



E X P É R I E N C E S
POUR DÉTERMINER LA RÉFRACTION DE TOUTES
SORTES DE LIQUEURS TRANSPARENTES.

PAR M. EULER.

I.

Ce que j'ai eu l'honneur de proposer sur la loi de réfraction à l'égard de la diverse réfrangibilité des rayons, montre suffisamment, combien peu la manière ordinaire de faire ces expériences est propre pour nous éclaircir sur la véritable quantité de réfraction, que les rayons de diverses couleurs souffrent en passant d'un milieu transparent dans un autre. Car, ayant détruit une proportion, sur laquelle le grand Newton doit avoir fondé la loi de réfraction des rayons de diverses couleurs, en faisant voir qu'elle implique une contradiction ouverte, quoiqu'elle parut d'accord avec les expériences, il faut bien que ces expériences ne soient pas suffisantes pour nous découvrir exactement la véritable quantité de réfraction. J'ai aussi remarqué que la véritable proportion, que j'ai établie à la place de celle-là, en diffère si peu, que les expériences ordinaires ne sont pas capables de nous montrer la différence; car il ne s'agit ici qu'environ d'une millième partie dans la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction, dont la véritable proportion diffère de l'autre, que j'ai démontrée contradictoire.

II. Cependant, quelque petite que paroisse cette différence, elle a néanmoins une influence trop essentielle, tant dans la théorie de la réfraction, que dans la pratique qui en découle, pour qu'on la puisse négliger. Car, si la proportion Newtonnienne que Mr. *Dollond* m'avoit opposée, étoit la véritable, toute la théorie, sur laquelle j'ai fondé la per-



fection des verres objectifs, feroit fausse; & il ne feroit pas absolument possible, de quelque maniere qu'on combinât plusieurs matieres transparentes, de diminuer l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons: & l'intervalle entre l'image rouge & violette tiendroit perpétuellement le même rapport à la distance de foyer. Mais, suivant la proportion véritable, il est possible de construire de tels verres objectifs, en employant deux ou plusieurs matieres transparentes, qui réunissent parfaitement les images formées par les rayons de toutes les couleurs différentes.

III. Pour rendre cela plus sensible, qu'on envisage un verre objectif ordinaire, dont la distance de foyer soit environ 28 pieds, & on fait par l'expérience, que l'image formée par les rayons rouges en est d'un pied plus éloignée, que celle qui est formée par les rayons violets. Qu'on considère à présent un objectif composé de verre & d'eau, qui ait la même distance de foyer: & si la proportion Newtonnienne étoit conforme à la vérité, on auroit toujours le même intervalle d'un pied entre l'image rouge & la violette: or, selon la proportion, que j'ai démontrée la véritable, il est possible d'arranger l'eau avec le verre en sorte, que l'intervalle entre les images rouge & violette évanouisse tout à fait: & même si l'on vouloit, que l'image rouge tombât d'un pied, ou d'autant qu'on voudroit, plus proche de l'objectif, que l'image violette. D'où l'on voit, que la différence entre les deux proportions, quelque petite qu'elle soit en elle-même, est de la dernière importance dans la théorie de la réfraction, & dans la construction des verres dioptriques, qui y est fondée.

IV. Un tel verre composé donc, qui étoit le sujet de mon Mémoire sur la perfection des objectifs, doit décider très sensiblement sur cette petite différence, qui se trouve entre les deux proportions rapportées, & que les expériences ordinaires, par lesquelles on est accoutumé d'examiner les différentes réfractions, ne fauroient jamais découvrir. Car, qu'on prenne un tel objectif, dont j'ai enseigné la construction, qui ait environ 28 pieds de foyer; & suivant la pro-
por-



portion Newtonienne, le foyer des rayons rouges devoit être éloigné d'un pied de celui des rayons violets, pendant que, suivant ma proportion, ces deux foyers se doivent réunir. Donc, quoique la différence entre ces deux proportions se réduise seulement à moins d'une millieme partie dans la raison de réfraction, l'effet de cette petite différence, qui doit échapper à toutes les expériences ordinaires, devient par le moyen d'un tel objectif si sensible, qu'il monte à un intervalle d'un pied: & il sera aisé de construire d'autres verres composés de telle sorte, que l'effet devienne encore plus considérable.

V. Quand je fis travailler quelques ménisques, selon les mesures que j'avois trouvées par la théorie pour, en remplissant d'eau la cavité entr'eux, obtenir la perfection que j'avois en vuë: il fut aisé d'appercevoir, que la confusion causée ordinairement par la diverse réfrangibilité des rayons, étoit bien diminuée, quoique l'ouvrier n'ait pas trop bien exécuté les mesures prescrites, & que de l'autre côté la confusion causée par la trop grande ouverture du verre fût très considérable. Mais une autre circonstance me frappa: qui me fournit les premières idées du sujet, que je traite présentement. Car, ayant rempli d'eau deux de ces ménisques, la distance de foyer étoit environ de 8 pieds: ensuite, ayant rempli ces mêmes ménisques d'esprit de vin, la distance de foyer se réduisoit subitement à 5 pieds. Je fus bien surpris d'une si grande différence, pendant que la réfraction de l'esprit de vin diffère si peu de celle de l'eau; car les Auteurs marquent la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction de l'air dans l'esprit de vin comme 100 à 73, tandis que de l'air dans l'eau cette même raison est comme 4 à 3, ou comme 100 à 75.

VI. Ce seul exemple suffit pour nous convaincre, que deux ménisques peuvent fournir le plus propre instrument, pour découvrir la quantité de réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes, puisque la plus petite différence, qui se puisse trouver dans leur qualité réfractive, se manifeste par une si grande différence dans la distance du foyer. Pour cet effet on n'a pas besoin d'employer précisément



les ménisques, que j'avois recommandés pour perfectionner les verres objectifs, puisque le dessein est ici tout à fait différent, & on déterminera aisément tels autres ménisques, qui étant remplis de diverses liqueurs produisent des différences encore plus grandes dans la distance du foyer. Tels instrumens seront aussi fort propres à nous découvrir beaucoup plus exactement la diverse réfrangibilité des rayons à l'égard de toutes les liqueurs transparentes ; cependant on pourra bien se passer de cette recherche, vû qu'ayant déjà connu la réfraction d'une espèce des rayons, on en peut aisément conclure celle des autres espèces à l'aide de la proportion, que j'ai démontrée être nécessairement vraie.

VII. Cela non-obstant, je ne voudrois pas abandonner entièrement cette dernière recherche, & je crois plutôt, que la théorie en pourroit tirer de grands secours. Car ce que nous savons de la diverse réfrangibilité des rayons, ne regarde proprement que les rayons du Soleil : ceux-cy renfermant toutes les espèces des couleurs, on a conclu par les expériences du prisme, que dans le passage de l'air dans le verre le sinus d'incidence est à celui de réfraction pour les rayons rouges comme 77 à 50, & pour les violets comme 78 à 50. Mais cette différence entre les rayons solaires ne constitue pour ainsi dire que l'intervalle d'une octave, de sorte que les rayons les moins réfrangibles du Soleil soient à comparer au plus haut son d'une octave, pendant que les plus réfrangibles répondent au plus bas de la même octave ; & peut-être même que les divers rayons solaires ne remplissent pas à cet égard une octave entière, puisque les rayons extrêmes ne représentent pas la même couleur, comme les sons, qui diffèrent entr'eux d'une ou quelques octaves, peuvent être regardés à peu près comme le même son.

VIII. Il est très probable, & je crois l'avoir suffisamment prouvé ailleurs, que les diverses couleurs ne diffèrent entr'elles que par rapport au nombre de vibrations, dont l'éther est agité de chacune en même tems, & que si r marque le nombre des vibrations que les rayons rouges du Soleil rendent dans une seconde, & v le nombre des vibra-



tions rendues en même tems par les rayons violets du Soleil, la différence des nombres r & v est la cause de la diverse réfrangibilité de ces rayons. Or les différens ordres des couleurs, que nous appercevons dans les bulles de savon, & dans les lames minces transparentes, sur lesquelles j'eus l'honneur l'année passée de lire un Mémoire, qu'on a daigné d'inferer dans le huitieme volume de l'Academie; ces différens ordres me font conclure, que non seulement les rayons contenus dans les nombres r ou v sont rouges ou violets, mais aussi ceux, dont le nombre de vibrations rendües dans une seconde, est $2r$, $4r$, $8r$ &c. ou $2v$, $4v$, $8v$ &c. & encore $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$ &c. ou $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$, $\frac{1}{8}v$ &c. tout comme dans les sons.

IX. Donc, si les rayons solaires, qui répondent au nombre v souffrent une plus grande réfraction que ceux, auxquels convient le nombre r , puisque le nombre v est différent du nombre r ; par la même raison les rayons des autres corps, auxquels répondent des nombres ou $2r$, $4r$, $8r$ &c. & $2v$, $4v$, $8v$ &c. ou bien $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$ &c. & $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$, $\frac{1}{8}v$ &c. devroient souffrir différentes réfractions. Par conséquent différentes couleurs rouges, entant qu'elles sont semblables à des sons, qui différent entr'eux d'une ou de quelques octaves, devroient produire dans leur réfraction une différence plus grande, que celle qu'on découvre entre les rayons rouges & violets du soleil. Le défaut de telles observations est sans doute un grand argument contre cette conjecture; mais peut être ne s'est-on pas donné assez de peine pour examiner cette diversité, s'il y en a une: ou peut-être la différence a-t-elle été trop petite, pour être découverte par les expériences, qu'on aura faites dans cette vue. Cependant cet article me paroît assés important, pour qu'on se donne toutes les peines possibles pour s'éclaircir là dessus: car, soit que ma conjecture soit fondée ou non, la théorie ne manquera pas d'en retirer des éclaircissement très considérables.

X. Je me propose donc de décrire deux sortes d'expériences dont les unes peuvent servir à examiner très exactement la force réfrac-



fractive de toutes les diverses liqueurs transparentes, où il faut bien remarquer, que les conclusions, qu'on tirera des expériences, ne se rapportent qu'à une seule couleur, savoir celle dont l'objet, d'où l'on reçoit les rayons, est teint ; car il est clair de soi-même, que diverses couleurs meneroient à des conclusions différentes. Pour cet effet je proposerai tels ménisques, qui rendent les plus petites différences très sensibles. L'autre forte est destinée pour la recherche de la réfraction de toutes les couleurs simples, qui se puissent trouver dans les corps : & dans cette vüe je chercherai tels ménisques, qui étant remplis d'une certaine liqueur découvrent d'une manière très sensible les différences dans la réfraction, qui peuvent provenir de la diverse couleur de l'objet ; & c'est de là que ma conjecture mentionnée fera aisément, ou confirmée, ou détruite.

XI. Je considère donc en général un verre objectif composé de deux ménisques, entre lesquels la cavité soit remplie d'une liqueur quelconque transparente : & j'ai déjà remarqué qu'ayant deux tels ménisques, dont les bords s'unissent parfaitement ensemble, il est aisé d'y enfermer toutes les liqueurs sans le secours d'aucun autre instrument : car, après avoir rempli la cavité, on n'a qu'à presser bien les ménisques l'un contre l'autre, & ils demeureront assez fermes ensemble, pour qu'on n'ait point à craindre, que la liqueur s'en écoule. De cette manière on peut aisément changer de liqueurs à volonté, & faire des expériences avec les mêmes ménisques sur toutes sortes de liqueurs. Soient donc les rayons de courbure des quatre faces de ces deux ménisques

Fig. 1.

le rayon de la face	MAM	=	f
le rayon de la face	NBN	=	g
le rayon de la face	NCN	=	h
le rayon de la face	MDM	=	k

Or je suppose ces faces sphériques, puisqu'une très petite ouverture peut suffire pour faire les expériences dont il s'agit.

XII. Soit de plus la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour le passage des rayons

de l'air dans le verre comme m à 1

& de l'air dans la liqueur comme n à 1

Or je parle ici des rayons d'une certaine espece, sur lesquels on fait les expériences, de sorte que, si les rayons sont rouges, les nombres m & n approchent un peu plus de l'unité, que s'ils étoient violets. Ensuite je regarde d'abord l'épaisseur de ce verre objectif AD comme evanouissante par rapport aux rayons de courbure, & à la distance tant de l'objet que de l'image du verre, pour avoir des formules plus simples. Cependant j'enseignerai après, quelles corrections doivent être employées à l'égard de l'épaisseur du verre dans les conclusions, qu'on aura tirées des expériences : & on verra que ces corrections sont pour la plûpart si petites, qu'on les peut bien négliger, attendu que les erreurs qu'on ne sauroit éviter en faisant des expériences, sont ordinairement beaucoup plus grandes.

XIII. Soit donc la droite EF l'axe de cet objectif, sur laquelle sont situés les centres des quatre faces : & qu'un objet Ee soit placé sur cet axe à la distance EA = a du verre. Cela posé, les rayons transmis par le verre formeront l'image après le verre en Ff dans une situation renversée, & j'ai fait voir que la distance DF après le verre sera déterminée par cette équation :

$$\frac{1}{DF} = (m - 1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m - n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{a}$$

Pour la grandeur de l'image Ff par rapport à l'objet Ee, on fait qu'elle est déterminée par la droite ef, tirée depuis le bout de l'objet e par le milieu du verre, puisque nous regardons l'épaisseur du verre AD comme infiniment petite. On auroit donc Ee : Ff = AE : DF,

ou bien $Ff = \frac{DF}{AE} \cdot Ee$, mais dans les Expériences que je vai dé-

crire, la grandeur de l'image n'entrera pas en considération. On voit



donc par la formule donnée, comment la distance DF est déterminée par les deux nombres m, n , & par les quatre rayons f, g, h, k , avec la distance a .

XIV. Mais, si l'on veut tenir compte de l'épaisseur du verre, laquelle a trois parties AB, BC & CD, & qu'on pose

$$AB = r, BC = s \text{ \& \ } CD = t$$

l'équation qui détermine la distance DF fera plus compliquée, & s'exprimera le plus commodément par la fraction continuée suivante :

$$\frac{1}{DF} = \frac{m-1}{k} + \frac{1}{-\frac{t}{m} + \frac{1}{-\frac{(m-n)}{h} + \frac{1}{-\frac{s}{n} + \frac{1}{-\frac{(m-n)}{g} + \frac{1}{-\frac{r}{m} + \frac{1}{\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}}}}}}}$$

D'où, par le calcul des fractions continuées, on tirera en chaque cas aisément la valeur de la distance cherchée DF, & il seroit fort superflu de développer cette formule, qui deviendroit extrêmement embarrassée

XV. Cependant, si nous nommons la distance DF = c , & que nous posions pour abrégé

$$P = \frac{\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a}}{1 - \frac{r}{m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)} \quad \& \quad Q = \frac{\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c}}{1 - \frac{t}{m} \left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} \right)}$$

on parviendra à cette équation

$$P + Q = (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) + \frac{s}{n} \left(\frac{m-n}{g} - P \right) \left(\frac{m-n}{h} - Q \right)$$

Main-



Maintenant, si les épaisseurs r, s, t sont extrêmement petites, puisqu'on aura alors assez exactement

$$P = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} + \frac{r}{m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)^2 \quad \& \quad Q = \frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} + \frac{t}{m} \left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} \right)^2$$

l'équation trouvée se changera en cette forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = & (m-1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) + \frac{r}{m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)^2 \\ & + \frac{t}{m} \left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} \right)^2 \\ & - \frac{s}{n} \left(\frac{m-n}{g} - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a} \right) \left(\frac{m-n}{h} - \frac{(m-1)}{k} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

d'où notre première équation se déduit, si l'on fait évanouir les épaisseurs r, s & t .

XVI. Donc, puisque au cas que $r = s = t = 0$, on a

$$\frac{1}{c} = (m-1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{a}$$

si nous considérons les épaisseurs r, s & t comme extrêmement petites, nous aurons plus exactement

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} = & (m-1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{a} \\ & + \frac{r}{m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)^2 \\ & + \frac{s}{m} \left(\frac{m-n}{g} - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a} \right)^2 \\ & + \frac{t}{m} \left((m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{(m-1)}{f} + \frac{1}{a} \right)^2 \end{aligned}$$



d'où l'on voit combien chacune des épaisseurs r , s & t , contribue à changer la valeur de la distance $DF = c$. On voit évidemment que la valeur de $\frac{1}{c}$ en est augmentée, & partant celle de la distance même $DF = c$ diminuée.

XVII. Ayant donc déterminé par la théorie à quelle distance $DF = c$ derrière le verre l'image doit paroître, si l'on consulte l'expérience, & qu'on observe cette même distance DF , il faut qu'elle se trouve d'accord avec la théorie. Connoissant donc cette distance $DF = c$ par l'expérience, on aura une équation, d'où l'on pourra tirer la valeur du nombre n , ou bien le rapport $n : 1$, qui exprime la raison de réfraction pour la liqueur, dont la cavité entre les ménisques est remplie. Pour cet effet il faut qu'on sache les rayons des quatre courbures f , g , h , & k , lesquels peuvent bien être supposés connus par les bassins, où les deux ménisques auront été travaillés; cependant on en pourra aussi découvrir les valeurs par quelques expériences, qu'on fera avec des liqueurs dont la réfraction est déjà connue. Or outre cela il faut qu'on sache exactement le nombre m , qui contient la réfraction du verre.

XVIII. Or, pour observer la distance $DF = c$, à laquelle l'image de l'objet se présente derrière le verre, on peut se servir d'une chambre obscure, en fixant le verre dans le trou par lequel les rayons y entrent: car alors recevant l'image sur une surface blanche, en l'approchant ou éloignant du verre, jusqu'à ce que la représentation paroisse la plus distincte, on n'aura qu'à mesurer sa distance depuis le verre pour avoir la distance cherchée $DF = c$. Or au défaut d'une chambre obscure on pourra aussi se servir du tuyau d'une lunette ordinaire, en y fixant le verre composé au lieu de l'objectif, & prenant un oculaire, qu'on jugera le plus convenable; on n'aura qu'à diriger la lunette vers l'objet proposé, & chercher quelle longueur il faut donner à la lunette, pour qu'on voye l'objet le plus distinctement.

Alors



Alors, connoissant l'oculaire & la constitution de l'oeil, on en conclura aisément la distance DF.

*Méthode d'observer la réfraction de toutes sortes
de liqueurs transparentes.*

XIX. Je supposerai d'abord qu'on sache exactement les rayons des quatre faces des ménisques, f, g, h, k , de même que la réfraction du verre, ou la raison $m : 1$; & l'objet se trouvant dans l'axe du verre composé à la distance $AE = a$, qu'on observe, à quelle distance derrière le verre l'image sera présentée, laquelle soit posée $DF = c$, de sorte que les valeurs des lettres m, a, c, f, g, h, k , soient connues. De là, en négligeant les épaisseurs r, s, t , on aura d'abord

$$(m - n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) = (m - 1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$$

d'où l'on tire

$$n = m - \frac{gh}{g+h} \left((m - 1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)$$

Mais, si l'on veut tenir compte des épaisseurs, en les regardant comme très petites on aura :

$$\begin{aligned} n &= m - \frac{gh}{g+h} \left((m - 1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \\ &\quad - \frac{ghr}{m(g+h)} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{ght}{m(g+h)} \left(\frac{m-1}{k} - \frac{1}{c} \right)^2 \\ &\quad - \frac{ghs}{n(g+h)^3} \left((m-1) \left(\frac{h}{k} - \frac{g}{f} \right) + \frac{g}{a} - \frac{h}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

XX. Mais l'avantage de cette méthode sur les ordinaires consiste en ce qu'on peut employer un tel verre composé, qu'il en résulte

une très grande différence dans la distance, tandis que la nature de la liqueur, ou le nombre n , change très peu. Pour chercher tels verres avantageux, supposons que le nombre n croisse de son différentiel dn , pendant que la distance c change en $c + dc$, & la différentiation nous fournira entre ces différentiels dn & dc le rapport suivant

$$— dn \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) = \frac{-dn(g+h)}{gh} = \frac{dc}{cc}$$

d'où nous tirons $dc = \frac{-ccdn(g+h)}{gh}$

Il faut donc que le coefficient de dn ou $\frac{cc(g+h)}{gh}$ devienne très grand, ou son réciproque $\frac{gh}{cc(g+h)}$ très petit: & partant en

substituant pour c ou $\frac{1}{c}$ sa valeur, cette quantité

$\frac{gh}{g+h} \left((m-1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{a} \right)^2$
doit devenir très petite.

XXI. Afin que la quantité $\frac{cc(g+h)}{gh}$ devienne fort grande, on rendra d'un coté la fraction $\frac{g+h}{gh}$, & de l'autre la distance c , aussi grande que les circonstances le permettent. Or il est évident que plus on fait petits les deux rayons g & h des faces concaves, & plus la fraction $\frac{g+h}{gh}$ deviendra grande; mais il faut bien prendre garde de ne pas les rendre trop petits: puisqu'on seroit obligé de donner au verre une trop petite ouverture. C'est pourquoi il sera toujours bon de faire les deux rayons g & h égaux entr'eux, & de leur donner

une

une telle grandeur, qui ne soit jamais trop petite par rapport à la distance de l'image $DF = c$: car, plus cette distance devient grande, & plus le verre doit admettre d'ouverture. Le cas le plus commode fera donc de rendre les deux ménisques égaux & semblables entr'eux, & partant si nous faisons $k = f$ & $h = g$, notre équation pour la distance $DF = c$ se réduit à cette forme

$$\frac{1}{c} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(m-n)}{g} - \frac{1}{a}$$

d'où nous aurons :

$$n = m - \frac{1}{2} g \left(\frac{2(m-1)}{f} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)$$

XXII. Puisque $\frac{1}{c}$ est plus grand que $\frac{2(m-1)}{f}$, pourvu que $n < m$, ce qui arrive toujours, vû qu'on ne connoit point de liqueur, dont la réfraction soit plus grande que celle du verre, la distance c est toujours plus grande que $\frac{f}{2(m-1)}$, ou que f à peu près, à cause de $m = \frac{3}{2}$ environ. Il faut donc prendre le rayon des deux convexités $f = k$, ni trop grand, ni trop petit : car si on les prenoit trop petits, la différence entre les distances c qui répondent à diverses liqueurs, pourroit devenir trop petite, pour qu'on en pût conclure avec assez de précision la différence de leur réfraction. Je ne voudrois donc pas prendre ces deux rayons f & k au dessous d'un pied. Mais une beaucoup plus grande valeur seroit également nuisible, puisqu'en remplissant le verre d'une telle liqueur pour laquelle $m - n$ auroit une valeur considérable, la distance c pourroit devenir si grande, que la chambre obscure ne seroit pas assez spacieuse pour la recevoir, ou qu'il y faudroit employer une trop longue lunette. Car, plus la différence $m - n$ sera grande, & plus la distance $DF = c$ excédera la quantité $\frac{2(m-1)}{f}$.

XXIII. Ayant déjà remarqué qu'il n'y a point de liqueurs, qui souffrent une plus grande réfraction, que le verre, je crois pouvoir ajouter qu'il n'y en a point, où la valeur de n soit plus petite que $1\frac{1}{4}$. Toutes les liqueurs donc, qu'on pourra examiner, seront par rapport à leur réfraction comprises entre les deux limites suivantes du nombre n ,

$$n = 1,54 \quad \& \quad n = 1,25$$

Or, si la liqueur, dont on remplit le verre étoit telle, que la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction des rayons qui y entrent de l'air fut

$$n : 1 = m : 1 = 1,54 : 1 \text{ ou } m - n = 0$$

la distance $DF = c$ deviendroit la plus courte; que je voudrois donc mettre = 1 pied. Mais, si la liqueur étoit si rare, que pour l'entrée des rayons de l'air, il y eut $n = 1,25$, la distance $DF = c$ deviendroit la plus grande, que je voudrois poser infinie, au cas que la distance de l'objet $AE = a$ est extrêmement grande, ou quasi infinie.

XXIV. Ces deux conditions nous fourniront les justes valeurs, qu'il faudra donner, tant au rayon de convexité f , qu'à celui de concavité g de chaque ménisque. Car pour les rayons moyens il y a $m = 1,54$ si la nature de la liqueur donne $n = m$, ou $n = 1,54$, & que nous regardions la distance de l'objet $AZ = a$ comme infinie, il faut que la distance de l'image $DF = c$ provienne d'un pied, d'où nous tirons

$$1 = \frac{f}{2.0,54} = \frac{100f}{108}, \text{ ou } f = \frac{2}{3} \text{ pieds,}$$

donc les deux faces convexes doivent avoir pour leurs rayons de courbure

$$f = k = \frac{2}{3} \text{ pieds, ou } f = k = 1 \text{ pied } \& \text{ 1 pouce à peu près.}$$

Or



Or, si la liqueur donnoit $n = 1,25$, & qu'on regardât la distance $a = \infty$, à cause de $c = \infty$ on auroit,

$$\frac{2.0,54}{f} - \frac{2.0,29}{g} = 0$$

& partant $g = \frac{2}{3}\frac{2}{3}f = \frac{2}{3}\frac{2}{3}$ pieds $= 7$ pouces.

De sorte que pour chacun de nos ménisques nous avons :

le rayon de convexité $f = k = 1,08$ pieds $= 12,96$ pouces

le rayon de concavité $g = h = 0,58$ pieds $= 6,96$ pouces

XXV. Cependant une trop grande précision seroit ici fort mal placée, & on pourra retirer à peu près les mêmes avantages d'une infinité de verres composés, pourvû que les ménisques ne diffèrent pas trop de ceux que je viens d'indiquer. Pour cette raison on pourra employer deux ménisques égaux & semblables, dont

le rayon des faces convexes soit $f = k = 12$ pouces

& le rayon des faces concaves $g = h = 7$ pouces.

Alors, remplissant la cavité entre ces deux ménisques d'une liqueur quelconque, dont la raison de réfraction soit $= n$: 1 pour les rayons qui y entrent de l'air, qu'on mesure la distance de l'image après le verre $DF = c$, de même que celle de l'objet avant $AE = a$, chacune exprimée en pouces, & on aura

$$n = m - \frac{1}{12} (m-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{ou } n = \frac{5}{12} m + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$$

Et si les rayons sont d'une nature moyenne, qu'il soit $m = 1,54$, on aura en négligeant l'épaisseur :

$$n = 1,225 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$$

XXVI. Voyons à quel point de précision ce verre composé sera capable de nous indiquer la réfraction d'une liqueur proposée. Que



L'objet se trouve à une distance de 100 pieds, ou de 1200 pouces, puisqu'il faut se servir de cette mesure, de sorte que $n = 1200$, & que l'expérience nous donne la distance de l'image $c = 80$ pouces, de là nous concluons donc :

$$n = 1,225 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{80} \right) = 1,27166$$

Mais, si au lieu de $c = 80$ pouces on s'étoit trompé de 6 pouces & qu'il y eut $c = 74$ pouces, on auroit

$$n = 1,225 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{74} \right) = 1,27520$$

d'où l'on voit qu'une différence de 6 pouces dans le lieu de l'image, n'en produit dans la valeur du nombre n qu'une différence de 0,00354, ou l'erreur qui a influé sur le nombre n seroit environ $\frac{1}{280}$.

Si la liqueur étoit encore plus rare, & que la distance de l'image fût plus grande, savoir $c = 120$ pouces, la distance de l'objet étant $a = 1200$ pouces, on en concluroit la réfraction

$$n = 1,225 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{120} \right) = 1,25708$$

& une erreur de 6 pouces dans la distance c n'en produiroit une que de $\frac{1}{280}$ dans la valeur du nombre n .

XXVII. Ce verre composé dont je viens de donner la description, seroit donc très propre à déterminer la réfraction des liqueurs, dont le nombre n se trouveroit au dessous de 1,30, ou qui causeroient une moindre réfraction que l'eau. Mais, si l'on vouloit par ce même verre examiner la réfraction des liqueurs approchantes de la nature de l'eau, la distance c deviendroit trop courte, pour en pouvoir conclure la réfraction avec autant de sûreté. Car, pour que la valeur de n provienne de 1,33, la distance de l'image c tomberoit au dessous de 3 pieds, & une erreur commise dans cette distance influeroit plus considérablement sur la quantité de réfraction. Pour l'examen de telles liqueurs il conviendroit donc d'employer d'autres ménisques, tels, que si la réfraction de la liqueur étoit environ $n = 1,28$, ou même $n = 1,30$ la distance c deviendroit infinie en supposant $a = \infty$; pour cet effet il faudroit qu'il fut

$$\frac{f}{g}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{m-1}{m-n} = \frac{54}{8}, \text{ ou } \frac{f}{g} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

on pourroit donc prendre $f = 13$ pouces, & $g = 6$ pouces.

XXVIII. Cependant on pourra bien se servir avec le même succès des ménisques précédens $f = k = 12$ pouces & $g = h = 7$ pouces en approchant davantage l'objet du verre ; car alors la distance de l'image deviendra plus grande, d'où la détermination du nombre n acquerra une plus grande précision. Pour chaque liqueur dont on aura rempli le verre, on approchera de plus en plus l'objet, jusqu'à ce que la distance de l'image devienne si grande qu'on jugera la plus convenable. Ainsi, supposant qu'ayant placé l'objet à la distance de 40 pouces, on ait observé la distance de l'image $c = 120$ pouces, la réfraction de la liqueur sera exprimée par cette valeur du nombre n

$$n = 1,225 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{120} \right) = 1,3416$$

où une erreur de 6 pouces commise dans l'observation de la distance c n'en produit qu'une de $\frac{1}{85}$ dans la valeur du nombre n . Et ce degré de précision sera toujours le même tant qu'on fera en sorte, que la distance de l'image tombe à la distance de 120 pouces derrière le verre. A une telle moindre distance de l'objet on le pourra plus commodément éclairer autant qu'il faut pour rendre affés claire l'image.

XIX. Mais, puisque j'ai négligé jusqu'ici l'épaisseur du verre, voyons à combien la correction qui en résulte, pourra monter. Comme les deux ménisques sont supposés égaux & semblables, on aura non seulement $f = k$ & $g = h$, mais aussi $t = r$, d'où nous aurons pour la juste valeur de n

$$n = m - \frac{1}{2} g \left(\frac{2(m-1)}{f} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) - \frac{g^2}{8n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^2$$

$$- \frac{gr}{2m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{gr}{2m} \left(\frac{m-1}{f} - \frac{1}{c} \right)^2$$

& partant pour les cas $f = 12$ pouces, & $g = 7$ pouces, la véritable valeur de n fera

$$n = 1,225 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) - \frac{7r}{2m} \left(\frac{m-1}{12} - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{7r}{2m} \left(\frac{m-1}{12} - \frac{1}{c} \right)^2 \\ - \frac{7s}{8n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^2$$

Faisons-en l'application au dernier exemple $a = 40$, & $c = 120$; & puisque la valeur trouvée auparavant $n = 1,3416$ est assez approchante, les corrections seront à cause de $m = 1,54$

$$n = 1,3416 - 0,004r - 0,00018s$$

Donc, quoiqu'on pose $r = \frac{1}{8}$ pouce & $s = \frac{1}{2}$ pouce, cette correction ne vaudra que $0,0004 + 0,000036 = 0,000436$ à soustraire, & on aura $n = 1,3412$, d'où l'on voit qu'on peut bien négliger cette correction, pourvu que le verre ne soit pas très épais.

XXX. Cependant il sera bon d'avoir quelques paires de tels ménisques, travaillés sur différentes proportions entre f & g , afin qu'on puisse employer pour chaque liqueur proposée tels qu'on jugera les plus convenables. Supposons qu'on ait trois paires de tels ménisques, que j'indiquerai par les lettres A, B, C, & qu'il soit :

$$\text{pour A} \left\{ \begin{array}{l} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 7 \text{ pouces} \end{array} \right\}; \text{ pour B} \left\{ \begin{array}{l} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 6 \text{ pouces} \end{array} \right\}; \text{ pour C} \left\{ \begin{array}{l} f = 12 \text{ pouces} \\ g = 5 \text{ pouces} \end{array} \right\}$$

& que les bords de tous s'accordent ensemble, en sorte qu'on puisse aussi combiner deux de différentes paires. On en pourra donc faire 6 combinaisons, & chacune fournira les déterminations suivantes du nombre n , en supposant $m = 1,54$

$$\begin{aligned}
 A \ \& \ A \ . \ . \ . \ n &= 1,225 \ + \ \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 B \ \& \ B \ . \ . \ . \ n &= 1,270 \ + \ 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 C \ \& \ C \ . \ . \ . \ n &= 1,315 \ + \ \frac{5}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 A \ \& \ B \ . \ . \ . \ n &= 1,2492 \ + \ \frac{4\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 A \ \& \ C \ . \ . \ . \ n &= 1,2775 \ + \ \frac{3\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 B \ \& \ C \ . \ . \ . \ n &= 1,2945 \ + \ \frac{3\frac{0}{2}}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right).
 \end{aligned}$$

XXXI. Mais, si l'on veut examiner la réfraction des milieux extrêmement rares, comme de l'air, ou comprimé, ou rarefié, ou même d'un vuide parfait, enfermé entre les deux ménisques, de sorte qu'il faudroit déterminer la réfraction des rayons, qui passent de l'air ordinaire dans un air, ou comprimé, ou rarefié, ou dans le vuide, alors les ménisques exposés ne feront plus propres. Alors il faudra employer de tels ménisques, dont le rayon de convexité est un peu plus petit, que le rayon de la concavité: les deux ménisques suivans, égaux & semblables entr'eux, paroissent assés propres pour ce dessein :

Rayon de convexité $f = k = 12$ pouces

Rayon de convexité $g = h = 13$ pouces.

Ces ménisques renfermant le milieu proposé, si d'un objet éloigné à la distance $AE = a$, on observe la distance de l'image $DF = c$, la valeur suivante du nombre n donnera la réfraction cherchée

$$n = m - \frac{1}{2} \frac{3}{2} (m-1) + \frac{1}{2}^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 0,955 + \frac{1}{2}^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$$

& si l'on ne veut pas négliger les épaisseurs $AB = CD = r$ & $BC = s$

$$n = 0,955 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) - 4,22r \left(0,045 - \frac{1}{a} \right)^2 - 4,22r \left(0,22r \cdot \frac{1}{c} \right)^2$$

$$- 1,62s \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^2$$

XXXII. Supposons que ce verre composé, & rempli d'un certain air, ait donné la distance $c = 120$ pouces, l'objet étant éloigné à l'infini, & on conclura pour la réfraction de ce milieu

$$n = 0,955 + \frac{1}{2} \frac{1}{120} = 1,009166$$

de sorte que ce milieu soit un air un peu comprimé. Or, si l'on trouvoit la distance c deux fois plus grande, ou $c = 240$ pouce, il en résulteroit

$$n = 0,955 + \frac{1}{4} \frac{1}{120} = 0,982083$$

ce qui marqueroit un air extrêmement raréfié : ou bien ce cas ne fera pas même possible, puisqu'on fait que pour le passage de l'air dans le vuide même la valeur de n est plus grande que $1 - \frac{1}{30000}$, ou que $0,999666$. Or on trouveroit $n = 1 - \frac{1}{30000}$, si la distance de l'image c étoit $= 146$ pouces ; mais si le verre contenoit de l'air naturel, on trouveroit $c = 144\frac{1}{2}$ pouces, & partant la différence dans la distance c ne monteroit pas à deux pouces. Mais on peut aisément augmenter cette différence en approchant davantage le rayon f du rayon g .

*Méthode d'observer la réfraction des rayons
de différentes couleurs.*

XXXIII. Si l'on met devant le verre objectif à la même distance $AE = a$ successivement des corps teints de diverses couleurs, leurs images seront représentées derrière le verre à diverses distances, selon la diverse réfrangibilité des rayons, à moins que le verre objectif ne soit parfait, ou tel qu'il rassemble tous les rayons également. Ces ob-
jec-



jectifs donc, dont j'ai autrefois enseigné la construction, sont les moins propres à ce présent dessein, parce que, de quelque couleur que l'objet soit teint, ils représentent l'image toujours à la même distance : il faut plutôt employer des objectifs d'une nature diamétralement opposée, qui produisent une grande différence dans le lieu des images, quoique la différence dans la réfraction ne soit que très petite. Les objectifs ordinaires représentent bien les images des objets de diverses couleurs à des distances inégales, & c'est en quoi consiste leur principal défaut : mais, à moins que leur distance de foyer ne soit excessive, la différence n'est pas assez sensible, pour qu'on en puisse conclure, moyennant des expériences, assez exactement la différence qui se trouve dans la réfraction.

XXXIV. Il s'agit donc de trouver tels objectifs, qui par rapport à la diffusion, qui vient de la diverse réfrangibilité des rayons soient encore plus défectueux, que les verres simples & ordinaires. Pour cet effet considérons comme ci-dessus en général un verre composé de deux ménisques, dont la cavité soit remplie d'une liqueur transparente, & que les rayons des deux faces convexes soient f & k , & des deux faces concaves g & h . Soit de plus pour une certaine espèce de rayons, la raison de réfraction dans le passage de l'air dans le verre comme m à 1 , & de l'air dans la liqueur comme n à 1 . Cela posé, si l'objet se trouve devant le verre à la distance $AE = a$, l'image sera représentée derrière le verre à la distance $DF = c$, en sorte qu'il soit :

$$\frac{1}{c} = (m-1) \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m-n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{a}$$

en négligeant l'épaisseur du verre.

XXXV. Qu'on mette à présent à la place de l'objet un corps teint d'une autre couleur, dont les rayons souffrent une réfraction différente de celle que je viens de supposer, en passant de l'air tant dans le verre que dans la liqueur. Et j'ai démontré que ces nouvelles raisons

sons de réfraction, au lieu de $m : 1$ & $n : 1$ se peuvent toujours exprimer en forte

$$m^1 + \alpha : 1, \& n^1 + \alpha : 1, \text{ ou } m + \alpha m / m : 1, \& n + \alpha n / n : 1$$

puisque α est toujours une fraction très petite. Or cette fraction α nous fera connoître la différence entre la réfraction de ces derniers rayons & les précédens. Soit c' la distance à laquelle on appercevra à présent l'image derriere l'objectif, & nous aurons l'équation suivante :

$$\frac{1}{c'} - \frac{1}{c} = \alpha m / m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} - \frac{1}{g} - \frac{1}{h} \right) + \alpha n / n \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) = \frac{c - c'}{c c'}$$

Donc, pour que la moindre différence dans la réfraction devienne fort sensible dans la distance de l'image, il faut que cette quantité

$$m / m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{k} \right) - (m / m - n / n) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right)$$

obtienne une valeur affés considérable, & que la distance c elle-même provienne aussi fort grande.

XXXVI. Posons les deux ménisques égaux & semblables entr'eux, de forte que $k = f$ & $h = g$, & que la distance de l'objet soit quasi infinie ; dans ce cas on aura ces deux équations :

$$\frac{1}{c} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(m-n)}{g} \quad \& \quad \frac{c-c'}{c c'} = \frac{2 \alpha m / m}{f} - \frac{2 \alpha (m / m - n / n)}{g}$$

dont la premiere donne

$$\frac{2}{f} = \frac{g + 2(m-n)c}{(m-1)cg} \quad \text{ou} \quad f = \frac{2(m-1)cg}{g + 2(m-n)c}$$

& substituant cette valeur dans l'autre équation, on en tirera

$$c' = \frac{(m-1)cg}{(m-1)g + \alpha m / m - 2 \alpha c [m(n-1) / m - n(m-1) / n]}$$

Or



Or, puisqu'on peut regarder la fraction α comme très petite, il y aura fort à peu près :

$$c' = c - \frac{\alpha m l m}{m-1} c + \frac{2 \alpha c c}{g} \left(\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n \right)$$

D'où l'on connoit la différence entre les distances c, c' , qui répond à la différence des réfractions renfermée dans la fraction α .

XXXVII. Je remarque ici d'abord deux cas principaux, l'un où $n = m$, & l'autre où $n = 1$. Dans celui-là, ayant la liqueur également réfractive que le verre, notre objectif revient à un ordinaire, dont les deux faces sont convexes, le rayon de l'une & de l'autre étant $f = k = 2(m-1)c$. Dans l'autre cas où $n = 1$, l'espace entre les deux verres ne contient que de l'air, & nous aurons deux verres simples joints immédiatement ensemble, de sorte que $f = \frac{2(m-1)cg}{g + 2(m-1)c}$.

Or pour l'un & l'autre cas l'expression $\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n$ évanouit, & partant, lorsque les rayons de l'objet changent de nature, de sorte que les raisons de réfraction $m:1$ & $n:1$ deviennent $m^{1+\alpha}:1$ & $n^{1+\alpha}:1$, la distance de l'image derrière le verre c' différera en sorte de la distance précédente c , qu'il y aura

$$c' = c - \frac{\alpha m l m}{m-1} c$$

Par conséquent la différence $\frac{\alpha m l m}{m-1} c$ dépend uniquement de la distance c , & ne sauroit être, ni augmentée, ni diminuée, tant que la distance c demeure la même.

XXXVIII. Dans tous les autres cas de la liqueur renfermée entre les deux verres, la quantité $\frac{m(n-1) l m}{m-1} - n l n$ n'évanouit



point, & alors on pourra prendre le rayon des concavités g tel, que la différence entre les distances c & c' devienne beaucoup plus grande. Cependant il faut que la valeur de n n'approche point trop, ni de l'unité, ni de m , dont la valeur peut être prise $\approx 1,54$, pour ne pas tomber dans l'inconvénient des deux cas marqués : or il est clair, qu'il doit y avoir une valeur de n entre les deux limites 1 & m , qui rendra ladite quantité la plus grande, qu'il soit possible : & une telle liqueur, si l'on en pouvoit trouver une, seroit la plus convenable pour cette espèce d'expériences. Pour trouver ce *maximum*, différencions ladite quantité en posant n variable, & en égalant le différentiel égal à zero, nous obtiendrons

$$\frac{m \ln m}{m-1} = \ln n + 1 \quad \& \quad \text{partant} \quad \ln n = \frac{m \ln m}{m-1} - 1$$

d'où l'on tirera aisément la valeur de n .

XXXIX. Or il faut bien remarquer que les logarithmes, que ces formules renferment, sont des logarithmes hyperboliques, qu'on trouve des logarithmes tabulaires en multipliant ceux-ci par 2,302585093, ou en les divisant par 0,4342944819. Donc, si nous voulons prendre pour $\ln m$ & $\ln n$ leurs logarithmes tabulaires, nous les devons multiplier par 2,302585, ou diviser par 0,43429448, & de là nous aurons :

$$\ln n = \frac{m \ln m}{m-1} - 0,43429448.$$

Posons donc $m = 1,54$, qui est la valeur moyenne qui convient à la réfraction du verre, & de là on tirera

$$\frac{m \ln m}{m-1} = 0,5347833 \quad \& \quad \ln n = 0,1004888$$

par conséquent le nombre $n = 1,260343$.

Donc, si l'on pouvoit trouver une telle liqueur transparente, dans laquelle les rayons moyens, qui y entrent de l'air, se rompiroient en sorte, que le sinus d'incidence seroit au sinus de réfraction comme 1,26 à 1, cet-

cette liqueur feroit fans contredit la plus propre pour cette espece d'expériences.

XL. Mais nous ne connoissons point de liqueur, qui ait une moindre réfraction que l'eau pure, pour laquelle on peut supposer $n = 1 \frac{1}{3}$; & partant nous ne saurions mieux arriver à notre but qu'en remplissant la cavité entre nos deux verres d'eau pure. Posons donc $m = 1,54$ & $n = 1 \frac{1}{3}$: & prenant les logarithmes hyperboliques nous aurons :

$$m \ln m = 0,664945 \quad n \ln n = 0,383576$$

$$\& \text{ partant } \frac{m(n-1) \ln m}{m-1} - n \ln n = 0,925884 \quad \& \quad \frac{m \ln m}{m-1} = 1,231579$$

Donc la distance de l'image c' , qui répond à la réfraction changée, se trouvera

$$c' = c - 1,231379. ac + 0,053768 \frac{acc}{g}$$

d'où l'on voit que par un tel verre composé on peut rendre la différence entre les distances c & c' beaucoup plus grande que si l'on se feroit de verres simples ordinaires. Le plus sûr moyen fera de prendre le rayon g fort petit par rapport à la distance c , & même négatif: mais, ayant donné à g une certaine valeur, celle de f fera

$$f = \frac{3,24cg}{3g + 1,24c} = \frac{324cg}{300g + 124c}$$

XLI. Jusqu'ici j'ai supposé la distance de l'objet a infinie, mais si elle est finie, & la même pour les objets de différentes couleurs, nos formules se changeront dans les suivantes

$$f = \frac{2(m-1)acg}{g(a+c) + 2(m-n)ac} \quad \&$$

$$c' = c - \frac{a \ln m}{m-1} \cdot c \left(1 + \frac{c}{a} \right) + \frac{2acc}{g} \left(\frac{m(n-1) \ln m}{m-1} - n \ln n \right) \quad \&$$



& si nous posons pour le verre $m = 1,54$, & pour la liqueur $n = \frac{4}{3}$, nous aurons :

$$f = \frac{324 acg}{300(a+c)g + 124ac} \quad \&$$

$$c' = c - 1,231379 ac \left(1 + \frac{c}{a}\right) + 0,053768 \cdot \frac{acc}{g}.$$

d'où l'on voit qu'en approchant l'objet du verre, la différence entre les images deviendra encore plus sensible, supposé qu'on donne aux rayons $g = h$ des valeurs négatives.

XLII. Si l'on se feroit de verres simples, la différence entre les distances c & c' feroit $= 1,231379 ac \left(1 + \frac{c}{a}\right)$, mais, par le moyen des verres composés, on peut faire que cette différence devienne autant de fois plus grande, qu'on voudra. Supposons qu'elle doive devenir λ fois plus grande, de sorte qu'il y eut

$$c' = c - 1,231379 \lambda ac \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

& nous aurons :

$$-1,231379 (\lambda - 1) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = 0,053768 \cdot \frac{c}{g}$$

$$\text{donc } g = -\frac{0,053768 ac}{1,231379 (\lambda - 1) \left(1 + \frac{c}{a}\right)} = -\frac{ac}{23(\lambda - 1)(a + c)}$$

& substituant cette valeur dans celle de f ,

$$f = -\frac{324 ac}{-300(a+c) + 2852(\lambda-1)(a+c)} = -\frac{ac}{a+c} \cdot \frac{324}{2852(\lambda-1) - 300}$$

Ces valeurs se réduisent donc aux formules suivantes :

$$f = -\frac{81}{713(\lambda-1) - 75} \cdot \frac{ac}{a+c}$$



$$g = \frac{1}{23(\lambda - 1)} \cdot \frac{ac}{a + c}$$

& partant tous les deux rayons f & g deviennent négatifs, ayant entr'eux ce rapport

$$f : g = 1863(\lambda - 1) : 713(\lambda - 1) - 75 = 81 : 31 - \frac{75}{23(\lambda - 1)}$$

XLIII. Les deux verres simples feront donc auffi des ménisques, mais qu'il faut joindre en forte, que leurs concavités foient tournées en dehors, & les convexités en dedans. Le verre composé est représenté dans la 2 figure, où MAMB & NDCN font les deux ménisques luniformes, égaux & semblables entr'eux, entre lesquels l'espace MBMNCN doit être rempli d'eau : & puisque ces deux ménisques ne peuvent être joints par leurs bords, leur jonction se doit faire par le moyen d'une boîte, ou d'un bout de tuyau MNMN, auquel on puisse tellement enfermer les deux ménisques, que l'eau entr'eux ne fauroit écouler. Les rayons des faces concaves font ici plus grands que ceux des faces convexes, & posant la distance de l'objet AE = a , si l'on veut que l'image formée par les rayons moyens tombe à la distance DF = c , & que pour les autres couleurs le changement de la distance c devienne λ fois plus grand, que si l'on se servoit de verres ordinaires, il faut travailler les faces en forte :

Fig. 2.

$$\text{le rayon des faces concaves MAM, NDN} = \frac{81}{713(\lambda - 1) - 75} \cdot \frac{ac}{a + c}$$

$$\text{le rayon des faces convexes MBM, NCM} = \frac{1}{23(\lambda - 1)} \cdot \frac{ac}{a + c}$$

D'où l'on voit que, plus ce changement doit être grand, & plus les rayons des faces deviendront petits.

XLIV. Puisqu'on doit pouvoir changer l'objet à volonté, on ne fauroit supposer sa distance a infinie ; posons la donc de 100 pieds, ou de 1200 pouces, & qu'on veuille que l'image formée des rayons so-



laire moyen tombe à la distance de 100 pouces, pour avoir $\frac{ac}{a+c} =$

$\frac{1200}{13} = 92 \frac{2}{3}$ pouces. Si l'on pose $\alpha = \frac{1}{57}$, laquelle valeur répond à peu près aux rayons folaires extrêmes, le changement qui en résulte dans la distance de l'image, ou la différence $c - c'$ montera à

$$1,231379 \cdot \frac{1}{57} \cdot \frac{1}{12} \cdot \lambda c = 2 \lambda \text{ pouces; à cause de } c = 100.$$

Donc, si l'on se seroit de verres ordinaires, où $\lambda = 1$, ce changement dans la distance ne feroit que de 2 pouces. Voyons donc quels doivent être les rayons de nos ménisques, pour que ce changement devienne 2, 3, 4, 5, & 6 fois, & même 12 fois plus grand

Rayon	fin	fin	fin	fin	fin	fin
des faces	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 12$
concaves	11, 72	5, 53	3, 62	2, 69	2, 14	0, 96
convexes	4, 01	2, 00	1, 34	1, 00	0, 80	0, 36 $\frac{1}{2}$

XLV. On voit de là qu'on ne sauroit augmenter trop ce changement, puisque les faces deviendroient trop courbes, & ne permettroient plus une ouverture suffisante. Il semble qu'il ne seroit pas à propos de donner à λ une plus grande valeur que 3; & on pourra se contenter d'une différence trois fois plus grande, que donnent les verres ordinaires; laquelle sera assez sensible pour nous découvrir la différence dans la réfraction des rayons de diverses couleurs. Ayant donc construit un tel verre, composé de deux ménisques égaux, dont les rayons soient

des faces concaves — $f = 5 \frac{53}{80}$ pouces

des faces convexes — $g = 2$ pouces,

qu'on expose successivement à une distance donnée $= a$ des objets teints de diverses couleurs unies, & qu'on observe exactement les distances après les verres, où les images se représentent le plus distincte-



rement. Alors on s'appcevra d'une différence affés sensible dans le lieu des images, selon les diverses couleurs de l'objet. Car, plus les rayons d'un objet seront réfrangibles, & plus l'image sera approchée du verre.

XLVI. On pourra aussi déterminer la différence, qui se trouve parmi la réfraction des rayons de différentes couleurs, par le moyen de l'équation

$$\frac{c-c'}{cc'} = \frac{2\alpha m/n}{f} = \frac{2\alpha(m/n - n/n)}{g}$$

Car, si pour une certaine couleur, dont la réfraction dans le verre soit posée comme $m : 1$, on observe la distance de l'image $= c$ pouces, & pour une autre couleur la distance de l'image $= c'$ pouces, on en trouvera

$$\alpha = \frac{c-c'}{0,0409cc'} = 24\frac{1}{2} \frac{c-c'}{cc'}$$

& la réfraction de ces rayons en entrant dans le verre suivra ce rapport $m^{1+\alpha} : 1$ entre le sinus d'incidence & celui de réfraction. Supposons qu'on ait trouvé la distance $c = 100$ pouces, & l'autre $c' = 95$ pouces, & on en conclura $\alpha = 24\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9500} = \frac{1}{77\frac{1}{2}}$, de sorte que la raison de réfraction de ces derniers rayons sera comme $m^{1+\frac{1}{77\frac{1}{2}}}$ à 1, celle des premiers étant comme m à 1.

XLVII. Puisqu'il est difficile d'exécuter ces ménisques si exactement selon les proportions prescrites, & que peut-être ces proportions mêmes ne sont pas exactes au dernier point, il pourroit bien arriver que le multiplicateur $24\frac{1}{2}$ differât considérablement de la vérité. Or, pour remédier à ce défaut, on n'aura qu'à regarder ce multiplicateur comme indéterminé, en posant :

$$\alpha = \mu \frac{c-c'}{cc'}$$



& à le déterminer par les observations de deux couleurs, dont la différence de réfraction est déjà connue. Pour cet effet on pourroit choisir les deux couleurs extrêmes de l'arc en ciel, ou du spectre représenté par un prisme sur une surface blanchie. Que c soit la distance de l'image rouge, & c' celle de l'image violette, qui sera plus petite;

& on fait que la valeur de α est $= \frac{1}{33\frac{1}{4}} = \frac{4}{133}$. De là on trou-

vera donc par l'expérience la juste valeur du multiplicateur μ , qui

$$\text{fera } \mu = \frac{4}{133} \cdot \frac{cc'}{c-c'}$$

XLVIII. Or, ayant une fois déterminé cette juste valeur de μ , on pourra employer le même verre composé pour examiner la réfraction de toutes les couleurs simples, tant des rayons solaires, que des corps opaques. On commencera par une couleur dont la réfraction dans le verre est connue, qui soit comme m à 1, & on marquera la distance de l'image après le verre qui soit $= c$; ensuite on placera à la même distance devant le verre un objet teint d'une autre couleur quelconque, & ayant aussi marqué la distance de l'image, qui soit $= c'$, qu'on cherche la valeur du nombre α par la formule

$$\alpha = \mu \cdot \frac{c-c'}{cc'}$$

mettant pour μ la valeur trouvée par les premières expériences, & on connoitra la réfraction de ces derniers rayons en entrant dans le verre, qui sera comme $m^{1+\alpha}$ à 1. Dans ces observations on n'a pas besoin de mesurer la distance de l'objet $= a$, pourvu qu'elle soit conservée la même dans les expériences qu'on veut comparer ensemble.

XLIX. Ces objectifs présentent donc, comme les ordinaires, les images formées par des rayons plus réfrangibles à des moindres distances



ces du verre, mais avec cet avantage, que la différence dans le lieu des images devient beaucoup plus sensible. Cependant on pourroit aussi former de tels objectifs, qui représentassent dans un ordre renversé les images des rayons plus réfrangibles à une plus grande distance. Car on n'a qu'à poser le nombre λ négatif, & si l'on veut que le changement dans le lieu des images soit λ fois plus grand, qu'en se servant des verres ordinaires, il faut donner aux rayons f & g des faces des ménisques les valeurs suivantes :

$$f = \frac{81}{713(\lambda + 1) + 75} \cdot \frac{ac}{a + c} \quad \& \quad g = \frac{1}{23(\lambda + 1)} \cdot \frac{ac}{a + c}$$

& ces deux ménisques doivent être joints en sorte, que leurs faces convexes soient tournées en dehors ; mais, pour obtenir un effet aussi sensible qu'avec les précédens, ces rayons deviennent plus petits, & partant leur ouverture trop petite en empêcheroit l'usage.

L. Dans le dessein donc, que je me suis proposé ici, les objectifs composés de deux ménisques renversés méritent la préférence, & il semble que leur usage se pourra bien exécuter dans une chambre obscure : où une petite ouverture du verre peut être suffisante pour représenter les objets exposés assez clairement, surtout lorsqu'ils sont éclairés par le Soleil. Quand la chambre obscure est assez spacieuse, qu'on y puisse recevoir les images à une plus grande distance qu'à 100 pouces, on pourra donner aux rayons f & g des ménisques de plus grandes valeurs, pourvu qu'on observe bien la juste proportion entr'eux, de sorte qu'il soit $f : g = 553$ à 200. Or, pour que la différence dans le lieu des images devienne plus que deux fois plus sensible, qu'en se servant des verres ordinaires, il faut que $\frac{f}{g}$ soit plus petit que 2,92, mais pourtant plus grand que 2,61. Mais, plus la valeur de $\frac{f}{g}$ approche de la dernière limite 2,61, plus les rayons f & g doivent être pris petits, afin que les images ne tombent pas trop loin.



LI. Ayant bien réussi dans la construction d'un tel verre composé, & préparé une chambre obscure assez profonde pour contenir les images, cet instrument sera fort propre à décider cette importante question ; si les rayons des corps opaques colorés souffrent la même réfraction que les rayons du Soleil de même couleur ? ou s'il se trouve parmi les couleurs une telle ressemblance, comme dans les sons : de sorte qu'il y en ait, par exemple, plusieurs rouges, qui diffèrent entr'elles par octaves ? car alors ces différentes couleurs rouges devroient souffrir de différentes réfractions. On pourroit pour cet effet faire teindre de toutes sortes de couleurs des feuilles de papier, & mettre sur chacune quelque écriture noire, pour être en état de reconnoître dans la chambre obscure le vray lieu des images, qui sera là, où ces écritures se présentent le plus distinctement. Il faudroit donc successivement exposer toutes ces feuilles colorées devant la chambre obscure, & à une distance fixée, sur l'axe du verre ; & il sera aisé d'observer pour chacune exactement le lieu de l'image, où elle paroitra le plus distinctement présentée sur une surface blanche. La différence qu'on remarquera entre les distances des images du verre, nous découvrira d'abord la différence qui se trouve dans la réfraction de toutes les couleurs différentes, en suivant la règle que j'ai exposée cy-dessus.

