin \omega^2 \cos \omega^3 (11 + 30 \cos \omega^2) + 81 \sin \omega^4 \cos \omega^6 = 0$$

où il faut se souvenir que $\frac{4 \alpha}{\sin \omega^2 \cos \omega}$ doit être moindre que 54, &

partant $\sin \omega^2 \cos \omega > \frac{4 \alpha}{54}$, ou $\sin \omega^2 \cos \omega > \frac{2 \alpha}{27}$. Tout revient

donc à résoudre cette équation, & à en déterminer l'angle ω . Comme elle peut avoir plusieurs racines, il est bon de remarquer, que l'angle satisfaisant est toujours plus grand que $54^\circ, 44'$, comme j'ai fait voir ci-dessus.

C O R O L L. I.

LXV. La constante $\alpha = \frac{27 m F}{4 n c f h}$ renferme le frottement F , auquel elle est proportionnelle. Et au cas que le frottement évanouit, notre équation nous découvre $\cos \omega = 0$, ou l'angle ω droit, tout comme nous l'avons déjà remarqué.

C O R O L L. 2.

LXVI. Donc, si le frottement est extrêmement petit, nous voyons que l'angle ω doit approcher fort d'un angle droit, de sorte que $\cos \omega$ sera une fraction très petite. Nous pourrons donc supposer $1 + 2 \cos \omega^2 = 1$ & $11 + 30 \cos \omega^2 = 11$, & notre équation à résoudre sera

$$\alpha \alpha = 22 \alpha \sin \omega^2 \cos \omega^3 - 81 \sin \omega^4 \cos \omega^6$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = (11 \pm \sqrt{40}) \sin \omega^2 \cos \omega^3 \text{ ou } \sin \omega^2 \cos \omega^3 = \frac{\alpha}{11 \pm \sqrt{40}}$$

Et, puisque $\sin \omega$ est à peu près $= 1$, on aura $\cos \omega = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{11 \pm \sqrt{40}}}$

où



où il faudra prendre le signe $+$, afin que l'angle ω approche plus d'un droit.

C O R O L L. 3.

LXVII. On pourra aussi déterminer les cas, où un angle donné ω est le plus propre pour procurer le plus grand effet de la machine. Car, prenant pour ω un angle quelconque plus grand que 54° , $44'$, on trouve

$$\alpha = \frac{11 + 30 \cos \omega^2 \pm \sqrt{[(7 + 24 \cos \omega^2)^2 - 9]}}{(1 + 2 \cos \omega^2)^2} \cdot \sin \omega^2 \cos \omega^2$$

& cet angle produira le plus grand effet, lorsque le frottement est

$$F = \frac{4ncfha}{27m}. \text{ Alors ayant } -z = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{4a}{81 \sin \omega^2 \cos \omega}\right)},$$

le plus grand moment d'effet sera,

$$\frac{ncfhz \sin \omega^3 \cdot Vc}{m} (2 - \frac{1}{3}z + zz) - Fz \operatorname{tang} \omega Vc.$$

E X E M P L E.

LXVIII. Qu'on cherche les cas, où l'inclinaison des ailes à la direction du vent de 70° , $31'$, est la plus avantageuse : ou lorsqu'on met

$$\cos \omega = \frac{1}{3} \quad \& \quad \sin \omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Pofant donc $\cos \omega = \frac{1}{3}$ & $\sin \omega^2 = \frac{8}{9}$, on trouvera

$$\alpha = \frac{43 \pm \sqrt{760}}{121} \cdot \frac{8}{9} \text{ d'où l'on tire deux valeurs, qui font}$$

$$\alpha = 0,5184 \quad \& \quad \alpha = 0,1134, \text{ auxquelles répond le}$$

$$\text{frottement } F = 0,0768 \cdot \frac{m}{n} cfh \quad \& \quad F = 0,0168 \cdot \frac{m}{n} cfh.$$



S C H O L I E.

LXIX. Or, puisque l'inclinaison des ailes, comme je viens de la déterminer, dépend de la force du vent, & qu'il la faudroit changer toutes les fois que le vent change, la pratique ne sauroit tirer aucun avantage de cette détermination, qui demanderoit d'ailleurs un développement plus soigneux, auquel il seroit superflu de s'arrêter plus longtems. Ce qui nous a jetté dans cet embarras, c'est que nous avons donné aux ailes par toute leur étendue la même inclinaison à la direction du vent : or il n'y a non seulement rien qui nous oblige à cette égalité, mais il est même beaucoup plus avantageux de donner aux ailes une inclinaison variable, en sorte que l'angle ω en s'éloignant de l'axe approche de plus en plus de 90° . Aussi voyons-nous qu'on observe actuellement cette maxime dans la pratique ; & quand Mr. *Lulofs* marque, que l'angle ω étoit de 73° , il avertit expressément, que le vent tomboit plus obliquement sur les ailes près de l'axe, & qu'il les frappoit presque perpendiculairement vers les extrémités. Et pour ramener ce cas à celui que j'avois traité, y ayant supposé l'inclinaison uniforme, il avoit pris un milieu entre la plus grande & la plus petite inclinaison. Donc, puisqu'il a trouvé ce milieu de 73° , si la plus grande a été de 90° , la plus petite seroit de 56° . J'examinerai donc combien cette variabilité est conforme à la théorie, & combien il y a à gagner de ce côté pour augmenter l'effet de ces sortes de machines.

P R O B L E M E VII.

LXX. *Trouver la plus avantageuse inclinaison, qu'il faut donner aux ailes d'un moulin à vent, afin qu'on en puisse tirer le plus grand effet.*

S O L U T I O N.

Pour résoudre ce problème il faut remonter à la première formule intégrale, qui exprime le moment d'impulsion. Or, si nous posons la longueur entière des ailes $OF = f$, leur largeur $MM = y$, qui convient à la distance de l'axe $OP = x$, & l'angle sous lequel l'élé-

ment

ment de l'aile $MMmm$ y est incliné à la direction du vent $\equiv \omega$, il faut considérer cet angle comme variable, & déterminer pour chaque distance de l'axe $OP \equiv x$ sa valeur, afin que le moment d'impulsion devienne le plus grand. Mais nous avons trouvé (27) ce moment exprimé en sorte :

$$\frac{4ncVv}{mf} \int xy dx \cos \omega \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)^2$$

où c marque la hauteur due à la vitesse du vent, & v celle qui est due à la vitesse des ailes à leur extrémité F . De quelque manière que la largeur des ailes varie, on peut regarder y comme une fonction donnée de x ; & notre formule intégrale ne renfermera que deux variables x & ω , entre lesquelles il faut déterminer le rapport, qui rendra un *maximum* la valeur de notre intégrale. Or on fait que, si Z est une fonction quelconque de deux variables x & ω , en sorte que $dZ \equiv Mdx + Nd\omega$, la formule intégrale $\int Z dx$ obtiendra la plus grande valeur quand on pose $N \equiv 0$; donc, puisque dans notre cas on a

$$Z \equiv xy \cos \omega \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)^2$$

il s'ensuit par la différentiation

$$N \equiv -xy \sin \omega \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)^2 + 2xy \cos \omega \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right) \left(\cos \omega + \frac{xVv}{fVc} \sin \omega \right)$$

d'où, en divisant par $xy \left(\sin \omega - \frac{xVv}{fVc} \cos \omega \right)$, nous tirons cette équation :

$$\sin \omega^2 - \frac{xVv}{fVc} \sin \omega \cos \omega = 2 \cos \omega^2 + \frac{2xVv}{fVc} \sin \omega \cos \omega$$

$$\text{ou } \sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2 = \frac{3xVv}{fVc} \sin \omega \cos \omega.$$



Posons pour abrégé $\frac{3xVv}{fVc} = 2\rho$ pour avoir

$$\sin \omega^2 - 2 \cos \alpha^2 = 2\rho \sin \omega \cos \alpha, \text{ où divisant par } \cos \alpha^2$$

$$\text{tang } \omega^2 = 2\rho \text{ tang } \omega + 2 \text{ donc}$$

$$\text{tang } \omega = \rho + \sqrt{(\rho\rho + 2)} \text{ ou bien}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{3xVv}{2fVc} + \sqrt{\left(\frac{9xxv}{4ffc} + 2\right)}$$

D'où l'on connoit pour chaque distance x de l'axe l'inclinaison qu'il faut donner aux ailes, afin que le moment d'impulsion devienne le plus grand qu'il est possible.

C O R O L L. I.

LXXI. De cette formule il est évident que, plus le point P des ailes est éloigné de l'axe O, & plus l'angle ω y devient grand, ou plus l'inclinaison des ailes à la direction du vent y approche d'un angle droit. Or tout près de l'axe O, ou $x = 0$, on a $\text{tang } \omega = \sqrt{2}$, ou bien l'angle $\omega = 54^\circ, 44'$; & partant plus loin de l'axe O l'angle ω doit être plus grand.

C O R O L L. 2.

LXXII. A l'extrémité des ailes en F, où $x = f$, l'angle ω sera le plus grand, & on aura $\text{tang } \omega = \frac{3Vv}{2Vc} + \sqrt{\left(\frac{9v}{4c} + 2\right)}$.

Cet angle dépend donc du rapport des vitesses Vv & Vc ; & plus la vitesse des ailes est grande par rapport à la vitesse du vent, plus aussi approchera l'angle ω d'un droit. S'il y avoit $Vv = Vc$, on auroit $\text{tang } \omega = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}$, ou bien l'angle $\omega = 74^\circ, 19'$. Or, si l'on met $Vv = 2Vc$, on aura $\text{tang } \omega = 3 + \sqrt{11}$ ou $\omega = 81^\circ, 1'$;

& pour le cas

$$Vv = 3Vc, \text{ on aura } \text{tang } \omega = \frac{9 + \sqrt{89}}{2} \text{ ou } \omega = 83^\circ, 49'.$$



C O R O L L. 3.

LXXIII. Posons ce rapport $\frac{Vv}{Vc} = v$, & il faut qu'il demeure toujours le même, quelque changement qu'il arrive au vent, afin que les ailes puissent servir pour tous les degrés du vent : alors on aura

$$\text{tang } \omega = \frac{3vx}{2f} + V \left(\frac{9vvxx}{4ff} + 2 \right)$$

& à l'extrémité des ailes en F, $\text{tang } \omega = \frac{3}{2} v + V \left(\frac{3}{2} vv + 2 \right)$.

C O R O L L. 4.

LXXIV. Dans cette disposition des ailes il n'est pas à craindre, que le calcul devienne jamais contraire à la vérité. Car, quelque grande que soit la vitesse du vent, il y a toujours $\sin \omega > \frac{xVv}{fVc}$ $\text{cof } \omega$, & il n'arrive jamais, comme dans les cas précédens, qu'une partie des ailes éprouve le choc du vent par derriere.

C O R O L L. 5.

LXXV. Posant $Vv = vVc$, le moment d'impulsion sera

$$\frac{4vncVc}{mf} \int xy dx \text{ cof } \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{vx}{f} \right)^2$$

& puisque la formule intégrale ne renferme plus la vitesse du vent, le moment d'impulsion sera proportionnel au cube de la vitesse du vent.

P R O B L E M E VIII.

LXXVI. Si les ailes sont partout de la même largeur, & qu'on dispose leur inclinaison à la direction du vent, comme il a été enseigné dans le problème précédent, déterminer le moment d'impulsion dont les ailes seront frappées par chaque vent.



SOLUTION.

Ayant établi un certain rapport entre la vitesse du vent Vc & la vitesse des ailes à leur extrémité Vv , en sorte que $Vv = vVc$, soit la largeur constante des ailes $HH = h$, & puisque $y = h$, il s'agit de trouver l'intégrale de cette expression.

$$\frac{4vnhcVc}{mf} \int x dx \operatorname{cof} \omega^3 \left(\operatorname{tang} \omega - \frac{vx}{f} \right)^2$$

en posant $\operatorname{tang} \omega = \frac{3vx}{2f} + V \left(\frac{9vvxx}{4ff} + 2 \right)$. Or, si l'on mettoit cette valeur à la place de $\operatorname{tang} \omega$, le $\operatorname{cof} \omega$ seroit exprimé par une formule si embarrassée, qu'on auroit bien de la peine à en chercher l'intégrale. Il est donc à propos de garder dans le calcul la variable ω , & de déterminer l'autre x par celle-ci : doù l'on aura

$$\operatorname{tang} \omega^2 - \frac{3vx}{f} \operatorname{tang} \omega = 2, \text{ \& } \frac{vx}{f} = \frac{\operatorname{tang} \omega^2 - 2}{3 \operatorname{tang} \omega}$$

De là nous obtiendrons :

$$\operatorname{tang} \omega - \frac{vx}{f} = \frac{2 \operatorname{tang} \omega^2 - 2}{3 \operatorname{tang} \omega} = \frac{2}{3 \sin \omega \operatorname{cof} \omega}$$

$$\text{\& } \left(\operatorname{tang} \omega - \frac{vx}{f} \right)^2 = \frac{4}{9 \sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega^2}$$

Ensuite ayant

$$x = \frac{f}{3v} (\operatorname{tang} \omega - 2 \operatorname{cof} \omega) = \frac{f(\sin \omega^2 - 2 \operatorname{cof} \omega^2)}{3v \sin \omega \operatorname{cof} \omega}$$

à différentiation donne

$$dx = \frac{fd\omega}{3v} \left(\frac{1}{\operatorname{cof} \omega^2} + \frac{2}{\sin \omega^2} \right) = \frac{fd\omega(\sin \omega^2 + 2 \operatorname{cof} \omega^2)}{3v \sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega^2}$$

D'où l'on tirera

$$x dx \operatorname{cof} \omega^3 = \frac{ff d\omega (\sin \omega^4 - 4 \operatorname{cof} \omega^4)}{9vv \sin \omega^3}$$

&



& partant le moment d'impulsion sera

$$\frac{16 n f h c V c}{81 v m} \int \frac{d\omega (\sin \omega^4 - 4 \operatorname{cof} \omega^4)}{\sin \omega^5 \operatorname{cof} \omega^2}$$

Pofons $\int \frac{d\omega (\sin \omega^4 - 4 \operatorname{cof} \omega^4)}{\sin \omega^5 \operatorname{cof} \omega^2} = \Omega$, & nous aurons.

$$d\Omega = \frac{d\omega}{\sin \omega \operatorname{cof} \omega^2} - \frac{4 \operatorname{cof} \omega^2}{\sin \omega^5} d\omega, \text{ ou bien}$$

$$d\Omega = d\omega \left(\frac{\sin \omega}{\operatorname{cof} \omega^2} + \frac{1}{\sin \omega} + \frac{4}{\sin \omega^3} - \frac{4}{\sin \omega^5} \right)$$

où l'on remarque d'abord que $\int \frac{d\omega \sin \omega}{\operatorname{cof} \omega^2} = \frac{1}{\operatorname{cof} \omega}$, & $\int \frac{d\omega}{\sin \omega} = l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega$ en prenant les logarithmes hyperboliques. Ensuite, ayant en

$$\text{général } \int \frac{d\omega}{\sin \omega^\mu} = \frac{\mu-2}{\mu-1} \int \frac{d\omega}{\sin \omega^{\mu-2}} - \frac{\operatorname{cof} \omega}{(\mu-1) \sin \omega^{\mu-1}}$$

nous aurons :

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega^3} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\sin \omega} - \frac{\operatorname{cof} \omega}{2 \sin \omega^2} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega - \frac{\operatorname{cof} \omega}{2 \sin \omega^2}$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega^5} = \frac{3}{4} \int \frac{d\omega}{\sin \omega^3} - \frac{\operatorname{cof} \omega}{4 \sin \omega^4} = \frac{3}{8} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega - \frac{3 \operatorname{cof} \omega}{8 \sin \omega^2} - \frac{\operatorname{cof} \omega}{4 \sin \omega^4}$$

Rassemblons routes ces parties ensemble, & nous trouverons,

$$\Omega = \frac{1}{\operatorname{cof} \omega} + \frac{3}{2} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega - \frac{\operatorname{cof} \omega}{2 \sin \omega^2} + \frac{\operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^4}$$

$$\text{ou } \Omega = \frac{2 \sin \omega^4 + \sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega^2 + 2 \operatorname{cof} \omega^4}{2 \sin \omega^4 \operatorname{cof} \omega} + \frac{3}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega$$

d'où nous tirons le moment d'impulsion :

$$\frac{16 n f h c V c}{81 v m} \left(\frac{2 \sin \omega^4 + \sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega^2 + 2 \operatorname{cof} \omega^4}{2 \sin \omega^4 \operatorname{cof} \omega} + \frac{3}{2} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega - \operatorname{Const.} \right)$$

Il faut que cette intégrale évanouisse au cas $x = 0$, ou $\text{tang } \omega = \sqrt{2}$, ce qui donne $\sin \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos \omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$ & $\text{tang } \frac{1}{2} \omega = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}$

d'où l'on tire cette constante $= \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-1}{2}}$. Ensuite,

pour l'étendre par toute la longueur des ailes, il faut mettre $\text{tang } \omega = \frac{3}{2} v + \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)}$, d'où l'on aura

$$\sec. \omega = \sqrt{\left[3 + \frac{3}{2} v^2 + 3 v \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)}\right]} = \frac{1}{\cos \omega}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} \omega = \frac{\sqrt{\left[3 + \frac{3}{2} v^2 + 3 v \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)}\right]} - 1}{\frac{3}{2} v + \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)}}$$

Or, ayant ces valeurs, le moment d'impulsion fera

$$\frac{16 n f h c V c}{81 v m} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cot \omega^2 + \cot \omega^4\right) \sec. \omega + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-1}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-1}{2}} \right)$$

où il faut remarquer que $\cot \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)} - \frac{3}{4} v$.

C O R O L L I.

LXXVII. Au lieu de la constante v il fera plus commode d'introduire dans le calcul, l'angle même dont les ailes sont inclinées au vent, à leur extrémité. Soit cet angle $= \theta$, & puisque $\text{tang } \theta = \frac{3}{2} v + \sqrt{\left(\frac{3}{4} v^2 + 2\right)}$ on aura $\text{tang } \theta^2 = 3 v \text{ tang } \theta + 2$,

donc $v = \frac{\text{tang } \theta^2 - 2}{3 \text{ tang } \theta} = \frac{1}{3} \text{ tang } \theta - \frac{2}{3} \cot \theta$; & de là on con-

noitra la vitesse des ailes à leur extrémité $V v = v V c$.

C O R O L L 2.

LXXVIII. Introduisant cet angle θ dans le calcul, le moment d'impulsion fera,

$$\frac{16 n f h c V c}{27 m (\text{tang } \theta - 2 \cot \theta)} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cot \theta + \cot \theta^4\right) \sec. \theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-1}{2}} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-1}{2}} \right)$$

Or

Où θ étant l'inclinaison extrême, qui répond à la distance $x = f$, on suppose que pour une distance quelconque x l'inclinaison est $= \omega$, en sorte qu'il soit

$$x = \frac{f (\text{tang } \omega - 2 \cot \omega)}{\text{tang } \theta - 2 \cot \theta} \quad \text{ou}$$

$$\text{tang } \omega = \frac{x(\text{tang } \theta - 2 \cot \theta)}{f} + \sqrt{\left(\frac{xx(\text{tang } \theta - 2 \cot \theta)^2}{ff} + 2\right)}$$

C O R O L L. 3.

LXXIX. Puisque l'angle θ est toujours plus grand que $54^\circ, 44'$, il sera bon de calculer pour les principaux angles, qui peuvent être pris pour θ , les valeurs suivantes en nombres.

θ	$\text{tang } \theta - 2 \cot \theta$	$(2 + \cot \theta^2 + 2 \cot \theta^4) \text{sec. } \theta$	$l \text{ tang } \frac{1}{2} \theta$
$54^\circ, 44'$	0,000000	5, 196152 - -	— 0,658479
60	0,577350	5, 111111 - -	— 0,549306
65	1,211892	5, 470671 - -	— 0,450875
70	2,019537	6, 337560 - -	— 0,356378
75	3,196152	8, 044641 - -	— 0,264842
80	5,318628	11, 707722 - -	— 0,175426
81	5,996983	12, 953311 - -	— 0,157730
82	6,834288	14, 518121 - -	— 0,140082
83	7,898777	16, 538455 - -	— 0,122478
84	9,304156	19, 241562 - -	— 0,104912
85	11,255075	23, 036594 - -	— 0,087377

C O R O L L. 4.

LXXX. Posons $(1 + \frac{1}{2} \cot \theta^2 + \cot \theta^4) \text{sec. } \theta + \frac{3}{2} l \text{ tang } \frac{1}{2} \theta = \Theta$
 & soit $\Delta = \frac{3}{2} \sqrt{3} - \frac{3}{2} l \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}$, qui est la valeur de Θ , lorsqu'on



met $\theta = 54^{\circ}, 44'$; & conservant $\frac{\text{tang } \theta - 2 \cot \theta}{3} = \nu$, le moment d'impulsion étant $= \frac{16 n f h c V c}{81 m} \cdot \frac{\Theta - \Delta}{\nu}$, nous aurons pour les mêmes angles :

θ	Θ	$\Theta - \Delta$	ν	$\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$
$54^{\circ}, 44'$	1,610357	0,000000	0,000000	0,000000
60°	1,731597	0,121240	0,192450	0,62998
65°	2,059024	0,448667	0,403964	1,11065
70°	2,634213	1,023856	0,673179	1,52090
75°	3,625058	2,014701	1,065384	1,89105
80°	5,590722	3,980365	1,772876	2,24510
81°	6,240060	4,629703	1,998994	2,31600
82°	7,048938	5,438581	2,278096	2,38735
83°	8,085511	6,475154	2,632926	2,45935
84°	9,463413	7,853056	3,101385	2,53212
85°	11,387231	9,776874	3,751692	2,60595

COROLL 5.

LXXXI. Puisque le moment d'impulsion est proportionnel à la quantité $\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$, on voit que ce moment croît en augmentant l'angle θ , & s'il étoit possible de l'augmenter jusqu'à 90° , la valeur de $\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$ deviendrait $= 3$, & le moment seroit $\frac{16 n f h c V c}{27 m}$. Or alors le nombre ν étant infini, la vitesse des ailes deviendroit infinie, ce qui rend ce cas impossible.

COROLL.



COROLL 6.

LXXXII. Il est donc avantageux de prendre l'angle θ aussi grand qu'il est possible ; or c'est le frottement qui y met des bornes, puisqu'il augmente aussi en prenant l'angle θ plus grand, & qu'il deviendrait même infini, si l'on faisoit cet angle droit. Si l'on veut que la vitesse des ailes à leurs extrémités soit le double de la vitesse du vent, il faut mettre l'angle $\theta = 81^\circ$, & alors l'effet sera déjà assez considérable étant au plus grand possible comme 2,60595 à 3 ou comme 7 à 8.

SCHOLION. I.

LXXXIII. Or, ayant choisi pour l'angle θ une valeur quelconque, il faut donner aux ailes la figure prescrite, en sorte qu'à chaque distance de l'axe l'inclinaison de l'élément de l'aile $MMmm$ à la direction du vent, soit précisément celle que le calcul ordonne. Mais alors ces ailes dûment construites ne produisent le plus grand moment d'impulsion, qu'entant que leur mouvement est conforme à l'angle θ , ou que la vitesse de leurs extrémités est à celle du vent, comme le nombre v , qui répond à l'angle choisi θ , à l'unité. Si ces ailes tournoient ou plus vite ou plus lentement, le moment d'impulsion seroit toujours moindre : & c'est de là qu'on déterminera la disposition de la machine, ou la quantité r , afin que les ailes puissent tourner avec cette vitesse prescrite.

SCHOLION. 2.

LXXXIV. Comparons cet effet, que ces ailes, dont l'inclinaison variable est la plus avantageuse, produisent, avec celui que les mêmes ailes produiroient, si leur inclinaison à la direction du vent étoit partout la même $= \omega$. Or nous avons trouvé ci-dessus, que le plus grand moment d'impulsion de ces ailes est

$$\frac{0,459873 nfhc\sqrt{c}}{m} \sin \omega^3$$

& que pour cet effet il faut qu'il soit $\sqrt{v} = 0,537514 \operatorname{tang} \omega \cdot \sqrt{c}$
Ayant donc déterminé ci-dessus pour ces ailes l'effet au cas de $\omega = 73^\circ$



il faloit qu'il fut $Vv = 1,758 Vc$. Il convient donc de comparer ce cas avec celui des ailes parfaites, qui demandent un mouvement également rapide : & partant nous aurons à peu près $\theta = 80^\circ$. Or alors le moment d'impulfion produit par ces ailes parfaites est

$$2,24510 \frac{16nfhcVc}{81m} = \frac{0,44344nfhcVc}{m}$$

& en pofant $\omega = 73^\circ$, le moment d'impulfion produit par des ailes femblables, mais par tout également inclinées, n'est que

$$\frac{0,40239nfhcVc}{m}$$

d'où l'on voit que donnant aux ailes leur juſte figure pour la même rapidité du mouvement, on en obtient un moment d'impulfion plus grand. Donc, puifque dans l'expérience que Mr. *Lulofs* rapporte, les ailes avoient à peu près la figure parfaite, & partant cette machine auroit dû élever dans une minute, non 882 *n*, comme j'ai trouvé ci-deſſus (54), mais 970 *n* pieds cubiques d'eau, tandis qu'elle a élevé actuellement 1500 : d'où il ſemble qu'on n'auroit pas beſoin de donner à *n* une valeur double de l'unité. Cependant, ſi nous conſidérons 1°, que cette machine n'étoit pas dans la dernière perfection : 2°, que ſon mouvement n'avoit peut-être pas le juſte rapport à celui du vent : 3°, que Mr. *Lulofs* a ſuppoſé la viteſſe du vent trop grande & l'air trop denſe, pour approcher le premier calcul de la vérité : 4°, qu'il dit expreſſément que ces machines élèvent bien une égale quantité d'eau à la hauteur de $4\frac{1}{2}$ pieds : & 5°, qu'enfin je n'ai pas tenu compte du frottement : après ces conſidérations, diſ-je, il n'y a point de doute, que poſant $n = 1$, la quantité d'eau élevée par minute auroit dû être bien au deſſous de 970 pieds cubiques, & partant que la valeur de *n* doit être ſuppoſée conſidérablement plus grande que l'unité, ou que la force du vent eſt plus grande que ſelon l'hypothèſe commune. Il eſt donc évident, qu'il ne fera pas trop de poſer $n = 2$; mais ce fera auſſi aſſez. Car, quoique les expériences prouvent, que les boulets de canon éprouvent une réſiſtance trois fois plus grande que ſelon
l'hypo-



l'hypothèse commune, il faut remarquer que la résistance d'un globe n'est que la moitié de celle du grand cercle ; & que la résistance d'une surface plane n'en seroit que doublée. D'où l'on peut conclure qu'on satisfera assez exactement aux expériences, si l'on suppose $n = 2$, & qu'on laisse $m = 800$. Remarquons ensuite que, posant, $\theta = 90^\circ$ & $\omega = 90^\circ$, le moment d'impulsion des ailes également inclinées est $0,45987 \frac{nfhcVc}{m}$ qui pour les ailes parfaites est $\frac{1}{2} \frac{nfhcVc}{m}$ qui est à celui là comme 9 à 7.

PROBLEME IX.

LXXXV. *Connoissant le frottement de la Machine, choisir entre les figures des ailes trouvées celle qui produise le plus grand effet pour une force donnée du vent.*

SOLUTION.

Que F marque la force, qu'il faut appliquer à l'extrémité d'une aile pour vaincre le frottement : & puisque la vitesse à cet endroit est $= Vv = vVc$, où c est la hauteur due à la vitesse du vent qu'on suppose donnée, le moment de l'effet du frottement est $FvVc$. Retranchons ce moment de celui d'impulsion trouvé ci-dessus, & nous aurons pour l'impulsion actuelle ce moment

$$\frac{16nfhcVc}{81m} - \frac{\Theta - \Delta}{v} = FvVc$$

Il s'agit donc de trouver v afin que cette formule

$$\frac{\Theta - \Delta}{v} = \frac{81mF}{16nfhc} v$$

devienne la plus grande : pour cet effet il faut qu'il soit

$$d. \frac{\Theta - \Delta}{v} = \frac{81mF}{16nfhc} dv$$

Or je ne m'arrêterai pas à développer cette équation différentielle, car



après avoir donné les valeurs de $\frac{\Theta - \Delta}{\nu}$ pour les principaux angles θ , on en peut trouver pour chaque angle θ , le frottement F , auquel cet angle convient le mieux. Alors $d \cdot \frac{\Theta - \Delta}{\nu}$ & $d\nu$ marqueront les accroissemens, que ces quantités prennent, en augmentant d'un degré l'angle θ . Ainsi l'angle $\theta = 80^\circ$ fera le plus propre dans les cas où

$$0,07090 = \frac{81 m F}{16 n f h c} \quad 0,22611$$

c'est à dire lorsque

$$\frac{81 m F}{16 n f h c} = \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad F = \frac{1}{81} \frac{n f h c}{m}$$

De la même maniere
le plus convenable angle θ

$$\theta = 80^\circ$$

$$\theta = 81$$

$$\theta = 82$$

$$\theta = 83$$

$$\theta = 84$$

on trouvera
lorsque le frottement est

$$F = 0,0617 \cdot \frac{n f h c}{m}$$

$$F = 0,0505 \cdot \frac{n f h c}{m}$$

$$F = 0,0400 \cdot \frac{n f h c}{m}$$

$$F = 0,0307 \cdot \frac{n f h c}{m}$$

$$F = 0,0224 \cdot \frac{n f h c}{m}$$

C O R O L L. I.

LXXXVI. De cette solution il est clair, que plus le frottement de la machine est petit, & plus sera grand l'angle θ , qu'on pourra employer. Ainsi, si le frottement étoit $F = 0,0617 \frac{h f h c}{m}$, on pour-

roit



roit employer l'angle $\theta = 80^\circ$, & le moment d'impulsion actuel seroit $= 0,3342 \frac{nfhcVc}{m}$. Mais, si le frottement étoit environ deux fois plus petit, ou $F = 0,0307 \frac{nfhc}{m}$, on pourroit faire usage de l'angle $\theta = 83^\circ$, & le moment d'impulsion actuel seroit $0,4050 \frac{nfhcVc}{m}$.

C O R O L L. 2.

LXXXVII. De là on voit, combien il y a à gagner en diminuant le frottement de la machine, puisque le moment d'impulsion en devient augmenté assez considérablement. Dans le cas précédent, si l'on pouvoit réduire le frottement à la moitié, on obtiendrait un effet presque d'un tiers plus grand.

C O R O L L. 3.

LXXXVIII. Je suppose ici que dans la disposition de la machine on ait en vuë un certain degré du vent, & il est evident que le frottement demeurant le même, plus le vent qu'on a en vuë sera grand, & plus devient grand l'angle θ , mais la machine une fois construite perdra ses avantages pour tous les autres vents, tant plus forts que plus foibles.

S C H O L I E. I.

LXXXIX. Appliquons cette détermination au cas que Mr. *Laflois* a rapporté, & supposons que la machine dont il parle, ait été rangée sur l'angle $\theta = 80^\circ$, & qu'elle ait procuré les plus grands avantages, lorsque le vent achevoit 30 pieds par seconde. Posant donc $m = 800$ $n = 2$, $fh = 200$ pieds quarrés, & $c = 15$ pieds, le frottement y auroit été $F = 0,4628$ pieds cubiques d'eau, ou il auroit falu employer un poids de 30 lb à l'extrémité d'une



d'une aile pour vaincre le seul frottement. D'où le moment d'impulsion diminué du frottement n'auroit été que $0,3342 \frac{nfhcVc}{m}$ lequel, s'il n'y avoit point eu de frottement, auroit été $0,4435 \frac{nfhcV}{m}$ & partant d'un tiers plus grand. Or, si le frottement a été moindre, il faut que la machine ait été ajustée pour un vent plus foible : & si nous supposons qu'on eut en vuë un vent deux fois plus foible ou $c = \frac{1}{4}^5$ pieds, le frottement n'auroit été que le quart du précédent, ou de $7 \frac{1}{2}$ lb , qui sembleroit mieux d'accord avec l'expérience. De là je conclus que la machine n'a été rien moins que parfaite, du moins pour le cas $c = 15$ pieds, & que si elle étoit parfaite, elle pourroit élever encore plus que 1500 pieds cubiques d'eau par minute : or alors, pour rendre le calcul d'accord avec l'expérience, il faudroit bien mettre $n = 2$, ce qui me confirme dans mon sentiment rapporté ci-dessus, qu'on ne fauroit donner à n une valeur moindre que deux.

S C H O L I E. 2.

XC. Posons le cas qu'on veuille construire un moulin à vent, dont la longueur de chaque aile soit de 40 pieds sur 5 pieds de largeur, afin qu'elle produise le plus grand effet, lorsque la vitesse du vent est de 15 pieds par seconde, ou $c = \frac{1}{4}^5$ pieds, le frottement étant tant, que pour le vaincre, il faille appliquer au bout d'une des ailes une force de 5 lb , ou qu'il soit $F = \frac{1}{2}$ pied cubique. Ayant donc $fh = 200$ & $\frac{n}{m} = \frac{1}{400}$, on aura $\frac{nfhc}{m} = \frac{1}{8}$, & partant $F = \frac{1}{2}$ $= \frac{2}{4}$ $\frac{nfhc}{m} = 0,0444 \frac{nfhc}{m}$: il faudroit donc prendre l'angle θ de 82° à peu près, & construire les ailes conséquemment, de sorte que leur inclinaison à la direction du vent fut de $54^\circ, 44'$ près l'axe & de 82° aux extrémités. Ensuite, lorsque le vent est de la force que je viens de supposer, la vitesse des ailes doit être telle, que leurs extrémités



mités fassent $2 \frac{1}{4}$. 15 pieds = 34 pieds par seconde, ou qu'elles achevent leurs révolutions en 7 secondes ; si le vent étoit ou plus fort ou plus foible, le mouvement des ailes devoit être augmenté ou diminué dans la même raison, de sorte que la vitesse des ailes à leur extrémité fût à celle du vent comme $2 \frac{1}{4}$ à 1, afin que le moment d'impulsion devint le plus grand, & tel qu'il a été déterminé au §. 80. Mais alors, en retranchant le frottement, on n'auroit plus l'avantage du plus grand : & si le mouvement des ailes ne suivoit plus le rapport marqué, le moment d'impulsion ne seroit plus le plus grand, mais se trouveroit au dessous de la valeur indiquée au §. 80, ces valeurs n'étant justes que lorsque la lettre v obtient la valeur correspondante. Mais il arrive ordinairement dans ces machines, qui sont destinées à élever un certain fardeau, ou à vaincre une certaine résistance, qu'on n'est pas le maître de la vitesse des ailes, vû qu'elle dépend de la disposition de la machine : & on doit se contenter, que pour un certain vent, la vitesse des ailes soit conforme à la règle. Pour tous les autres cas, la détermination du moment d'impulsion demande un calcul particulier, que je vais expliquer dans le problème qui suit.

P R O B L E M E X.

XCI. *Les ailes étant construites en sorte, que lorsque leur vitesse a le rapport prescrit à celle du vent, elles produisent le plus grand moment d'impulsion ; trouver le moment d'impulsion, lorsque le mouvement des ailes est plus ou moins rapide à l'égard du vent.*

S O L U T I O N.

Soit θ l'angle sous lequel l'extrémité des ailes est inclinée à la direction du vent, & les ailes étant construites selon la règle prescrite ci-dessus, seront propres à procurer le plus grand moment d'impulsion, lorsqu'elles tournent avec une vitesse, qui soit à celle du vent comme v à 1 ou qu'il soit $Vv = vVc$. Or nous avons vû que le rapport de ce nombre v à l'angle θ est exprimé en sorte, $v = \frac{1}{2}$



tang $\theta = \frac{2}{3} \cot \theta$. Ensuite, pour les endroits plus proches de l'axe, l'inclinaison est plus grande, en sorte que posant pour la distance $OP = x$ l'inclinaison = ω il soit $x = \frac{f(\text{tang } \omega - 2 \cot \omega)}{3v}$,

d'où l'on doit tirer la construction des ailes ; & ces ailes produiroient le moment qui a été assigné ci-dessus, s'il étoit $Vv = vVc$. Mais supposons à présent qu'il soit $Vv = \mu Vc$, & pour chercher le moment d'impulsion qui en résulte, il faut recourir à la formule intégrale, laquelle sera :

$$\frac{4 \mu n h c V c}{m f} \int x dx \cos \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{\mu x}{f} \right)^2$$

Or, puisque $x = \frac{f(\text{tang } \omega - 2 \cot \omega)}{3v} = \frac{f(\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)}{3v \sin \omega \cos \omega}$

nous aurons

$$x dx \cos \omega^3 = \frac{f f d\omega (\sin \omega^4 - 4 \cos \omega^4)}{9 v v \sin \omega^3} \quad \&$$

$$\text{tang } \omega - \frac{\mu x}{f} = \text{tang } \omega - \frac{\mu}{3v} (\text{tang } \omega - 2 \cot \omega) = \frac{(3v - \mu) \text{tang } \omega + 2\mu \cot \omega}{3v}$$

$$\text{ou } \text{tang } \omega - \frac{\mu x}{f} = \frac{(3v - \mu) \sin \omega^2 + 2\mu \cos \omega^2}{3v \sin \omega \cos \omega} = \frac{2\mu - 3(v - \mu) \sin \omega^2}{3v \sin \omega \cos \omega} =$$

$$\frac{2}{3 \sin \omega \cos \omega} + \frac{(v - \mu) (\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)}{3v \sin \omega \cos \omega}$$

delà on aura

$$\left(\text{tang } \omega - \frac{\mu x}{f} \right)^2 = \frac{4}{9 \sin \omega^2 \cos \omega^2} + \frac{4(v - \mu)(\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)}{9v \sin \omega^2 \cos \omega^2} + \frac{(v - \mu)^2 (\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)^2}{9v v \sin \omega^2 \cos \omega^2}$$

& partant le moment cherché sera

$$\frac{16 \mu n f h c V c}{81 v v m} \int \frac{d\omega (\sin \omega^4 - \cos \omega^4)}{\sin \omega^5 \cos \omega^2} \left(1 + \frac{(v - \mu)(\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)}{v} + \frac{(v - \mu)^2 (\sin \omega^2 - 2 \cos \omega^2)^2}{4 v v} \right)$$

qui



qui se réduit à

$$\frac{16\mu n f h c V c}{81 v^4 m} \int d\omega \left[\frac{(3v-\mu)^2 \sin \omega}{\cos \omega^2} + 27(v-\mu)^2 \sin \omega - \frac{4(9vv-3c\mu v+2c\mu\mu)}{\sin \omega} + \frac{16\mu(4\mu-3v)}{\sin \omega^3} - \frac{16\mu\mu}{\sin \omega^5} \right]$$

Or, ayant trouvé l'intégrale de chaque partie ci-dessus, si nous posons après l'intégration $\omega = \theta$, & que nous y ajoutions une telle constante, que l'intégrale évanouisse en posant $\sin \omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$ & $\cos \omega = \sqrt{\frac{1}{2}}$ le moment d'impulsion résultera :

$$\frac{4\mu n f h c V c}{81 v^4 m} \left[\frac{(3v-\mu)^2}{\cos \theta} + \frac{2\mu(12v-13\mu)}{\sin \theta^2} \cos \theta + \frac{4\mu\mu}{\sin \theta^4} \cos \theta - 27(v-\mu)^2 \cos \theta - 6(6vv-1c\mu v+9\mu\mu) \operatorname{tag} \frac{1}{2} \theta \right] \\ - 6\mu(4v-3\mu) \sqrt{3} + 6(6vv-16\mu v+9\mu\mu) \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}$$

d'où, en posant $\mu = v$, l'on obtient le moment d'impulsion trouvé ci-dessus. Mais, pour que cette formule soit d'accord avec la vérité, il faut qu'il soit $\operatorname{tang} \omega > \frac{\mu x}{f}$ ou $\operatorname{tang} \omega > \frac{\mu (\operatorname{tang} \omega - 2 \cot \omega)}{3v}$

donc $\mu < \frac{3v \operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \omega - 2 \cot \omega}$ par conséquent $\mu < \frac{3v \operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \theta - 2 \cot \theta}$

Or $v = \frac{\operatorname{tang} \theta - 2 \cot \theta}{3}$, donc $\mu < \operatorname{tang} \theta$.

Si l'angle θ approche fort d'un droit, à cause de la petitesse de l'angle θ , le moment d'impulsion sera fort à peu près.

$$\frac{4\mu(3v-\mu)^2}{81 v^4 \cos \theta} \cdot \frac{n f h c V c}{m} = \frac{16v^3 - 4\lambda\lambda(3v-\lambda)}{81 v^3 \cos \theta} \cdot \frac{n f h c V c}{m}$$

en posant $\mu = v - \lambda$; d'où l'on voit que, soit qu'on prenne pour λ un nombre positif ou négatif, le moment d'impulsion est toujours moindre, que s'il étoit $\lambda = 0$ ou $\mu = v$.

C O R O L L. I.

XCI. Si les ailes tournent deux fois plus vite par rapport au vent, qu'elles devroient tourner pour produire la plus forte impulsion,



on aura $\mu = 2 \nu$, & le moment d'impulsion fera $= \frac{8 n f h c V c}{81 \nu m \cos \theta}$;
qui seroit deux fois plus grand, si les ailes avoient leur juste vitesse.

C O R O L L. 2.

XCIII. Supposons que la vitesse des ailes ne soit que la moitié de la plus avantageuse, ou que $\mu = \frac{1}{2} \nu$; & alors le moment d'impulsion fera au plus grand comme 25 ad 32 : on perdra donc à peu près le quart sur l'effet.

C O R O L L 3.

XCIV. Mais il faut bien remarquer que cette formule simple n'a lieu, que lorsque l'angle θ approche fort d'un droit & que le nombre ν surpasse le binaire. Alors il y aura à peu près $\tan \theta = 3 \nu$

& $\theta = 3 \nu = \frac{1}{\cos \theta}$: d'où notre formule pour le moment d'impulsion fera $= \frac{4 \mu (3 \nu - \mu)^2}{27 \nu^3} \cdot \frac{n f h c V c}{m}$.

C O R O L L 4.

XCV. Soit le poids à élever $= P$, & sa vitesse à celle de l'extrémité des ailes comme ν à f , de sorte que le moment de l'effet soit $= P \cdot \frac{\mu r V c}{f}$. Négligeant donc le frottement, on aura

$$P r = \frac{4 (3 \nu - \mu)^2}{27 \nu^3} \cdot \frac{n f f h c}{m}, \text{ \& partant } (3 \nu - \mu)^2 = \frac{27 \nu^3 m P r}{4 n f f h c}.$$

Donc $3 \nu - \mu = \frac{3 \nu \sqrt{3 \nu m P r}}{2 f \sqrt{n h c}}$ & $\mu = 3 \nu \left(1 - \frac{\sqrt{3 \nu m P r}}{2 f \sqrt{n h c}} \right)$, d'où l'on connoitra la vitesse des ailes pour chaque vitesse du vent $V c$:

$$V \nu = 3 \nu \left(V c - \frac{\sqrt{3 \nu m P r}}{2 f \sqrt{n h c}} \right).$$

COROLL.



C O R O L L. 5.

XCVI. Donc, pour que le vent soit assez fort pour mettre la machine en mouvement, il faut que la vitesse V_c soit plus grande que $\frac{V_{3vmPr}}{2fVnh}$. Et alors le moment d'impulsion sera :

$$\frac{3vPrV_c}{f} \left(1 - \frac{V_{3vmPr}}{2fVnhc} \right) = \frac{3vPr}{f} \left(V_c - \frac{V_{3vmPr}}{2fVnh} \right).$$

Donc, si la vitesse du vent devient double, l'effet sera plus que deux fois plus grand.

S C H O L I E.

XCVII. Après ces recherches on ne trouvera plus de doutes dans la comparaison de la théorie avec les expériences, que Mr. *Lulofs* a faites sur l'effet des moulins à vent en Hollande. Car d'abord, en mettant $v = 2$, l'effet que la théorie montre surpassera assez celui qu'on observe, pour avoir de quoi tenir compte, tant du frottement, que de l'imperfection de la Machine. Ensuite, pour ce que Mr. *Lulofs* rapporte, que l'effet n'étoit pas proportionnel au cube de la vitesse du vent, & qu'il suivoit même quelquefois une raison inférieure à celle du quarré, tant s'en faut, que cela soit contraire à la théorie, qu'il est plutôt admirablement d'accord. Car ce ne sont que les plus grands effets, qui sont proportionnels aux cubes de la vitesse du vent ; & pour produire ces plus grands effets, il faut donner aux machines pour chaque vitesse du vent une disposition particulière, en sorte que la vitesse du fardeau tienné toujours un certain rapport à celle du vent. Mais, puisqu' ordinairement on ne change rien dans la disposition de la machine, quoique le vent varie, nous venons de voir que dans ce cas la raison des cubes n'a point lieu, & que l'effet de la machine ne croît que dans une raison plus grande que celle des vitesses du vent, la raison véritable étant comme la vitesse même diminuée d'une quantité constante, qui dépend de la disposition de la machine. Donc, puisque la théorie, sur le pied, que je viens



de l'établir satisfait à ces deux principaux phénomènes observés par Mr. *Lulofs*, il n'y a aucun doute, qu'elle ne soit parfaitement d'accord avec toutes les expériences possibles, & que, fondé sur cette théorie, on ne puisse porter la pratique à un plus haut degré de perfection. Pour cet effet j'ai déjà déterminé la figure la plus avantageuse, qu'il faut donner aux ailes, & la disposition de la machine la plus convenable. Mais il semble qu'on y puisse apporter encore de plus grandes perfections en augmentant la surface des ailes ; on leur donne communément la même largeur par toute la longueur, & quand on ne les fait pas plus larges vers les extrémités, la raison en paroît être qu'on doit craindre, que la force du vent n'en rompe leur liaison avec l'axe. Mais, pour prévenir cet accident, ne pourroit-on pas diminuer la longueur pour gagner d'autant plus sur la largeur ? Ou au lieu de quatre ne pourroit-on pas y mettre 6 ou 8 ? Il n'y a aucun doute, qu'on n'ait fait déjà des essais là dessus, & il est difficile de deviner les difficultés, qu'on y a rencontrées. Quoiqu'il en soit, une figure divergente semble être très propre pour les ailes d'un moulin à vent : & quand on auroit peur, qu'une trop grande largeur vers les extrémités nuit à la fermeté, on pourroit multiplier le nombre des ailes en sorte, qu'elles occupassent presque un espace circulaire, dont leur longueur seroit le rayon. Au moins il vaudra la peine d'examiner les avantages, que la théorie promet d'une telle construction des ailes, sans se mettre en peine sur les difficultés, que la pratique pourroit opposer à leur exécution.

P R O B L E M E XI.

XCVIII. *Les ailes étant divergentes depuis l'axe vers l'extrémité selon des lignes droites, & ayant à chaque distance de l'axe l'inclinaison à la direction du vent, qui a été déterminée ci-dessus, trouver le moment d'impulsion que ces ailes fourniront, la disposition de la machine étant la plus avantageuse.*

S O L U T I O N.

Fig. 4.

Soit la largeur de chaque aile à l'extrémité $HH = h$, qui convient à la distance de l'axe $OF = f$: & à une distance quelconque $OP = x$, la largeur fera $MM = y = \frac{hx}{f}$. Soit Vv la vitesse des ailes à leur extrémité, & Vc celle du vent ; & que l'élément MM soit incliné à la direction du vent sous l'angle $= \omega$. Cela posé, nous avons vû, que pour rendre la force du vent la plus grande, il faut en posant $\frac{Vv}{Vc} = v$, qu'il soit $\text{tang } \omega = \frac{3vx}{2f} + V \left(\frac{9vvxx}{4ff} + 2 \right)$. Ensuite, lorsque le moulin est garni de 4 telles ailes, à cause de $y = \frac{hx}{f}$, le moment d'impulsion sera :

$$\frac{4vnhcVc}{mff} \int xxx dx \text{ cof } \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{vx}{f} \right)^2$$

Or, puisque $\text{tang } \omega = \frac{3vx}{2f} + V \left(\frac{9vvxx}{4ff} + 2 \right)$ nous aurons

$$x = \frac{f}{3v} (\text{tang } \omega - 2 \text{ cof } \omega) = \frac{f(\sin \omega^2 - 2 \text{ cof } \omega^2)}{3v \sin \omega \text{ cof } \omega} \quad \&$$

$$dx = \frac{f d\omega (\sin \omega^2 + 2 \text{ cof } \omega^2)}{3v \sin \omega^2 \text{ cof } \omega^2} ;$$

D'où nous tirons :

$$\text{tang } \omega - \frac{vx}{f} = \frac{2}{3 \sin \omega \text{ cof } \omega} \quad \&$$

$$x dx \text{ cof } \omega^3 = \frac{ff d\omega (\sin \omega^4 - 4 \text{ cof } \omega^4)}{9vv \sin \omega^3} \quad \text{donc}$$

$$xxx dx \text{ cof } \omega^3 = \frac{f^3 d\omega (\sin \omega^6 - 2 \sin \omega^4 \text{ cof } \omega^2 - 4 \sin \omega^2 \text{ cof } \omega^4 + 8 \text{ cof } \omega^6)}{27v^3 \sin \omega^4 \text{ cof } \omega} \quad \&$$



& partant le moment d'impulsion cherché sera :

$$\frac{4\nu n h c V c}{m f f} \cdot \frac{4 f^3}{243 \nu^3} \int \frac{d\omega (\sin \omega^5 - 2 \sin \omega^4 \operatorname{cof} \omega^2 - 4 \sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega^4 + \operatorname{cof} \omega^5)}{\sin \omega^5 \operatorname{cof} \omega^3}$$

ou

$$\frac{16 n f h c V c}{243 \nu \nu m} \int d\omega \left(\frac{1}{\operatorname{cof} \omega^3} - \frac{2}{\sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega} - \frac{4 \operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^4} + \frac{8 \operatorname{cof} \omega^3}{\sin \omega^5} \right).$$

Pour intégrer cette formule, il faut remarquer les réductions suivantes,

$$\int \frac{d\omega}{\operatorname{cof} \omega} = l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \omega)$$

$$\int \frac{d\omega}{\operatorname{cof} \omega^3} = \frac{\sin \omega}{2 \operatorname{cof} \omega^2} + \frac{1}{2} l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \omega)$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega^2 \operatorname{cof} \omega} = l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \omega) - \frac{1}{\sin \omega}$$

$$\int \frac{d\omega \operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^4} = - \frac{1}{3 \sin \omega^3}$$

$$\int \frac{d\omega \operatorname{cof} \omega^3}{\sin \omega^5} = - \frac{1}{5 \sin \omega^5} + \frac{1}{3 \sin \omega^3}$$

& alors l'intégrale se trouvera

$$\frac{16 n f h c V c}{243 \nu \nu m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \omega}{2 \operatorname{cof} \omega^2} + \frac{2}{\sin \omega} + \frac{4}{\sin \omega^3} - \frac{8}{5 \sin \omega^5} - \frac{3}{2} l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \omega) \\ - \frac{27 \sqrt{3}}{5 \sqrt{2}} + \frac{3}{2} l \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1} \end{array} \right\}$$

après y avoir ajouté la juste constante, pour que l'intégrale évanouisse, quand $x = 0$, ou $\operatorname{tang} \omega = \sqrt{2}$. Maintenant il ne reste qu'à poser $x = f$ ou $\operatorname{tang} \omega = \frac{3}{2} \nu + \sqrt{(\frac{3}{4} \nu \nu + 2)}$ pour avoir l'entier moment d'impulsion. Donc, si θ marque l'angle, que fait la direction

tion



tion du vent avec l'extrémité des ailes, de sorte que $v = \frac{\text{tang } \theta - 2 \cot \theta}{3}$,
le moment d'impulsion sera :

$$\frac{16nfhcVc}{243vm} \left(\frac{\text{tang } \theta^2}{2 \sin \theta} + \frac{2}{\sin \theta} + \frac{4}{\sin \theta^3} - \frac{8}{5 \sin \theta^5} - \frac{27\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{2} / \text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) + \frac{1}{2} / \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1} \right)$$

C O R O L L. I.

XCIX. Si l'angle θ , sous lequel l'extrémité des ailes est inclinée à la direction du vent, est fort proche de 90° , de sorte que $\text{tang } \theta$ est un nombre fort grand, par rapport auquel on puisse négliger les autres termes, on aura à peu près $v = \frac{1}{3} \text{tang } \theta$, & $\sin \theta = 1$; d'où le moment d'impulsion sera $= \frac{8nfhcVc}{27m}$.

C O R O L L. 2.

C. Si les ailes avoient par toute leur longueur la même largeur h , de sorte que leur surface seroit deux fois plus grande, nous avons vû ci-dessus, que le moment d'impulsion seroit $= \frac{16nfhcVc}{27m}$, & par conséquent deux fois plus grand que dans le cas présent.

C O R O L L. 3.

CI. De là on comprend, que le moment d'impulsion dépend de la surface des ailes, & que leur figure n'y change pas considérablement l'effet. Car nous venons de voir que, soit qu'on donne aux ailes une figure rectangulaire ou triangulaire, pourvu que leur surface soit la même, le moment d'impulsion ne varie point.

C O R O L L. 4.

CII. On ne sauroit donc produire un plus grand moment d'impulsion, qu'en étendant les ailes jusqu'à remplir l'espace circulaire



dont le rayon est $= f$, ce qui arrivera, lorsqu'on prend $4 h = 6 f$ ou $h = \frac{3}{2} f$ à peu près. Alors le moment d'impulsion sera $= \frac{4 n f f c V c}{9 m}$.

S C H O L I E.

CIII. Par là on comprend la raison de la pratique ordinaire, où l'on donne aux ailes la même largeur par toute leur longueur : puisqu'on y perdrait, si l'on diminueoit la largeur vers l'axe. Car, supposé qu'on donne aux ailes à leur extrémité la plus grande largeur que les circonstances permettent, il vaut toujours mieux de conserver la même largeur vers l'axe, que de la diminuer, & cela aussi bien qu'il est possible. Cependant, si l'on pouvoit multiplier les ailes, en sorte que leurs extrémités s'atteignissent à peu près, ce seroit sans doute la construction la plus avantageuse, puisqu'on obtiendrait par ce moyen la plus grande surface possible pour la même longueur des ailes. Car, puisque le moment d'impulsion est proportionnel à la surface des ailes, le plus sûr moyen de l'augmenter est de rendre cette surface aussi grande qu'il est possible ; mais il est bien à remarquer, que je suppose ici l'angle θ fort proche d'un droit ; & parce qu'on a alors $v = \frac{Vv}{Vc} = \frac{1}{3} \text{ tang } \theta$, la vitesse des ailes à leur extrémité doit surpasser celle du vent. Or, ayant fixé une certaine surface, qu'on veut donner aux ailes, il importe peu pour le moment d'impulsion, qu'elle figure on voudra choisir : mais pour la fermeté de la machine il n'en est pas de même, & moins on s'écarte de l'axe, moins elle souffrira : d'où la disposition des ailes seroit la plus avantageuse, si l'on remplissoit de la surface donnée un espace circulaire autour de l'axe. Mais il faut aussi remarquer qu'alors le mouvement de rotation des ailes, & partant aussi de l'axe, deviendroit plus rapide. On fera donc bien de joindre toutes ces considérations ensemble, & alors il ne sera plus difficile de porter la construction des moulins à vent au plus haut degré de perfection, dont ils sont susceptibles.

EXPE'.