RECHERCHES
SUR LA DE'CLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.

PAR M. EULER.

La Carte que feu M. *Halley* a donnée ſur la déclinaiſon de l'aiguille aimantée eſt trop connue, pour que j'aye beſoin d'en donner une deſcription détaillée. On y voit d'abord deux lignes courbes, qui paſſent par les endroits de la Terre, où la déclinaiſon a été nulle au commencement de ce ſiècle, pour lequel tems cette Carte fut dreſſée. Enſuite elle contient auſſi des lignes tirées par les endroits, où la declinaiſon fut alors de 5°, ou de 10°, ou de 15° &c. tant vers l'eſt que vers l'oüeſt. Comme cette Carte n'eſt fondée que ſur des obſervations, elle offre un très important ſujet à la Théorie, pour rendre raiſon de la figure de ces lignes, qui au premier coup d'oeil paroiſſent extrèmement bizarres. Or tous ceux qui ont entrepris cette recherche, furent bientôt obligés de l'abandonner par les difficultés presque inſurmontables, qu'ils y ont rencontrées. La principale cauſe n'étoit pas tant la figure bizarre des lignes Halleyennes, qui ne ſemble ſusceptible d'aucune loi geomètrique, que la perſuaſion, où l'on étoit par l'autorité de M. *Halley*, que les phénomenes de la déclinaiſon magnétique étoient cauſés par quatre poles magnétiques, qui ſe trouvoient dans les entrailles de la Terre, dont il avoit ſuppoſé deux fixes & deux mobiles, pour ren-

rendre raiſon des changemens, qu'on obſerve avec le tems dans la déclinaiſon du même endroit.

Si nous étions bien aſſurés, qu'il y eut effectivement quatre poles magnétiques dans la Terre, comme on le croit généralement ſur l'autorité de M. *Halley*, je conviens qu'une telle entrepriſe ſeroit trop hardie du moins pour l'état préſent de nos connoiſſances, puisque la force directrice, dont deux ou pluſieurs aimants agiſſent à la fois ſur une aiguille, nous eſt encore tout à fait inconnue : & il vaudroit ſans doute mieux d'abandonner d'abord cette entrepriſe, que de la fonder ſur des hypotheſes arbitraires. Il y a auſſi grande apparence, que quand même on connoitroit à fond l'action ſimultanée de deux aimants ſur une aiguille, le dévelopement demanderoit des calculs trop compliqués. Mais, avant que nous renoncions tout à fait à cette recherche, il faudroit examiner plus ſoigneuſement, ſi la raiſon, pourquoi M. *Halley* a établi quatre poles dans la Terre, eſt bien ſolide : car, en cas que la Terre n'eut que deux poles magnétiques, le problème ſe réduiroit à la pure Geomètrie. Or la principale & l'unique raiſon, que M. *Halley* apporte pour établir quatre poles magnétiques, ſe réduit à ce raiſonnement :

Si la Terre n'avoit que deux poles magnétiques, ſous chaque méridien la bouſſole devroit décliner par tout en même ſens, ou vers l'eſt ou vers l'oüeſt.

Mais on a obſervé que ſous le méridien, qui paſſe par la baye de Hudſon & les côtes du Breſil, la déclinaiſon étoit occidentale dans la baye de Hudſon & orientale ſur les côtes du Breſil, & même fort grande dans l'un & l'autre endroit.

D'où il s'enſuit, que deux poles magnétiques ne ſont pas ſuffiſans pour expliquer les phénomenes de la déclinaiſon.

Pour examiner la force de ce raiſonnement, je remarque d'abord, que, ſi les deux poles magnétiques étoient diamètralement oppoſés, il ne ne ſauroit arriver, que ſous un même méridien la déclinaiſon fut quelque part orientale, & dans un autre endroit occidentale. Mais, dès que les deux poles magnétiques ne ſont plus diamètralement oppoſés l'un à l'autre, la premiere propoſition perd toute ſa force, & il peut alors fort bien arriver, que ſous un même méridien la déclinaiſon ſoit quelque part orientale, & en d'autres endroits occidentale. Comme je prouverai cela indubitablement dans la ſuite, il me ſera permis de regarder l'hypotheſe de quatre poles magnétiques comme fort douteuſe; & avant qu'on ait très évidemment prouvé, que deux poles magnétiques ne ſont pas ſuffiſans pour expliquer les phénomenes de la declinaiſon magnétique, ce ſeroit contre les régles d'une bonne Phyſique ſi l'on vouloit recourir à quatre poles. Après cette remarque, voilà un probleme bien important, qui eſt de déterminer la déclinaiſon de l'aiguille aimantée pour tous les lieux de la terre, lorsque les deux poles magnétiques ne ſont pas diamètralement oppoſés. Pour mieux épuiſer ce probleme, qui eſt, comme on verra, d'une fort grande étendue, & qui renferme des recherches très curieuſes, je commencerai par conſidérer le cas, où les deux poles magnétiques ſont diamètralement oppoſés; enſuite je les ſuppoſerai en deux méridiens oppoſés, mais non pas également éloignés des poles de la Terre. En troiſième lieu, je les ſuppoſerai dans un même méridien; & enfin quatrièmement, en deux méridiens différens, d'où je partagerai mes recherches en quatre Sections. Si la Terre n'a que deux poles magnétiques, comme j'eſpère de le prouver, ces quatre cas peuvent devenir également intéreſſans; car, puisqu'il eſt certain, que ces poles changent de place avec le tems, il eſt poſſible que chaque cas ait déjà exiſté, ou qu'il aura un jour lieu.

PRE-

PREMIERE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant diamètralement opposés.

I.

Comme cette recherche, de même que les suivantes, demandent la résolution analytique des triangles sphériques, il sera bon d'en mettre les formules devant les yeux, afin qu'on n'ait pas besoin de les chercher ailleurs. Je commencerai donc par les triangles rectangles; marquant les trois angles par les lettres A, B, C dont C est supposé droit, & les côtés qui leur sont opposés par les lettres a, b, c, dont c sera l'hypotenuse. Les régles pour la résolution sont contenuës dans les Lemmes suivans.

Fig. 1.

LEMME 1.

II. L'hypothenuse c avec un cathete a d'un triangle sphérique ABC étant donnés, trouver l'autre cathete b avec les angles A & B.

RESOLUTION.

$$\text{I.}\quad \cos b = \frac{\cos c}{\cos a};\qquad \text{II.}\quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c};\qquad \text{III.}\quad \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}.$$

LEMME 2.

III. Les deux cathetes a & b d'un triangle rectangle sphérique étant donnés, trouver l'hypotenuse c avec les angles A & B.

RÉSOLUTION.

$$\text{I.}\quad \cos c = \cos a \cos b;\qquad \text{II.}\quad \tan A = \frac{\tan a}{\sin b};\qquad \text{III.}\quad \tan B = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

LEMME 3.

IV. L'hypotenuse c, avec un des angles A d'un triangle rectangle sphérique, étant donnés, trouver l'autre angle B avec les cathetes a & b.

RESO-

RÉSOLUTION.

I. cot. B $=$ cos c tang A; II. sin a $=$ sin c sin A; III. tang b $=$ tang c cos A.

LEMME 4.

V. Un cathete a avec l'angle, qui lui est opposé A, d'un triangle rectangle sphérique, étant donnés, trouver l'hypotenuse c, & l'autre cathete b, avec l'angle, qui lui est opposé B.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \sin c = \frac{\sin a}{\sin A}; \quad \text{II. } \sin b = \frac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, A}; \quad \text{III. } \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

LEMME 5.

VI. Un cathete a avec l'angle B, qui lui n'est pas opposé, d'un triangle sphérique rectangle, étant donnés, trouver l'hypotenuse c, & l'autre cathete b avec l'angle A.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \text{tang}\, c = \frac{\text{tang}\, a}{\cos B}; \quad \text{II. } \text{tang}\, b = \sin a \,\text{tang}\, B; \quad \text{III. } \cos A = \cos a \sin B.$$

LEMME 6.

VII. Les deux angles A & B d'un triangle rectangle sphérique étant donnés, trouver l'hypotenuse c avec les deux cathetes a & b.

RÉSOLUTION.

$$\text{I. } \cos c = \cot. A \cot B; \quad \text{II. } \cos a = \frac{\cos A}{\sin B}; \quad \text{III. } \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

VIII. Soit maintenant ABC un triangle sphérique quelconque, dont les angles soient indiqués par les lettres A, B, C, & les côtés entant qu'ils leur sont opposés par les lettres a, b, c. Les résolutions de tous les cas se reduisent aux Lemmes suivans.

LEMME 7.

IX. Dans un triangle sphérique quelconque, les trois côtés a, b, c étant donnés, trouver les angles A, B, C.

RÉSOLUTION.

I. $\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin c . \sin b}$

II. $\cos B = \frac{\cos b - \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}$

III. $\cos C = \frac{\cos c - \cos a . \cos b}{\sin a . \sin b}$

LEMME 8.

X. Dans un triangle ſphérique quelconque, les trois angles A, B, C étant donnés, trouver les côtés a, b, c.

RÉSOLUTION.

I. $\cos a = \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$

II. $\cos b = \frac{\cos B + \cos A . \cos C}{\sin A . \sin C}$

III. $\cos c = \frac{\cos C + \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$

LEMME 9.

XI. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux côtés a & b avec l'angle C compris entr'eux, étant donnés, trouver le troiſième côté c avec les deux autres angles A & B.

RÉSOLUTION.

I. $\cos c = \cos a . \cos b + \sin a \sin b \cos C$

II. $\tang A = \frac{\sin a \sin C}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}$

III. $\tang B = \frac{\sin b \sin C}{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}$

LEMME 10.

XII. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux angles A & B avec le côté compris entr'eux c étant donnés, trouver le troiſième angle C avec les deux autres côtés a & b.

RÉSOLUTION.

$$\text{I.}\quad \cos C = \cos c.\ \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B$$

$$\text{II.}\quad \text{tang}\, a = \frac{\sin A \sin c}{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c}$$

$$\text{III.}\quad \text{tang}\, b = \frac{\sin B \sin c}{\cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c}$$

LEMME 11.

XIII. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux côtés a & b avec les angles A & B, qui leur ſont oppoſés, étant donnés trouver le troiſième côté c avec le troiſième angle C.

Il faut ici remarquer, qu'il ſuffit, que des quatre élémens a, b, & A, B trois ſoient donnés, puiſqu'on a toujours $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$.

RÉSOLUTION.

$$\text{I.}\quad \text{tang}\, c = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\cos a \sin A \cos B - \cos b \cos A \sin B}$$

$$\text{ou}\ \sin c = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\cos a \cos A \sin B - \cos b \sin A \cos B}$$

$$\text{II.}\quad \text{tang}\, C = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{\cos a \sin b \cos B - \sin a \cos b \cos A}$$

$$\text{ou}\ \sin C = \frac{\sin a \sin A - \sin b \sin B}{-\cos a \sin b \cos A + \sin a \cos b \cos B}$$

PROBLEME I.

Fig. 2. XIV. *La position des poles magnétiques A & B à l'égard des poles de la terre P & p étant donnée, déterminer, pour un lieu quelconque de la terre L la déclinaison de la bouſſole.*

SOLUTION.

Soit P le pole arctique, & p l'antarctique de la terre: que le pole magnétique boreal ſe trouve en A, & le méridional qui lui eſt diamètralement opposé en B. Qu'on tire un méridien PAp, qui étant continué paſſe par les deux poles magnétiques; & j'envifagerai ici comme le premier méridien, celui PAp, qui paſſe par le pole magnétique boreal. Puisqu'on ſuppoſe donnée la poſition de ces poles, & que les arcs AP & Bp ſont égaux, je poſe $AP = Bp = a$. Soit maintenant un lieu quelconque de la terre L, par lequel faiſant paſſer le méridien PLp, ſoit ſa longitude exprimée par l'angle $APL = q$, & ſa diſtance au pole arctique ou l'arc $PL = p$. Qu'on tire auſſi par L & les poles magnétiques A & B le grand cercle ALB, & il eſt clair que l'aiguille aimantée en L doit ſuivre la direction de ce grand cercle; de ſorte que l'angle PLA en marque la déclinaiſon, qui ſelon la figure ſera orientale, en ſuppoſant l'orient vers E & l'occident vers F: où il faut remarquer que je compterai toujours la longitude ou l'angle APL vers l'oüeſt. On aura donc dans le triangle ſphérique APL les deux côtés $AP = a$; $PL = p$, avec l'angle compris $APL = q$; d'où l'on trouvera l'angle PLA, ou la déclinaiſon magnétique. Donc, ſi nous poſons cette déclinaiſon $= \delta$ entant qu'elle eſt ſuppoſée orientale, on aura

$$\text{tang.}\, \delta = \frac{\sin a \ \sin q}{\cos a \ \sin p - \sin a \ \cos p \ \cos q}$$

d'où l'on connoitra pour tous les lieux de la terre la déclinaiſon magnétique.

COROLL. 1.

XV. Tant que la valeur de cette formule eſt poſitive, la déclinaiſon ſera orientale: mais, ſi elle devient négative, l'angle δ devenant auſſi négatif, marquera une déclinaiſon occidentale.

COROLL. 2.

XVI. Or l'angle δ ne ſauroit devenir négatif, à moins qu'on ne prenne l'angle q plus grand que de $180°$; car, tant que ſin q, eſt poſitif, la déclinaiſon eſt partout tournée vers l'Eſt, comme l'on voit par la figure. Car, quoique le dénominateur devienne négatif, cette négation ſe rapporte au coſinus de l'angle δ, qui ſurpaſſera alors $90°$.

COROLL. 3.

XVII. Dans le premier méridien PEp, où $q = 0$, il y aura partout tang $\delta = 0$, donc ou $\delta = 0$ ou $\delta = 180°$. Or il eſt évident, que partout l'arc AP la déclinaiſon ſera nulle: mais dans l'intervalle AP, où le bout méridional de l'aiguille eſt tourné vers P, la déclinaiſon doit être cenſée de $180°$.

COROLL. 4.

XVIII. Il en eſt de même du méridien oppoſé PFp, qui paſſe par l'autre pole magnétique B, où par toute l'étendue de l'arc PFB la déclinaiſon eſt $= 0$, & par l'intervalle Bp de $180°$. Partout ailleurs, où ſin q n'eſt pas $= 0$, la déclinaiſon ne ſauroit évanouir.

COROLL. 5.

XIX. Dans cette hypothéſe donc, la ligne où il n'y a point de déclinaiſon, eſt compoſée des méridiens PEp & PFp, ſi nous y comprenons auſſi les endroits où la déclinaiſon eſt de $180°$: que le calcul repréſente conjointement.

COROLL. 6.

XX. Pour calculer plus promtement la déclinaiſon, on n'a qu'à chercher un angle t, en ſorte que tang $t =$ tang a coſ q, & alors on aura tang $\delta = \dfrac{\text{tang } q \ \text{ſin } t}{\text{ſin } (p - t)}$.

I. REMARQUE.

XXI. Il ſemble douteux dans les cas, où l'expreſſion trouvée pour tang δ devient négative, s'il faut alors prendre l'angle δ négatif, ou plus grand que de 90°, puisque deux angles $-\Phi$ & $180^\circ - \Phi$, ont la même tangente négative. Mais toute équivoque évanouira dabord, ſi l'on procede par degrés en cherchant la déclinaiſon : car alors, quand la valeur de tang δ devient négative après avoir paſſé par o, l'angle δ eſt certainement négatif : mais ſi tang δ de poſitif devient négatif en paſſant par l'infini, où l'on a $\delta = 90^\circ$, alors on eſt bien aſſuré, que l'angle δ eſt obtus.

2. REMARQUE.

XXII. Sous un même méridien, les quantités q & t demeurant les mêmes, la déclinaiſon magnétique δ eſt fort variable. Car ſi $p = t$, on aura $\delta = 90^\circ$, & où $p < t$, la déclinaiſon eſt encore plus grande. Or ſi $p > t$, la déclinaiſon décroit jusqu'à ce qu'il devienne $p - t = 90^\circ$ où elle doit être la plus petite, & augmentera de nouveau dès qu'on prend $p - t > 90^\circ$. Cet endroit où la déclinaiſon eſt la plus petite ſous le même méridien, mérite une recherche particuliere, à laquelle le problême ſuivant eſt deſtiné. D'ailleurs il eſt bien clair, que dans cette hypothéſe il eſt impoſſible, que ſous un même méridien la déclinaiſon ſoit orientale & occidentale à la fois, comme M. *Halley* l'a obſervée ſous le méridien de la baye de Hudſon : & ſi la même impoſſibilité avoit lieu en général pour deux poles magnétiques, de quelque maniere qu'ils fuſſent ſitués, nous ſerions bien obligés d'embraſſer le ſentiment de 4 poles magnétiques. Mais le contraire ſera mis hors de doute dans la ſuite.

3. REMARQUE.

XXIII. Il eſt ici fort important d'ajouter une remarque ſur le principe, d'où la ſolution du problême a été tirée. J'ai ſuppoſé du conſentement de tous les Phyſiciens, que la direction de l'aiguille ſuit le grand cercle, qui paſſe par le lieu propoſé aux poles magnétiques. Quel-

Quelqu'évident que paroiſſe ce principe par rapport au cas préſent, il s'en faut beaucoup qu'il ſoit ſi général, qu'on pourroit penſer. Car, dès que les deux poles magnétiques ne ſont plus diamètralement oppoſés, on pourroit bien tirer d'un lieu propoſé quelconque un arc de grand cercle à chaque pole magnétique ; mais ces deux arcs feroient un angle enſemble, & il n'y auroit point de raiſon, pourquoi l'un plutôt que l'autre marquât la direction magnétique. D'où je conclus que dans le cas préſent auſſi, où les deux poles magnétiques ſont diamètralement oppoſés, le grand cercle ALB ne marque pas la direction magnétique, parce que ce cercle eſt le plus court chemin du point L à chaque pole magnétique : mais que la raiſon doit être cherchée dans un autre principe. Ce principe ne dépend pas ſans doute de la ſurface de la terre : car, quand même la terre ſeroit couverte d'une croûte quelconque non magnétique, la direction magnétique demeureroit la même. Il faut donc qu'elle dépende uniquement des poles magnétiques, & il eſt évident qu'elle ſera toujours dans un même plan avec les poles magnétiques. C'eſt auſſi la raiſon, pourquoi dans notre cas le grand cercle tiré par les poles magnétiques & le lieu propoſé marque la juſte direction, puiſqu'il repréſente le plan qui paſſe par les poles magnétiques. Donc, en quelque endroit, ſoit hors de la terre, ſoit au dedans, qu'on veuïlle déterminer la direction magnétique, elle ſe trouvera toujours dans le plan tiré par cet endroit propoſé & les poles magnétiques.

PROBLEME II.

XXIV. *Sous chaque méridien de la terre* PLp *determiner le lieu* L, *où la déclinaiſon magnétique eſt la plus petite, les deux poles magnétiques étant diamètralement oppoſés.*

SOLUTION.

Ayant poſé les diſtances $AP = Bp = a$, & pour un lieu quelconque L l'angle $APL = q$, & l'arc $PL = p$, la déclinaiſon en L, qui ſoit $= \delta$ tournant vers l'orient, nous avons trouvé

$$\text{tang}\ \delta = \frac{\text{fin}\ a\ \text{fin}\ q}{\text{cof}\ a\ \text{fin}\ p - \text{fin}\ a\ \text{cof}\ p\ \text{cof}\ q},$$

où il s'agit de déterminer l'arc p enforte, que cette expreffion devienne la plus petite. Or on trouvera

$$\text{cof}\ a\ \text{cof}\ p + \text{fin}\ a\ \text{fin}\ p\ \text{cof}\ q = 0, \quad \text{ou} \quad \text{tang}\ p = \frac{-1}{\text{tang}\ a\ \text{cof}\ q}$$

Pour connoitre mieux cette expreffion, tirons auffi du triangle fphèrique APL le coté AL, qu'on trouve

$$\text{cof AL} = \text{cof}\ a\ \text{cof}\ p + \text{fin}\ a\ \text{fin}\ p\ \text{cof}\ q,$$

d'où l'on voit que la déclinaifon fous le méridien PLp eft la plus petite là, où $\text{cof AL} = 0$, c'eft à dire, où l'arc AL eft de 90°.

Ayant trouvé ce point L, ou $\text{cof}\ a\ \text{cof}\ p + \text{fin}\ a\ \text{fin}\ p\ \text{cof}\ q = 0$, on aura pour la plus petite déclinaifon

$$\text{tang}\ \delta = \frac{\text{fin}\ a\ \text{fin}\ p\ \text{fin}\ q}{\text{cof}\ a} = \text{tang}\ a\ \text{fin}\ p\ \text{fin}\ q.$$

Mais fachant à préfent, que dans le triangle fphèrique APL le côté AL eft un quart de cercle, on en tirera cette proportion

$$1 : \text{fin}\ q = \text{fin}\ a : \text{fin}\ \delta \quad \text{donc} \quad \text{fin}\ \delta = \text{fin}\ a\ \text{fin}\ q,$$

d'où l'on voit que parmi les plus petites déclinaifons de tous les méridiens la déclinaifon fera la plus grande dans celui qui eft perpendiculaire au méridien PEp, où $q = 90$, ou l'on aura $\delta = a$ & $p = 90^\circ$.

COROLL. 1.

XXV. Donc fi nous tirons un grand cercle COD perpendiculaire à l'axe magnétique AB, qui repréfentera l'équateur magnétique, ce grand cercle coupera tous les méridiens aux points O, où la déclinaifon magnétique eft la plus petite pour chacun.

Fig. 3.

COROLL. 2.

XXVI. Puisque l'arc $AC = BC = 90^\circ$, on aura l'arc $PAC = a + 90^\circ$, & l'angle ACO étant droit, la réfolution du tri-

triangle PCO donnera : $\text{tang}\, OC = \text{cos}\, a\ \text{tang}\, q$, & comme nous avons déjà trouvé $\text{tang}\, PO = \frac{-1}{\text{tang}\, a\ \text{cos}\, q}$.

COROLL. 3.

XXVII. Que α marque la plus petite déclinaison sous le méridian POp, de sorte que $\text{sin}\, \alpha = \text{sin}\, a\ \text{sin}\, q$, & posant $PO = m$, de sorte que $\text{cot.}\, m = -\text{tang}\, a\ \text{cos}\, q$. Pour un autre lieu quelconque L du même méridien, où $PL = p$, on trouvera la déclinaison δ en sorte

$$\text{tang}\, \delta = \frac{\text{sin}\, \alpha\ \text{sin}\, m}{\text{cos}\, a\ \text{cos}\, (m-p)} = \frac{\text{tang}\, \alpha}{\text{cos}\, (m-p)}.$$

COROLL. 4.

XXVIII. Cela devient plus évident si nous tirons les arcs OA & LA, où ayant dans le triangle AOL les côtés $AO = 90°$, $OL = m - p$ avec l'angle $POA = \alpha$, on trouve l'angle $PLA = \delta$, en sorte que $\text{tang}\, \delta = \frac{\text{tang}\, \alpha}{\text{cos}\, OL}$: d'où l'on voit que de part & d'autre du point O, à égales distances $OL = Ol$, la déclinaison sera la même.

COROLL. 5.

XXIX. Si l'on prend $CZ = 90°$, ou que Z soit le pole du grand cercle $PApB$, la déclinaison magnétique y est $= a$, qui est la plus grande dans tout l'équateur magnétique COD. Car en C & D la déclinaison évanouït, & si nous posons l'arc $CO = r$, la déclinaison en O étant $= \alpha$, on trouve $\text{tang}\, \alpha = \text{tang}\, a\ \text{sin}\, r$.

REMARQUE.

XXX. Puisque la plus petite déclinaison sous le méridien POp en O est $= \alpha$, en sorte que $\text{sin}\, \alpha = \text{sin}\, a\ \text{sin}\, APO$, par tout ailleurs la déclinaison sera plus grande. Donc si nous cherchons selon l'idée de M. *Halley* des lignes, qui passent par tous les endroits, où la déclinaison est donnée & moindre que α, ces lignes ne sauroient couper nulle part le méridien POp. Et puisque la déclinaison en Z est $= a$, toutes

tes les lignes Halleyennes qui marquent une moindre déclinaiſon que a, n'atteindront nulle part au méridien qui paſſe par le point Z. Or les lignes Halleyennes, qui marquent une plus grande déclinaiſon que a, doivent paſſer par tous les méridiens, comme nous verrons dans le problème ſuivant, où nous examinerons la figure des lignes Halleyennes.

PROBLEME III.

XXXI. *Les poles magnétiques étant diamètralement oppoſés, déterminer les lignes Halleyennes qui paſſent par tous les endroits, où la déclinaiſon de la bouſſole eſt d'une quantité donnée.*

SOLUTION.

Si l'on cherche la ligne, où il n'y a aucune déclinaiſon, à cauſe de $\text{tang}\,\delta = 0$ on aura $\text{ſin}\,q = 0$, d'où l'on voit que cette ligne comprend les deux méridiens oppoſés PAp & PBp: ſous leſquels la déclinaiſon magnétique évanouït comme j'ai déjà remarqué.

Mais que la déclinaiſon propoſée δ ait une valeur quelconque, & prenant l'angle q à plaiſir, on trouvera la diſtance $PL = p$ par cette équation: $\text{coſ}\,a\,\text{ſin}\,p - \text{ſin}\,a\,\text{coſ}\,p\,\text{coſ}\,q = \text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{cot.}\,\delta$ dont la conſtruction la plus commode ſe tire du §. 27. Qu'on cherche un arc m tel que $\text{cot.}\,m = -\text{tang}\,a\,\text{coſ}\,q$, & ayant $\text{tang}\,\delta = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{coſ}(m-p)}$, on aura $\text{coſ}(m-p) = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{tang}\,\delta}$. Ou bien, après avoir trouvé l'angle m, qu'on cherche un autre n en ſorte que $\text{coſ}\,n = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{tang}\,\delta}$; & de là on tirera deux valeurs pour l'arc $PL = p$, ſavoir ou $p = m + n$ ou $p = m - n$. Puiſque $\text{tang}\,a = -\frac{\text{cot.}\,m}{\text{coſ}\,q}$, on pourra auſſi déterminer l'arc n par cette équation: $\text{coſ}\,n = -\frac{\text{tang}\,q\,\text{coſ}\,m}{\text{tang}\,\delta}$.

COROLL. 1.

XXXII. La solution deviendra impossible, ou la ligne Halleyenne cherchée ne passera point par le méridien P L p, lorsque tang $\delta <$ tang q cos m, ou bien lorsque tang $\delta^2 < \frac{\sin a^2 \quad \sin q^2}{\cos a^2 + \sin a^2 \cos q^2}$ à cause de cot m = — tang a cos q. C'est à dire lorsque $1 + \text{tang}\, \delta^2 > \frac{1}{\cos a^2 + \sin a^2 \cos q^2}$, ou lorsque $\sin \delta < \sin a \sin q$ ou bien $\sin q > \frac{\sin \delta}{\sin a}$, comme nous l'avons déjà remarqué §. XXX.

COROLL. 2.

XXXIII. Si l'on prend q négatif, l'arc m demeure le même, & si l'on prend outre cela δ négatif, l'arc n ne changera pas non plus : d'où l'on entend que dans l'autre hemisphère les lignes Halleyennes sont les mêmes, en se rapportant à une déclinaison égale & contraire $- \delta$.

COROLL. 3.

XXXIV. Si la déclinaison δ doit être $= a$, on aura $\cos n = \sin q \sin m$, ce qui est toujours possible : & prenant outre cela $q = 90°$, à cause de $m = 90°$, on aura $n = 0$, & les deux valeurs de p se réunissent dans une seule $p = 90°$ ou bien cette ligne aura en Z un point double.

COROLL. 4.

XXXV. Si l'on pose $q = 0$, on aura $\cos m = -$ tang a, ou $90° - m = - a$, & partant $m = 90° + a$. Ensuite $\cos n = 0$, donc $n = 90°$, les deux valeurs de p seront donc $p = a$ & $p = 180 + a$. D'où nous voyons que toutes les lignes Halleyennes passent par les deux poles magnétiques A & B.

COROLL. 5.

XXXVI. Toutes ces lignes passent aussi par les deux poles P & p : car faisant $p = 0$, on a : $- \sin a \cos q = \sin a \sin q \cot \delta$

 ou

ou bien $\tang q = - \tang \delta$: ce qui donne $q = 180° - \delta$, laquelle valeur eſt toujours poſſible. De même faiſant $p = 180$, on aura $\tang q = \tang \delta$ ou $q = \delta$, qui eſt auſſi toujours poſſible.

I. REMARQUE.

XXXVII. Mais poſant $q = 180° - \delta$, outre la valeur $p = 0$ on trouve encore une autre $\frac{\cos a}{\sin a \cos \delta} = \frac{1 - \cos p}{\sin p} = \tang \frac{1}{2} p$ & poſant $q = \delta$, la premiere équation donne

$$\cos a \sin p - \sin a \cos p \cos \delta = \sin a \cos \delta \quad \text{donc}$$

$$\frac{\cos a}{\sin a \cos \delta} = \frac{1 + \cos p}{\sin p} = \cot \tfrac{1}{2} p \quad \text{ou bien}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} p = \tang a \cos \delta.$$

Au reſte il ne faut pas être ſurpris, que toutes les lignes Halleyennes paſſent tant par les poles magnétiques que par les poles naturels de la terre : car dans les poles magnétiques toute déclinaiſon doit être cenſée y avoir lieu, & dans les poles naturels de la Terre il en eſt de même, puisque tous les méridiens s'y confondent.

2. REMARQUE.

XXXVIII. Il ne ſera pas hors de propos d'enſeigner ici en général la réſolution d'une telle équation :

$$A \sin p + B \cos p = C$$

ſans extraction de la racine quarrée. On n'a qu'à chercher un angle m de ſorte $\tang m = \frac{A}{B}$, & puisque

$$B \tang m \sin p + B \cos p = C \quad \text{ou}$$

$$B \cos (m - p) = C \cos m \quad \text{on aura}$$

$$\cos (m - p) = \frac{C \cos m}{B} = \frac{C \sin m}{A} = \cos n$$

d'où à cauſe de $\cos n = \cos - n$ on tire deux valeurs ſavoir $p = m \pm n$.

PRO-

PROBLEME IV.

XXXIX. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaison magnétique δ est plus petite que la distance des poles magnétiques aux poles de la terre* AP $=$ Bp $= a$.

SOLUTION.

Une telle ligne passera d'un pole magnétique A au pole opposé p de la Terre. Soit donc A Y F p une telle ligne, & pour en connoitre mieux le cours, qu'on prenne un arc A X $= x$ pour abscisse & l'arc XY $= y$, pour appliquée qui y soit perpendiculaire. Donc, puisque PX $= a + x$, à cause de APY $= q$ & PY $= p$, on aura $\cos p = \cos(a+x)\cos y$; $\sin q = \frac{\sin y}{\sin p}$ & $\cos q = \frac{\tang(a+x)}{\tang p}$; substituons ces valeurs dans l'équation $\tang\delta(\cos a \sin p - \sin a \cos p \cos q) = \sin a \sin q$ pour avoir Fig. 4.

$$\tang\delta\left(\cos a \sin p - \frac{\sin a \cos p^2 \tang(a+x)}{\sin p}\right) = \frac{\sin a \sin y}{\sin p}$$

qui se réduit en substituant pour p sa valeur à celle-cy

$$\tang\delta\ (\cos a - \cos x \cos(a+x)\cos y^2) = \sin a \sin y$$

D'où l'on voit que l'appliquée y évanouit en prenant tant $x = 0$, que $x = 180 - a$; ensuite si $x = -a$, & sin $x = 180°$, de sorte que l'appliquée y évanouit dans les quatre points A, p, P & B. Ensuite la valeur de y demeure la même quand on écrit au lieu de x tant $180 - a - x$; que $-a - x$ & $180 + x$; d'où l'on connoit que la courbe sort par des branches semblables des quatre poles A, p, P & B, de sorte que la courbe A F p ayant deux branches semblables A F & p F, il y a de l'autre côté pour la même déclinaison δ une courbe semblable qui passe de P à B. La courbe AFp aura donc un point F, qui répond à l'abscisse $x =$ A E $= 90 - \frac{1}{2}a$, où l'appliquée E F sera la plus grande. Pour la trouver, posons $x = 90° - \frac{1}{2}a$, & puisque $\mathrm{c}x\,\mathrm{c}(a+x) = -\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{c}a$ notre équation sera

tang

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,a + \tfrac{1}{2}\,\text{cos}\,y^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{cos}\,a\,\text{cos}\,y^2) = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y$$

qui se réduit à celle-cy :

$$\text{sin}\,y^2 + \frac{2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\,a\,\text{sin}\,y}{\text{sin}\,\delta} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a^2$$

ou $\text{sin}\,y = -\dfrac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\,a\,(\text{cos}\,\delta \pm 1)}{\text{sin}\,\delta}$

L'une de ces deux valeurs donne

$$\text{sin}\,y = -\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,\delta$$

& l'autre $\text{sin}\,y = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\delta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,a}$.

Or la premiere est impossible, puisque $a < 90$ & $\delta < a$. d'où tant cot. $\frac{1}{2}\,a$ que cot. $\frac{1}{2}\,\delta$ surpasseront le sinus total : & partant nous aurons $\text{sin}\,EF = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\delta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,a}$, qui ne peut avoir lieu à moins qu'il ne soit $\delta < a$, comme nous le supposons.

Par la différentiation nous apprenons que la branche F Y A fait en A avec le premier méridien un angle $= \delta$: & toutes les autres branches font un angle égal avec ce premier méridien.

COROLL. 1.

XL. Si l'on prend δ négatif, on n'a qu'à poser aussi y négatif pour avoir la même équation, ce qui est une marque, que pour les déclinaisons occidentales on a sur l'autre hemisphére les mêmes lignes Halleyennes.

COROLL. 2.

XLI. Plus la déclinaison δ est petite, plus la ligne Halleyenne A F p approche du méridien A p; & plus elle approche de la quantité a, plus son milieu F approche du sommet Z de l'hemisphére.

COROLL. 3.

XLII. On voit aussi, que ces lignes se rapportent également aux poles naturels de la Terre, qu'aux poles magnétiques ; & que tant que $\delta < a$, ces lignes ſortent d'un pole magnétique, & qu'elles rentrent dans le pole naturel oppoſé, ſans atteindre jusqu'au méridien, qui paſſe par le milieu de l'hemiſphére.

1. REMARQUE.

XLIII. Quand on conſtruit quelques unes de ces lignes, on verra qu'elles ont au milieu F une prominence vers le ſommet de l'hemiſphére, qui devient de plus en plus grande & pointue, plus la déclinaiſon δ approche de la quantité a: & quand $\delta = a$, elle acquiert une vraye pointe angulaire, qui ſe change en une interſection de deux courbes, comme nous verrons après.

2. REMARQUE.

XLIV. Comme toutes les appliquées XY ſe réuniſſent au ſommet Z de l'hemisphére, le quart de cercle EFZ ſera un diamètre de la courbe: auquel ſi nous tirons de Y perpendiculairement l'arc YV & que nous nommions $ZV = t$ & $VY = u$, nous aurons $\cos ZY = \sin y = \cos t \cos u$, & $\tan XE = \tan(90° - \frac{1}{2}a - x)$ $= \cot.(\frac{1}{2}a + x) = \frac{\tan u}{\sin t} = \frac{\sin u}{\sin t \cos u}$. De là nous tirons $\cos(\frac{1}{2}a + x) = \frac{\sin u}{\cos y}$ & $\sin(\frac{1}{2}a + x) = \frac{\sin t \cos u}{\cos y}$; donc $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}a \sin u + \sin\frac{1}{2}a \sin t \cos u}{\cos y}$ & $\cos(a + x) = \frac{\cos\frac{1}{2}a \sin u - \sin\frac{1}{2}a \sin t \cos u}{\cos y}$ & partant

$$\cos x \cos(a + x) \cos y^2 = \cos\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin t^2 \cos u^2$$

d'où nous trouvons entre t & u cette équation

$$\cos a - \cos\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin t^2 \cos u^2 = \cot.\delta \sin a \cos t \cos u$$

qui ſe change en celle-cy:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 \cos t^2 \cos u^2 = -2\cot.\delta \sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}a \cos t \cos u + \cos\tfrac{1}{2}a^2 \cos u^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2$$

& par l'extraction de racine:

$$\sin\tfrac{1}{2}a \cos t \cos u = -\frac{\cos\delta \cos\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\cos\frac{1}{2}a^2 - \sin\delta^2 \sin u^2)}}{\sin\delta}$$

De là on voit, que si $u = 0$, ce qui arrive au point F, il y aura $\sin\frac{1}{2}a^2 \text{cs}t^2 = -2\cot.\delta \sin\frac{1}{2}a \text{cs}\frac{1}{2}a \text{cs}t + \text{cs}\frac{1}{2}a^2$, ou $\text{cs}t = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}\delta}{\text{tang}\frac{1}{2}a}$. Or posons u infiniment petit, & soit $t = f + v$, prenant $f = ZF$, de sorte que $\cos f = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}\delta}{\text{tang}\frac{1}{2}a}$ & $FV = v$ infiniment petit, & l'on trouve :

$$v \sin a \sin f + \tfrac{1}{2} v v \sin a \cos f = u u \sin\delta - \tfrac{1}{2} u u \sin a \cos f.$$

Donc, tant que $\delta < a$, la courbe sera perpendiculaire en F à l'arc ZE, mais si $\delta = a$, & $f = 0$, on aura l'équation $\frac{1}{2}vv = \frac{1}{2}uu$, ou $u = v$, de sorte que l'angle de la courbe en F avec ZE est un demi-droit, & les branches de la courbe se couperont en Z à angles droits.

PROBLEME V.

Fig. 5. XLV. *Déterminer plus exactement la figure de la ligne Halleyenne qui passe par les lieux, où la déclinaison magnétique* δ *est égale à la distance des poles* $AP = Bp = a$.

SOLUTION.

Posant $\delta = a$, on aura entre l'angle $APY = q$ & l'arc $PY = p$ cette équation

$$\cos a \sin p - \sin a \cos p \cos q = \cos a \sin q$$

Mais, si nous rapportons la courbe au méridien $PAEp$ par les coordonnées orthogonales $AX = x$ & $XY = y$, l'équation sera :

$$\cos a - \cos x \cos(a + x) \cos y^2 = \cos a \sin y$$

qui en divisant par $1 - \sin y$ se réduit à

$$\cos a = \cos x \cos(a + x)(1 + \sin y)$$

Or le diviseur $1 - \sin y$ marque que la courbe a un point au sommet Z, où toutes les appliquées se réunissent, l'autre équation donne

$$\sin y = \frac{\cos a - \cos x \cos(a + x)}{\cos x \cos(a + x)} = \text{tang}\, x \,\text{tang}(a + x)$$

Si

Si nous prenons les abſciſſes du point E en poſant EX $= z$ à cauſe de $x = 90^\circ - \frac{1}{2} a - z$, nous aurons

$$\sin y = \cot.(z+\tfrac{1}{2}a)\cot.(z-\tfrac{1}{2}a) = \frac{\cos\frac{1}{2}a^2 - \sin z^2}{\sin z^2 - \sin\frac{1}{2}a^2} = \frac{\cos a + \cos 2z}{\cos a - \cos 2z}.$$

D'où l'on voit que $\cos 2z$ doit être négatif, & partant $z > 45^\circ$ avant que le rayon ZX coupe la courbe, & que ſi $z = 45^\circ$ ce rayon touche la courbe au ſommet Z, où quatre branches ſemblables ZP, ZA, Zp & ZB ſe coupent à angles droits. Or ſi nous partageons l'intervalle PA en deux parties égales en C, & que nous nommions l'arc CX $= v$, & l'arc ZY $= t$, à cauſe de $\cos t = \sin y$ & $z = 90^\circ - v$, nous aurons $\cos t = \dfrac{\cos a - \cos 2v}{\cos a + \cos 2v}$: d'où nous voyons que tant que $v < \frac{1}{2} a$ ou CX < CA, la valeur de t ſurpaſſe 90°, & alors la continuation des arcs ZA & ZP paſſe dans l'autre hemiſphére, où la déclinaiſon ſera $180 + a$, puiſque tang δ eſt la même, ſoit qu'on prenne $\delta = a$ ou $\delta = 180^\circ + a$. Or prenant $v = \frac{1}{2} a$ ou CX $=$ CA, on a $\cos t = 0$, ou $t = 90^\circ$ ce qui donne le point A, & en augmentant v au delà de $\frac{1}{2} a$, on trouve la courbe AY, jusqu'à ce qu'on poſe $v = 45^\circ$, où ZY $= t$ evanouit. D'ailleurs prenant x infiniment petit, y le ſera auſſi, & on aura $\dfrac{y}{x} = \text{tang}\, a$, ce qui indique que chaque branche ZA fait en A avec le premier méridien un angle $= a$. Après cette inclinaiſon les quatre branches montent au ſommet Z, où elles ſe croiſent à angles droits.

COROLL. I.

XLVI. Tandis que la déclinaiſon δ étoit plus petite que a, les lignes Halleyennes ſortoient du point A pour rentrer en p, par une courbe continue A F p, qui avoit au milieu F une prominence vers le ſommet Z. Or à préſent cette prominence atteint le ſommet Z & ſe change en un angle droit. Fig. 4.

COROLL. 2.

Fig. 5. XLVII. La figure AFp, qu'avoient les lignes Halleyennes pendant que $\delta < a$, s'en va lorsque $\delta = a$ en celle-cy $AYZyp$, & perd en même tems la continuité: car maintenant l'arc Zp n'est plus la continuation de l'arc AZ, mais plutôt celle de l'arc PZ, & l'arc AZ a sa continuation par l'arc ZB.

COROLL. 3.

XLVIII. Maintenant donc où $\delta = a$, des deux lignes Halleyennes qui représentent cette déclinaison, l'une AZB va d'un pole magnétique A à l'autre B, & l'autre PZp va d'un pole naturel de la Terre P à l'autre p: pendant qu'auparavant où $\delta < a$ ces lignes ont été tirées d'un pole magnétique au pole naturel opposé.

REMARQUE.

XLIX. Nous verrons bientôt, que lorsque $\delta > a$, les lignes Halleyennes prennent un tour encore différent, en passant d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui est le plus proche. Entre ces deux cours différents le cas $\delta = a$ tient un milieu, & ne suit ni l'un ni l'autre, participant également de chacun: d'où cette ligne, que je viens de décrire, est fort remarquable. Elle est aussi la seule qui forme une intersection, pendant que les branches des autres ne se coupent nulle part.

PROBLEME VI.

Fig. 6. L. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaison magnétique δ est plus grande que la distance des poles* $AP = Pp = a$.

SOLUTION.

Soit AFP une de ces lignes où $\delta > a$, & pour en connoitre le cours, nous n'avons qu'à prendre l'abscisse $AX = x$ négative dans le problême IV. en laissant $XY = y$: & alors nous aurons:

$$\tang \delta (\cos a - \cos x \cos (a - x) \cos y^2) = \sin a \sin y$$

Ou prenant E au milieu de l'arc AP, de sorte que $AE = \frac{1}{2} a$, si nous po-

posons EX $= z$, à cause de $x = \frac{1}{2}a - z$, nous aurons :

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,a - \text{cos}(\tfrac{1}{2}a - z)\ \text{cos}(\tfrac{1}{2}a + z)\,\text{cos}\,y^2) = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y$$

d'où nous voyons que prenant z négatif ou positif l'équation ne change point, de sorte que les arcs AF & PF seront semblables. Pour trouver le milieu de cette courbe F soit $z = 0$; & on aura

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,a - \text{cos}\,\tfrac{1}{2}a^2\ \text{cos}\,y^2) = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y \quad \text{ou bien}$$

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{sin}\,y^2 - \text{sin}\,\tfrac{1}{2}a^2) = 2\,\text{sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{sin}\,y$$

d'où l'on tire : $\text{sin}\,y = \dfrac{\text{sin}\,\frac{1}{2}a\,(\text{cos}\,\delta \pm 1)}{\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,\frac{1}{2}a} = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}$

qui n'est réelle que si $\delta > a$. Par conséquent ayant sin EF $= \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}$, on voit que plus la déclinaison δ est grande, plus sera petit l'arc EF.

Nous avons déjà vu, que si $z = \frac{1}{2}a$ ou $x = 0$, l'appliquée y évanouit aussi, & que la courbe AY est inclinée au méridien Ap d'un angle YA$p = \delta$. Mais, posant $z = \frac{1}{2}a$, le quart de cercle ZYX coupera la courbe encore dans un autre point, Soit donc $x = 0$, & l'équation $\text{tang}\,\delta\,\text{cos}\,a\,\text{sin}\,y^2 = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y$, outre la valeur $y = 0$ donne encore $\text{sin}\,y = \dfrac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,\delta}$. L'abscisse EX $= z$ aura donc un *maximum*, qui sera là où

$$\text{cos}(\tfrac{1}{2}a - z)\,\text{cos}(\tfrac{1}{2}a + z) = \frac{\text{sin}\,a}{2\,\text{tag}\,\delta\,\text{sin}\,y} \ \&\ \text{sin}\,y = \frac{\text{tag}\,\delta - \sqrt{(\text{tag}\,\delta^2 - \text{tag}\,a^2)}}{\text{tang}\,a}$$

& partant $\text{cos}\,a + \text{cos}\,2z = \dfrac{\text{cos}\,a\,(\text{tang}\,\delta + \sqrt{(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang}\,a^2)})}{\text{tang}\,\delta}$

donc $\text{cos}\,2z = \text{cos}\,a\,\sqrt{\left(1 - \dfrac{\text{tang}\,a^2}{\text{tang}\,\delta^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\text{sin}\,a^2}{\text{sin}\,\delta^2}\right)}$ de

sorte que $\text{sin}\,2z = \dfrac{\text{sin}\,a}{\text{sin}\,\delta}$ & $\text{sin}\,y = \dfrac{\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,a - \sqrt{(\text{sin}\,\delta^2 - \text{sin}\,a^2)}}{\text{cos}\,\delta\,\text{sin}\,a}$.

COROLL. 1.

LI. Puisque $\operatorname{cof}(\frac{1}{2}a - z)\operatorname{cof}(\frac{1}{2}a + z) = \frac{1}{2}\operatorname{cof} a + \frac{1}{2}\operatorname{cof} 2z$, l'équation entre y & z fera exprimée en forte :

$$\operatorname{tang}\delta(2\operatorname{cof} a - \operatorname{cof} a \operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} 2z \operatorname{cof} y^2) = 2 \sin a \sin y$$

d'où l'on tire fans extraction de racine :

$$\operatorname{cof} 2z = \frac{\operatorname{cof} a(1 + \sin y^2)}{\operatorname{cof} y^2} - \frac{2 \sin a \sin y}{\operatorname{tang}\delta \operatorname{cof} y^2}.$$

COROLL. 2.

LII. Les lignes des grandes déclinaifons font donc renfermées tant entre les poles feptentrionaux P & A, que les méridionaux B & p, & approchent d'autant plus de l'arc AP, plus la déclinaifon eft grande : l'arc AP lui-même étant la ligne, où la déclinaifon eft de 180°.

REMARQUE.

Fig. 7. LIII. La 7me Figure repréfente l'état des lignes Halleyennes pour les déclinaifons orientales, lorsque la diftance des poles AP & Bp eft de 30°. Les parties du méridien Ap & PB font les lignes, où il n'y a point de déclinaifon. Enfuite on y voit de part & d'autre les lignes, où la déclinaifon eft de 10° & de 20°, qui étant plus petites que 30° vont d'un pole magnétique au pole naturel oppofé, de A en p & de B en P. Pour la déclinaifon de 30° les lignes fe croifent au milieu, & tant vers le Nord que le Sud on voit les lignes, où la déclinaifon eft de 45° & de 90°. Les lignes du même nom ne femblent pas être liées enfemble, mais fe terminer brusquement dans les poles : mais il faut remarquer, qu'elles tiennent enfemble par une ligne où la déclinaifon eft $180° + \delta$, ou bien $180° - \delta$ vers l'oüeft, qui joint ou les poles boreaux ou méridionaux, dans l'autre hemifphére. Car puisque $\operatorname{tang}(180° + \delta) = \operatorname{tang}\delta$, ces deux cas font compris dans la même équation. Au refte on remarque déjà un bel accord entre ces lignes & celles, qu'on voit fur la Carte de *Halley*; furtout pour les grandes déclinaifons; mais en donnant aux poles magnétiques une autre fituation, on verra bientôt, qu'il fera poffible de parvenir à un accord parfait, autant que l'imperfection des obfervations en eft fufceptible.

SE

SECONDE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant en deux méridiens opposés.

PROBLEME VII.

LIV. *Les deux poles magnétiques de la terre n'étant pas diamètralement opposés, déterminer la direction de l'aiguille aimantée pour un lieu quelconque dans la surface de la terre.*

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques de la terre, & L un lieu quelconque, où il faut déterminer la direction de l'aiguille. Or il est certain, que la direction magnétique se trouve toujours dans un plan qui passe par les deux poles magnétiques. Concevons donc une section du Globe, qui passe par le lieu L & les deux poles magnétiques A & B; & cette section sera un petit cercle dont la tangente en L sera la direction de l'aiguille $L\delta$. Cherchons donc dabord le pole ou le centre de ce petit cercle sur la surface de la terre: pour cet effet divisons l'arc du grand cercle ACB, qui passe par les deux poles magnétiques A & B, en deux parties égales au point C, & par C tirons un grand cercle COc perpendiculaire à ACB, qui sera l'équateur magnétique, dont chaque point O est également éloigné des deux poles magnétiques. Le centre du petit cercle cherché sera donc quelque part dans cet équateur magnétique en O, d'où les arcs de grands cercles OA & OL seront égaux. Posons la demi-distance des poles magnétiques ou l'arc $AC = BC = c$; & pour le lieu proposé L, auquel on tire de C l'arc du grand cercle CL, soit l'angle $ACL = n$ & l'arc $CL = m$; soit de plus l'arc inconnu $CO = \Phi$. Donc, tirant l'arc du grand cercle AO, nous aurons $\operatorname{cos} AO = \operatorname{cs} c \operatorname{cs} \Phi$; or à cet arc AO doit être égal l'arc OL. Mais le triangle sphérique OCL, Fig. 8.

OCL, où $CL = m$; $CO = \phi$ & $OCL = 90° - n$ donne

$$\cos OL = \cos m \cos \phi + \sin m \sin \phi \sin n = \cos c \cos \phi$$

d'où nous tirons $\mathrm{tang}\ \phi = \dfrac{\cos c - \cos m}{\sin m \sin n}$.

Or le même triangle OCL donne

$$\mathrm{tang}\ CLO = \frac{\sin \phi \cos n}{\cos \phi \sin m - \sin \phi \cos m \sin n}$$

où, si nous substituons pour ϕ sa valeur trouvée, nous aurons :

$$\mathrm{tang}\ CLO = \frac{\cos n (\cos c - \cos m)}{\sin m^2 \sin n - \cos m \sin n (\cos c - \cos m)}$$

ou $\mathrm{tang}\ CLO = \dfrac{\cos n (\cos c - \cos m)}{\sin n - \cos c \cos m \sin n}$.

Or la direction magnétique $L\delta$ étant perpendiculaire au rayon du petit cercle, ou à l'arc OL, nous aurons $\mathrm{tang}\ CL\delta = \mathrm{cot.}\ CLO$ & partant

$$\mathrm{tang}\ CL\delta = \frac{\sin n (1 - \cos c \cos m)}{\cos n (\cos c - \cos m)} = \frac{\mathrm{tang}\ n (1 - \cos c \cos n)}{\cos c - \cos m}$$

d'où nous connoissons l'angle $CL\delta$ que fait la direction magnétique $L\delta$ avec l'arc CL, dont la position est donnée.

REMARQUE.

LV. La solution de ce problème & des suivans est fondée sur ce principe, que la direction magnétique sur la terre suit toujours le petit cercle, qui passe par le lieu proposé & les deux poles magnétiques de la terre. On m'accordera bien ce principe à l'égard de la véritable direction magnétique, qui renferme ensemble l'inclinaison & la déclinaison ; mais, puisque la déclinaison dont il s'agit ici, se regle sur le plan vertical, qui passe par la direction magnétique, on en pourroit tirer quantité d'objections, dont la discussion meneroit trop loin, & surpasseroit les bornes de notre connoissance. Mais on pourra en sorte fixer les idées, qui entrent ici en considération, que ces objections

tions n'y ayent plus de prise. Si l'on plaçoit là les poles magnétiques de la Terre, où l'axe magnétique traverse la surface de la Terre, on seroit sans doute fort embarrassé ; puisque la déclinaison n'y seroit plus indéterminée, à moins que l'axe magnétique ne passeroit par le centre de la Terre. Par cette raison j'établirai les poles magnétiques de la Terre là, où la véritable direction magnétique est verticale, de sorte que dans ces endroits il ne puisse y avoir question de la déclinaison ; & ce sera dans ces points, où toutes les lignes Halleyennes doivent aboutir, de même qu'aux poles naturels de la Terre. Or déterminant en sorte les poles magnétiques de la terre, sans s'embarrasser de l'axe véritable magnétique, les objections mentionnées n'empêcheront plus, qu'on n'accorde le principe établi, c'est à dire que partout l'aiguille aimantée se dirige suivant la tangente du petit cercle tiré sur la surface de la Terre par chaque lieu proposé, & lesdits poles magnétiques, où l'inclinaison devient verticale.

PROBLEME VIII.

LVI. *Les deux poles magnétiques en deux méridiens opposés étant donnés, trouver la déclinaison magnétique pour un lieu proposé quelconque* L.

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques, le boréal A dans le méridien $PAC\pi$, & le méridional B dans le méridien opposé $P c B p$, à des distances inégales des poles naturels P & p, savoir: $AP = a$ & $Bp = b$. Qu'on coupe l'arc $AB = 180° - a + b$ en deux parties égales en C, & soit $AC = BC = 90° - \frac{a+b}{2} = c$; & l'arc $PC = 90° + \frac{a+b}{2} = a + c = d$. Maintenant pour le lieu proposé L, par lequel passe le méridien PLp, soit la longitude vers l'oüest ou l'angle $CPL = q$, & l'arc $PL = p$; donc, ayant dans le triangle sphérique CPL les côtés $PC = d$, $PL = p$, avec l'angle com-

compris CPL $= q$, on déterminera les élémens précedens CL $= m$ & l'angle PCL $= n$ en ſorte

$$\cos m = \cos d \cos p + \sin d \sin p \cos q \quad \&$$

$$\text{tang } n = \frac{\sin p \ \sin q}{\sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q}$$

De là, poſant Lδ pour la direction magnétique, on aura

$$\text{tang CL}\delta = \frac{\sin p \sin q \ (1 - \cos c \cos d \cos p - \cos c \sin d \sin p \cos q)}{(\sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q)(\cos c - \cos d \cos p - \sin d \sin p \cos q)}.$$

Or le même triangle ſphérique CPL fournit

$$\text{tang CLP} = \frac{\sin d \ \sin q}{\cos d \sin p - \sin d \cos p \cos q}$$

duquel angle il faut ſouſtraire l'angle CLδ pour avoir la déclinaiſon magnétique PL$\delta = \delta$ tournée vers l'Eſt. Poſons pour rendre cette opération plus aiſée :

$\cos d \cos p + \cos d \sin p \cos q = A$

$\sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q = B$; $\cos d \sin p - \sin d \cos p \cos q = C$

& ayant :

$$\text{tang CLR} = \frac{\sin d \sin q}{C}; \quad \text{tang CL}\delta = \frac{\sin p \sin q \ (1 - A \cos c)}{B(\cos c - A)}$$

on en tirera

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\cos c \sin q (B \sin d + AC \sin p) - \sin q (AB \sin d + C \sin p)}{\cos c (BC - A \sin d \sin p \sin q^2) + \sin d \sin p \sin q^2 - ABC}$$

Mais, en ſubſtituant les valeurs pour A, B, C on trouve

$B \sin d + AC \sin p = (1 - AA) \cos p$; $AB \sin d + C \sin p = (1 - AA) \cos d$

$BC - A \sin d \sin p \sin q^2 = -(1 - AA) \cos q$

$\sin d \sin p \sin q^2 - ABC = (1 - AA)(\sin d \sin p + \cos c \cos p \cos q)$

donc, diviſant le haut & le bas par $1 - AA$, on obtiendra :

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\cos c \cos p \sin q - \cos d \sin q}{-\cos c \cos q + \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos q}.$$

co-

COROLL. 1.

LVII. Puisque $c = 90° - \frac{a+b}{2}$ & $d = 90° + \frac{a+b}{2}$: la formule trouvée prendra cette forme :

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\left(\sin\frac{a-b}{2}\cos p + \sin\frac{a+b}{2}\right)\sin q}{\cos\frac{a+b}{2}\sin p - \sin\frac{a+b}{2}\cos p\cos q - \sin\frac{a-b}{2}\cos q}$$

où je remarque que le numérateur eſt toujours poſitif pour l'hemisphere ſupérieur que nous avons en vûe, où $\sin q$ eſt poſitif: & quand même on prend $\cos p = -1$, l'autre facteur $\sin\frac{a-b}{2}\cos p + \sin\frac{a+b}{2}$ demeure pourtant poſitif.

COROLL. 2.

LVIII. De là il s'enſuit que par tout cet hemiſphere ſupérieur la déclinaiſon eſt poſitive, ou dirigée vers l'eſt ; car, quoique le dénominateur devienne négatif, l'angle δ ne devient pas pour cela négatif, mais ſeulement plus grand que 90°.

COROLL. 3.

LIX. La raiſon en eſt, que le dénominateur ne ſauroit devenir négatif ſans paſſer par zero : or dans ce cas il marque un angle droit, & partant s'il devient négatif, la tangente négative de δ ne ſauroit ſubitement indiquer un angle négatif. Mais l'autre ſignification d'un angle obtus aura uniquement lieu.

COROLL. 4.

LX. Pour l'autre hemiſphere il y en a de même, à l'égard des déclinaiſons occidentales, qui y auront uniquement lieu ; comme dans le cas précédent, où les poles magnétiques étoient diamètralement oppoſés. D'où l'on comprend qu'il n'y a d'autre ligne ſans déclinaiſon, que les deux méridiens oppoſés, qui paſſent par les poles magnétiques.

REMARQUE.

LXI. Par rapport à la réduction de l'expression, que nous avons dabord trouvée pour tang δ, on évitera des calculs fort ennuyans, quand on sait faire usage de la rélation, que les trois lettres A, B, C ont entr'elles. Dabord il faut remarquer que

$$1 - AA = \sin p^2 \sin q^2 + BB = \sin d^2 \sin q^2 + CC$$

ensuite leur comparaison fournit ces formules,

$B \sin d + A \cos d = \cos p$; $C \sin p + A \cos p = \cos d$
$A \sin d - B \cos d = \sin q$; $A \sin p - C \cos p = \sin d \cos q$
$C + B \cos q = \cos q^2$; $B + C \cos q = \sin d \cos p \sin q^2$.

Pour en faire usage prenons la derniere formule,

$\sin d \sin p \sin q^2 - ABC$, qui à cause de $C = \cos d \sin p \sin q^2 - B \cos q$ se change en

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + ABB \cos q$$

Mais $BB = 1 - AA - \sin p^2 \sin q^2$ donne

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q$$

Or $-B \cos d = \sin p \cos q - A \sin d$ produit

$$\sin d \sin p \sin q^2 + A \sin p^2 \sin p^2 \cos q - AA \sin d \sin p \cos q^2 + A(1 - AA) \cos q - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q,$$

ou $(1 - AA) \sin d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q$, le reste est évident. Ce même artifice sera d'une grande utilité dans la suite.

PROBLEME IX.

LXII. *Trouver les lignes Halleyennes, qui passent par tous les lieux de la terre, où la déclinaison de la boussole est d'une quantité donnée.*

SOLUTION.

Soit δ la déclinaison proposée, qui étant positive sera dirigée vers l'Est, mais vers l'oüest, si elle est négative. Par la position des po-

poles magnétiques les quantités c & d seront données, & si L est un lieu, par où passe la ligne cherchée, il s'agit de trouver une équation entre PL $= p$ & CPL $= q$. Or l'équation trouvée dans le problème précédent fournit celle-cy

$$\text{tang}\,\delta \sin d \sin p + (\text{tang}\,\delta \cos d \cos q - \cos c \sin q) \cos p = \text{tang}\,\delta \cos c \cos q - \cos d \sin q,$$

au lieu de laquelle je considérerai cette forme générale

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

de sorte que pour le cas présent,

$$A = \text{tang}\,\delta \sin d\,; \quad B = \text{tang}\,\delta \cos d\,; \quad C = \cos c$$
$$D = \text{tang}\,\delta \cos c\,; \quad E = \cos d$$

Maintenant, pour trouver la valeur de p pour chaque angle donné q, je commence par chercher un angle r de sorte que

$$\text{tang}\,r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \text{ \& j'aurai } \frac{A \cos(r-p)}{\sin r} = D \cos q - E \sin q.$$

Qu'on cherche ensuite deux angles m & n de sorte que

$$\text{tang}\,m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \text{tang}\,n = \frac{D}{E} \quad \& \text{ on aura :}$$

$$\text{tang}\,r = \frac{A \cos m}{C \sin(m-q)} = \frac{A \sin m}{B \sin(m-q)}$$

$$\frac{A \cos(r-p)}{\sin r} = \frac{E \sin(n-q)}{\cos n} = \frac{D \sin(n-q)}{\sin n}.$$

Cela posé, en substituant pour les lettres A, B, C, D, E, leurs valeurs, on fera les opérations suivantes :

$$\text{tang}\,m = \frac{\text{tang}\,\delta \cos d}{\cos c}\,; \quad \text{tang}\,n = \frac{\text{tang}\,\delta \cos c}{\cos d}$$

$$\text{tang}\,r = \frac{\text{tang}\,d \sin m}{\sin(m-q)}\,; \quad \cos(r-p) = \frac{\cos c \sin(n-q) \sin r}{\sin d \sin n}.$$

Ces formules étant fort propres pour le calcul trigonométrique, on trouvera aisément r & $r - p$; car supposons qu'on trouve $\cos(r-p) = \cos s$, à cause de $r - p = \pm s$, les deux valeurs de p seront $p = r \pm s$.

COROLL. I.

LXIII. En chaque méridien donc il y a deux points par où chaque ligne Halleyenne passe, à moins que ces deux points ne se réunissent dans un seul, ou qu'ils ne deviennent imaginaires. Le premier arrive si l'expression $\frac{\cos c \ \sin(n-q) \sin r}{\sin d \sin n}$ devient égale à l'unité, & l'autre si elle surpasse l'unité.

COROLL. 2.

LXIV. Concevons qu'on tire par C un grand cercle CO, qui coupe le méridien PLp en sorte en O, qu'il devienne $PO = r$; & partant $OL = r - p$: & ayant dans le triangle CPO les côtés $CP = d$; $PO = r$ & $CPO = q$, à cause de $\tang r = \frac{\sin d \sin m}{\cos d \sin(m-q)}$ on trouve

$$\tang PCO = \frac{\sin m \ \sin q}{\cos d \sin(m-q) - \cos d \sin m \cos q} = -\frac{\tang m}{\cos d}$$

de sorte que, puisque $\tang m = \frac{\tang \delta \ \cos d}{\cos c}$, on aura

$$\tang PCO = -\frac{\tang \delta}{\cos c} \quad \text{ou} \quad \tang pCO = \frac{\tang \delta}{\cos c}.$$

COROLL. 3.

LXV. Il est donc remarquable que la position du grand cercle CO ne dépend pas de l'angle $CPO = q$ & qu'elle a lieu pour tous les méridiens. Et puisque l'arc $OL = r - p$, est tant négatif que positif, ce grand cercle CO sera le diamètre des lignes Halleyennes pour la même déclinaison magnétique δ.

CO-

COROLL. 4.

LXVI. Puisque $AC = c$, ſi nous tirons de A un grand cercle AE, qui faſſe avec CA un angle $CAE = \delta$, on trouvera l'arc AE égal à un quart de cercle. Donc, pour conſtruire le cercle diamétral CO, on n'a qu'à appliquer en A un quart de cercle AE ſous un angle $CAE = \delta$, & les deux points C, E détermineront ce cercle.

COROLL. 5.

LXVII. Si nous poſons $q = 0$, nous aurons $r = d$ & $r - p = c$ donc $p = d \pm c$. Mais, ayant poſé $c = 90° - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $p = 90° + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, ces deux valeurs de p ſont a & $180° + b$, qui marquent les deux poles magnétiques, auxquels toutes les lignes Halleyennes aboutiſſent.

1. REMARQUE.

LXVIII. Par la premiere équation on voit, que prenant la déclinaiſon δ négative, ou occidentale, l'équation demeure la même, pourvu qu'on prenne auſſi l'angle q négatif. Dans ce cas les lignes Halleyennes tomberont dans l'autre hemiſphére, & ſeront tout à fait ſemblables à celles du ſupérieur: il ſuffit donc d'avoir calculé ces lignes pour un hemiſphére.

2. REMARQUE.

LXIX. Les formules que nous avons données pour l'uſage du calcul, ne ſont pas applicables au cas, où la déclinaiſon doit évanouir, puisque alors l'angle q évanouit néceſſairement: la ligne ſans déclinaiſon étant l'un & l'autre méridien, qui paſſent par les poles magnétiques. Or, ſi la déclinaiſon eſt très petite, l'angle q ne ſauroit ſurpaſſer une certaine grandeur: pour la trouver, ſoit la déclinaiſon δ & l'angle q extrèmement petit, & à cauſe de $m = \frac{\delta \operatorname{cof} l}{\operatorname{cof} c}$ & $n = \frac{\delta \operatorname{cof} c}{\operatorname{cof} d}$:

nous aurons $\operatorname{tang} r = \frac{\delta \operatorname{fin} d}{\delta \operatorname{cof} d - q \operatorname{cof} c}$ & enſuite

$$\operatorname{cof}(r - p) = \frac{\delta \operatorname{cof} \quad - q \operatorname{cof} l}{\sqrt{(\delta\delta - 2\delta q \operatorname{cof} c \operatorname{cof} d + qq \operatorname{cof} c^2)}}$$

où

où la plus grande valeur, dont q est susceptible, est $\sin q = \frac{\delta \sin c}{\sqrt{(\sin c^2 - \sin d^2)}} = \frac{\delta \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sqrt{\sin a \sin b}}$, d'où l'on voit, combien les lignes Halleyennes pour les très petites déclinaisons s'éloignent des méridiens PAp & PBp. Mais il est clair en même tems, que ces lignes s'avancent d'autant plus vers le milieu de l'hemisphére, plus la déclinaison croit, & qu'il y en aura une, comme dans le cas précédent, dont les branches se coupent mutuellement, & qui sera la limite entre les petites & les grandes déclinaisons.

PROBLEME X.

LXX. *Trouver la déclinaison δ, dont la ligne Halleyenne est composée des branches, qui se coupent mutuellements.*

SOLUTION.

A' l'endroit où les deux branches se coupent, l'arc du méridien PL qui passe par cet endroit, aura deux valeurs égales. Donc, dans la solution du problême précédent, l'expression $\frac{\cos c \sin(n - q) \sin r}{\sin d \sin n}$, sera égale à l'unité, prise positivement ou négativement. Or, afin que cette expression ne devienne pas plus grande que l'unité, il faut que l'unité soit la plus grande valeur. Voilà donc à quoi revient la solution du problème : Il faut que l'expression $\frac{\cos c \sin(n - q) \sin r}{\sin \cdot \sin n}$ soit égale à l'unité, & que son différentiel soit en même tems $= 0$. Mais, tant pour la facilité du calcul, que pour rendre notre recherche plus générale, je me tiendrai aux formules plus générales

$$\operatorname{tang} r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \quad \& \quad \cos(r - p) = \frac{(D \cos q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& il faut qu'il soit

premierement $\quad (D \cos q - E \sin q) \sin r = \pm A$

& ensuite $\quad dr \cos r (D \cos q - E \sin q) = dq \sin r (D \sin q + E \cos q)$.

Or

Or le différentiel logarithmique de l'équation $\tang r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q}$ donne $\frac{dr}{\sin r \cos r} = \frac{dq (B \sin q + \cos q)}{B \cos q - \sin q}$: d'où nous tirons :

$$\cos r^2 = \frac{(B \cos q - C \sin q)(D \sin q + E \cos q)}{(B \sin q + C \cos q)(D \cos q - E \sin q)}$$

& partant $\sin r^2 = \frac{CD - BE}{(B \sin q + C \cos q)(D \cos q - E \sin q)}$

d'où la valeur de tang r fournit $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{B \cos q - C \sin q}{D \sin q + E \cos q}$,

& la premiere égalité : $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{D \cos q - E \sin q}{B \sin q + C \cos q}$.

Posons pour abréger $\frac{AA}{CD - BE} = M$, & nous trouverons

$$\tang q = \frac{D - MC}{E + MB} = \frac{B - ME}{C + MD}, \text{ \& partant}$$

$$(1 - MM)(CD - BE) = M(BB + CC - DD - EE)$$

ou bien

$$A^4 + AA(BB + CC - DD - EE) = (CD - BE)^2.$$

Maintenant, si nous substituons les valeurs du problème précédent, on aura

$$BB + CC - DD - EE = -(1 - \tang \delta^2)(\cos d^2 - \cos c^2)$$

$$CD - BE = -\tang \delta (\cos d^2 - \cos c^2) \quad \& \quad A = \tang \delta \sin d,$$

& de là on tirera enfin

$$\tang \delta = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\sin d} = \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}, \quad \text{ou} \quad \cos \delta = \frac{\sin d}{\sin c},$$

à cause de $\cos d = -\sin \frac{1}{2}(a+b)$ & $\cos c = \sin \frac{1}{2}(a-b)$.

Ensuite, pour le lieu de l'intersection, on aura à cause de $M = -\frac{\operatorname{tang}\delta \sin d^2}{\cos d^2 - \cos c^2} = -\frac{1}{\operatorname{tang}\delta}$, & $E + MB = 0$, l'angle $q = 90°$; & $\sin r^2 = \frac{BE - CD}{BE} = \frac{\cos d^2 - \cos c^2}{\cos d^2}$; & $\cos r = \frac{\cos c}{\cos d}$ donc $\cos(r-p) = -\frac{E}{A}\sin r = 1$, & puisque $p = r$, on aura

$$\sin p = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\cos d} = -\operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} d = \frac{\operatorname{tang}\delta \cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}; \quad \text{ou} \quad \cos p = -\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

ayant déjà trouvé $q = 90°$.

COROLL. 1.

LXXI. Puisque $\frac{B\cos q - C\sin q}{D\sin q + E\cos q} = \frac{D\cos q - E\sin q}{B\sin q + C\cos q}$, cette équation donne d'abord la tangente de $2q$ savoir

$$\operatorname{tang} 2q = \frac{2(BC - DE)}{-BB + CC + DD - EE},$$

& puisque dans notre cas $BC = DE$, on en conclud d'abord $2q = 180°$ & $q = 90°$. Donc, $E + MB = 0$, ou

$$C + MD = 0, \quad \text{\& partant} \quad M = -\frac{C}{D}, \quad \text{ou}$$

$\frac{\operatorname{tang}\delta \sin d^2}{\cos d^2 - \cos c^2} = \frac{1}{\operatorname{tang}\delta}$, c'est à dire $\operatorname{tang}\delta = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\sin d}$ comme auparavant.

COROLL. 2.

LXXII. Or la même valeur de tangente $2q$ donne

$$\sin 2q = \frac{2(BC - DE)}{\sqrt{[4(BC - DE)^2 + (BB - CC - DD + EE)^2]}}$$

&

& ensuite ayant

$$2AA+BB+CC-DD-EE=\sqrt{[4(CD-BE)^2+(BB+CC-DD-EE)^2]}$$

l'égalité des signes radicaux fournit

$$2AA+BB+CC-DD-EE=\frac{2(BC-DE)}{\sin 2q}, \quad \text{ou bien}$$

$$2AA+BB+CC-DD-EE=\frac{BB+CC+DD-EE}{\cos 2q}$$

donc $\qquad \tang q^2=\frac{AA+BB-DD}{AA+CC-EE}.$

COROLL. 3.

LXXIII. Pour notre cas nous aurons donc :

$$\tang q^2=\frac{\tang \delta^2 \sin d^2}{\tang \delta^2 \sin d^2-\cos d^2+\cos c^2},$$

& puisque $\tang 2q=0$, & partant $q=90$, nous en concluons d'abord

$$\tang \delta^2 \sin d^2=\cos d^2-\cos c^2, \quad \text{ou} \quad \tang \delta=\frac{\sqrt{(\cos d^2-\cos c^2)}}{\sin d},$$

ou bien $\qquad \tang \delta=\frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$

COROLL. 4.

LXXIV. Le signe radical marque tant une valeur positive que négative pour la déclinaison δ: de sorte que si δ donne une intersection dans la ligne Halleyenne, la déclinaison $-\delta$ en donnera aussi une, qui sera toujours dans un méridien perpendiculaire à ceux qui passent par les poles magnétiques.

COROLL. 5.

LXXV. Si $Bp=AP$ ou $b=a$, la déclinaison $\delta=\pm a$ donnera une ligne à intersection, & pour l'intersection on aura $q=90°$, & $p=90°$. Mais, si $b=0$, ou si un pole magnétique étoit dans un pole naturel de la Terre, on auroit $\delta = 0$, & $p = 0$: l'interſection ſeroit alors dans ce pole de la Terre, pour une déclinaiſon infiniment petite.

I. REMARQUE.

LXXVI. Examinons plus ſoigneuſement le cas, où l'intervalle $Bp = b$ évanouït, & puisque alors $c = 90° - \frac{1}{2}a$ & $d = 90° + \frac{1}{2}a$, pour trouver les lignes Halleyennes nous aurons d'abord $\tang m = \tang n = - \tang \delta$. Soit donc $m = n = - \delta$, & nous trouverons

$$\tang r = - \frac{\sin \delta}{\tang \frac{1}{2} a \sin (\delta + q)} \text{ \& } \cos (r - p) = - \cos r$$

donc $r - p = \pm (180° - r)$ de ſorte que

$$p = 180° \quad \text{ou} \quad p = 2r - 180°$$

Chaque méridien n'eſt donc coupé que dans un point, l'autre ſe perdant dans le pole p. Or, pour trouver plus commodément l'autre point, poſons $a = 90° + t$, & il faudra chercher l'angle t de ſorte que $\tang t = \frac{\tang \frac{1}{2} a \sin (\delta + q)}{\sin \delta}$, & alors on aura $p = 2t$. Si $q = 0$, on a $t = \frac{1}{2} a$: d'où l'on voit que toutes les lignes Halleyennes ſortent du pole A, & qu'elles rentrent dans l'autre pole P.

2. REMARQUE.

LXXVII. Dans la ſuppoſition que le pole méridional magnétique ſoit réuni avec le pole antarctique p, j'ai poſé la diſtance
Fig. 10. $AP = 30°$, & la figure 10 répréſente les lignes Halleyennes pour les déclinaiſons de 5°, 10°, 15° &c. qui ſont toutes ſemblables à celles, que nous avons trouvées dans la premiere ſection pour les grandes déclinaiſons. Toutes ces courbes, à ce qu'on voit, aboutiſſent aux poles P & A, & n'entrent nulle part dans le pole B, quoique ce point ſelon le calcul appartienne à chacune de ces lignes. En conſtruiſant ces lignes on s'apperçoit dabord, qu'elles contiennent des branches ſemblables, & qu'un grand cercle perpendiculaire à P A B, & tiré par le

le milieu de l'intervalle AP, en feroit le diamètre. Or, fi nous rapportons les lignes Halleyennes à ce diamètre, on verra bientôt, qu'elles font toutes de petits cercles, qui paffent par les deux poles A & P. Soit R le rayon d'un de ces petits cercles pour la déclinaifon δ, prenant pour R l'arc du grand cercle, qui en repréfente le rayon dans la furface de la fphére, & on trouve $\operatorname{cof} R = \operatorname{cof} \frac{1}{2} a \operatorname{cof} \omega$, prenant $\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} \delta}$, ou bien on aura $\operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{fin} \delta}$. La démonftration de ces formules peut conduire à de fort beaux Théoremes de la Trigonomètrie fphérique, mais ce cas eft trop particulier, pour que je m'y arrête.

PROBLEME XI.

LXXVIII. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque les poles magnétiques ne font pas diamètralement oppofés, mais qu'ils fe trouvent pourtant en des méridiens oppofés.*

SOLUTION.

Ayant diftribué cy-deffus les lignes Halleyennes en trois ordres, dont le premier contient les lignes, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel qui lui eft contraire; & le troifième celles, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui eft le plus proche. Entre ces deux ordres le fecond eft quafi la limite, & ne renferme qu'une feule ligne, compofée de deux branches, qui fe croifent quelque part, & forment un point d'interfection, comme on peut voir dans la feptième figure. Ces trois ordres ont lieu dans tous les cas; quoiqu'il puiffe arriver quelquefois, qu'un ou deux évanouiffent ou fe confondent enfemble, comme nous venons de voir dans le cas, où un pole magnétique tomboit dans un pole naturel: car, puisque la ligne du fecond ordre répondoit à une déclinaifon infiniment petite, tant elle que le premier ordre tout entier fe confondoit avec la ligne fans déclinaifon, & toutes les déclinaifons donnoient des lignes du troifième or-

ordre. Mais, ſi aucune des diſtances $AP = a$ & $Bp = b$ n'évanouït, les trois ordres ſeront diſtingués, & pour les bien connoitre, on n'a qu'à déterminer la ligne du ſecond ordre, qui répond à la déclinaiſon δ, en ſorte que

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} d^2 - \operatorname{cof} c^2)}}{\operatorname{fin} d} = \frac{\sqrt{\operatorname{fin} a \operatorname{fin} b}}{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(a+b)}$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{fin} \delta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} d^2 - \operatorname{cof} c^2)}}{\operatorname{fin} c} \ \& \ \operatorname{cof} \delta = \frac{\operatorname{fin} d}{\operatorname{fin} c} = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(a-b)}$$

cette derniere expreſſion rationelle eſt la plus commode pour en tirer la déclinaiſon δ requiſe pour la ligne du ſecond ordre; qui marque auſſi tant $+\delta$ pour la déclinaiſon orientale que $-\delta$ pour l'occidentale. Enſuite nous avons vu que le point d'interſection tombe dans le méridien, où $q = 90°$, & ſa diſtance du pole boréal P ſera l'arc PL, en ſorte que $\operatorname{cof} PL = \frac{\operatorname{cof} c}{\operatorname{cof} d} = -\frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2}(a+b)}$. De là on voit que, ſi $a > b$, ou $AP > Bp$, cette interſection tombe vers le ſud, & ſi $AP < Bp$ vers le nord.

Après avoir déterminé cette ligne, dont une branche paſſe d'un pole magnétique à l'autre, & l'autre branche d'un pole naturel à l'autre, les moindres déclinaiſons donneront des lignes du premier ordre, & les plus grandes des lignes du troiſiéme ordre: qu'on conſtruira par les formules du §. LXII.

EXEMPLE.

LXXIX. Soit la diſtance des poles au nord $AP = 10°$, & au ſud $Bp = 20°$: ayant donc $a = 10$, & $b = 20$, on aura $c = 90 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 95°$, & $d = 90 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 105°$.

De là pour la ligne du ſecond ordre on trouvera la déclinaiſon $\delta = 14°, 9', 36\frac{2}{3}''$. Soit cette déclinaiſon orientale, & cherchons dans tous les méridiens de 10° à 10° les points, par où cette ligne paſſera:

q	r	s	PL	Pl
0′	105°, 0′	95°, 0′	10°, 0′	200°, 0′
10	101 , 24	84 , 37	16 , 47	186 , 1
20	97 , 22	73 , 58	23 , 24	171 , 20
30	93 , 3	63 , 7	29 , 56	156 , 10
40	88 , 35	52 , 10	36 , 25	140 , 45
50	84 , 11	41 , 16	42 , 55	125 , 27
60	80 , 1	30 , 31	49 , 30	110 , 32
70	76 , 16	20 , 1	56 , 15	96 , 17
80	73 , 0	9 , 52	63 , 8	82 , 52
90	70 , 19	0 , 0	70 , 19	70 , 19
100	68 , 15	9 , 36	77 , 51	58 , 39
110	66 , 50	18 , 56	85 , 46	47 , 54
120	66 , 4	28 , 8	94 , 12	37 , 56
130	65 , 57	37 , 16	103 , 13	28 , 41
140	66 , 29	46 , 26	112 , 55	20 , 3
150	67 , 40	55 , 54	123 , 34	11 , 46
160	69 , 29	65 , 12	134 , 41	4 , 17
170	71 , 57	74 , 57	146 , 54	- 3 , 0
180	75 , 0	85 , 0	160 , 0	- 10 , 0

Cette ligne eſt repréſentée dans la figure 11me, où l'on voit outre les lignes ſans déclinaiſon, les lignes pour la déclinaiſen de 5° & 10° du premier ordre, & du troiſième ordre, on voit les lignes de 20° & 25° de déclinaiſon. De là on jugera aiſément, quelle doit être la figure de ces lignes dans tout autre cas, où les poles magnéques ſe trouvent en deux méridiens oppoſés, quelles que ſoient leurs diſtances aux poles naturels de la Terre. Fig. 11.

TROI-

TROISIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre se trouvant dans le même méridien.

PROBLEME XII.

Fig. 11. LXXX. *Les deux poles magnétiques* A & B *étant situés dans un même méridien* P C p, *déterminer la déclinaison magnétique pour chaque lieu proposé de la terre* L.

SOLUTION.

Soit la distance du pole magnétique boréal A au pole arctique $AP = a$, & la distance du pole méridional B au pole antarctique $Bp = b$. La distance des poles magnétiques $AB = 180° - a - b$ soit partagée au milieu C; soit la moitié $CA = CB = 90 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = c$, & l'arc du méridien $CP = d = 90° + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Qu'on tire par le lieu proposé de la Terre L le méridien PLp, & soit la longitude $APL = q$, comptant cet angle depuis le méridien PCp vers l'occident, & la distance au pole arctique $PL = p$; enfin soit δ la déclinaison de la boussole en L, laquelle étant positive soit orientale, de sorte qu'une valeur négative trouvée pour δ marque une déclinaison occidentale. Cela posé, tout le raisonnement demeurant le même, comme dans la section précédente, puisque la différence se trouve uniquement dans les quantités c & d, entant qu'elles dépendent des distances a & b, on trouvera comme cy-dessus la déclinaison magnétique exprimée en sorte

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{(\operatorname{cos}c\operatorname{cos}p - \operatorname{cos}d)\operatorname{sin}q}{-\operatorname{cos}c\operatorname{cos}q + \operatorname{sin}d\operatorname{sin}p + \operatorname{cos}d\operatorname{cos}p\operatorname{cos}q},\quad \text{où}$$

$\operatorname{cos}c = \operatorname{sin}\frac{1}{2}(a+b)$, $\operatorname{cos}d = \operatorname{sin}\frac{1}{2}(b-a)$ & $\operatorname{sin}d = \operatorname{cos}\frac{1}{2}(b-a)$. Donc, en substituant ces valeurs, nous aurons

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{[\operatorname{sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{cos}p - \operatorname{sin}\frac{1}{2}(b-a)]\operatorname{sin}q}{-\operatorname{sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{cos}q + \operatorname{cos}\frac{1}{2}(b-a)\operatorname{sin}p + \operatorname{sin}\frac{1}{2}(b-a)\operatorname{cs}p\operatorname{cs}q}.$$

co-

COROLL. 1.

LXXXI. Par tout l'hemiſphere que la figure repréſente, que je nommerai le ſupérieur, tant ſin q que ſin p ont partout des valeurs poſitives ; mais ſi q & p ſurpaſſent 90°, leurs coſinus deviennent négatifs. D'où l'on voit que le numérateur ne demeure pas toujours poſitif, comme dans la ſection précédente.

COROLL. 2.

LXXXII. Quand l'arc p eſt pris ſi grand, que $\operatorname{cof} p = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$ la déclinaiſon δ évanouit, & ſi l'on augmente au delà l'arc $PL = p$, la déclinaiſon deviendra ſur ce même hemiſphere négative ou occidentale. Et par la même raiſon les deux eſpeces de déclinaiſon auront auſſi lieu ſur l'autre hemiſphere.

COROLL. 3.

LXXXIII. Car, puiſque l'équation demeure inaltérée quoiqu'on prenne δ & q négatifs, la déclinaiſon ſur l'hemiſphere inférieur ſuivra la même loi que ſur le ſupérieur, pourvu qu'on change le titre.

COROLL. 4.

LXXXIV. Si les deux diſtances AP & Bp ſont égales $a = b$; notre expreſſion deviendra $\operatorname{tang}\delta = \frac{\sin a \operatorname{cof} p \sin q}{-\sin a \operatorname{cof} q + \sin p}$. Donc, ſi $p = 90°$, c'eſt à dire partout ſous l'équateur, la déclinaiſon magnétique ſera $= 0$. Or ſi $p = 0$, on aura $\operatorname{tang}\delta = -\operatorname{tang} q$, ou $\delta = 180 - q$; dans l'autre pole ou $p = 180°$, ayant $\operatorname{tang}\delta = \frac{-\sin q}{-\operatorname{cof} q}$, à cauſe du numérateur & dénominateur négatif, on aura $\delta = 180° + q$.

COROLL. 5.

LXXXV. Ces deux dernieres concluſions ont auſſi lieu en général, d'où l'on voit que ſur l'hemiſphere ſupérieur proche du pole boréal P la déclinaiſon ſera $\delta = 180° - q$, & partant orientale ;

 mais

mais proche du pole antarctique p, la valeur $\delta = 180° + q$ indique une déclinaison occidentale.

REMARQUE.

LXXXVI. Voilà donc déjà une grande différence entre le cas de cette section & celui de la précédente. Car auparavant la déclinaison étoit par tout l'hemisphere supérieur orientale, & sur l'autre hemisphere partout occidentale, de sorte que sous chaque méridien elle fut partout de la même espece. Mais dans le cas présent nous voyons, que sur le même hemisphere les deux especes ont lieu, de sorte que sous un même méridien l'aiguille décline tant vers l'est que vers l'oüest. Par là est renversé le fondement, sur lequel M. *Halley* avoit établi son système de quatre poles magnétiques, croyant que s'il n'y en avoit que deux, il seroit impossible, que les deux especes de déclinaison régnassent sous un même méridien, ce qui sera mis dans un plus grand jour par les recherches suivantes.

PROBLEME XIII.

LXXXVII. *Les deux poles magnétiques* A & B *étant placés dans un même méridien* PCp, *trouver les lignes Halleyennes, qui passent par tous les endroits, où il n'y a point du tout de déclinaison.*

SOLUTION.

Ayant posé comme auparavant les distances $AP = a$ & $Bp = b$, puisque pour un lieu quelconque L déterminé par l'angle $CPL = q$ & l'arc $PL = p$, la déclinaison δ est exprimée en sorte

$$\tang \delta = \frac{[\sin \tfrac{1}{2}(a+b)\cos p - \sin \tfrac{1}{2}(b-a)]\sin q}{-\sin \tfrac{1}{2}(a+b)\cos q + \cos \tfrac{1}{2}(b-a)\sin p + \sin \tfrac{1}{2}(b-a)\cos p \cos q},$$

on voit que la déclinaison δ évanouit en deux cas, l'un où $\sin q = 0$, & l'autre où $\cos p = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$; le premier donne ou $q = 0$, ou $q = 180°$, & partant la déclinaison sera nulle, tant sous le méridien PCp qui passe par les deux poles magnétiques A & B, que sous le méridien Pcp qui lui est opposé.

Mais

Mais, puisque l'autre équation $\operatorname{cof} p = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b-a)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (a+b)}$ eft auffi poffible, il y a outre ces deux méridiens encore d'autres endroits, où la déclinaifon évanouit également ; & il eft évident, que tous ces lieux font fitués dans un cercle parallele à l'équateur, dont le finus de latitude eft $= \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b-a)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (a+b)}$. La latitude de ce parallele fera donc boréale fi $b > a$, ou fi l'intervalle méridional Bp eft plus grand que le boréal AP ; & elle fera méridionale, fi AP > Bp. Si ces deux intervalles étoient égaux, ce feroit partout fous l'équateur même, que l'aiguille n'eut point de déclinaifon.

COROLL. 1.

LXXXVIII. Dans ce cas donc, où les deux poles magnétiques A & B fe trouvent dans le même méridien PCp, il y a outre les deux méridiens PCp & Pcp encore un cercle parallele MKN, où la déclinaifon eft nulle, ce qui produit une différence bien remarquable entre ce cas, & celui que j'ai confidéré dans la fection précédente. Fig. 11.

COROLL. 2.

LXXXIX. Pour déterminer ce parallele MKN, fa diftance au pole arctique P, ou l'arc PM, eft tel que $\operatorname{cof} PM = \frac{\operatorname{cof} d}{\operatorname{cof} c} = \frac{\operatorname{cof} CP}{\operatorname{cof} CA}$: d'où l'on déduit cette conftruction. Du point C comme centre avec l'intervalle CA qu'on décrive fur la fphére le petit cercle AKB, & qu'on tire un méridien PK, qui le touche en K, alors le parallele cherché MKN paffera par le point K.

COROLL. 3.

XC. Par ce parallele MKN, & les deux méridiens PCp & Pcp, la furface de la Terre eft en forte partagée en quatre parties, que fur l'hemifphére fupérieur, la déclinaifon eft orientale dans la partie boréale, & occidentale dans la partie méridionale. Or au contraire fur l'autre hemifphére la déclinaifon eft occidentale fur la partie boréale & orientale fur la partie méridionale.

COROLL. 4.

XCI. En paſſant donc tant l'un des deux méridiens que ce parallele MKN on rencontrera toujours une déclinaiſon contraire à celle qu'on a eu auparavant, à moins qu'on ne paſſe par les points d'interſection M ou N, un tel paſſage devant être cenſé double.

REMARQUE.

XCII. Puisque les lignes ſans déclinaiſon forment deux interſections M & N, il eſt évident qu'aucune autre ligne Halleyenne ne ſauroit donner des interſections. Cela eſt auſſi clair par la détermination de la ligne du ſecond ordre, que nous avons donnée dans la ſection précédente; car, puisqu'ici l'intervalle b doit pris négatif, la déclinaiſon δ à laquelle devroit repondre la ligne du ſecond ordre, ſeroit déterminée ainſi $\tang \delta = \frac{\sqrt{-\operatorname{ſin} a \operatorname{ſin} b}}{\operatorname{coſ} \frac{1}{2}(a+b)}$, & partant imaginaire. Cependant, puisque le cas $\delta = 0$ donne en effet une interſection, il faut remarquer, que l'équation, qui nous a fourni cy-desſus cette valeur (69) a été diviſible par $\tang \delta$, de ſorte que ce cas n'en eſt pas exclus. Donc, parce que la ligne du ſecond ordre ſe confond ici avec la ligne ſans déclinaiſon, il n'y aura point de lignes du premier ordre, mais toutes les lignes Halleyennes ſeront du troiſième ordre. Il ne reſte donc que d'en enſeigner la conſtruction, ce que je ferai dans le problème ſuivant.

PROBLEME XIV.

XCIII. *Dans le cas de cette ſection déterminer les lignes Halleyennes pour tous les degrés de déclinaiſon tant vers l'Eſt que vers le Oüeſt.*

SOLUTION.

Fig. 11. Que δ marque la déclinaiſon propoſée, & ſoit L un point dans la ligne que nous cherchons. Poſant maintenant $AC = c$; $CP = d$, $CPL = q$ & $PL = p$, la ſolution de ce problème ſera la même que celle du problème 9, la diverſité de la détermination des quantités c & d par a & b n'y cauſant aucun changement, puisqu'ici nous avons

avons $c = 90° - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ & $d = 90° + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. On commencera donc par chercher deux angles m & n en ſorte que

$$\text{tang}\ m = \frac{\text{tang}\ \delta\ \text{coſ}\ d}{\text{coſ}\ c} = \frac{\text{tang}\ \delta\ \text{ſin}\ \frac{1}{2}(b-a)}{\text{ſin}\ \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang}\ n = \frac{\text{tang}\ \delta\ \text{coſ}\ c}{\text{coſ}\ d} = \frac{\text{tang}\ \delta\ \text{ſin}\ \frac{1}{2}(a+b)}{\text{ſin}\ \frac{1}{2}(b-a)}.$$

Alors pour une longitude CPL $= q$ quelconque on cherchera deux arcs r & s en ſorte que

$$\text{tang}\ r = \frac{\text{tang}\ d\ \text{ſin}\ m}{\text{ſin}(m-q)} = \frac{\text{coſ}\frac{1}{2}(b-a)\ \text{ſin}\ m}{\text{ſin}\ \frac{1}{2}(b-a)\ \text{ſin}(m-q)},\quad \&$$

$$\text{coſ}\ s = \frac{\text{coſ}\,c\ \text{ſin}(n-q)\ \text{ſin}\ r}{\text{ſin}\ d\ \text{ſin}\ n} = \frac{\text{ſin}\frac{1}{2}(a+b)\ \text{ſin}(n-q)\ \text{ſin}\ r}{\text{coſ}\frac{1}{2}(b-a)\ \text{ſin}\ n}$$

De là on conclura deux valeurs pour la diſtance du point L au pole arctique P, ſavoir $p = r \pm s$. Or il ſuffit de calculer les lignes pour les déclinaiſons orientales, puiſque celles qui répondent aux occidentales, où δ négatif, leur ſont ſemblables, & tombent dans l'hemiſphére oppoſé. Toutes ces lignes ſeront du troiſième ordre, & ſortiront de chaque pole magnetique pour rentrer dans le pole voiſin de la Terre ; elles feront auſſi de part & d'autres avec le grand cercle P C p c P des angles égaux à la déclinaiſon δ. Par cette détermination on verra, que les lignes Halleyennes ſeront à peu près telles, qu'elles ſont répréſentées dans la figure 14. qui n'a pas beſoin d'explication. Fig. 14.

COROLL. I.

XCIV. On peut obſerver ici comme cy-deſſus, que ſi l'on applique en A un quart de cercle AE, qui faſſe avec le méridien P C p un angle CAE $= \delta$ vers l'occident, ſi δ eſt poſitif, le grand cercle tiré par les points C & E coupera tous les méridiens P L p en ſorte en O que P O $= r$. Fig. 11.

COROLL. 2.

Fig. 13. & 14. XCV. Or le petit cercle parallele à l'équateur MKN, où la déclinaison est nulle, coupe en sorte les méridiens de l'hemisphére supérieur, que sous la partie vers le Nord la déclinaison est orientale, & sous la partie vers le Sud occidentale.

REMARQUE.

XCVI. Puisque toutes les lignes Halleyennes sont du troisiéme ordre, & que chacune ne s'éloigne du pole qu'à une certaine distance, il sera bon de déterminer pour chaque déclinaison la plus grande distance du pole arctique, afin qu'on sache jusqu'à quelle latitude chaque degré de déclinaison s'étend. Ce sera le sujet du problême suivant.

PROBLEME XV.

XCVII. *Pour chaque déclinaison proposée déterminer la distance, à laquelle la ligne Halleyenne, qui lui répond, s'éloigne du pole boreal de la Terre.*

SOLUTION.

Ayant trouvé entre p & q cette équation :

$$\operatorname{tang}\delta \sin d \sin p + (\operatorname{tang}\delta \cos d \cos q - \cos c \sin q) \cos p = \operatorname{tang}\delta \cos c \cos q - \cos d \sin q$$

il s'agit de déterminer la plus grande valeur de p, laquelle se trouve par la différentiation en supposant $dp = 0$, en sorte

$$(\operatorname{tang}\delta \cos d \sin q + \cos c \cos q) \cos p = \operatorname{tang}\delta \cos c \sin q + \cos d \cos q$$

multiplions la premiere par $\cos q$ & celle-cy par $\sin q$, pour avoir leur somme.

$$\operatorname{tang}\delta \sin d \sin p \cos q + \operatorname{tang}\delta \cos d \cos p = \operatorname{tang}\delta \cos c$$

ou $$\sin d \sin p \cos q = \cos c - \cos d \cos p$$

Multiplions aussi la premiere par $\sin q$ & la seconde par $-\cos q$; & alors leur somme donnera

$$\operatorname{tang}\delta \sin d \sin p \sin q - \cos c \cos p = -\cos d$$

ou

ou $\quad \sin d \sin p \sin q = \dfrac{\cos c \cos p - \cos d}{\tan \delta}$.

Ajoutons enſemble les quarrés de ces deux formules pour éliminer q, & nous aurons

$$\tan\delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = \tan\delta^2 (\cos c - \cos d \cos p)^2 + (\cos c^2 \cos p^2 - \cos d)^2$$

qui ſe réduit à celle-cy :

$$\begin{aligned}\sin\delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = {} & \sin\delta^2 \cos c^2 - 2 \sin\delta^2 \cos c \cos d \cos p + \sin\delta^2 \cos d^2 \cos p^2 \\ & + \cos\delta^2 \cos d^2 - 2\cos\delta^2 \cos c \cos d \cos p + \cos\delta^2 \cos c^2 \cos p^2\end{aligned}$$

& poſant pour $\cos\delta^2$ ſa valeur $1 - \sin\delta^2$, on parvient à

$$\sin\delta^2 \sin c^2 \sin p^2 = (\cos d - \cos c \cos p)^2$$

par conſéquent :

$$- \sin\delta \sin c \sin p + \cos p = \cos d$$

dont la réſolution eſt très aiſée en cherchant un angle g, que $\tan g = \sin\delta \tan c$, & on aura

$$\cos(p + g) = \frac{\cos d \cos g}{\cos c},$$

d'où l'on trouve p doublement.

Pour la longitude q à laquelle répond cette plus grande valeur de p, à cauſe de $\cos c \cos p - \cos d = \pm \sin\delta \sin c \sin p$, on obtiendra

$$\sin d \sin p \sin q = \pm \cos\delta \sin c \sin p, \text{ ou } \sin q = \pm \frac{\cos\delta \sin c}{\sin d}$$

& partant tous ces lieux les plus éloignés du pole P ne tombent pas dans un même méridien, mais plus la déclinaiſon δ approche de $90°$, l'angle q ſera plus petit : qui évanouïra, ſi $\delta = 90°$.

COROLL. I.

XCVIII. Si l'on poſe $\dfrac{\cos d \cos g}{\cos c} = \cos h$, on aura $p + g = \pm h$ & les deux valeurs de p ſeront $p = g \pm h$. Car puiſque pour chaque

que

que déclinaiſon δ il y a deux lignes Halleyennes, l'une boréale, l'autre méridionale, dans les hemiſphéres oppoſés, la plus petite valeur de p ſert pour la boréale, & la plus grande pour la méridionale.

COROLL. 2.

XCIX. Les deux valeurs de q répondent auſſi à ces deux lignes, de ſorte que la poſitive convient à celle qui eſt dans l'hemiſphére ſupérieur; & la négative pour l'inférieur. Nous avons déjà obſervé que ſi δ eſt poſitif, ou la déclinaiſon orientale, la ligne boréale eſt dans l'hemisphére ſupérieur & la méridionale dans l'inférieur.

COROLL. 3.

C. Si la déclinaiſon δ évanouit, on aura $g = 0$, & partant $\operatorname{coſ} h = \frac{\operatorname{coſ} d}{\operatorname{coſ} c}$, & de là $p = \pm h$, ce qui eſt la diſtance du parallele, où il n'y a point de déclinaiſon au pole P. Alors, quoique tous les points de cette ligne ſoyent également éloignés du pole, on trouve pourtant $\operatorname{ſin} q = \pm \frac{\operatorname{ſin} c}{\operatorname{ſin} d}$, & cet angle convient aux déclinaiſons extremèment petites.

COROLL. 4.

CI. Pour de plus grandes déclinaiſons la longitude q devient plus petite, & ſi $\delta = 90°$, on aura $q = 0$, dans ce cas les points les plus éloignés des poles de la Terre ſeront dans les poles magnétiques, par lesquels toutes les ligne Halleyennes paſſent.

EXEMPLE.

CII. Soit $PA = a = 10°$ & $pB = b = 20°$; donc $c = 90° - \frac{1}{2}a - b = 75°$ & $d = 85°$: & calculons pour chaque déclinaiſon tant la plus grande diſtance p au pole P que l'angle $CPL = q$.

Décli-

Déclinaison	Ligne boreale distance p	angle q +	Ligne méridionale distance p	angle q —
0°	70°, 19′	75°, 51′	70°, 19′	75°, 51′
5°	53 , 19	75 , 0	89 , 21	75 , 0
10	40 , 38	72 , 43	106 , 32	72 , 43
15	31 , 58	69 , 29	120 , 0	69 , 29
20	26 , 6	65 , 40	129 , 56	65 , 40
25	21 , 59	61 , 30	137 , 15	61 , 30
30	19 , 2	57 , 7	142 , 40	57 , 7
35	16 , 51	52 , 35	146 , 47	52 , 35
40	15 , 10	47 , 58	149 , 56	47 , 58
45	13 , 54	43 , 17	152 , 24	43 , 17
50	12 , 54	38 , 27	154 , 20	38 , 27
55	12 , 6	33 , 47	155 , 52	33 , 47
60	11 , 29	29 , 0	157 , 5	29 , 0
70	10 , 37	19 , 22	158 , 47	19 , 22
80	10 , 9	9 , 42	159 , 43	9 , 42
90	10 , 0	0 , 0	160 , 0	0 , 0

REMARQUE.

CIII. On voit par ce calcul, que les intervalles entre les lignes Halleyennes deviennent d'autant plus petits, plus la déclinaiſon augmente : ainſi dans les lignes boréales, celle qui répond à 5° eſt éloignée de 17° de la ligne ſans déclinaiſon; or de 5° à 10° il n'y a que 12°, 41′ d'intervalle, & de 10° à 15° l'intervalle eſt 8°, 40′ & ainſi de ſuite. Dans les lignes méridionales les intervalles ſont plus grands, puisque la diſtance des poles du Sud eſt plus grande : car en général plus les poles magnétiques ſont éloignés des poles de la Terre, plus les lignes Halleyennes s'éloignent auſſi des poles; & ſi les poles magnétiques ſe trouvoient effectivement dans un même méridien, par quelques obſervations des grandes déclinaiſons il ne ſeroit pas difficile d'eſtimer la vraye diſtance des poles magnétiques aux poles de la Ter-

 re;

re ; mais, comme il n'eſt pas probable que cela arrive, & quand même il arriveroit, il ne ſauroit durer long tems à cauſe de leur variabilité, il ne vaut pas la peine que je m'y arrête. Cependant le cas où les deux diſtances $AP = a$ & $Bp = b$ ſont égales, ſemble en lui même ſi remarquable, qu'il mérite bien un dévelopement particulier, ce que je ferai dans le problème ſuivant.

PROBLEME XVI.

Fig. 12. CIV. *Si les deux poles magnétiques* A & B *ſont dans le même méridien également éloignés des poles de la Terre* P & p, *déterminer les lignes Halleyennes, pour tous les degrés de déclinaiſon.*

SOLUTION.

Puisqu'ici $b = a$, on aura $c = 90° - a$, & $d = 90°$: donc à l'endroit L déterminé par l'arc $PL = p$, & l'angle $CL = q$, la déclinaiſon δ ſera déterminée en ſorte :

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\sin a \cos p \cos q}{-\sin a \cos q + \sin p}.$$

Et partant, ſi la déclinaiſon δ eſt donnée, on aura entre p & q cette équation : $\operatorname{tang} \delta \sin p - \sin a \sin q \cos p = \operatorname{tang} \delta \sin a \cos q$,

pour la conſtruire poſons $\operatorname{tang} r = \dfrac{\operatorname{tang} \delta}{\sin a \sin q}$,

& nous aurons $-\cos(p + r) = \sin a \cos q \sin r$. Soit donc s un tel angle que $\cos s = \sin a \cos q \sin r$, & puisque $p + r = 180° \pm s$, nous aurons les deux valeurs ſuivantes p :

$$p = 180° - r - s \quad \& \quad p = 180° - r + s.$$

La ligne ſans déclinaiſon ſera donc, outre les méridiens PCp & Pcp, l'équateur même de la Terre, & les déclinaiſons orientales ſe trouveront tant ſur l'hemiſphére ſupérieur vers le nord, que ſur l'inférieur vers le ſud : le contraire arrive à l'égard des déclinaiſons occidentales. Toutes ces lignes Halleyennes appartiennent au troiſième ordre, & ſi si l'on veut savoir seulement leur plus grand éloignement des poles, le problème précédent fournit une régle bien facile. Car, à cause de $c = 90 - a$ & $d = 90$, la plus grande distance de la ligne Halleyenne pour la déclinaison δ au pole étant posée $= p$, sera exprimée par cette égalité

$$\sin\delta \cos a \sin p - \sin a \cos p = 0, \quad \text{ou} \quad \tang p = \frac{\tang a}{\sin\delta},$$

& la longitude q, à laquelle cette plus grande distance p se trouve, en sorte : $\sin q = \cos\delta \cos a$.

COROLL. I.

CV. On peut rendre le calcul des lignes Halleyennes plus commode, en cherchant les arcs r & s en sorte que

$$\tang r = \frac{\tang\delta}{\sin a \sin q} \quad \& \quad \cos s = -\sin a \cos q \sin r,$$

car alors les deux valeurs de p seront

$$p = s - r \qquad \& \qquad p = -s - r.$$

COROLL. 2.

CVI. En prenant δ positif, si l'on donne à q successivement toutes les valeurs depuis $0°$ jusqu'à $180°$, l'arc r sera toujours moindre que $90°$, & tant que q est $< 90°$, l'arc s sera plus grand que $90°$, & partout la premiere valeur $p = s - r$ positive, & l'autre $p = -s - r$ négative plus grande que $90°$, qui s'étendra dans l'hemisphére inférieur au delà de l'équateur.

COROLL. 3.

CVII. Si l'on pose $q = 90° + \Phi$, on aura pour r la même valeur que posant $q = 90° - \Phi$, mais alors au lieu de s on trouvera $180° - s$: donc les deux valeurs de p seront :

$$p = 180° - s - r \quad \& \quad p = -180° + s - r$$

dont la premiere est positive & l'autre négative.

CO-

COROLL. 4.

CVIII. Il ſuffit donc de pouſſer le calcul ſeulement jusqu'à $q = 90$, & puisque les lignes Halleyennes dans les quatre quartiers de la Terre ſont ſemblables entr'elles, il ſuffit de les calculer pour un ſeul quartier, car alors

$$q = 90^\circ - \Phi \quad \text{donne} \quad p = s - r$$

$$\&\quad q = 90^\circ + \Phi \quad \text{donne} \quad p = 180 - s - r$$

prenant $\operatorname{tang} r = \dfrac{\operatorname{tang} \delta}{\sin a \cos \Phi}$ & $\cos s = - \sin a \sin \Phi \sin r$.

COROLL. 5.

CIX. Si l'on prend $\Phi < \delta$, on trouvera la ſeconde valeur de p négative, qui répond à la longitude $q = 90^\circ + \Phi$: il en ſera donc marqué un point dans l'hemiſphére inférieur, où la déclinaiſon n'eſt pas δ, mais $180^\circ + \delta$: qui convient avec la déclinaiſon occidentale de $180^\circ - \delta$, cette ligne étant la continuation de celle qui répond à la déclinaiſon orientale δ.

REMARQUE.

CX. La maniere dont je me ſers ici pour déterminer les lignes courbes tracées ſur une ſurface ſphérique, par une équation entre l'angle $CPL = q$ & l'arc $PL = p$, peut indiquer le même point en pluſieurs manieres. Ainſi l'angle q demeurant le même comme les arcs p, $\pm 360^\circ + p$, $\pm 720^\circ + p$ &c. marquent le même point de la ſphére, les deux coordonnées p & q enſemble peuvent varier pour le même point: car on peut auſſi rapporter le point L à la longitude $180^\circ + q$, ou à cette négative $-(180 - q)$, en prenant au lieu de p l'arc négatif $-p$, ou $360^\circ - p$. Une telle différence dans nos formules ne change donc rien dans les courbes mêmes.

QUA-

QUATRIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant placés en deux méridiens différens.

PROBLEME XVII.

CXI. *Les deux poles magnétiques* A & B *étant placés en deux méridiens différens* PAp & PBp, *déterminer la déclinaison magnétique pour un lieu quelconque* L *de la Terre.* Fig. 15.

SOLUTION.

Soient les distances des poles magnétiques aux poles de la Terre $AP = a$, $Bp = b$, & l'angle que font les deux méridiens des poles magnétiques, $APB = \gamma$. Qu'on tire par les poles magnétiques l'arc de grand cercle ACB dont le milieu soit en C, & posons $CA = CB = c$, & on aura à cause de $PB = 180° - b$;

$$\cos 2c = \sin a \sin b \cos \gamma - \cos a \cos b.$$

Tirons par C le méridien PC, & au lieu des trois élémens principaux a, b, γ, introduisons dans le calcul ces trois dérivés déterminables par ceux-là :

$$CA = CB = c; \ CP = d; \ \& \text{ l'angle } ACP = e.$$

Maintenant soit proposé un lieu quelconque L de la Terre, où $L\delta$ répréſente la direction magnétique, auquel ayant tiré l'arc du grand cercle CL, soit comme dans le problême septième $CL = m$ & l'angle $ACL = n$; & on aura $\tang CL\delta = \dfrac{\tang n\,(1 - \cos c \cos m)}{\cos c - \cos m}$.

Considérons PC comme le premier méridien, & ayant tiré par L le méridien PLp, soit la longitude comptée vers l'occident ou l'angle $CPL = q$, & l'arc $PL = p$. Maintenant le triangle sphérique CPL fournira $\cos CL = \cos m = \cos d \cos p + \sin d \sin p \cos q$

$$\tang PCL = \tang (n - e) = \frac{\sin p \sin q}{\sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q}$$

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{CLP} = \frac{\sin d \sin q}{\cos d \sin p - \sin d \cos p \cos q} = \mathrm{tang}\,(\mathrm{CL}\delta + \delta)$$

posant la déclinaison en L entant qu'elle est orientale, ou l'angle $\mathrm{PL}\delta = \delta$. Posons comme dans le problême huitième pour abréger:

$$\cos d \cos p + \sin d \sin p \cos q = \mathrm{A}; \quad \begin{array}{l} \sin d \cos p - \cos d \sin p \cos q = \mathrm{B} \\ \cos d \sin p - \sin d \cos p \cos q = \mathrm{C} \end{array}$$

& nous aurons:

$$\cos m = \mathrm{A}; \quad \mathrm{tang}\,(n - e) = \frac{\sin p \sin q}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{tang}\, n - \mathrm{tang}\, e}{1 + \mathrm{tang}\, e\ \mathrm{tang}\, n}$$

$$\& \qquad \mathrm{tang}\,(\mathrm{CL}\delta + \delta) = \frac{\sin d \sin q}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{tang}\,\mathrm{CL}\delta + \mathrm{tang}\,\delta}{1 - \mathrm{tang}\,\delta\ \mathrm{tang}\,\mathrm{CL}\delta}$$

d'où nous tirons: $\quad \mathrm{tang}\,\delta = \dfrac{\sin d \sin q - \mathrm{C}\ \mathrm{tang}\,\mathrm{CL}\delta}{\mathrm{C} + \sin d \sin q\ \mathrm{tang}\,\mathrm{CL}\delta}.$

Or de là nous avons $\quad \mathrm{tang}\, n = \dfrac{\mathrm{B}\ \mathrm{tang}\, e + \sin p \sin q}{\mathrm{B} - \mathrm{tang}\, e \sin p \sin q}$

& partant $\quad \mathrm{tang}\,\mathrm{CL}\delta = \dfrac{1 - \mathrm{A}\cos e}{\cos e - \mathrm{A}} \cdot \dfrac{\mathrm{B}\ \mathrm{tang}\, e + \sin p \sin q}{\mathrm{B} - \mathrm{tang}\, e \sin p \sin q}$

Donc substituant cette valeur il proviendra

$$\mathrm{tang}\,\delta = \frac{\mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}q(\mathrm{cs}e - \mathrm{A})(\mathrm{B} - \mathrm{tag}e\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q) - \mathrm{C}(1 - \mathrm{A}\,\mathrm{cs}e)(\mathrm{B}\,\mathrm{tag}e + \mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q)}{\mathrm{C}(\mathrm{cs}e - \mathrm{A})(\mathrm{B} - \mathrm{tag}e\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q) + \mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}q(1 - \mathrm{A}\,\mathrm{cs}e)(\mathrm{B}\,\mathrm{tag}e + \mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q)}$$

ou bien $\quad \mathrm{tang}\,\delta =$

$$\frac{-\mathrm{sn}q(\mathrm{AB}\,\mathrm{sn}d + \mathrm{C}\,\mathrm{sn}p) + \mathrm{cs}e\,\mathrm{sn}q(\mathrm{AC}\,\mathrm{sn}p + \mathrm{B}\,\mathrm{sn}d) + \mathrm{tag}e(\mathrm{A}\,\mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q^2 - \mathrm{BC}) + \cos e\ \mathrm{tang}e(\mathrm{ABC} - \sin d \sin p \sin q^2)}{\mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q^2 - \mathrm{ABC} - \mathrm{cs}e(\mathrm{A}\,\mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q^2 - \mathrm{BC}) + \mathrm{tag}e\,\mathrm{sn}q(\mathrm{AC}\,\mathrm{sn}p + \mathrm{B}\,\mathrm{sn}d) - \cos e\ \mathrm{tang}e \sin q(\mathrm{AB}\sin d + \mathrm{C}\sin p)}$$

Or nous avons vu cy-dessus §. LV. que

$$\mathrm{AC}\sin p + \mathrm{B}\sin d = (1 - \mathrm{AA})\mathrm{cs}p \; ; \; \mathrm{AB}\sin d + \mathrm{C}\sin p = (1 - \mathrm{AA})\cos d$$

$$\mathrm{A}\,\mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q^2 - \mathrm{BC} = (1 - \mathrm{AA})\mathrm{cs}q \; ; \; \mathrm{sn}d\,\mathrm{sn}p\,\mathrm{sn}q^2 - \mathrm{ABC} = (1 - \mathrm{AA})(\sin d \sin p + \cos d \cos p \cos q)$$

donc

donc, puisque le numérateur & dénominateur eſt diviſible par $1-AA$, on trouvera par cette réduction

$$\mathrm{tang}\,\delta = -\frac{\mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{ſin}\,q + \mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{cſ}\,e\,\mathrm{ſin}\,q + \mathrm{tang}\,e\,\mathrm{cſ}\,q - \mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{tang}\,e\,(\mathrm{ſin}\,d\,\mathrm{ſin}\,p + \mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{cſ}\,p\,\mathrm{cſ}\,q)}{\mathrm{ſin}\,d\,\mathrm{ſin}\,p + \mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{cſ}\,p\,\mathrm{cſ}\,q - \mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{coſ}\,q + \mathrm{tg}\,e\,\mathrm{coſ}\,p\,\mathrm{ſin}\,q - \mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{tg}\,e\,\mathrm{ſin}\,q}$$

d'où l'on peut déterminer la déclinaiſon magnétique pour tous les lieux de la Terre par les trois élémens donnés c, d & e.

COROLL. 1.

CXII. Des trois élémens principaux a, b, γ, les trois autres c, d, e, que nous avons introduits dans le calcul, ſont déterminés en ſorte

$$\mathrm{coſ}\,2c = \mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{coſ}\,\gamma - \mathrm{coſ}\,a\,\mathrm{coſ}\,b$$

$$\mathrm{coſ}\,d = \frac{\mathrm{coſ}\,a - \mathrm{coſ}\,b}{2\,\mathrm{coſ}\,c} \quad \& \quad \mathrm{tang}\,e = \frac{\mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{(\mathrm{coſ}\,a + \mathrm{coſ}\,b)\,\mathrm{coſ}\,c}$$

& de là

$$\mathrm{tang}\,APC = \frac{\mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{ſin}\,a + \mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{coſ}\,\gamma} \quad \& \quad \mathrm{tang}\,BPC = \frac{\mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{ſin}\,b + \mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{coſ}\,\gamma}.$$

COROLL. 2.

CXIII. Donc, pour le lieu propoſé L ſi l'on prend $\mathrm{tang}\,q = \dfrac{\mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{ſin}\,b + \mathrm{ſin}\,a\,\mathrm{coſ}\,\gamma}$ le méridien PLp paſſe par le pole magnétique B; & ſi l'on prend $\mathrm{tang}\,q = -\dfrac{\mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{ſin}\,a + \mathrm{ſin}\,b\,\mathrm{coſ}\,\gamma}$ le méridien PLp paſſera par le pole magnétique A.

COROLL. 3.

CXIV. Réciproquement ſi les éléments c, d, e ſont regardés comme donnés, les primitifs a, b, γ en ſont déterminés en ſorte :

$$\mathrm{coſ}\,a = \mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{ſin}\,d\,\mathrm{coſ}\,e + \mathrm{coſ}\,c\,\mathrm{coſ}\,d$$

$$\mathrm{coſ}\,b = \mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{ſin}\,d\,\mathrm{coſ}\,e - \mathrm{coſ}\,c\,\mathrm{coſ}\,d$$

$$\mathrm{tang}\,APC = \frac{\mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{ſin}\,e}{\mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{ſin}\,d - \mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{cſ}\,e} : \quad \mathrm{tang}\,BPC = \frac{\mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{ſin}\,e}{\mathrm{cſ}\,c\,\mathrm{ſin}\,d + \mathrm{ſin}\,c\,\mathrm{cſ}\,d\,\mathrm{cſ}\,e}$$

d'où

d'où $\quad \text{tang}\,\gamma = \dfrac{2\,\text{fin}\,c\ \text{cof}\,c\ \text{fin}\,d\ \text{fin}\,e}{\text{fin}\,d^2 - \text{fin}\,c^2 - \text{fin}\,c^2\ \text{fin}\,d^2\ \text{fin}\,e^2}$.

COROLL. 4.

CXV. Pour faciliter ce calcul, on peut chercher un angle f de forte que $\text{tang}\,f = \text{tang}\,c\ \text{cof}\,e$, & alors on aura

$$\text{cof}\,a = \frac{\text{cof}\,c\ \text{cof}(d-f)}{\text{cof}\,f};\quad \text{cof}\,b = -\frac{\text{cof}\,c\ \text{cof}(d+f)}{\text{cof}\,f}$$

$$\text{tang}\,APC = \frac{\text{tang}\,c\ \text{fin}\,e\ \text{cof}\,f}{\text{fin}\,(d-f)};\quad \text{tang}\,BPC = \frac{\text{tang}\,c\ \text{fin}\,e\ \text{cof}\,f}{\text{fin}\,(d+f)}$$

& $\gamma = APC + BPC$.

PROBLEME XVIII.

CXVII. *Sous chaque méridien de la Terre déterminer les endroits, où la déclinaifon magnétique eft d'une quantité donnée ou vers l'Eft ou vers l'Oüeft.*

SOLUTION.

Ayant établi les élémens c, d, e, qui déterminent la pofition des poles magnétiques fur la Terre, foit δ la déclinaifon magnétique propofée, & dirigée vers l'Eft, fi δ eft un angle pofitif. Prenons PC pour le premier méridien, duquel foit éloigné le méridien propofé PLp vers l'Oüeft de l'angle $CPL = q$, & il s'agit de trouver l'arc $PL = p$ par le moyen de l'équation trouvée dans le problême précédent, que je répréfente de cette façon

$$\text{fin}\,d\ (\text{tang}\,\delta + \text{cof}\,c\ \text{tang}\,e)\ \text{fin}\,p$$
$$+ [\text{cof}\,d(\text{tag}\,\delta + \text{cof}\,c\ \text{tag}\,e)\,\text{cof}\,q - (\text{cof}\,c - \text{tag}\,\delta\ \text{tag}\,e)\,\text{fin}\,q]\ \text{cof}\,p =$$
$$(\text{tang}\,e + \delta\ \text{cof}\,c)\ \text{cof}\,q - \text{cof}\,d\,(1 - \text{tag}\,\delta\ \text{cof}\,c\ \text{tag}\,e)\,\text{fin}\,q$$

Pofons pour abréger

$A = \text{fin}\,d\ (\text{tang}\,\delta + \text{cof}\,c\ \text{tang}\,e)$
$B = \text{cof}\,d\ (\text{tang}\,\delta + \text{cof}\,c\ \text{tang}\,e)$
$C = \text{cof}\,c - \text{tang}\,\delta\ \text{tang}\,e$
$D = \text{tang}\,e + \text{tang}\,\delta\ \text{cof}\,c$
$E = \text{cof}\,d\ (1 - \text{tang}\,\delta\ \text{cof}\,c\ \text{tang}\,e)$

pour

fournit pour avoir à résoudre cette équation :

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

Cherchons comme cy-dessus §. LXI. deux arcs r & s, de sorte que

$$\tan r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \quad \& \quad \cos s = \frac{(D \cos q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& nous aurons pour p cette double valeur $p = r \pm s$. Mais, pour rendre ce calcul plus commode, cherchons deux arcs m & n tels que

$$\tan m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \tan n = \frac{D}{E}$$

d'où nous aurons :

$$\tan r = \frac{A \cos m}{C \sin (m - q)} = \frac{A \sin m}{B \sin (m - q)}$$

$$\tan s = \frac{E \sin r \sin (n - q)}{A \cos n} = \frac{D \sin r \sin (n - q)}{A \sin n}$$

Il ne reste donc que de calculer commodement les valeurs des lettres A, B, C, D & E. Pour cet effet cherchons deux angles f & g tels que

$$\tan f = \tan e \cos c \quad \& \quad \tan g = \frac{\tan e}{\cos c},$$

d'où nous tirons

$$A = \frac{\sin d \sin (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; \quad B = \frac{\cos d \sin (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; \quad D = \frac{\cos c \sin (g + \delta)}{\cos \delta \cos g}$$

$$C = \frac{\cos c \cos (g + \delta)}{\cos \delta \cos g}; \quad E = \frac{\cos d \cos (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}$$

Si nous substituons ces valeurs, tous revient à calculer les angles f, g, m, n, r, & s par les formules suivantes

$$\tan f = \tan e \cos c \quad ; \quad \tan g = \frac{\tan e}{\cos c}$$

$$\tan m = \frac{\cos d \cos g \sin (f + \delta)}{\cos c \cos f \cos (g + \delta)}; \quad \tan n = \frac{\cos c \cos f \sin (g + \delta)}{\cos d \cos g \cos (f + \delta)}$$

tang

$\tang r = \frac{\tang d \sin m}{\sin (m - q)}$; & enfin $\cos s = \frac{\sin r \sin (n - q)}{\tang d \tang (f + \delta) \cos n}$, d'où l'on déduit $p = r \pm s$.

COROLL. 1.

CXVIII. Il faut ici remarquer, que les deux premiers arcs f & g ne dépendent, ni de la déclinaison proposée δ, ni de la longitude q: mais uniquement de la position des poles magnétiques, ou des élémens c, d, e. Ces deux arcs demeurent donc les mêmes pour toutes les déclinaisons δ & toutes les longitudes.

COROLL. 2.

CXIX. Les deux arcs suivans m & n renferment outre les élémens c, d, e la déclinaison magnétique proposée δ; mais, comme ils ne dépendent pas de q, ils demeurent les mêmes pour toutes les longitudes: & ce ne sont que les deux derniers arcs r & s qu'on est obligé de calculer pour chaque longitude.

COROLL. 3.

CXX. On peut aussi observer que $\tang m . \tang n = \tang (f + \delta) \tang (g + \delta)$, d'où le calcul de ces deux arcs sera facilité, quoiqu'il soit sans cela assez promt, puisque la même quantité $\frac{\cos c \cos f}{\cos d \cos g}$ entre dans l'un & l'autre.

COROLL. 4.

CXXI. Par ces formules on calculera aisément toutes les lignes Halleyennes, qui passent par tous les endroits, où la déclinaison est la même. Pour la ligne sans déclinaison les arcs m & n seront déterminés plus simplement en sorte

$$\tang m = \frac{\cos d}{\cos c} \tang f = \cos d \tang e \quad \& \quad \tang n = \frac{\tang e}{\cos d}$$

& de là on aura

$$\tang r = \frac{\tang d \sin m}{\sin (m - q)} \quad \& \quad \cos s = \frac{\sin r \sin (n - q)}{\cos c \sin d \sin n}$$

PRO-

PROBLEME XIX.

CXXII. *Entre toutes les lignes Halleyennes déterminer celle qui est du second ordre, dont les branches forment un point d'intersection.*

SOLUTION.

Pour trouver la déclinaison δ à laquelle répond cette ligne du second ordre, ayant représenté notre équation générale en cette forme:

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

la solution de ce problème est déjà donnée dans le problème X, & ses corollaires, d'où celle-cy nous fournira la plus simple:

$$\tang 2q = \frac{2(BC - DE)}{-BB + CC + DD - EE} \quad \& \quad \tang q^2 = \frac{AA + BB - DD}{AA + CC - EE}$$

Or les valeurs de A, B, C, D, E exposées dans le problème précédent donnent

$$BC - DE = - \cos d \sin c^2 \tang e (1 + \tang \delta^2)$$
$$BB + EE = \cos d^2 (1 + \cos c^2 \tang e^2)(1 + \tang \delta^2)$$
$$CC + DD = (\cos c^2 + \tang e^2)(1 + \tang \delta^2)$$

& partant

$$\tang 2q = \frac{-2 \cos d \sin c^2 \tang e}{\cos c^2 + \tang e^2 - \cos d^2 (1 + \cos c^2 \tang e^2)} = \frac{2 \tang q}{1 - \tang q^2}$$

où la déclinaison δ n'entre plus. Mais pour l'autre formule nous trouvons

$$AA + BB - DD = \sin c^2 (\tang \delta^2 - \tang e^2)$$
$$AA + CC - EE = \sin d^2 (1 + \tang e^2)(\tang \delta^2 + \cos c^2)$$
$$- \cos d^2 \sin c^2 (1 - \tang \delta^2 \tang e^2)$$

& partant $\tang q^2 =$

$$\frac{\sin c^2 (\tang \delta^2 - \tang e^2)}{\sin d^2 (1 + \tang e^2)(\tang \delta^2 + \cos c^2) - \cos d^2 \sin c^2 (1 - \tang \delta^2 \tang e^2)}$$

ou

ou bien $\text{tang}\, q^2 =$

$$\frac{\sin c^2 (\text{tang}\, \delta^2 - \text{tang}\, e^2)}{(1+\text{tang}\, e^2)(\text{tang}\, \delta^2 + \cos c^2) - \cos d^2 (1+\cos c^2 \text{tang}\, e^2)(1+\text{tang}\, \delta^2)}$$

d'où l'on tire $1 - \text{tang}\, q^2 =$

$$\frac{(\cos c^2 + \text{tang}\, e^2)(1+\text{tang}\, \delta^2) - \cos d^2 (1+\cos c^2 \text{tang}\, e^2)(1+\text{tang}\, \delta^2)}{(1+\text{tang}\, e^2)(\text{tang}\, \delta^2 + \cos c^2) - \cos d^2 (1+\cos c^2 \text{tang}\, e^2)(1+\text{tang}\, \delta^2)}$$

& partant $\text{tang}\, q =$

$$\frac{-\cos d \sin c^2\, \text{tang}\, e\, (1+\text{tang}\, \delta^2)}{(1+\text{tang}\, e^2)(\text{tang}\, \delta^2 + \cos c^2) - \cos d^2 (1+\cos c^2 \text{tang}\, e^2)(1+\text{tang}\, \delta^2)}$$

qui se réduisent à celles-cy

$$\text{tang}\, q = \frac{-\sin c^2 \cos d \sin e \cos e}{1 - \cos d^2 (\cos e^2 + \cos c^2 \sin e^2) - \cos \delta^2 \sin c^2} \quad \&$$

$$\text{tang}\, q^2 = \frac{\sin c^2 (\sin \delta^2 \cos e^2 - \cos \delta^2 \sin e^2)}{1 - \cos d^2 (\cos e^2 + \cos c^2 \sin e^2) - \cos \delta^2 \sin c^2}$$

& de là nous parvenons à cette équation

$$\cos \delta^4 \sin c^2 - \cos \delta^2 [1 + \sin c^2 \cos e^2 - \cos d^2 (\cos e^2 + \cos c^2 \sin e^2)] + \sin d^2 \cos e^2 = 0$$

ou à celle-cy

$$\cos \delta^4 \sin c^2 - \cos \delta^2 (\sin c^2 + \sin d^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2) + \sin d^2 \cos e^2 = 0$$

dont la résolution nous découvre la déclinaison δ, pour laquelle la ligne Halleyenne aura des intersections. De là il est évident, que la déclinaison δ peut être prise positivement & négativement.

COROLL. I.

CXXIII. La résolution de cette équation quarré-quarrée donne $\cos \delta^2 =$

$$\frac{\sin c^2 + \sin d^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2 \pm \sqrt{[(\sin c^2 + \sin d^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2)^2 - 4 \sin c^2 \sin d^2 \cos e^2]}}{2 \sin c^2}$$

&

& ensuite $\cos\delta =$

$$\frac{\sqrt{(\sin c^2 + \sin d^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2 + 2\sin c \sin d \cos c)} \pm \sqrt{(\sin c^2 + \sin d^2 - \sin c^2 \cos d^2 \sin e^2 - 2\sin c \sin d \cos c)}}{2\sin c}$$

ou

$$\cos\delta = \frac{\sqrt{[(1+\sin c \sin d \cos e)^2 - \cos c^2 \cos d^2]} \pm \sqrt{[(1-\sin c \sin d \cos e)^2 - \cos c^2 \cos d^2]}}{2\sin c}$$

COROLL. 2.

CXXIV. Mais, pour calculer cette valeur, qu'on cherche les angles h, k & l par ces formules :

$$\tang h = \sin c \sin d \sin e;\quad \cos k = \frac{\cot.c \cot.d \sin h}{\sin(e+h)};\quad \cos l = \frac{\cot.c \cot.d \sin h}{\sin(e-h)}$$

& alors on aura $$\cos\delta = \frac{\cos c \cos d \sin(k \pm l)}{2\sin c \cos k \cos l}.$$

EXEMPLE I.

CXXV. Supposons pour la position des poles magnétiques $AP = a = 15°$; $Bp = b = 25°$; & $APB = \gamma = 40°$ & on trouvera les élémens dérivés :

$CA = CB = c = 71°,10'$; $CP = d = 84°,43'$; $ACP = e = 6°,38'$ & de là les angles $APC = 25°$ & $BPC = 15°$.

Ensuite pour la ligne du second ordre l'équation quarré-quarrée devient $\cos\delta^4 = 2,09367 \cos\delta^2 - 1,09210$ & de là $\delta = 6°,52'$.

REMARQUE.

CXXVI. Par cet exemple on comprend, que l'angle e sera toujours fort petit, & que l'arc $CP = d$ approchera fort d'un angle droit. De là on peut tirer une approximation pour la valeur de δ: car, si $e = 0$, on a ou $\cos\delta = 1$, ou $\cos\delta = \frac{\sin d}{\sin c}$: donc, puisque la derniere est imaginaire dans notre supposition, ou $d > c$, la premiere doit fournir l'approximation. Or, posant $1 - \sin\delta^2$ pour $\cos\delta^2$ notre équation sera

$$\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2 = \sin\delta^2 (\sin d^2 - \sin c^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2) + \sin\delta^4 \sin c^2$$

d'où l'on tire à peu près $\sin\delta^2 = \dfrac{\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \sin c^2}$

& encore plus exactement :

$$\sin\delta^2 = \frac{\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \sin c^2} - \frac{\sin c^2 \cos c^2 \sin d^4 \cos d^2 \sin e^4}{(\sin d^2 - \sin c^2)^3}$$

Mais la premiere donne déjà la valeur de δ à un ou deux minutes près, de sorte qu'on peut prendre $\sin\delta = \dfrac{\cos c \sin d \sin e}{\sqrt{(\sin d^2 - \sin c^2)}}$.

EXEMPLE 2.

CXXVII. Supposons $a = 15°$, $b = 30°$, & $\gamma = 45°$, & on aura

$c = 69°, 4', 48''$; $d = 81°, 57', 30''$; & $e = 7°, 57', 48''$

ensuite les angles $APC = 30°$, $BPC = 15°$; & pour la ligne Halleyenne du second ordre

$$\cos\delta^4 - 2{,}10487 \cos\delta^2 + 1{,}10217 = 0, \ \& \ \delta = 8°, 25'.$$

REMARQUE.

CXXVIII. Si les deux distances a & b étoient égales, d seroit de 90° ; & plus la distance b surpasse a, l'arc d devient plus petit : ainsi dans le dernier exemple d est plus petit que dans le premier. L'arc c dépend principalement des distances a & b, & son complément est un peu plus petit que $\dfrac{a+b}{2}$. En considérant la Carte de *Halley*, il semble que la ligne pour la déclinaison de 10° étoit à peu prés celle du second ordre, d'où l'on peut convenablement déterminer les élémens c, d, e. Or il paroit aussi que la distance b étoit beaucoup plus grande que a, & partant d bien au dessous de 90°.

Si

Si nous posons $c = 70°$, & $d = 82°$, afin que pour la ligne du second ordre il devienne $\delta = 10°$, il faudroit prendre $e = 9°, 10'$. Faisons donc sur cette hypothese, qui selon toute apparence ne s'écarte pas beaucoup de l'état magnétique représenté dans la Table de *Halley*, le calcul, pour en construire une Carte, par laquelle on pourra juger, si deux poles magnétiques sont suffisans pour expliquer les phénomenes de la déclinaison.

HYPOTHESE.

CXXIX. Faisons donc les positions suivantes:

$AC = BC = c = 70°$; $CP = d = 82°$ & $ACP = e = 9°, 10'$

afin que la ligne du second ordre réponde à la déclinaison de 10°.

Pour en déduire les premiers élémens a, b, γ, cherchons un angle i, de sorte que $\operatorname{tang} i = \operatorname{tang} c \operatorname{cos} e$, & l'on aura

$$\operatorname{cos} a = \frac{\operatorname{cos} c \operatorname{cos}(d-i)}{\operatorname{cos} i}; \quad \operatorname{cos} b = -\frac{\operatorname{cos} c \operatorname{cos}(d+i)}{\operatorname{cos} i}$$

$$\operatorname{tang} APC = \frac{\operatorname{tang} e \operatorname{sin} i}{\operatorname{sin}(d-i)}; \quad \operatorname{tang} BPC = \frac{\operatorname{tang} e \operatorname{sin} i}{\operatorname{sin}(d+i)}$$

& $\gamma = APC + BPC$; d'où l'on trouve

$i = 69°, 46'$; $d-i = 12°, 14'$; $d+i = 151°, 46' = 180° - 28°, 14'$

$$\begin{array}{llll} a = 14°, 53'; & APC = 35°, 33'; & & \\ b = 29, 23; & BPC = 17, 45; & & \gamma = 53°, 18' \end{array}$$

Maintenant pour faire le calcul, qu'on commence par les angles f & g qu'on trouve: $f = 3°, 10'$ & $g = 25°, 15'$

de là on aura pour le calcul suivant en logarithmes

$$l \operatorname{tang} m = 9{,}56656 + l \operatorname{sin}(f+\delta) - l \operatorname{cos}(g+\delta)$$

$$l \operatorname{tang} n = 10{,}43344 + l \operatorname{sin}(g+\delta) - l \operatorname{cos}(f+\delta)$$

Passons donc en particulier aux Lignes Halleyennes.

Pour

Pour la Ligne sans déclinaison.

CXXX. Posant $\delta = 0$ on aura $m = 1°,17'$ & $n = 49°,13'$ & delà

$$l \tang r = 9,20463 - l \sin (m - q)$$

$$l \cos s = 10,58984 + l \sin r + l \sin (n - q)$$

d'où l'on fera le calcul pour tous les degrés de longitude en comptant depuis le premier méridien PC vers l'occident.

Longitude q	Les deux valeurs de p		
17°, 45′	150°, 37′	150°, 37′	Dans les méridiens depuis 0°, jusqu'à 17°, 45′, de même que depuis 144°,27′, jusqu'à 180° les valeurs de p sont imaginaires.
20 , —	121 , 26	—174 , 28	Les valeurs négatives de p doivent être prises dans les méridiens opposés : & par cette raison il n'est pas nécessaire de pousser le calcul au delà de 180.
30 , —	95 , 27	—132 , 19	
40 , —	84 , 32	—113 , 16	
50 , —	77 , 20	—101 , 44	
60 , —	71 , 41	— 92 , 55	
70 , —	66 , 44	— 86 , 14	
80 , —	62 , 3	— 80 , 37	
90 , —	57 , 13	— 75 , 25	
100 , —	52 , 0	— 70 , 24	
110 , —	—45 , 56	— 65 , 8	
120 , —	—35 , 57	— 56 , 39	
130 , —	—27 , 53	— 51 , 5	
140 , —	9 , 46	— 37 , 4	
144 , 27	—14 , 53	— 14 , 53	

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison 5° Est.

CXXXI. Posant $\delta = 5^\circ$, on trouve $m = 3^\circ, 28'$ & $n = 54^\circ, 5'$

& de là $\quad l \tan r = 9,63372 - l \sin (m - q)$

$$l \cos s = 10,22257 + l \sin r + l \sin (n - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
13°, 42′	112°, 27′	112°, 27′
15 , —	97 , 34	132 , 18
20 , —	84 , 46	162 , 12
30 , —	74 , 17	—162 , 7
40 , —	67 , 54	—139 , 38
50 , —	62 , 49	—124 , 9
60 , —	58 , 12	—112 , 46
70 , —	53 , 39	—203 , 55
80 , —	48 , 58	— 96 , 42
90 , —	43 , 52	— 90 , 30
100 , —	38 , 7	— 84 , 57
110 , —	31 , 21	— 79 , 41
120 , —	22 , 58	— 74 , 20
130 , —	11 , 59	— 68 , 19
140 , —	— 4 , 0	— 60 , 2
145 , —	—16 , 22	— 52 , 58
148 , 35	—41 , 12	— 41 , 12

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison 5° Oüest.

CXXXII. Posant $\delta = -5°$, on trouve $m = -0°, 43'$ & $n = 43°, 13'$ & de là

$$l \tang r = 8,95151 - l \sin(q - m)$$

$$l \cos s = 10,77994 + l \sin r + l \sin(q - n)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
13°, 43′	−160°, 14′	−160°, 14′
15 , —	−134 , 58	+171 , 30
20 , —	−111 , 24	+139 , 46
30 , —	− 93 , 49	+113 , 41
40 , —	− 84 , 50	+100 , 26
50 , —	− 78 , 44	+ 91 , 54
60 , —	− 73 , 56	+ 85 , 38
70 , —	− 69 , 44	+ 80 , 34
80 , —	− 65 , 48	+ 76 , 10
90 , —	− 61 , 55	+ 72 , 7
100 , —	− 57 , 37	+ 68 , 1
110 , —	− 52 , 42	+ 63 , 38
120 , —	− 46 , 41	+ 58 , 33
130 , —	− 38 , 27	+ 51 , 55
140 , —	− 25 , 2	+ 41 , 8
145 , —	− 13 , 25	+ 31 , 27
148 , 35	+ 9 , 58	+ 9 , 58

Pour

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison 10° Est.

CXXXIII. Posant $\delta = 10°$, on a $m = 5°, 52'$ & $n = 58°, 7'$

& de là $\quad l \text{ tang } r = 9,86190 - l \text{ sin } (m - q)$

$$l \text{ cos } s = 10,05592 + l \text{ sin } r + l \text{ sin } (n - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0'	65°, 1'	+ 98°, 59'
10, —	63, 4	+128, 14
20, —	60, 17	+156, 49
30, —	57, 12	−178, 32
40, —	53, 54	−158, 38
50, —	50, 25	−142, 55
60, —	46, 39	−130, 29
70, —	42, 34	−120, 30
80, —	38, 5	−112, 17
90, —	33, 2	−105, 24
100, —	27, 18	− 99, 32
110, —	20, 38	− 94, 24
120, —	12, 43	− 89, 15
130, —	3, 9	− 85, 47
140, —	− 8, 40	− 82, 6
150, —	−23, 27	− 78, 51
160, —	−41, 38	− 76, 24
170, —	−60, 30	− 78, 18
172, —	−62, 49	− 80, 34
175, —	−64, 35	− 86, 21

Cette ligne n'est pas tout à fait celle du second ordre, mais il s'en faut fort peu; la raison en est, que je n'ai pas assez exactement déterminé cy-dessus la valeur de l'angle e pour ce but peu important. Cette ligne est déjà du troisième ordre, & dans cette hypothese la ligne du second ordre répond à la déclinaison de 9°, 46', 18'.

Pour la Ligne Halleyenne de 10° vers l'Oüeſt.

CXXXIV. Poſant $\delta = -10°$, on a $m = -2°, 36'$ & $n = 35°, 42'$

& de là $\quad l \text{ tang } r = 9,50981 - l \text{ ſin } (q + 2°, 36')$

$l \text{ coſ } s = 10,15963 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (q - 35°, 42')$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0'	−64°, 34'	−131°, 26'
10, —	−65, 17	+177, 17
20, —	−64, 29	+144, 39
30, —	−63, 15	+125, 13
40, —	−61, 46	+112, 52
50, —	−60, 7	+104, 25
60, —	−58, 15	+ 98, 17
70, —	−56, 9	+ 93, 35
80, —	−53, 42	+ 89, 50
90, —	−51, 22	+ 87, 16
100, —	−47, 30	+ 84, 10
110, —	−43, 20	+ 81, 56
120, —	−38, 0	+ 80, 0
130, —	−30, 53	+ 78, 19
140, —	−20, 51	+ 76, 55
150, —	− 5, 43	+ 75, 55
160, —	+18, 11	+ 75, 53
170, —	+52, 7	+ 84, 29
175, —	+61, 24	+103, 34

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison de 15° vers l'Est.

CXXXV. Posant $\delta = 15°$, on a $m = 8°, 34'$, & $n = 61°, 32'$ & de là

$$l \tang r = 10,02527 - l \sin(8°, 34' - q)$$
$$l \cos s = 9,95954 + l \sin r + l \sin(61°, 32' - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations suivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0'	+44°, 29'	+119°, 31'
10 , —	+46 , 50	+135 , 52
20 , —	+47 , 1	+154 , 11
30 , —	+45 , 48	+172 , 16
40 , —	+43 , 40	−171 , 16
50 , —	+40 , 52	−156 , 54
60 , —	+37 , 32	−144 , 42
70 , —	+33 , 43	−134 , 25
80 , —	+29 , 24	−125 , 46
90 , —	+24 , 30	−118 , 28
100 , —	+18 , 59	−112 , 19
110 , —	+12 , 42	−107 , 12
120 , —	+ 5 , 53	−103 , 1
130 , —	− 2 , 29	− 99 , 51
140 , —	−11 , 30	− 97 , 56
150 , —	−21 , 15	− 97 , 49
160 , —	−30 , 56	−100 , 30
170 , —	−39 , 8	−107 , 26

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaison de 15° vers l'Oüest.

CXXXVI. Posant $\delta = -15°$, on a $m = -4°, 23'\frac{2}{3}$; $n = 26°, 15'$, & de là

$$l \text{ tang } r = 9,73640 - l \text{ tang } (q + 4°, 23')$$

$$l \text{ cos } s = 9,83368 + l \text{ sin } r + l \text{ sin } (q - 26°, 15')$$

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°	—25°, 22′	—170°, 38′
10°	—34 , 29	+165 , 29
20	—40 , 32	+146 , 14
30	—44 , 15	+132 , 13
40	—46 , 22	+122 , 12
50	—47 , 22	+115 , 2
60	—47 , 33	+109 , 57
70	—47 , 4	+105 , 4
80	—46 , 0	+103 , 24
90	—44 , 17	+101 , 37
100	—41 , 55	+100 , 39
110	—38 , 44	+100 , 32
120	—34 , 32	+101 , 26
130	—29 , 0	+103 , 39
140	—21 , 40	+107 , 52
150	—12 , 5	+115 , 13
160	— 0 , 5	+127 , 31
170	+13 , 12	+146 , 26

I REMARQUE.

CXXXVII. Quand on trace ces lignes ſur une Carte ou ſur un Globe, on y remarquera d'abord une ſi grande conformité avec les lignes de *Halley*, qu'on puiſſe attendre dans l'incertitude, où nous ſommes encore ſur la vraye poſition des poles magnétiques de la Terre : & l'on ne ſauroit preſque plus douter, que ſi nous en avions une connoiſſance parfaite, l'accord ne devint plus grand, puiſque ces lignes ſont ſuſceptibles d'une variété infinie en changeant tant les diſtances des poles magnétiques aux poles de la Terre, que l'intervalle des méridiens qui paſſent par les poles magnétiques.

II REMARQUE.

CXXXVIII. Cependant je ſuis obligé d'avoüer, que la Carte de *Halley* renferme quelques circonſtances, qu'on ne ſauroit jamais mettre d'accord avec l'hypotheſe de deux poles magnétiques. La principale eſt la diſtance entre les lignes ſans déclinaiſon ſur l'équateur : l'une, à la droite de laquelle la déclinaiſon eſt occidentale & à la gauche orientale, coupe ſur la Carte de *Halley* l'équateur au 17^{me} degré vers l'Oüeſt du méridien de Londres, & l'autre, où la déclinaiſon de part & d'autre ſuit une loi oppoſée le coupe au 119° vers l'Eſt du méridien de Londres, de ſorte que l'intervalle entre ces deux interſections eſt 136°. Or, ſelon le calcul que je viens de faire ici, cet intervalle ſe trouve de 210°, lequel en changeant les élémens pourroit bien devenir plus petit : mais on ne le ſauroit diminuer au delà de 180°, tant qu'on ſuppoſe le pole méridional magnétique plus éloigné du pole antarctique que le pole boréal du pole arctique, & plus avancé vers l'Oüeſt comme les autres phénomenes l'éxigent évidemment. Et ſi l'on pouvoit bien compter ſur les interſections, je dois avoüer qu'il faudroit abandonner cette hypothéſe de deux poles magnétiques.

III REMARQUE.

CXXXIX. Examinons donc plus ſoigneuſement ſur quoi fonde M. *Halley* la poſition de ces lignes ſans déclinaiſon pour l'année

1700. Et d'abord j'observe, que M. *Halley* ne la donne pas lui-même pour fort exacte, tant faute d'un assez grand nombre d'observations, que principalement, puisque la plûpart des observations sur lesquelles cette Carte est dressée, ont été faites très longtems avant l'époque de 1700. Or l'on sait que la déclinaison au même endroit change très considérablement avec le tems, & il auroit falu connoitre exactement ce changement annuel pour chaque endroit, avant qu'on ait pu faire usage de ces observations. A' Paris par exemple la déclinaison fut nulle en 1666, & en 1756 l'aiguille déclinoit de 17°, 45′ vers l'Oüest, d'où il s'ensuit que la ligne sans déclinaison, qui passoit en 1666 par Paris, s'est avancée dans cet intervalle de 90 ans environ par un espace de 100° vers l'Est, ce qui fait plus d'un degré par an. Or il paroit par les observations que M. *Halley* rapporte, qu'à l'Isle de *Helena* la déclinaison étoit 0°, 40′ vers l'Est en 1677; & la Carte montre encore pour 1700 presque la même déclinaison. Ensuite, aux côtes découvertes par Diemen, c'étoit en 1642, que la déclinaison fut observée nulle, & la Carte dressée pour 1700 représente la ligne sans déclinaison à peu près encore au même endroit: quoique par le changement observé à Paris il semble, que cette ligne devroit être avancée dans cet intervalle vers l'Est par 60°, ce qui s'accorderoit fort bien avec l'intervalle de 210°, que mon calcul indique. De là je conclus que cet intervalle a été effectivement en 1700 beaucoup plus grand que la Carte Halleyenne ne le répréfente.

IV REMARQUE.

CXL. La Carte que Mrs. *Mountaine* & *Dodson* ont publiée pour l'année 1744 s'accorde beaucoup plus à cet égard avec ma Théorie, ledit intervalle y étant de 170°: mais elle renferme d'autres irrégularités, qui sont tout à fait incompatibles. Elle donne à la ligne sans déclinaison un tour si bizarre par les Indes orientales, qu'il ne sauroit être accordé avec aucune Théorie: & il semble que les Auteurs y ont voulu représenter à la fois des observations plus vieilles & plus modernes: d'ailleurs les erreurs auxquelles les observations sont assujet-

ties

ries, ne permettroient jamais de découvrir un tel tour bizarre, quand même il y en auroit un. Après cela, la route qu'ils donnent à cette ligne ſans déclinaiſon, & qu'ils tirent par le Japon, eſt ouvertement fauſſe, puisqu'on ſait par les obſervations faites en Sibérie que cette ligne y paſſe: d'où je conclud qu'elle auroit du être continuée depuis l'équateur, par la Chine, & de là par la Tartarie: & par cette raiſon les lignes qu'ils ont tirées dans la Mer pacifique, ſurtout dans ſa partie ſeptentrionale, doivent manquer de fondement.

V REMARQUE.

CXLI. Au reſte le cas que je viens de calculer, ne différera pas beaucoup de l'état magnétique de la Terre pour l'année 1744, ſi l'on place, autant que je puis conclure des obſervations qui paroiſſent les plus certaines, le pole magnétique ſeptentrional dans le méridien marqué de 250° dans les Cartes: car alors on obtiendra, tant pour l'Europe que pour l'Amérique ſeptentrionale, les déclinaiſons qu'on a obſervées actuellement. Or pour les côtes du Bréſil elles deviendroient un peu trop petites; mais, pour redreſſer cette erreur, on n'a qu'à augmenter la diſtance du pole méridional magnétique, ou à augmenter l'angle γ entre les méridiens tirés par les poles magnétiques. Je crois qu'il faudroit faire l'un & l'autre à la fois pour expliquer les déclinaiſons obſervées ſur les côtes orientales de l'Afrique, & aux Indes orientales, puisqu'ici les grandes déclinaiſons s'étendent jusqu'à l'équateur. Comme ici j'ai ſuppoſé $a = 14°, 53'$; $b = 29°, 23'$; & $\gamma = 53°, 18'$, il ſera bon de calculer encore quelques autres hypothéſes, en laiſſant deux élémens les mêmes, & changeant ſeulement le troiſième: car alors, ſi l'on dreſſe ſur chacune une Carte en ſorte, qu'elle reponde aux délinaiſons de l'Europe, on verra aiſément laquelle approche le mieux aux autres parties de la Terre. Par ce moyen, après avoir fait quelques repréſentations ſur des hypotheſes différentes, il ne ſera pas difficile d'en conclure la vraye ſituation des poles magnétiques, qui a eu lieu alors. Après quelques eſtimes je voudrois croire, qu'en A. 1744. la diſtance a étoit plus petite que $14°, 53'$, & la dis-

diſtance b un peu plus grande que $29°, 23'$: mais qu'il faudroit augmenter l'angle γ au de là de $60°$: ces trois corrections ſemblent néceſſaires pour repréſenter les grandes déclinaiſons dans les mers des Indes orientales.

HYPOTHESE.

CXLII. Pour repréſenter à peu près les lignes magnétiques pour à préſent, j'ai dreſſé une Carte ſemblable à celle de *Halley* ſur les élémens ſuivans : $a = 14°$, $b = 35°$, & $\gamma = 63$ d'où l'on a $c = 68°, 31'$, $d = 78°, 5'$, & $e = 10°, 41'$ & les lignes qui ſe croiſent, répondent à la déclinaiſon de $12°, 5'$. Si l'on compare cette Carte avec celle qui a été publiée en Angleterre pour l'année 1744. on y remarquera un aſſez bel accord, ſur tout à l'égard des déclinaiſons qui paroiſſent les plus ſures. Et ſi l'on y découvre quelques aberrationis, il ne ſera pas difficile de trouver les corrections qu'il faudra apporter aux élémens ſuppoſés. Les réflexions ſuivantes nous pourront fournir les éclairciſſemens néceſſaires là deſſus.

I. Puiſque la déclinaiſon à l'Isle de S. Helene a ſurpaſſé $5°$, & qu'à Paris la déclinaiſon n'a pas été ſi grande que ſur ma Carte, je voudrois d'abord reculer toutes les lignes magnétiques de $10°$ vers l'ouëſt, pour la mettre d'accord avec les obſervations. Or, ſi depuis 1744. jusqu'à préſent les poles magnétiques étoient avancés vers l'eſt de $10°$, la Carte devroit répondre à l'état préſent, ce qui eſt la raiſon que je les ai fixés en ſorte ſur la Carte.

II. Maintenant les déclinaiſons marquées ſur la Carte aux côtes orientales du Bréſil, étant parfaitement d'accord avec celles que marque la Carte Angloiſe pour l'an 1744 : cet accord ſera détruit, lorsqu'on avance toutes les lignes de $10°$ vers l'oüeſt : mais on on y remédiera en augmentant la diſtance du pole magnétique méridional au pole antarctique. Je voudrois donc mettre $b = 40°$: & par là on s'approcheroit auſſi davantage des grandes déclinaiſons, qui s'obſervent vers l'équateur dans la Mer des Indes.

III. Si la déclinaiſon dans le détroit de Hudſon a été de 35° A. 1744, il eſt clair qu'il faudroit auſſi augmenter la diſtance du pole magnétique boréal au pole arctique ; peut être ſuffira-t-il de poſer $a = 17°$. Au reſte je ne trouve aucune raiſon, pourquoi il faudroit changer l'angle γ ; de ſorte que ſuppoſant ces élémens : $a = 17°$, $b = 40°$, & $\gamma = 63°$, on repréſentera aſſez exactement l'état des lignes magnétiques pour l'année 1744. Cependant ces élémens ne ſont pas ſi exacts, qu'il vaudroit la peine d'y fonder un nouveau calcul.