DE METHODO DIOPHANTEAE ANALOGA IN ANALYSI INFINITORVM

AVCT. *L. EVLERO.*

Quanta affinitas inter analysin finitorum et infinitorum intercedat, cum vtraque ex iisdem principiis sit nata, atque similibus operationibus contineatur, nemo ignorat, qui in vtroque calculi genere vel leuiter fuerit versatus. Multo latius autem hanc affinitatem patere deprehendi, quam vulgo putari solet, et quemadmodum in analysi finitorum ea methodus, quae Diophanto accepta refertur, insignem occupat locum, ita etiam in analysi infinitorum eiusmodi dari calculi genus obseruaui, qui methodo Diophanteae penitus sit similis, similibusque operationibus absoluatur. Quanquam autem huius methodi in analysi infinitorum nonnulla iam passim occurrunt specimina, quorum deinceps mentionem sum facturus, tamen in iis nulla certa solutionis via cernitur, sed solutiones casu potius ac diuinatione inuentae videntur, ita vt in hoc calculo certa ac tuta methodus adhuc desideretur. Quamobrem mihi quidem nouum calculi genus in medium proferre videor, qui omnino dignus sit, in quo vberius excolendo Geometrae vires suas exerceant. Mihi quidem tantum contigit prima eius fundamenta eruere, quae autem iam ad plurima satis illustria ac non parum recondita problemata soluenda da sufficiunt; eaque hic quantum potero, breuiter et dilucide exponam, quo aliorum, qui in hoc genere elaborare voluerint, opera promoueatur ac subleuetur.

Vt igitur primum indolem et naturam huius nouae methodi definiam, ea ex similitudine methodi diophanteae commodissime petetur. Quemadmodum enim methodus Diophantea ad problemata indeterminata est accommodata, atque ex infinita solutionum multitudine eas elicere docet, quae quantitatibus rationalibus contineantur: ita noua nostra methodus quoque nonnisi indeterminata problemata complectitur; et cum discrimini, quod in analysi finitorum inter quantitates rationales et surdas statui solet, in analysi infinitorum discrimen inter quantitates algebraicas ac transcendentes respondeat, nouae nostrae methodi vis in hoc erit posita, vt ex infinita cuiusque problematis solutionum copia, eae secernantur, quae quantitatibus algebraicis contineantur. Huiusmodi igitur problemata indeterminata methodo nostrae sunt propria, quorum solutio in genere concepta formulas transcendentes, seu integrales inuoluit, ex quibus deinceps eos casus elici oportet, quibus quantitates illae transcendentes in algebraicas abeunt, seu, quod eodem redit, formulae illae integrales integrationem admittant.

Per exemplum tam natura huius nouae methodi, quam eius affinitas cum methodo diophantea clarius elucescet. Vti enim in methodo diophantea quaeri solet, quomodo quantitates x et y inter se debeant esse comparatae, vt haec formula $\sqrt{(xx+yy)}$ fiat rationalis, ita in noua nostra methodo huic similis erit ista quaestio, qua inter quantitates variabiles x et y ea quaeritur conditio, vt formula specie transcendens $\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ fiat algebraica, seu vt huius formulae valor algebraice exhiberi queat. Manifestum est, hoc problemate, quod instar exempli attulimus, quaeri curvas algebraicas, quae sint rectificabiles; relatio enim inter x et y, quae coordinatas curuae denotabunt, requiritur algebraica, vnde quaestio circa curuas algebraicas versatur, et cum huius curuae arcus indefinite per $\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exprimatur, quoties ista formula algebraica reddetur, toties ipsa curua erit rectificabilis.

Simili modo si omnes eae curuae algebraicae desiderentur, quae sint quadrabiles, perspicuum est, quaestionem huc redire, vt eae relationes inter quantitates variabiles x et y assignentur, quibus haec formula integralis $\int y\,dx$ integrationem admittat, atque ad valorem algebraicum perducatur.

Etsi autem hic potissimum quantitates algebraicae sunt propositae, perinde atque in methodo Diophantea quantitates rationales spectari solent; tamen eo quoque referendae sunt eiusmodi quaestiones, quibus formulae quaepiam integrales non algebraice exprimi, sed propositam quandam transcendentium quantitatum speciem implicare debent; veluti si quaerantur eiusmodi curuae algebraicae, quarum rectificatio non algebraice perfici queat, sed a quadratura circuli pendeat. Variae enim transcendentium quantitatum species commodissime per quadraturas cognitarum curuarum designantur. Facile autem intelligitur, eandem methodum, quae curuas rectificabiles inuenire docet, quoque ad eas curuas, quarum rectifi-

rectificatio a data quadratura pendeat, inueniendas aptam fore, id quod ex sequentibus clarius perspicietur.

Huiusmodi problema iam ante complures annos a Celeb. *Hermanno* extat propositum, quo eiusmodi curuam algebraicam quaesiuerat, quae non esset rectificabilis, sed cuius rectificatio a quadratura datae curuae penderet, quae tamen nihilo minus tot, quot lubuerit, arcus absolute rectificabiles haberet. Propositione huius problematis tum temporis summus Analyseos promotor *Ioh. Bernoullius* b. m. adeo obstupuit, vt non solum hoc problema ab *Hermanno* solutum esse non crediderit, sed etiam sagacitatem humanam longe superare pronunciauerit; quod quidem nemini mirum videri debet, cum illo tempore nulla plane vllius methodi vestigia patuissent, cuius ope huiusmodi problemata tractari possent. *Hermannus* etiam eius solutionem per longas ambages ex quadam linearum curuarum contemplatione hauserat, vnde primo intuitu nihil plane emolumenti ad propositum expectare licuerat, ita vt inopinato ad solutionem ante peruenisset, quam de ipso problemate cogitasset. Visa autem ista *Hermanni* solutione, *Bernoullius* etiam aliam publicauit solutionem ex sola analysi petitam: sed cuius fundamentum tantopere est absconditum, vt diuinatione potius, quam vlla certa via, formulas suas solutionem continentes eruisse videatur.

Cum hoc problema non solum ob summam, qua implicabatur, difficultatem, sed etiam ob eximium vsum, qui inde in analysin redundare videbatur, omnium tum temporis Geometrarum admirationem excitasset, nemo tamen quantum constat, in certam atque ad huius iusmodi problemata accommodatam methodum inquisiuit, qua nouus omnino analyseos infinitorum quasi campus aperiretur. Ego igitur longo post interuallo fortasse primus de principiis nouae huius methodi cogitare coepi, quorum beneficio memorati illius problematis solutio directe sine ambagibus ac diuinatione obtineri posset. Detexi quoque regulas quasdam non contemnendas, quae ad nouae istius methodi fundamenta iacienda idonea sunt visa, earumque ope non solum plures problematis illius, quod erat agitatum, solutiones sum adeptus, sed etiam nonnulla alia eiusdem generis problemata dedi soluta, cuiusmodi est illud, cuius solutionem exhibui in Dissertatione de duabus curuis algebraicis ad communem axem relatis inueniendis, quae non sint rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vt amborum arcuum eidem abscissae respondentium summa algebraice exprimi possit. Fontem solutionis, quam ibi dedi, de industria celaui, cum mihi esset propositum prima quasi huius methodi elementa seorsim explicare, quo eorum vsus amplissimus clarius perspiciatur, neque ea ad hoc vnicum problema adstricta videantur. Fateri quidem statim cogor, me leuem adhuc partem tantum huius nouae methodi, quam hic propono, enucleasse; verum his principiis stabilitis, non dubito, quin ea mox maiora incrementa sit acceptura.

Diuisio huius methodi in partes secundum naturam formularum integralium, quarum valores algebraici sunt efficiendi, commodissime instituetur. Cum enim semper relatio inter duas quantitates variabiles x et y quaeratur

quaeratur, vt vna pluresue formulae integrales, quae has variabiles vna cum ſuis differentialibus inuoluant, algebraicos obtineant valores, huiusmodi formulas in ſequentes ordines diſtribui conueniet:

Ordo primus continebit huiusmodi formulas $\int Z dx$, vbi Z eſt functio quaecunque algebraica ambarum quantitatum x et y.

Ad ordinem ſecundum refero eas formulas $\int Z dx$, in quibus poſito $dy = p dx$, littera Z eſt functio non ſolum ipſarum x et y, ſed etiam ipſius p. Vbi notandum eſt, non ſolum formulam $\int Z dx$, ſed etiam hanc $\int p dx = y$ algebraicos habere debere valores. Huc reducuntur eae formulae integrales, in quibus ambo differentialia dx et dy occurrunt, veluti $\int V (dx^2 + dy^2)$, quae poſito $dy = p dx$ ad hanc formam $\int dx V (1 + pp)$ reuocatur.

Ordo porro tertius eiusmodi comprehendet formulas integrales, in quibus etiam differentialia ſecundi gradus inſunt, quae autem, ponendo $dy = p dx$ et $dp = q dx$, ad hanc formam $\int Z dx$ perducentur, vbi littera Z erit functio quantitatum x, y, p, et q. His igitur caſibus non ſolum formulae $\int Z dx$, ſed etiam harum formularum $\int p dx$ et $\int q dx$ valores algebraici effici debebunt.

Ordo quartus complectetur eas formulas integrales, quae quantitatum x et y differentialia etiam tertii gradus inuoluunt; haeque ad formam $\int Z dx$ reducentur, ponendo $dy = p dx$; $dp = q dx$ et $dq = r dx$, vbi quantitas Z continebit praeter quantitates x et y etiam has

has p, q, et r. Hincque ſimul ratio ſequentium ordinum intelligitur.

Praeter hos ordines peculiarem claſſem conſtituunt eiusmodi formulae $\int Z\,dx$, inquibus Z non ſolum quantitates algebraicas $x, y, p, q,$ etc. vti in his ordinibus, continet, ſed etiam formulas integrales complectitur, veluti ſi fuerit $Z = x\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ſeu $Z = x\int dx \sqrt{(1+pp)}$, ita vt haec quantitas $\int x\,dx\int dx\sqrt{(1+pp)}$ efficienda ſit algebraica, pro quo relatio inter quantitates x et p definiri debeat. In hoc exemplo primum patet, cum ſit $dy = p\,dx$, valorem huius formulae $\int p\,dx$ eſſe debere algebraicum. Deinde etiam valorem huius $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ eſſe oportebit algebraicum, qui ſi ponatur $= s$, tandem haec formula $\int x\,s\,dx$ ad valorem algebraicum erit perducenda, ita vt vnica haec formula $\int x\,dx\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ reductionem harum trium formularum

I. $\int p\,dx = y$; II $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s$; III $\int x\,s\,dx$ ad valores algebraicos requirat. Ex quo intelligitur, etiam huiusmodi formulas ad ordines ante enumeratos reuocari poſſe.

Totum igitur negotium nouae huius methodi, quam examini Analyſtarum propono, in hoc conſiſtit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles x et y inueſtigetur, quae vnam pluresue formulas integrales, cuiusmodi in ordinibus ſupra deſcriptis ſum complexus, algebraicas reddat. Hic autem non ſolum problemata occurrunt difficillima, a quorum ſolutione equidem adhuc longe ſum remotus, ſed etiam fortaſſe eiusmodi excogitari

gitari possunt, quae nullam plane solutionem admittunt; omnino vti vsu venire solet in problematibus ad methodum Diophanteam pertinentibus. Vnde etiam sine dubio haec similitudo locum inueniet, vt alia problemata solutionem generalem, alia vero tantum solutiones speciales permittant.

Huiusmodi igitur problemata hic tantum proferam, quorum solutionem inueni, vt hoc modo specimen ac prima quasi elementa nouae methodi, quam vlterius excolendam propono, exhibeam, quae etsi exiguam tantum partem huius methodi constituere videntur, tamen viam, qua vlterius progredi liceat, patefacient. Certa autem inde earum operationum ratio perspicietur, quae directe nihilque diuinationi tribuendo ad solutiones eorum problematum, quae ante commemoraui, perducant.

LEMMA.

1. *Formula $\int y\,dx$ erit algebraica, si haec $\int x\,dy$ fuerit talis, et generatim, a qua quadratura pendebit integratio alterius formulae $\int y\,dx$, ab eadem quoque alterius $\int x\,dy$ integratio pendebit.*

Demonstratio est manifesta, cum sit $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, vnde patet, si formula $\int x\,dy$ fuerit vel algebraica, vel datam quadraturam implicans, eandem quoque naturam habere alteram formulam $\int y\,dx$.

COROLLARIVM.

2. Simili modo integratio huius formulae $\int yx\,dx$, vel huius $\int y\,x^n\,dx$ pendebit ab integratione huius

 $\int xx\,dy$

$\int x\,x\,dy$, vel huius $\int x^{n+1}\,dy$, ob $\int y\,x\,dx = \frac{1}{2}y\,x\,x - \frac{1}{2}\int x\,x\,dy$, vel ob $\int y\,x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,y\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,dy$: vnde perſpicitur hoc lemma latiſſime patere, eiusque ope formulas omnis generis, quae integrabiles ſint reddendae, in alias transformari poſſe.

SCHOLION.

3. Lemma hoc, quantumuis leue ac triuiale videatur, tamen praecipuum continet fundamentum nouae illius methodi, quam ſum adumbraturus. Si enim propoſita formula integrali quacunque $\int Y\,dX$ alia detur $\int V\,dZ$, vt ſit $A\int Y\,dX + B\int V\,dZ$ quantitas algebraica, manifeſtum eſt, harum duarum formularum $\int Y\,dX$ et $\int V\,dZ$ rationem ita eſſe comparatam, vt ſi altera fuerit integrabilis, etiam alteram fore integrabilem, et a quanam quadratura alterius integratio pendeat, ab eadem quadratura etiam alterius integrationem pendere. Reſolutio autem praecipuorum problematum ad hanc methodum pertinentium abſoluetur ideonea formularum integralium, ad quas peruenitur, transformatione.

PROBLEMA I.

4. Inuenire omnes curuas algebraicas, quae ſint quadrabiles; ſeu eam inter variabiles x et y relationem in genere definire, vt formula $\int y\,dx$ fiat integrabilis.

SOLVTIO.

Si curuae abſciſſa ponatur $= x$ et applicata orthogonalis $= y$, erit huius curuae area $= \int y\,dx$, cuius valorem

valorem algebraicum esse oportet: quod quidem facillime impetratur. Denotet enim X functionem quamcunque algebraicam ipsius x, huicque functioni X aequalis ponatur area $\int y\,dx$, vt sit $\int y\,dx = X$, erit, differentialibus sumendis, $y\,dx = dX$, vnde fit $y = \frac{dX}{dx}$; sicque applicata y aequabitur functioni algebraicae ipsius x, ex quo curua erit algebraica, eiusque area $\int y\,dx$, cum sit $= X$, algebraice quoque exprimetur.

ALITER.

Cum sit area $\int y\,dx = yx - \int x\,dy$, ponatur $\int x\,dy$ functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$, aequalis, seu sit $\int x\,dy = Y$, vnde fit $x = \frac{dY}{dy}$, ita vt iam abscissa x functioni algebraicae ipsius y aequetur, curuaque fiat algebraica. Posita autem $x = \frac{dY}{dy}$, erit curuae area $\int y\,dx = yx - Y = \frac{y\,dY}{dy} - Y$, ideoque etiam algebraica.

COROLL. 1.

5. Si X in priori solutione, vel Y in posteriori, non fuerit functio algebraica ipsius x, vel y, sed transscendens, ita tamen vt $\frac{dX}{dx}$, vel $\frac{dY}{dy}$, fiat functio algebraica, curua quidem erit algebraica, sed eius quadratura quantitate transcendente exprimetur.

COROLL. 2.

6. Scilicet si in priori solutione sit $X = P + \int Q\,dx$, existentibus P et Q functionibus algebraicis ipsius x, ita tamen, vt $\int Q\,dx$ sit quantitas transscendens, aequatio pro curua $y = \frac{dP}{dx} + Q$ erit quidem algebraica,

 sed

ſed eius area $\int y\,dx = P + \int Q\,dx$ a quantitate transcendente $\int Q\,dx$ pendebit.

COROLL. 3.

7. Simili modo in altera ſolutione ſi ponatur $Y = P + \int Q\,dy$, exiſtentibus P et Q functionibus algebraicis ipſius y, ita tamen vt $\int Q\,dy$ ſit quantitas transcendens, aequatio pro curua $x = \frac{dP}{dy} + Q$ erit algebraica, ſed area, quae erit $\int y\,dx = \frac{y\,dP}{dy} + yQ - P - \int Q\,dy$ a quantitate transcendente $\int Q\,dy$ pendebit.

SCHOLION.

8. Vti huius problematis ſolutio eſt facillima nulloque artificio indiget, ſequens problema, quod quidem alius eſt naturae, adiungam, cuius vero ſolutio in aliis problematibus, quae ad hanc methodum referri ſolent, inſignem vſum praeſtabit. Veluti ſi quaerantur curuae algebraicae generatim non rectificabiles, quae tamen, quot lubuerit, habeant arcus rectificabiles; aliaeue huius generis quaeſtiones proponantur, principium ſolutionis ex ſequente problemate erit petendum.

PROBLEMA. 2.

9. Inuenire curuas algebraicas in genere non quadrabiles, ſed quarum quadratura generalis datam quantitatem transcendentem inuoluat, in quibus tamen, quot lubuerit, areas abſolute quadrabiles aſſignare liceat.

SOLVTIO.

Ex ſolutione praecedentis problematis liquet, hanc quaeſtionem huc redire, vt eiusmodi formula transcendens

dens $\int Q\,dx$ inueſtigetur, cuius valor certis caſibus, veluti ſi ponatur $x=a$, $x=b$, $x=c$ etc. euaneſcat, his enim caſibus quantitas $X=P+\int Q\,dx$, quae in genere eſt transcendens, quippe formulam $\int Q\,dx$ inuoluens, fiet algebraica, nempe $=P$. Hoc vt efficiatur, ſtatuatur, $\int Q\,dx=\int u\,dx-\int v\,dz$, vbi v talis ſit functio ipſius z, qualis u eſt ipſius x, ita vt formulae $\int u\,dx$ et $\int v\,dz$ ſimilem quantitatem transcendentem exhibeant, qua $\int Q\,dx$ contineri debet. Sit autem z eiusmodi functio ipſius x, ita vt caſibus propoſitis $x=a$, $x=b$, $x=c$ etc. quot lubuerit, fiat $z=x$, ideoque et $v=u$, atque perſpicuum eſt, his iisdem caſibus fore $\int v\,dz=\int u\,dx$, hincque $\int Q\,dx=o$. Hunc in finem formetur iſta functio ipſius x.

$$x^n-(a+b+c+\text{etc.})x^{n-1}+(ab+ac+bc+\text{etc.})x^{n-2}-(abc+\text{etc.})x^{n-3}+\text{etc.}$$

quae breuitatis gratia vocetur $=S$, ita vt aequatio $S=o$ praebeat radices $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. eos ſcilicet ipſos valores abſciſſae x, quibus area abſolute quadrabilis reſpondere debet. Tum vero ſtatuatur $z-x=S$, atque manifeſtum eſt, iisdem caſibus $x=a$, $x=b$, $x=c$ etc. fieri $z=x$, omnino vti requiri ad noſtrum propoſitum oſtendimus. Huic autem requiſito generalius ſatisfiet, ſi ponamus $z-x=ST$, dummodo $ST=o$ alias non praebeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. Hanc ob rem ſi S denotet eiusmodi functionem ipſius x, vt aequatio $S=o$ alias non habeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. quod ſemper infinitis modis fieri poteſt, tum ſumatur $z-x=S$, ſeu $z=x+S$.

Quo

Quo facto, si $\int u\,dx$ eam quantitatem transcendentem exprimat, a qua curuae quadratura in genere pendere debet, pro v substituatur talis functio ipsius z, qualis u est ipsius x; atque in formulis superioribus loco $\int Q\,dx$ scribatur $\int u\,dx - \int v\,dz$, ita vt sit $Q = u - \frac{v\,dz}{dx}$. Tum enim si construatur curua algebraica, cuius abscissae $= x$ respondeat applicata $y = \frac{dP}{dx} + u - \frac{v\,dz}{dx}$, eius area in genere erit $\int y\,dx = P + \int u\,dx - \int v\,dz$, pendebit scilicet a quantitate transcendente $\int u\,dx$, cui altera $\int v\,dz$ est similis, nihilo vero minus casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eius area algebraice exprimetur, fietque $\int y\,dx = P$. Hoc ergo modo effici potest, vt curua praecise tot, quot quis voluerit, obtineat àreas quadrabiles, neque plures, neque pauciores.

COROLL. 1.

10. Cum v talis sit functio ipsius z, qualis u est ipsins x, ita vt v obtineatur ex u, si loco x scribatur z, sequitur etiam v talem esse functionem ipsius u, qualis z est ipsius x. Quare cum sit $z = x + S$, sequitur v obtineri ex a, si loco x scribatur $x + S$.

COROLL. 2.

11. Quoniam igitur quantitas v resultat ex functione u, si loco x scribatnr $x + S$, ex proprietate functionum alias demonstrata sequitur fore

$$v = u + \frac{S\,du}{dx} + \frac{S^2\,ddu}{1.2\,dx^2} + \frac{S^3\,d^3u}{1.2.3\,dx^3} + \frac{S^4\,d^4u}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

posito elemento dx constante, sed cum haec expressio in infinitum sit continuanda, praestat valorem ipsius v actuali substitutione definire.

EXEM-

EXEMPLVM.

12. *Inuenire curuam algebraicam, cuius quadratura indefinita pendeat a quadratura circuli, cuius vero area abscissae $x = a$ respondens algebraice exhibeatur.*

Vt quadratura curuae indefinita a quadratura circuli pendeat, ponatur $u = \sqrt{(2fx - xx)}$, et vt posito $x = o$ siue $z = a$, fiat $S = n(a - x)$, vt sit $z = x + na - nx = na - (n-1)x$. Ergo ob $v = \sqrt{(2fz - zz)}$ erit $v = \sqrt{(2naf - 2(n-1)fx - nnaa + 2n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ Ponatur, vt haec formula simplicior euadat, $2f = na$, eritque $v = \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$, et ob $dz = -(n-1)\,dx$ habebitur $Q = \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ ac pro curua erit

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)},$$

area vero erit

$$\int y dx = P + \int dx \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\int dx \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}.$$

Verum hic notandum est, quemadmodum integrale $\int u dx$ ita capi ponitur, vt euanescat posito $x = o$, ita quoque integrale $\int v dz$ ita capi debere, vt euanescat posito $z = o$: Quamobrem vt tota area euanescat posito $x = o$, necesse est, vt quoque fiat $z = o$ hoc casu; alioquin enim expressio areae $\int y dx$ complecteretur quantitatem constantem portionem areae circularis denotantem, quae casu $x = a$ destrueretur. Huic autem incommodo occurretur, si pro S eiusmodi sumatur functio, quae posito $x = o$ euanescat. Sit ergo $S = \frac{nx}{a}(a - x)$, et $z = x + \frac{nx}{a}(a - x)$, et $v = \sqrt{(2fz - zz)}$, atque quaesito satisfiet modo solito. Ponatur, vt expressio fiat simplicissima $n = -1$, vt sit

$z = \frac{xx}{a}$ et $v = \sqrt{\left(\frac{2fxx}{a} - \frac{x^4}{aa}\right)} = \frac{x}{a}\sqrt{(2af - xx)}$ eritque applicata $y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(2fx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$ ob $dz = \frac{2xdx}{a}$: atque area fiet

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{(2fx - xx)} - 2\int \frac{xxdx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$$

quae qualiscunque P fuerit functio ipfius x, in genere femper a quadratura circuli pendebit, cafu autem $x = a$ area fiet algebraica — P

SCHOLION.

13. Circumftantia haec ratione conftantis ad areae expreffionem adiiciendae, ne ea ipfa fit transcendens, in omnibus exemplis probe eft obferuanda. Hunc in finem functio S non folum ita accipi debebit, vt cafibus propofitis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euanefcat, fed etiam cafu $x = o$ euanefcere debebit. Quod quidem per fe eft perfpicuum: nam quia omnis curuae aream abfciffae euanefcenti $x = o$ refpondentem nihilo aequalem affumimus, ideoque a transcendentibus quantitatibus vacuam, euidens eft, quotcunque cafus propofiti fint, quibus area fiat algebraica, iis femper fuperaddendum effe cafum $x = o$, ficque functio S ita comparata effe debebit, vt non folum cafibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. qui funt propofiti, fed etiam cafu $x = o$ fiat $S = o$.

PROBLEMA 3.

14. Si Z fit functio quaecunque algebraica binarum variabilium x et y, definire relationem algebraicam inter x et y, vt formula integralis $\int Z\,dx$ algebraicum obtineat valorem.

SOLV-

SOLVTIO.

Etsi problema hoc multo latius patere videtur, quam primum, tamen eius solutio non est difficilior. Ponatur enim $\int Z\,dx$ functioni cuicunque algebraicae ipsius x, quae sit $= X$ aequale, eritque $Z\,dx = dX$ et $Z = \frac{dX}{dx}$, vbi cum $\frac{dX}{dx}$ sit quoque functio algebraica psius x, habebitur aequatio algebraica inter x et y, qua earum relatio algebraice definietur: indeque erit per hypothesin $\int Z\,dx = X$.

COROLL. 1.

15. Si X non sit functio algebraica ipsius x, sed eius quampiam inuoluat functionem transcendentem, veluti si sit $X = P + \int Q\,dx$, ita vt $\frac{dX}{dx} = \frac{dP}{dx} + Q$, sit nihilominus functio algebraica ipsius x; tum orietur curva algebraica hac aequatione $Z = \frac{dP}{dx} + Q$ expressa, sed valor integralis inde oriundus $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, verum functionem transcendentem $\int Q\,dx$ inuoluet.

COROLL. 2.

16. Si pro Q eiusmodi quantitatem substituamus, qualem in problemate praecedente descripsimus, tum valor quidem indefinitus formulae $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, sed a quadratura quapiam data pendebit. Hoc tamen non obstante effici potest, vt eius valor tot casibus, quot lubuerit, et quidem datis veluti $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. fiat algebraicus. Vbi quidem notandum est, in calculo his casibus superaddendum esse semper casum $x = o$.

SCHOLION.

17. Si igitur vnica proponatur formula integralis ad valorem algebraicum reducenda, eaque pertineat ad ordinem primum, tum quaestio nulla laborat difficultate. Atque simul pari opera effici potest, vt illius formulae integratio a data quadratura pendeat, atque insuper vt tot, quot quis voluerit, casibus algebraicum obtineat valorem. Antequam igitur ad formulas sequentium ordinum progrediar, eiusmodi problemata proponam, quibus duae pluresue formulae ordinis primi simul ad valores algebraicos sint reducendae; ita vt existentibus V et Z functionibus ipsarum x et y, valores harum duarum formularum $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ vel plurium huiusmodi algebraici sint efficiendi. Hic quidem ante omnia animaduerto, haec problemata in genere concepta mihi quidem non solubilia videri, sed nonnisi sub certis conditionibus, quibus functiones V et Z sint praeditae, solutionem admittere. Quibus igitur casibus mihi quidem ad solutionem peruenire licuerit, hic exponam.

PROBLEMA 4.

18. Si P et Q sint functiones quaecunque ipsius x, inuenire relationem ideoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,Q\,dx$ valores algebraicos adipiscantur.

SOLVTIO.

Ponatur vtraque formula seorsim aequalis quantitati cuicunque algebraicae, scilicet

$$\int y\,P\,dx = L \text{ et } \int y\,Q\,dx = M.$$

Hinc

Hinc ergo fiet $y = \frac{dL}{P\,dx}$ et $y = \frac{dM}{Q\,dx}$ ideoque $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, vbi sint L et M functiones nouae cuiuspiam variabilis z, ita vt $\frac{dL}{dM}$ sit functio algebraica huius variabilis z. Ope aequationis ergo inuentae $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$ valor ipsius x, cuius functio est $\frac{P}{Q}$, per z expressus reperietur, ita vt inde proditurum sit $x =$ functioni cuipiam ipsius z. Qua inuenta obtinebitur quoque valor ipsius y per functionem quampiam ipsius z expressus, ope formulae $y = \frac{dL}{P\,dx}$ vel $y = \frac{dM}{Q\,dx}$, sicque vtraque variabilis x et y per nouam variabilem z determinabitur, idque algebraice; vnde relatio inter x et y quaesita innotescet. Ex his autem valoribus erit, vti assumsimus, $\int y\,P\,dx = L$ et $\int y\,Q\,dx = M$, vtraque scilicet functioni algebraicae ipsius z aequalis.

ALIA SOLVTIO.

Ponatur vt ante altera formula $\int y\,P\,dx$ quantitati cuipiam algebraicae L aequalis, seu $\int y\,P\,dx = L$, eritque hinc $y = \frac{dL}{P\,dx}$, qui valor in altera formula substitutus dabit $\int y\,Q\,dx = \int \frac{Q}{P}\,dL$, quae algebraica reddenda restat. Iam vero per lemma praemissum est:

$$\int \frac{Q}{P}\,dL = \frac{LQ}{P} - \int L\,d.\,\frac{Q}{P}.$$

Sicque formula $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ ad algebraicum valorem reduci debet; vbi notandum $d.\,\frac{Q}{P}$ huiusmodi formam $X\,dx$ esse habiturum, vbi sit X functio ipsius x cognita. Ponatur ergo $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ functioni cuicunque ipsius x, quae sit V aequalis, erit $L = \frac{dV}{d(Q:P)}$ functioni scilicet ipsius x. Inuento autem valore ipsius L erit porro $\int y\,P\,dx$

 $= L$;

$= L$; $\int y Q dx = \frac{LQ}{P} - V$ atque variabilis y ita definietur per x, vt fit $y = \frac{dL}{Pdx}$, existente vti inuenimus $L = dV : d.\frac{Q}{P}$: hoc ergo modo immediate, nulla alia noua variabili in subsidium vocata, variabilem y per x dedimus determinatam.

COROLL. 1.

19. Cum in priori solutione altera variabilis x definiri debeat ex aequatione $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, altera vero fit $y = \frac{dL}{Pdx}$, sicque vtraque per nouam variabilem z cuius L et M sunt functiones algebraicae, exprimatur, ambae formulae integrales propositae valores obtinebunt algebraicos scilicet

$$\int y P dx = L \text{ et } \int y Q dx = M$$

COROLL. 2.

20. Per eandem ergo solutionem sumendis pro L et M functionibus transcendentibus ipsius z, ita tamen vt $\frac{dL}{dz}$ et $\frac{dM}{dz}$ sint functiones algebraicae, effici poterit, vt integratio vtriusque formulae propositae $\int y P dx$ et $\int y Q dx$ a data quadratura pendeat; vel vt altera sit algebraica, altera vero datam quadraturam inuoluat.

COROLL. 3.

21. Si ambae hae formulae debeant esse algebraicae, solutio posterior eundem praestat vsum; sumta enim pro V functione quacunque algebraica ipsius x, erit $L = dV : d.\frac{Q}{P}$ quoque functio algebraica ipsius

x;

x; tum vero si statuatur altera variabilis $y = \frac{dL}{P\,dx}$, erit

$$\int yP\,dx = L \text{ et } \int yQ\,dx = \frac{LQ}{P} - V \text{ seu}$$
$$\int yP\,dx = \frac{dV}{d.\frac{Q}{P}} \text{ et } \int yQ\,dx = \frac{Q\,dV}{P\,d.\frac{Q}{P}} - V$$

COROLL. 4.

22. Sin autem in hac solutione pro V capiatur functio transcendens ipsius x, ita tamen vt $\frac{dV}{dx}$ sit functio algebraica, ob $\frac{d(Q:P)}{dx}$ etiam functionem algebraicam, fiet quoque $L = dV : d.\frac{Q}{P}$, ideoque etiam y functio algebraica ipsius x; vnde prioris formulae $\int yP\,dx = L$ valor fiet algebraicus, atque altera tantum $\int yQ\,dx$ a praescripta quadratura V pendebit.

COROLL. 5.

23. Per hanc igitur alteram solutionem effici non potest, vt vtraque formula integralis proposita datam quadraturam inuoluat, dum alterius valor semper reperitur algebraicus. Quare si vtraque debeat habere valorem transcendentem, solutione priore erit vtendum.

EXEMPLVM.

24. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus non solum area $\int y\,dx$, sed etiam areae momentum $\int yx\,dx$ algebraice exhiberi possit.*

Per priorem solutionem ponatur:

$$\int y\,dx = L \text{ et } \int yx\,dx = M$$

erit $y = \frac{dL}{dx} = \frac{dM}{x\,dx}$ vnde fit $x = \frac{dM}{dL}$ et

$y =$

$y = dL : d\left(\frac{dM}{dL}\right)$, vbi pro L et M functiones quaecunque algebraicae nouae variabilis z accipi poſſunt. Nihil ergo impedit quo minus ſtatuatur $L = z$, et pro M ſumatur functio quaecunque ipſius z, quae ſit $= Z$, quo facto erit $x = \frac{dZ}{dz}$ et ſumto elemento dz conſtante $y = \frac{dz^2}{ddZ}$.

Per alteram ſolutionem ponatur $\int y\,dx = L$, vt ſit $y = \frac{dL}{dx}$, erit $\int yx\,dx = \int x\,dL = xL - \int L\,dx$. Statuatur iam $\int L\,dx = V$ functioni cuicunque ipſius x, erit $L = \frac{dV}{dx}$, ideoque $\int y\,dx = \frac{dV}{dx}$ et $\int yx\,dx = \frac{x\,dV}{dx} - V$, vnde poſito elemento dx conſtante applicata y ita per abſciſſam x definietur, vt ſit $y = \frac{ddV}{dx^2}$.

SCHOLION.

25. Me non monente intelligitur, ſimili modo huiusmodi formulas $\int YP\,dx$ et $\int YQ\,dx$ ad valores algebraicos reduci poſſe, ſi Y functionem quamcunque alterius variabilis y deſignet, dummodo P et Q ſint functiones ipſius x; determinationes enim ante pro y inuentae nunc ipſi Y ſunt tribuendae. Quin etiam, ſi Y denotet functionem quampiam ipſarum x et y, ſolutio pari modo abſoluetur: ita reductio harum formularum $\int P\,dx\,\sqrt{(xx + yy)}$ et $\int Q\,dx\,\sqrt{(xx + yy)}$ ad valores algebraicos nullam habebit difficultatem, quoniam hae formulae ſimiles euadent propoſitis, ſi pro $\sqrt{(xx + yy)}$ ſcribatur vnica littera veluti v. Vnde colligitur ope huius problematis ſemper binas huiusmodi formulas $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ ad valores algebraicos perduci poſſe, quaecunque V et Z fuerint functiones ipſarum x et y, dummo-

dummodo $\frac{V}{Z}$ ſit functio ipſius x tantum. Si enim x ſit iſta functio, ſeu $\frac{V}{Z} = x$, loco alterius variabilis y introducatur noua v, vt ſit $v = \frac{V}{X}$ ſeu $v = Z$, atque formulae reducendae erunt $\int v X dx$ et $\int v dx$, quarum reſolutio iam erit in promtu. Inueſtigemus vero etiam alia formularum integralium paria, quae ſimili modo ad valores algebraicos reduci queant, quod eueniet ſi quapiam transformatione ad huiusmodi formas reuocari potuerint.

PROBLEMA 5.

26. Si P et Q fuerint functiones quaecunque ipſius x, inuenire relationem idoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int P dy$ et $\int Q dy$ valores algebraicos adipiſcantur.

SOLVTIO.

Cum per lemma praemiſſum ſit $\int P dy = Py - \int y dP$ et $\int Q dy = Qy - \int y dQ$, quaeſtio huc redit, vt hae duae formulae integrales $\int y dP$ et $\int y dQ$ valores algebraicos conſequantur, quod per problema praecedens duplici modo efficietur.

I. Statuatur enim $\int y dP = L$ et $\int y dQ = M$ erit $y = \frac{dL}{dP} = \frac{dM}{dQ}$, vnde fit $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$: vbi cum $\frac{dP}{dQ}$ ſit functio ipſius x, ſi pro L et M functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis z aſſumantur, vt $\frac{dL}{dM}$ fiat functio huius variabilis z, ex aequatione $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$ quantitas x per z determinabitur, ita vt x aequalis reperiatur functioni cuidam ipſius z. Dehinc aequatio $y = \frac{dL}{dP}$ definiet alteram variabilem y per eandem x: quo facto habebitur:

$$\int P\,dy = \frac{P\,dL}{dP} - L \text{ et } \int Q\,dy = \frac{Q\,dM}{dQ} - M.$$

II. Pro altera solutione fiat $\int y\,dP = L$, vt sit $y = \frac{dL}{dP}$, eritque altera formula $\int y\,dQ = \int \frac{dQ}{dP}\,dL = L.\frac{dQ}{dP} - \int L\,d.\frac{dQ}{dP}$; vbi cum $\frac{dQ}{dP}$ sit functio ipsius x, ponatur $\int L\,d.\frac{dQ}{dP} = V$ functioni cuicunque ipsius x, orietur hinc $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$. Inuenta ergo hac quantitate $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$, quae erit functio ipsius x, habebitur altera variabilis $y = \frac{dL}{dP}$ indeque valores algebraici binarum formularum integralium propositarum erunt:

$$\int P\,dy = Py - L \text{ et}$$
$$\int Q\,dy = Qy - \frac{L\,dQ}{dP} + V.$$

COROLL. 1.

27. Si hae formulae non debeant esse algebraicae, sed datas quadraturas inuoluentes, eadem valebunt quae ad problema praecedens annotaui. Scilicet si vtraque debeat esse transcendens, hoc nonnisi per solutionem priorem praestari poterit, sin autem altera tantum quantitatem transcendentem implicare debeat, per vtramque solutionem satisfieri poterit.

COROLL. 2.

28. Hinc etiam patet si formulae propositae fuerint huiusmodi $\int y\,P\,dx$ et $\int Q\,dy$, reductionem ad valores algebraicos pari modo perfici posse. Cum enim sit $\int Q\,dy = Qy - \int y\,dQ$, has duas formulas reduci opor-

oportebit $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,dQ$, quae non differunt ab iis, quae in praecedente problemate sunt tractatae.

COROLL. 3.

29. Intelligitur etiam, si Y denotet functionem quandam ipsius y, simili modo huiusmodi binas formulas $\int PY\,dy$ et $\int QY\,dy$ ad valores algebraicos reduci posse, dummodo $\int Y\,dy$ integrationem admittat. Posito enim $\int Y\,dy = v$, formulae reducendae erunt $\int P\,dv$ et $\int Q\,dv$, quae hic propositis sunt similes. At si $\int Y\,dy$ sit functio transcendens ipsius y reductio modo hic exposito non succedit.

PROBLEMA. 6.

30. Inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt hae duae formulae integrales $\int y^m x^{n-1}\,dx$ et $\int y^\mu x^{\nu-1}\,dx$ valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Coaequatis his formulis inter se fit $y^m x^n = y^\mu x^\nu$ vnde oritur $y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}}$. Ponatur ergo:

$y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}} z$, vt sit $y^m = x^{\frac{m\nu-mn}{m-\mu}} z^m$ et $y^\mu = x^{\frac{\mu\nu-\mu n}{m-\mu}} z^\mu$

atque formulae propositae abibunt in has:

$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx$ et $\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^\mu\,dx$

Iam vero est:

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n}\, x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^m - \frac{m(m-\mu)}{m\nu-\mu n}\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{m-1}\,dz$$

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^{\mu} dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n} x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu} - \frac{\mu(m-\mu)}{m\nu-\mu n} \int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu-1} dz$$

Nisi ergo sit $m\nu = \mu n$, quo casu haec reductio locum non habet, si ponatur $x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} = v$, quaestio perducetur ad has formnlas:

$$\int v z^{m-1} dz \text{ et } \int v z^{\mu-1} dz$$

quae per problema superius sine difficultate resoluuntur.

ALITER.

Si neque n neque v fuerit $= o$, alia solutio simili modo adhiberi potest. Scilicet cum sit

$$\int y^m x^{n-1} dx = \frac{1}{n} y x - \frac{m}{n} \int x^n y^{m-1} dy \text{ et}$$

$$\int y^{\mu} x^{\nu-1} dx = \frac{1}{\nu} y^{\mu} x^{\nu} - \frac{\mu}{\nu} \int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$$

quaestio redit ad has duas formulas:

$$\int x^n y^{m-1} dy \text{ et } \int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$$

quae posito $x = y^{\frac{\mu-m}{n-\nu}} z$ perinde atque ante tractantur.

COROLL. 1.

31. Si sit vel $m = \mu$ vel $n = \nu$, formulae propositae statim per superius problema reduci possunt, sine vlla praeuia praeparatione. Casu tamen posteriori quo $n = \nu$ excipiendus est casus quo $n = \nu = o$; quia reductio supra praescripta hic non succedit.

COROLL. 2.

32. Per praecepta ergo adhuc tradita huiusmodi binae formulae $\int \frac{y^m dx}{x}$ et $\int \frac{y^{\mu} dx}{x}$ ad valores algebraicos reduci nequeunt.

COROL.

COROLL. 3.

33. Praeterea vero etiam excipiuntur casus, quibus $m\nu = \mu n$, seu $m : n = \mu : \nu$, qui ob eandem rationem reductionem non permittunt. Qui casus quo facilius cognoscantur, sit $m = \alpha\mu$, et $n = \alpha\nu$, erunt formumulae hoc pacto irreductibiles:

$$\int y^{\alpha\mu} x^{\alpha\nu - 1} dx \text{ et } \int y^{\mu} x^{\nu - 1} dx.$$

COROLL. 4.

34. Sit breuitatis gratia $y^{\mu} = z$ et $x^{\nu} = v$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\nu v}$, vnde formulae hae irreductibiles sunt.

$$\frac{1}{\nu}\int z^{\alpha} v^{\alpha - 1} dv \text{ et } \frac{1}{\nu}\int z\, dv.$$

Ac si vlterius ponatur $z = \frac{u}{v}$, hae formulae abibunt in $\frac{1}{\nu}\int \frac{u^{\alpha} dv}{v}$ et $\frac{1}{\nu}\int \frac{u\, dv}{v}$, quae iam in formulis Coroll. 2. exclusis continentur.

COROLL. 5.

35. Reliquis igitur casibus omnibus, qui in his exceptionibus locum non habent, reductio ad valores algebraicos semper absolui poterit, idque duplici modo pro vtraque solutione hic tradita, atque vtroque modo gemina resolutio valebit secundum binas problematis superioris solutiones.

PROBLEMA 7.

36. Si P et Q fuerint functiones ipsius x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt ambae

hae formulae $\int y^m P\, dx$ et $\int y^n Q\, dx$ valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $y = (\frac{Q}{P})^{\frac{1}{m-n}} z$ seu $y = Q^{\frac{1}{m-n}} P^{\frac{-1}{m-n}} z$ ex hacque substitutione assequemur:

$$\int y^m P\, dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^m dx,$$

$$\int y^n Q\, dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^n dx$$

Iam notandum est reductionem, quam intendimus, esse successuram, si haec formula:

$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dx$ integrationem admittat.

Nisi enim haec conditio locum habeat, fateor me solutionem exhibere non posse. Sit igitur

$$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dz = X$$

ideoque X functio algebraica ipsius x, formulaeque reducendae erunt:

$\int z^m dX$ et $\int z^n dX$, vnde resultat

$$\int z^m dX = X z^m - m\int X z^{m-1} dz$$

$$\int z^n dX = X z^n - n\int X z^{n-1} dz$$

Harum autem formularum reductio supra iam idque duplici modo, est ostensa.

COROLL.

37. Si esset $m = n$, problema congrueret cum problemate quarto, ita vt incommoda, quae in hac solutione inde oritura videntur, nihil plane noceant. Conditio

ditio igitur, sub qua reductio propositarum formularum succedit, postulat, vt formula differentialis $P^{\frac{-n}{m-n}}Q^{\frac{m}{m-n}}dx$ integrationem admittat.

PROBLEMA 8.

38. Si V et Z sint functiones ipsarum x et y homogeneae, atque V functio m dimensionum, Z vero functio n dimensionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, qua duae hae formulae:

$\int V dx$ et $\int Z dx$ reddantur integrabiles.

SOLVTIO.

Quia V et Z sunt functiones homogeneae, ita vt ambae variabiles x et y vbique eundem dimensionum numerum compleant, ibi nempe dimensionum numerum m, hic vero n: ponatur $y = tx$, atque functio V abibit in $x^m P$, et Z in $x^n Q$, vbi P et Q erunt functiones quantitatis t. Ita cum per hanc substitutionem fiat

$$V = x^m P \text{ et } Z = x^n Q,$$

formulae ad reducendum propositae erunt

$$\int P x^m dx \text{ et } \int Q x^n dx,$$

vbi P et Q sint functiones alterius variabilis t, cuius ad x relationem inuestigare oportet. Iam hae duae formulae ex duabus variabilibus t et x constantes reducuntur ad

$$\int P x^m dx = \frac{1}{m+1} P x^{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^{m+1} dP$$

$$\int Q x^n dx = \frac{1}{n+1} Q x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} dQ$$

dummo-

dummodo neque m neque n fuerit $= -1$. Quare cum reductio ad has formulas $\int x^{m+1} d\,P$ et $\int x^{n+1} d\,Q$ reuocatur, ponatur $x = (\frac{dQ}{dP})^{\frac{1}{m-n}} z = z\, d\,P^{\frac{1}{n-m}} d\,Q^{\frac{1}{m-n}}$ formulaeque reducendae erunt

$$\int z^{m+1} d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} \text{ et } \int z^{n+1} d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}}$$

quibus valores algebraicos conciliare licebit, si formula differentialis $d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} = (\frac{dP}{dQ})^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q$ absolute fuerit integrabilis; reliquis enim casibus haec reductio non succedit. Ponamus ergo hanc formulam esse integrabilem, et cum eius integrale futurum sit functio algebraica ipsius t, quae sit T, ita vt habeatur

$$\int d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}} = T$$

atque formulae reducendae fient:

$$\int z^{m+1} d\,T = z^{m+1} T - (m+1) \int T z^m d\,z$$
$$\int z^{n+1} d\,T = z^{n+1} T - (n+1) \int T z^n d\,z$$

Hinc cum hae formulae $\int T z^m d\,z$ et $\int T z^n d\,z$ valores algebraicos obtinere debeant, hoc per problema quartum duplici modo efficietur.

COROLL. 1.

39. Patet ergo primo si fuerit vel $m = -1$ vel $n = -1$, reductionem per methodum propositam perfici non posse. Praeterea vero eam quoque locum non habere, nisi formula differentialis $d\,P^{\frac{n+1}{n-m}} d\,Q^{\frac{m+1}{m-n}}$ absolute fuerit integrabilis.

COROL.

COROLL. 2.

40. Quodsi fuerit $m = n$, dummodo vtriusque litterae valor non sit $= -1$, posteriori transformatione non erit opus, sed formulae $\int x^{n+1} dP$ et $\int x^{n+1} dQ$ immediate ope problematis quarti reduci poterunt.

EXEMPLVM.

41. *Quaeratur relatio algebraica inter x et y, vt hae formulae $\int \frac{y^3 dx}{xx}$ et $\int \frac{dx}{x^3}(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ valores algebraicos obtineant.*

Cum hic sit $V = \frac{y^3}{xx}$ et $Z = \frac{1}{x^3}(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, vtraque ergo functio V et Z homogenea, illiusque dimensionum numerus $m = 1$, huius vero $n = 0$, si ponatur $y = tx$, fiet $V = xt^3$ et $Z = (1+tt)^{\frac{3}{2}}$, et formulae reducendae erunt

$$\int t^3 x\, dx \quad \text{et} \int dx\, (1+tt)^{\frac{3}{2}}$$

vnde fit

$$\int t^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} t^3 xx - \tfrac{3}{2} \int x^2 tt\, dt$$

$$\int dx\, (1+tt)^{\frac{3}{2}} = x(1+tt)^{\frac{3}{2}} - 3 \int x\, t\, dt\, \sqrt{(1+tt)}$$

Ponatur iam $x = \frac{z}{t} \sqrt{(1+tt)}$, fietque

$$\int x^2 tt\, dt = \int zz\, dt\, (1+tt) = zz(t+\tfrac{1}{3}t^3) - 2\int (t+\tfrac{1}{3}t^3) z\, dz$$

$$\int x\, t\, dt \sqrt{(1+tt)} = \int z\, dt\, (1+tt) = z(t+\tfrac{1}{3}t^3) - \int (t+\tfrac{1}{3}t^3)\, dz$$

Sit breuitatis gratia $t + \frac{1}{3}t^3 = u$, et cum formulae reducendae sint $\int u\, z\, dz$ et $\int u\, dz$, ponatur

$$\int u\, z\, dz = L \quad \text{et} \int u\, dz = M$$

fiet $u = \frac{dL}{z\, dz} = \frac{dM}{dz}$, ideoque $z = \frac{dL}{dM}$.

 Si

Si igitur L et M fuerint functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis s, aequatio $z = \frac{dL}{dM}$ dabit functionem ipsius s pro z, vnde etiam $u = t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{dM}{dz}$ dabitur per s; ac propterea pro t reperitur hinc valor in s expressus. Hincque porro dabitur per s variabilis $x = \frac{z}{x}\sqrt{(1+tt)}$ et $y = tx$, vnde relatio inter x et y definiri poterit.

Altera solutio posito $\int u\,dz = L$ dabit $\int uz\,dz = \int z\,dL = zL - \int L\,dz$. Sit $\int L\,dz = S$ existente S functione quacunque ipsius z, fiet $L = \frac{ds}{dz}$; porroque $u = \frac{dL}{dz} = t + \frac{1}{3}t^3$; $x = \frac{z}{t}\sqrt{(1+tt)}$ et $y = tx$, vnde denuo relatio inter x et y reperitur. Nam ob $t = \frac{y}{x}$ et $z = \frac{xy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ hi valores in aequatione $\frac{dL}{dz} = \frac{dds}{dz^2} = \frac{3xxy+y^3}{3x^3}$ substituti dabunt aequationem inter x et y.

PROBLEMA 9.

42. Si V et Z fuerint vt ante functiones homogeneae ipsarum x et y, illa quidem m, haec vero n dimensionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae duae formulae $\int V\,dx$ et $\int Z\,dy$ fiant integrabiles.

SOLVTIO.

Ponatur vt ante $y = tx$, fietque $V = x^m P$ et $Z = x^n Q$ existentibus P et Q functionibus nouae variabilis t, et ob $dy = t\,dx + x\,dt$ formulae reducendae erunt:

$$\int P x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}dP$$

$\int Q x$

$$\int Q x^n dy = \int Q x^n t\, dx + \int Q x^{n+1} dt \quad \text{at}$$
$$\int Q t x^n dx = \frac{1}{n+1} Q t x_{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (Q dt + t dQ)$$

vnde habebimus:

$$\int Q x^n dy = \frac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$$

Atque adeo formulae ad valores gebraicos perducendae erunt $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t\, dQ - n\, Q\, dt)$, quae ponendo $x = (\frac{t dQ - n Q dt}{dP})^{\frac{1}{m-n}} z$ reducentur vti in problemate praecedente, dum haec formula differentialis

$$\left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{m+1}{m-n}} dP \text{ fuerit integrabilis.}$$

Vbi quidem iterum excludendi sunt casus, quibus vel $m = -1$ vel $n = -1$; Praeterea vero notandum est si sit $m = n$, tum vltima transformatione ne opus quidem esse, quia formulae $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$ statim per problema quartum reduci possunt.

SCHOLION.

43. Atque hi sunt fere casus, quibus duae formulae integrales ordinis primi ad valores algebraicos methodo quidem adhuc exposita reduci possunt. Nullum autem est dubium, quin haec methodus ad maiorem perfectionis gradum euehi possit, vt etiam formulae hic exclusae ad valores algebraicos reduci queant, quod negotium aliis vberius excolendum relinquo. Consideretur autem potissimum casus harum formularum $\int \frac{y dx}{x}$ et $\int \frac{yy dx}{x}$, quas generatim quidem nullo adhuc modo ad integrabilitatem reducere potui, etsi non est

P 2 difficile

difficile innumeras relationes inter x et y exhibere, quae proposito satisfaciant. His igitur regulis pro duabus formulis primi ordinis traditis contentus, ad tres pluresve formulas eiusdem ordinis progredior, eos inuestigaturus casus, quibus omnes simul methodo hactenus exposita ad valores algebraicos reduci queant, quod quidem ea methodo, qua in solutione secunda problematis 4 sum vsus, praestari debere animaduerto.

PROBLEMA 10.

44. Si P, Q, R sint functiones quaecunque algebraicae ipsius x, inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt tres hae formulae integrales

$$\int y P dx;\ \int y Q dx;\ \int y R dx$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $\int y\, P\, dx = L$ eritque $y = \frac{dL}{P\,dx}$, atque duae reliquae formulae reducendae fient:

$$\int y\, Q\, dx = \int \tfrac{Q}{P}\, dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L\, d.\tfrac{Q}{P}$$

$$\int y\, R\, dx = \int \tfrac{R}{P}\, dL = \tfrac{LR}{P} - \int L\, d.\tfrac{R}{P}$$

Iam vero hae duae formulae $\int L\, d.\frac{Q}{P}$ et $\int L\, d.\frac{R}{P}$ per problema quartum facile resoluuntur, idque duplici modo.

I. Priori modo poni oportet:

$\int L\, d.\frac{Q}{P} = M$ et $\int L\, d.\frac{R}{P} = N$, hincque erit: $L = dM : d.\frac{Q}{P} = dN : \frac{R}{P}$. Vnde elicitur aequatio $\frac{d(Q:P)}{d(R:P)} = \frac{dM}{dN}$, cuius primum membrum cum sit functio ipsius

ipsius x, pro M et N capiantur functiones nouae variabilis z, atque per hanc aequationem x definietur in z expressum, vnde porro per z dabitur

$$L = \frac{dM}{d(Q:P)} \text{ et } y = \frac{dL}{Pdx}$$

II. Posteriori resolutione vtentes ponamus $\int L\, d.\frac{Q}{P} = M$ vt sit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$, qui valor in tertia formula substitutus producet $\int L\, d.\frac{R}{P} = \int dM.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$ $= M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - \int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$

Ponatur ergo $\int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = N$ existente N functione quacunque ipsius x, eritque $M = \frac{dN}{d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}}$, vnde pro M inuenitur functio ipsius x, qua inuenta erit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$ ac denique $y = \frac{dL}{Pdx}$. Tum vero valores algebraici trium formularum propositarum erunt.

$$\int yPdx = L$$
$$\int yQdx = \frac{LQ}{P} - M$$
$$\int yRdx = \frac{LR}{P} - M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - N$$

COROLL. 1.

45. Cum in priori solutione pro litteris M et N functiones quaecunque ipsius z accipi queant, si iis valores transcendentes tribuantur, ita tamen vt $\frac{dM}{dz}$ et $\frac{dN}{dz}$ fiant functiones algebraicae, effici poterit vt trium formularum integralium propositarum duae $\int yQdx$ et $\int yRdx$ a datis quadraturis pendeant. Quod etiam per probl. 2 ita expediri poterit, vt vtraque tot quot lubuerit casibus nihilominus valores algebraicos adipiscatur.

COROLL. 2.

46. Sin autem solutionem posteriorem adhibeamus, quoniam vnica littera N arbitrio nostro relinquitur, si pro ea functio transcendens ipsius x accipiatur, vnius tantum formulae propositae integratio datam quadraturam inuoluet, reliquae vero duae necessario valores algebraicos obtinebunt.

COROLL. 3.

47. Patet etiam si Y fuerit functio quaecunque ipsius y, simili modo has tres formulas:

$$\int Y P\, dx;\ \int Y Q\, dx;\ \int Y R\, dx$$

ad valores algebraicos reduci. Quin etiam eadem reductio locum habebit, si Y sit functio quaecunque ambarum variabilium x et y.

PROBLEMA 11.

48. Si P, Q, R fuerint functiones quaecunque algebraicae variabilis x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae tres formulae integrales:

$$\int P\, dy;\ \int Q\, dy;\ \int R\, dy$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Formulae istae per lemma praemissum transformantur in sequentes.

$$\int P\, dy = Py - \int y\, dP$$
$$\int Q\, dy = Qy - \int y\, dQ$$
$$\int R\, dy = Ry - \int y\, dR$$

Quaestio

Quaestio ergo redit ad has tres formulas:

$$\int y\,d\mathrm{P};\quad \int y\,d\mathrm{Q};\quad \int y\,d\mathrm{R}$$

algebraicas efficiendas, quae cum similes sint iis, quae in probl. praec. sunt tractatae, resolutio nullam habebit difficultatem, atque adeo duplici modo absolui poterit.

COROLL. 1.

49. Quin etiam si ordo inter has formulas immutetur, quoniam perinde est a quanam earum operatio incipiatur, nouem omnino solutiones exhiberi possunt. Incipiendo enim a prima ponendo $\int y\,d\mathrm{P} = \mathrm{L}$, solutio prior ante tradita vnam praebet solutionem, posterior vero duas, prout duae reliquae formulae sumuntur, vel $\int y\,d\mathrm{Q}$ et $\int y\,d\mathrm{R}$, vel ordine inuerso $\int y\,d\mathrm{R}$ et $\int y\,d\mathrm{Q}$, sicque hinc tres solutiones impetrantur. Atque cum operatio a qualibet harum formularum inchoari queat, omnino nouem solutiones exhiberi poterunt.

COROLL. 2.

50. In hac ergo methodo perinde est, siue formula quaepiam proposita sit $\int y\,\mathrm{P}\,dx$ siue $\int \mathrm{P}\,dy$, quia posterior $\int \mathrm{P}\,dy$ facile ad formam prioris $\int y\,d\mathrm{P}$ reducitur. Hincque inposterum nullam amplius discrimen inter duas huiusmodi formulas constituam, ne praeter necessitatem hanc tractationem prolixiorem reddam.

COROLL. 3.

51. Perinde ergo problema resoluetur, si ad valores algebraicos reduci debeant huiusmodi formulae ternae

vel

vel $\int y P dx$; $\int y Q dx$; $\int R dy$
vel $\int y P dx$; $\int Q dy$; $\int R dy$

Superfluum ergo foret diuersa hinc problemata constituere.

PROBLEMA 12.

52. Ad valores algebraicos reducere quatuor huiusmodi formulas integrales:

$$\int y P dx;\quad \int y Q dx;\quad \int y R dx;\quad \int y S dx$$

in quibus litterae P, Q, R, S denotent functiones quascunque algebraicas ipsius x.

SOLVTIO.

Incipiatur operatio a quacunque harum quatuor formularum propositarum, ponendo $\int y P dx = L$, vt sit $y = \frac{dL}{P dx}$, atque tres reliquae formulae transformabuntur sequenti modo:

$$\int y Q dx = \int \tfrac{Q}{P} dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L d.\tfrac{Q}{P}$$
$$\int y R dx = \int \tfrac{R}{P} dL = \tfrac{LR}{P} - \int L d\tfrac{R}{P}$$
$$\int y S dx = \int \tfrac{S}{P} dL = \tfrac{LS}{P} - \int L d.\tfrac{S}{P}$$

Cum igitur nunc ad valores algebraicos reducendae sint hae tres formulae:

$$\int L d.\tfrac{Q}{P};\quad \int L d.\tfrac{R}{P};\quad \int L d.\tfrac{S}{P}$$

haeque congruant cum iis, quae in probl. 10^{mo} sunt pertractatae, resolutio erit in promtu; et quoniam hic nouem diuersae solutiones suppeditantur, totidemque reperiantur, a quanam alia quatuor formularum propositarum initium capiatur, omnino huius problematis quater, nouem, seu 36 solutiones exhiberi poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

53. Si vna quaedam formularum propositarum, veluti $\int y S d x$, a data quadratura pendere debeat, ea in operatione ad finem vsque est reseruanda, id quod 12 modis diuersis fieri potest. Sin autem duae formulae datae, veluti $\int y R d x$ et $\int y S d x$, a datis quadraturis pendere debeant, hoc nonnisi duobus modis diuersis praestabitur.

COROLL. 2.

54. Hinc etiam patet, eundem soluendi modum ad quinque, pluresque, quotquot proponantur, similes formulas extendi, dummodo quaelibet formula habeat speciem $\int y P d x$ vel $\int P d y$, existente P functione ipsius x, ita vt in singulis formulis altera variabilis y nonnisi vnicam obtineat dimensionem.

COROLL. 3.

55. Quemadmodum in casu duarum huiusmodi formularum propositarum reperiri possunt 3 solutiones et in casu trium formularum 9 solutiones; sic in casu 4 formularum inueniuntur $4 . 9 = 36$ solutiones. Atque porro in casu 5 formularum $5 . 36 = 180$ solutiones, in casu 6 formularum $6 . 180 = 1080$ solutiones, et ita porro.

PROBLEMA 13.

56. Si propositae fuerint quotcunque huiusmodi formulae integrales $\int Z d x$ vel $\int Z d y$, in quibus omnibus Z sit functio homogenea ipsarum x et y, et

in singulis idem dimensionum numerus n deprehendatur, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt singularum harum formularum valores prodeant algebraici.

SOLVTIO.

Cum Z sit functio homogenea n dimensionum ipsarum x et y, si ponatur $y = t\,x$, ea transibit in huiusmodi expressionem $x^n \mathrm{T}$, existente T functione quapiam ipsius t tantum; ideoque quaelibet formula huius generis $\int \mathrm{Z}\,d\,x$ reducitur sequenti modo:

$$\int \mathrm{Z}\,d\,x = \int \mathrm{T}\,x^n d\,x = \tfrac{1}{n+1}\,\mathrm{T}\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,d\,\mathrm{T}$$

Deinde ob $d\,y = t\,d\,x + x\,d\,t$ formulae huius generis $\int \mathrm{Z}\,d\,y$ simili modo transformabuntur:

$$\int \mathrm{Z}\,dy = \int \mathrm{T}\,x^n\,(t\,dx + x\,dt) = \int x^{n+1}\,\mathrm{T}\,dt + \int \mathrm{T}\,t\,x^n dx$$

at $\int \mathrm{T}\,t\,x^n dx = \tfrac{1}{n+1}\,\mathrm{T}\,t\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}(\mathrm{T}\,dt + t\,d\mathrm{T})$

vnde fiet

$$\int \mathrm{Z}\,d\,y = \tfrac{1}{n+1}\,\mathrm{T}\,t\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}(t\,d\,\mathrm{T} - n\,\mathrm{T}\,d\,t)$$

Quare quotcunque proponantur formulae integrales, vel huius $\int \mathrm{Z}\,d\,x$, vel huius $\int \mathrm{Z}\,d\,y$ speciei, quaestio reuocabitur ad totidem formulas istius speciei $\int x^{n+1}\Theta\,d\,t$, existente Θ functione ipsius t, quae posito $x^{n+1} = u$ abeunt in $\int u\,\Theta\,d\,t$. Quotcunque autem huiusmodi formulae $\int u\,\Theta\,d\,t$ fuerint propositae, eae omnes per praecepta hactenus tradita ad valores algebraicos reduci poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

57. Excipi tamen debent ii casus, quibus functionum Z numerus dimensionum n est $= -1$, seu $n + 1 = 0$, quoniam his casibus reductiones hic adhibitae non succedunt.

COROLL. 2.

58. Patet etiam, quaecunque et quotcunque fuerint formulae propositae, dummodo eae omnes per substitutionem aut transformationem quampiam ad huiusmodi formas $\int u \Theta dt$ reduci queant, eas omnes semper integrabiles reddi posse.

SCHOLION.

59. Vis igitur methodi hactenus expositae in hoc consistit, vt quotquot proponantur formulae integrales duas variabiles x et y inuoluentes, dummodo in singulis altera variabilis y vnicam obtineat dimensionem eiusue differentiale dy, reductio ad valores algebraicos semper perfici queat; hoc ergo euenit, si singulae formulae fuerint vel huius generis $\int y X dx$, vel huius $\int X dy$, propterea quod huius integratio reuocatur ad hanc $\int y dX$, siquidem X sit functio quaecunque ipsius x. Atque hi sunt casus, quibus duas pluresue formulas integrales primi ordinis mihi quidem adhuc ad valores algebraicos reducere contigit. Dantur vero etiam formulae secundi superiorumque ordinum, quas facile ad formulas primi ordinis formae $\int y X dx$ reducere licet, ex quo, si eiusmodi formulae integrales superiorum ordinum occurrant, resolutio problematum hactenus allatorum perinde suc-

 cedet.

cedet. Eas igitur formulas ſuperiorum ordinum, quae huiusmodi reductionem admittunt, hic indicari conueniet.

PROBLEMA. 14.

60. Si P ſit functio quaecunque ipſius x, elementumque dx ſumatur conſtans, reducere integrationem huiusmodi formularum integralium $\int\frac{P\,ddy}{dx}$, $\int\frac{P\,d^3y}{dx^2}$, $\int\frac{P\,d^4y}{dx^3}$ et ingenere huius $\int\frac{P\,d^ny}{dx^{n-1}}$ ad integrationem formulae primi ordinis huiusmodi $\int yQ\,dx$, exiſtente Q functione ipſius x.

SOLVTIO.

Conſideretur formula prima, eaque per lemma ita reducetur:

$$\int\frac{P\,ddy}{dx^2}=\frac{P\,dy}{dx}-\int dy.\frac{dP}{dx}\text{ at }\int dy.\frac{dP}{dx}=\frac{y\,dP}{dx}-\int\frac{y\,ddP}{dx};$$

ſicque erit:

$$\int\frac{P\,ddy}{dx}=\frac{P\,dy}{dx}-\frac{y\,dP}{dx}+\int\frac{y\,ddP}{dx}.$$

At $\frac{ddP}{dx}$ eſt expreſſio differentialis formae $Q\,dx$, ideoque formula $\int\frac{P\,ddy}{dx}$ reducta eſt ad formulam $\int yQ\,dx$.

Simili modo formula ſecunda reducitur:

$$\int\frac{P\,d^3y}{dx}=\frac{P\,ddy}{dx^2}-\int\frac{dP\,ddy}{dx^2};\text{ at:}$$

$$\int\frac{dP\,ddy}{dx^2}=\frac{dP\,dy}{dx^2}-\frac{y\,ddP}{dx^2}+\int\frac{y\,d^3P}{dx^2},\text{ ideoque:}$$

$$\int\frac{P\,d^3y}{dx^2}=\frac{P\,ddy-dP\,dy+y\,ddP}{dx^2}-\int\frac{y\,d^3P}{dx^2},$$

vbi $\int\frac{y\,d^3P}{dx^2}$ eſt iterum formae $\int yQ\,dx$.

Pro tertia formula propoſita erit:

$\int\frac{P\,d^4y}{}$

$$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y}{d x^3} - \int \frac{dP d^3 y}{d x^3}$$; at per reduct. praeced.

$$\int \frac{dP d^3 y}{d x^3} = \frac{dP\, ddy - dy\, ddP + y d^3 P}{d x^3} - \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$$; ergo

$$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y - dP\, ddy + dy\, ddP - y d^3 P}{d x^3} + \int \frac{y d^4 P}{d x^3},$$

vbi iterum $\int \frac{y d^4 P}{d x^3}$ eſt formae $\int y\, Q\, d x$.

Hinc colligitur fore vlterius progrediendo:

$$\int \frac{P d^5 y}{d x^4} = \frac{P d^4 y - dP d^3 y + ddP\, ddy - dy d^3 P + y d^4 P}{d x^4} - \int \frac{y d^5 P}{d x^4}$$

vnde etiam generatim patet, hac ratione iſtius formulae $\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}$ integrationem reduci ad integrationem huius formulae $\int \frac{y d^n P}{d x^{n-1}}$, foreque ſemper hanc expreſſionem huius formae $\int y\, Q\, d x$, eſt enim $\frac{d^n P}{d x^n}$ functio algebraica ipſius x, eiusque loco ſi ponatur Q erit $\frac{d^n P}{d x^{n-1}} = Q d x$.

COROLL. 1.

61. Omnes ergo reductiones, quae ſupra circa formulas huiusmodi $\int y\, Q\, d x$ ſunt exhibitae, eodem ſuccedunt modo, ſi huiusmodi formulae $\left(\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}\right)$ proponantur; vnde opus non eſt problemata praecedentia pro huiusmodi formulis altiorum ordinum reſoluere.

COROLL. 2.

62. Si expreſſio $\frac{d^n P}{d x^n}$ euaneſcat, id erit indicio, formulam $\int \frac{P d^n y}{d x^n}$ eſſe abſolute integrabilem; ea ergo

his caſibus in noſtris problematibus locum non habebit. Hoc autem euenit, ſi P fuerit ipſius x huiusmodi functio $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{n-1}$ tum enim $\int \frac{P\, d^n y}{d x^n}$ integrationem abſolute admittet.

COROLL. 3.

63. Formulae ergo integrabiles cum ſuis integralibus erunt pro variis ipſius n valoribus ſequentes:

$$\int \alpha\, dy = \alpha y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, ddy}{dx} = (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} - \beta y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, d^3 y}{dx^2} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \frac{ddy}{dx^2} - (\beta + 2\gamma x) \frac{dy}{dx} + 2\gamma y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\, d^4 y}{dx^3} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) \frac{d^3 y}{dx^3} - (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2) \frac{ddy}{dx^2} + (2\gamma + 6\delta x) \frac{dy}{dx} - 6\delta y$$

SCHOLION.

64. Progrediamur ergo ad formulas ordinis ſecundi, cum reductioni earum, quae ſunt primi ordinis, iam tantum ſimus immorati, quantum quidem profectus in hac methodo facti adhuc permiſerunt. Quoniam vero ad ordinem ſecundum eas retulimus formulas, in quibus vtriusque variabilis x et y differentialia dx et dy inſunt, eae ſine dubio ſunt ſimpliciſſimae, in quibus haec bina differentialia plus vna dimenſione non obtinent, cuiusmodi in genere eſt haec formula $\int (V\, dx + Z\, dy)$, vbi V et Z ſint functiones quaecunque ipſarum x et y. Nam ſi vnicum adſit differentiale dy, quanquam inde poſito $dy = p\, dx$, littera p in functionem ingreditur, tamen manifeſtum eſt, binas variabiles x et y eſſe commuta-

mutabiles, atque formulas $\int Z\,dy$ perinde tractari posse, ac $\int Z\,dx$. Quibus ergo casibus huiusmodi formulis $\int(V\,dx + Z\,dy)$ valores algebraicos conciliare potuerim, explicabo.

PROBLEMA 15.

65. Si V et Z denotent functiones ipsarum x et y, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt haec formula $\int(V\,dx + Z\,dy)$ algebraicum obtineat valorem.

SOLVTIO.

I. Dispiciatur primo, vtrum altera pars $\int V\,dx$, vel $\int Z\,dy$, per lemma reduci possit, vt fiat
vel $\int V\,dx = P - \int Q\,dy$,
vel $\int Z\,dy = R - \int S\,dx$.
Si alterum enim succedit, solutio erit facilis: priori enim casu habebitur.
$\int(V\,dx + Z\,dy) = P + \int(Z - Q)\,dy$, posteriori vero $\int(V\,dx + Z\,dy) = R + \int(V - S)\,dx$;
Vtrauis autem haec formula nullam habet difficultatem per problema 3.

II. Si hoc modo reductio inueniri nequeat, indagetur functio algebraica ipsarum x et y, quae sit $= P$, vt $\frac{V\,dx + Z\,dy}{P}$ fiat differentiale functionis cuiuspiam algebraicae Q ipsarum x et y, hoc enim casu fiet $\int(V\,dx + Z\,dy) = \int P\,dQ$, quae formula nulla difficultate ad integrabilitatem perducitur per problema 3.

III. Saepe etiam huiusmodi functio algebraica ipsarum x et y puta T inueniri potest, cuius differentiali existente $= P\,dx + Q\,dy$, si ponatur

$\int(V\,dx$

$\int(V\,dx + Z\,dy) = T + \int(V - P)\,dx + (Z - Q)\,dy)$
vt haec formula modo vel primo, vel ſecundo, reductionem admittat.

IV. Interdum quoque iuuabit, in locum vnius vel ambarum variabilium x et y vnam duaſue nouas t et q introducere, ponendis x et y aequalibus functionibus quibuspiam harum duarum nouarum variabilium t et u, ita vt facta ſubſtitutione formula huiusmodi obtineatur: $\int(V\,dz + Z\,dy) = \int(P\,dt + Q\,du)$, vbi iam P et Q ſunt functiones ipſarum t et u, quae aliquo expoſitorum modorum reductionem admittat.

V. Caſus adhuc ſingularis eſt memorandus, quo V et Z ſunt functiones homogeneae ipſarum x et y eiusdem ambae numeri dimenſionum, qui ſit $= n$. Poſito enim $y = tx$ fiet $V = Px^m$ et $Z = Qx^n$, exiſtentibus P et Q functionibus ipſius t. Tum ob $dy = t\,dx + x\,dt$; formula propoſita transibit in hanc

$$\int(Px^n dx + Qtx^n dx + Qx^{n+1} dt)$$

at $\int(P + Qt)\,x^n dx = \frac{1}{n+1}(P+Qt)\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} d(P+Qt)$
vnde reductio reuocatur ad huiusmodi formam $\int x^{n+1} S\,dt$, niſi ſit $n = -1$, exiſtente S functione ipſius t.

SCHOLION.

66. Sufficiat has operationes in genere explicaſſe, quoniam exempla, quae vſum quempiam memorabilem habere videantur, non ſuccurrunt. Interim tamen notandum eſt, plurima exempla proponi poſſe, quae vel difficulter, vel plane non, per vllam harum operationum reduci queant. Cuiusmodi eſt, ſi relatio inter x et y quaerenda ſit, vt haec formula integralis $\int(\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y})$ valorem

valorem algebraicum obtineat, neque enim video, quomodo huic quaestioni satisfaciendum sit. Quamobrem multo minus talia attingo problemata, in quibus duae pluresue huiusmodi formulae ad integrabilitatem perduci debeant. Neque etiam formulas superiorum ordinum generaliter pertractare licebit, praeter casum in sequenti problemate contentum.

PROBEMA 16.

67. Si Z sit functio nullius dimensionis ipsarum dx et dy, ita vt ipsae quantitates finitae x et y in eam non ingrediantur, ad integrabilitatem reducere hanc formulam $\int Z dx$.

SOLVTIO.

Cum formula differentialis $Z dx$ ita sit comparata, vt praeter quantitates constantes nonnisi differentialia dx et dy contineat, quae propterea vnam dimensionem adimplebunt, cuiusmodi sunt hae formulae: $\frac{dy^2}{dx}$; $\surd(a dx^2 + b dx dy + c dy^2)$; $\frac{a dx^2 + b dy^2}{\surd(dx^2 + dy^2)}$ etc. ponatur $dy = p dx$, atque formula proposita $\int Z dx$ induet hanc speciem $\int P dx$, ita vt P fiat functio quantitatis p tantum, neque x neque y inuoluens. Efficiendum ergo erit, vt non solum haec formula $\int P dx$, sed etiam ob $dy = p dx$ haec $\int p dx$, algebraicum nanciscatur valorem, quod per problema 4. ita duplici modo praestabitur. Cum enim sit

$$\int Z dx = \int P dx = P x - \int x dP$$
$$y = \int p dx = p x - \int x dp$$

 Fiat

Fiat primo:

$$\int x\,dP = M \text{ et } \int x\,dp = N,$$

eritque $x = \frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dp}$, vnde fit $\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dN}$, et quia $\frac{dP}{dp}$ est functio ipsius p, inde valor ipsius p erui debet, quo inuento habebitur $x = \frac{dM}{dP}$, seu $x = \frac{dN}{dp}$, ac deinceps $y = px - N$: qui valores praebebunt $\int Z\,dx = Px - M$. Pro altera solutione ponatur:

$\int x\,dP = M$, vt sit $x = \frac{dM}{dP}$, et $\int x\,dp = \int \frac{dp}{dP} .\, dM = M . \frac{dp}{dP} - \int M\,d. \frac{dp}{dP}$. Iam ponatur $\int M\,d. \frac{dp}{dP} = R$ functioni ipsius p cuicunque, ac reperietur $M = dR : d. \frac{dp}{dP}$, quo valore ipsius M inuento, prodibit porro:

$$x = \frac{dM}{dP}\,;\; y = px - \frac{M\,dp}{dP} + R,$$

vnde fit $\int Z\,dx = Px - M$.

Vel ponatur $\int x\,dp = N$, et ob $x = \frac{dN}{dp}$, fiet $\int x\,dP = \int dN . \frac{dP}{dp} = N . \frac{dP}{dp} - \int N\,d. \frac{dP}{dp}$. Sit $\int N\,d. \frac{dP}{dp} = S$ erit $N = dS : d. \frac{dP}{dp}$; hincque $x = \frac{dN}{dp}$ et $y = px - N$ ex quibus efficitur $\int Z\,dx = Px - \frac{N\,dP}{dp} + S$.

COROLLARIVM.

68. Simili modo solutio exhiberi poterit, si duae pluresue huiusmodi formulae $\int Z\,dx$ proponantur, quibus valores algebraici conciliari debeant. Posito enim $dy = p\,dx$, praeter hanc formulam $\int p\,dx$, duae pluresue huiusmodi $\int P\,dx$, $\int Q\,dx$, etc. vbi P et Q etc. sint functiones ipsius p, integrabiles erunt efficiendae, quod per methodos supra traditas facile praestatur.

SCHO-

SCHOLION.

69. Vt igitur finem huic disquifitioni imponam, eximium eius vſum in ſoluendis praecipuis huius generis problematibus, quae quidem adhuc ſunt agitata, oſtendam. Verſantur autem haec problemata potiſſimum circa curuas rectificabiles algebraicas, quamobrem ex methodis hactenus traditis plures deriuabo regulas, quarum ope tot, quot lubuerit, curuas algebraicas rectificabiles reperire liceat, vnde ſimul patebit, quomodo eiusmodi curuae algebraicae ſint inueniendae, quarum integratio a data pendeat quadratura, ita vt omnia problemata, quae ope cuiuspiam quadraturae ſint conſtructa, facile per rectificationem curuae algebraicae expediri posſint. Tum vero non magis erit difficile eiusmodi curvas algebraicas exhibere, quarum rectificatio indefinita a data quadratura pendeat, quae tamen nihilo minus vnum pluresue imo praeciſe tot, quot lubuerit, habeant arcus definitos algebraice aſſignabiles. Denique ſolutionem mei illius problematis de duabus curuis, in quibus arcuum communi abſciſſae reſpondentium ſumma fiat algebraica, ex his principiis deducam.

PROBLEMA 17.

70. Inuenire curuas algebraicas rectificabiles, ſeu quarum omnes arcus algebraice exhiberi queant.

SOLVTIO.

Sint curuae coordinatae orthogonales x et y, arcusque his coordinatis reſpondens $= z$. Primo igitur quaeritur aequatio algebraica inter x et y, deinde valor ipsius z inde emergens debet esse algebraicus. Cum igitur sit $z = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, haec formula integrabilis erit reddenda; quod sequentibus modis praestabitur.

I.

Ponatur $dy = p\,dx$, atque hae duae formulae

$$y = \int p\,dx \text{ et } z = \int dx\,\sqrt{(1+pp)}$$

algebraicae sunt reddendae. Cum igitur sit

$$y = px - \int x\,dp$$

$$z = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

sumantur nouae cuiusdam variabilis u functiones quaecunque algebraicae P et Q, ponaturque

$$\int x\,dp = \mathrm{P} \text{ et } \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \mathrm{Q}$$

erit $x = \frac{d\mathrm{P}}{dp} = \frac{d\mathrm{Q}\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$, vnde fit

$$p\,d\mathrm{P} = d\mathrm{Q}\sqrt{(1+pp)}, \text{ ideoque } p = \frac{d\mathrm{Q}}{\sqrt{(d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}}$$

Dabitur ergo p per functionem quandam ipsius u, quae ob $\frac{d\mathrm{P}}{du}$ et $\frac{d\mathrm{Q}}{du}$ ideoque $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{Q}}$ quantitates algebraicas, ipsa erit algebraica $p = \frac{d\mathrm{Q}}{\sqrt{(d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}}$, ex qua habebitur porro:

$x = \frac{d\mathrm{P}}{dp}$; $y = px - \mathrm{P}$; et $z = x\sqrt{(1+pp)} - \mathrm{Q}$.

Seu sit $\mathrm{Q} = u$ et $\mathrm{P} = \mathrm{V}$, et quia posito du constante est $dp = \frac{-du\,d\mathrm{V}\,dd\mathrm{V}}{(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}$ ob $p = \frac{du}{\sqrt{(d\mathrm{V}^2 - du^2)}}$ habebitur:

$$x = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,dd\mathrm{V}}$$

$$y = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)}{dd\mathrm{V}} - \mathrm{V}$$

et

et $z = \frac{-dV(dV^2 - du^2)}{du\,ddV} - u.$

Posito autem contra $P = u$ et $Q = V$, ut V sit functio quaecunque ipsius u, ob $p = \frac{dV}{\sqrt{(du^2 - dV^2)}}$

et $dp = \frac{du^2 ddV}{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}$ posito du constante, erit

$$x = \frac{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,ddV}$$

$$y = \frac{dV(du^2 - dV^2)}{du\,ddV} - u$$

$$z = \frac{du^2 - dV^2}{ddV} - V$$

II.

Posito ut ante $dy = p\,dx$, sit $\int x\,dp = M$, ideoque $x = \frac{dM}{dp}$, unde fit

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dM}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pM}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Ponatur $\int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = P$ functioni cuicunque ipsius p, fietque $M = \frac{dP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, unde erit porro

$$x = \frac{dM}{dp};\ y = px - M;$$

$$\text{et } z = x\sqrt{(1+pp)} = \frac{Mp}{\sqrt{(1+pp)}} + P.$$

 Sen-

Seu posito dp constante ob $dM = \frac{ddP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + 3\,pdP$ $\sqrt{(1+pp)}$ erit:

$$x = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,pdP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$y = \frac{pddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2pp-1)dP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$z = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^2 + \frac{2p(1+pp)dP}{dp} + P.$$

III.

Sit $\int\frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}} = N$, erit $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{pdp}$, ideoque $\int xdp = \int\frac{dN}{p}\sqrt{(1+pp)} = \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} + (\int\frac{Ndp}{pp\sqrt{(+pp)}})$ Ponatur $\int\frac{Ndp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = P$ functioni ipsius p, eritque $N = (\frac{ppdP\sqrt{(1+pp)}}{dp})$, ex quo valore erit porro:
$x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{pdp}$; $y = px - \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} - P$ et $z = x\sqrt{(1+pp)} - N$
Posito autem dp constante ob $dN - \frac{ppddP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$ $+ (\frac{pdP(2+3pp)}{\sqrt{(1+pp)}})$ erit:

$$x = \frac{pddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{dP(2+3pp)}{dp}$$

$$y = \frac{ppddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{pdP(1+2pp)}{dp} - P$$

$$z = \frac{pddP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{2dP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$$

IV.

IV.

Ponatur $dy = \frac{dx(qq-1)}{2q}$, erit $dz = \frac{dx(qq+1)}{2q}$; Hinc fit $z+y = \int q\,dx$ et $z-y = \int\frac{dx}{q}$; duae ergo hae formulae integrabiles sunt reddendae. Ponatur

$$\int q\,dx = qx - \int x\,dq = qx - M$$

$$\int\frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int\frac{x\,dq}{qq} = \frac{x}{q} + N$$

vt sit $x = \frac{dM}{dq} = \frac{qq\,dN}{dq}$; ergo $q = \sqrt{\frac{dM}{dN}}$
Sint iam M et N functiones quaecunque ipsius u, et ob $dq = \frac{dN\,ddM - dM\,ddN}{2dN\sqrt{dM\,dN}}$ erit:

$$x = \frac{2dM\,dN\sqrt{dM\,dN}}{dN\,ddM - dM\,ddN}$$

$$z+y = \frac{2\,dM^2\,dN}{dN\,ddM - dM\,ddN} - M$$

$$z-y = \frac{2\,dM\,dN^2}{dN\,ddM - dM\,ddN} + N$$

$$\text{ergo } y = \frac{dM\,dN\,(dM - dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M-N}{2}$$

$$\text{et } z = \frac{dM\,dN\,(dM + dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M+N}{2}$$

V.

Iisdem positis fiat $\int x\,dq = M$, vt sit $\int q\,dx = qx - M$, erit $x = \frac{dM}{dq}$, et $\int\frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int\frac{dM}{qq} = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2\int\frac{M\,dq}{q^3}$. Iam fit $\int\frac{M\,dq}{q^3} = Q$, ideoque $M = \frac{q^3\,dQ}{dq}$, quo valore per q inuento, cum Q fit functio ipsius q, erit $x = \frac{dM}{dq}$; $z+y = qx - M$ et $z-y = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2Q$, seu ob $dM = \frac{q^3\,ddQ}{dq} + 3\,qq\,dQ$, erit

$$x = \frac{q^3\,ddQ}{dq^2} + \frac{3\,qq\,dQ}{dq}$$

$$z+y = \frac{q^4\,ddQ}{dq^2} + \frac{2\,q^3\,dQ}{dq}$$

$$z-y = \frac{qq\,ddQ}{dq^2} + \frac{4\,q\,dQ}{dq} + 2\,Q$$

hinc

hincque propterea

$$y = \frac{qq(qq-1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} - Q$$
$$z = \frac{qq(qq+1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} + Q$$

VI.

Vel fiat $\int \frac{x\,dq}{qq} = N$, vt habeatur $x = \frac{qq\,dN}{dq}$ et $\int x\,dq = \int qq\,dN = qqN - 2\int N\,q\,dq$. Iam ponatur $\int N\,q\,dq = Q$ existente Q functione quacunque ipsius q, atque erit $N = \frac{dQ}{q\,dq}$, $dN = \frac{ddQ}{q\,dq} - \frac{dQ}{qq}$

ergo $x = \frac{q\,ddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$; et $\int x\,dq = \frac{q\,dQ}{dq} - 2Q$

vnde fiet $z + y = \frac{qq\,ddQ}{dq^2} - \frac{2q\,dQ}{dq} + 2Q$

et $z - y = \frac{ddQ}{dq^2}$

Quamobrem nanciscemur has formulas:

$$x = \frac{q\,ddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$$
$$y = \frac{(qq-1)ddQ}{2dq^2} - \frac{q\,dQ}{dq} + Q$$
$$z = \frac{(qq+1)ddQ}{2dq^2} - \frac{q\,dQ}{dq} + Q$$

VII.

Ad alias formulas inueniendas ponamus:

$dx = 2p\,du$; $dy = du(pp-1)$ et $dz = du(pp+1)$

eritque:

$x = 2\int p\,du$; $y + z = 2\int pp\,du$; $z - y = 2u$

ergo quaestio ad has duas formulas reducitur:

$\int p\,du = pu - \int u\,dp$; $\int pp\,du = ppu - 2\int up\,dp$.

Sit nunc $\int u\,dp = M$, et $\int up\,dp = N$, erit:

$u = \frac{dM}{dp} = \frac{dN}{p\,dp}$, ideoque $p = \frac{dN}{dM}$ et $dp = \frac{dM\,ddN - dN\,ddM}{dM^2}$

vnde $u = \frac{dM^3}{dM\,ddN - dN\,ddM} = \frac{z-y}{2}$

Porro

Porro eſt $\int p\,du = \frac{x}{2} = \frac{dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - M$, et

$$\int pp\,du = \frac{z+y}{2} = \frac{dM\,dN^2}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N;\ \text{ergo}$$

$$x = \frac{2dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2M;\ y = \frac{dM(dN^2 - dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$$

atque $z = \frac{dM(dN^2 + dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$.

Si elementum dM ſumatur conſtans, erit

$$x = \frac{2dM\,dN}{ddN} - 2M$$

$$y = \frac{dN^2 - dM^2}{ddN} - 2N$$

$$z = \frac{dN^2 + dM^2}{ddN} - 2N$$

VIII.

In praecedente ſolutione ponatur, vt ante, $\int u\,dp = M$ ſeu $u = \frac{dM}{dp}$, fiet $\int up\,dp = \int p\,dM = pM - \int M\,dp$ Iam ſit $\int M\,dp = P$, erit $M = \frac{dP}{dp}$; et $dM = \frac{ddP}{dp}$ vnde fit $u = \frac{ddP}{dp^2}$, atque porro:

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{p\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp};\ \frac{z-y}{2} = \frac{ddP}{dp^2}$$

et $\frac{z+y}{2} = \frac{pp\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$

hincque eliciuntur iſtae formulae:

$$x = \frac{2p\,ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$

$$y = \frac{(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$

$$z = \frac{(pp+1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$

IX.

Loco praecedentis operationis fiat $\int up\,dp = N$, ſeu $u = \frac{dN}{p\,dp}$, eritque $\int u\,dp = \int \frac{dN}{p} = \frac{N}{p} + \int \frac{N\,dp}{pp}$. Iam ſit $\int \frac{N\,dp}{pp} = P$, fietque $N = \frac{pp\,dP}{dp}$ et $dN = \frac{pp\,ddP}{dp} + 2p\,dP$, vnde $u = \frac{p\,ddP}{dp^2} + \frac{2dP}{dp} = \frac{z-y}{2}$; at erit $\frac{z+y}{2} = \frac{p^3\,ddP}{dp^2} +$ et $\frac{1}{2}x = \frac{pp\,ddP}{dp^2} + \frac{p\,dP}{dp} - P$;

 Ergo

Ergo

$$x = \frac{2ppddP}{dp^2} + \frac{2pdP}{dp} - 2P$$
$$y = \frac{p(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$
$$z = \frac{p(pp+1)ddP}{dp^2} + \frac{2dP}{dp}$$

COROLL. 1.

71. Si rectificatio curuae non debeat esse algebraica, sed a data quadratura pendere, hoc ope regulae primae ac secundae facile praestabitur. In prima enim regula pro V eiusmodi capiatur functio transcendens ipsius u, quae datam quadraturam puta $\int U\,du$ inuoluat, ita tamen vt $\frac{dV}{du}$ fiat quantitas algebraica, si secunda regula vti velimus, pro P eiusmodi functio transcendens ipsius p accipi debet.

COROLL. 2.

72. Vtrauis autem regula adhibeatur, id facile expediri poterit ope probl. 2. vt curuae rectificatio indefinita non solum a data quadratura pendeat; sed vt in eadem curua tot, quot lubuerit, extent arcus, quorum longitudo algebraice exprimi queant.

SCHOLION.

73. En ergo nouem formulas specie quidem diuersas quibus curuae algebraicae, rectificabiles, continentur, verumtamen quaelibet earum tam late patet, vt omnes omnino curuas algebraicas, quae sint rectificabiles, complectatur. Interim tamen quaedam in iis reperiuntur, quae ope leuis substitutionis ad se inuicem reducuntur

cuntur. Ita solutio quarta ad primam reducitur ponendo $M = u + V$ et $N = u - V$. Deinde si in sexta ponatur $Q = Qqq$, ea redigitur ad quintam. De his autem solutionibus notandum est, ex singulis relationem finitam seu finitis quantitatibus expressam inter tres quantitates x, y et z reperiri posse, cum differentialia inde eliminari queant, pro singulis igitur solutionibus hae relationes finitae ita se habebunt:

Solutio I. dat $(z+V)^2 = x^2 + (y+u)^2$
Solutio II. dat $z\sqrt{(1+pp)} = x + py + P\sqrt{(1+pp)}$
Solutio III. dat $z\sqrt{(1+pp)} = x + py + Pp$
Solutio IV. dat $(z+y+M)(z-y-N) = xx$
Solutio V. dat $z(1+qq) = 2qx + (qq-1)y + 2Qqq$
Solutio VI. dat $z(1+qq) = 2qx + (qq-1)y + 2Q$
Solutio VII. dat $(z+y+4N)(z-y) = (x+2M)^2$
Solutio VIII. dat $(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 4P$
Solutio IX. dat $(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 4Pp$

Hinc patet solutiones II et III in vnam coalescere si in secunda ponatur $P = \frac{R}{\sqrt{(1+pp)}}$, vel in tertia $P = \frac{R}{p}$; inde enim prodit haec solutio simplicior:

$$x = \frac{(1+pp)ddR}{dp^2} + \frac{pdR}{dp} - R$$

$$y = \frac{p(1+pp)ddR}{dp^2} - \frac{dR}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ddR}{dp^2}$$

Deinde solutiones V, VI, VIII et IX manifesto inter se conueniunt, et ad VI, quae est simplicissima, redeunt. Denique solutio IV ad primam est reducta ita vt tantum remaneant 4 solutiones quae pro diuersis haberi queant:

(I, IV); (II, III); (V, VI, VIII, IX) et (VII).

Quatuor igitur has solutiones principales hic conspectui exponere conueniet, formis earum ita parumper immutatis, vt in singulis sit P functio quaecunque ipsius p.

SOLVTIO I.

$$x = \frac{(dp^2 - dP^2)^{\frac{3}{2}}}{dp\,ddP}$$

$$y = \frac{dP(dp^2 - dP^2)}{dp\,ddP} - p$$

$$z = \frac{dp^2 - dP^2}{ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = x^2 + (y+p)^2$$

SOLVTIO II.

$$x = \frac{dp\,dP}{ddP} - p$$

$$y = \frac{dP^2 - dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$z = \frac{dP^2 + dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = (x+p)^2 + (y+P)^2$$

SOLV-

SOLVTIO III.

$$z = \frac{(1+pp)\,ddP}{dp^2} + \frac{p\,dP}{dp} - P$$

$$y = \frac{p(1+pp)\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\,ddP}{dp^2}.$$

$$z\sqrt{(1+pp)} = x + py + P$$

SOLVTIO IV.

$$x = \frac{p\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$y = \frac{(pp-1)\,ddP}{2\,dp^2} - \frac{p\,dP}{dp} + P$$

$$z = \frac{(pp+1)\,ddP}{2\,dp^2} - \frac{p\,dP}{dp} + P$$

$$(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 2P$$

Hinc igitur, si pro P functiones simpliciores ipsius p substituantur, curuae algebraicae simpliciores, quae sunt rectificabiles, obtinebuntur, ac parabolicas quidem ex III erui obseruo, si ponatur $P = A + Bp^2 + Cp^4 + Dp^6 +$ etc. et coefficientes debite determinentur.

PROBLEMA 18.

74. Inuenire duas curuas algebraicas ad eundem axem relatas, quarum vtriusque rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vtriusque arcuum eidem abscissae respondentium summa algebraice exhiberi queat.

SOLVTIO.

Sit abſciſſa communis $=x$, et vnius curuae applicata $=y$, arcus $=z$; pro altera curua ſit applicata $=u$, et arcus $=w$; Ponatur $dy=pdx$, et $du=qdx$, eritque

pro curua I	pro curua II
$y=px-\int xdp$	$u=qx-\int xdq$
$z=x\surd(1+pp)-\frac{\int xpdp}{\surd(1+pp)}$	$w=x\surd(1+qq)-\frac{\int xqdq}{\surd(1+qq)}$

Neceſſe eſt ergo primo, vt formulae $\int xdp$ et $\int xdq$ valores nanciſcantur algebraicos, deinde vt ſumma arcuum $z+w$ ſit pariter algebraica, tertio vt vterque arcus ſeorſim ſumtus, vel, quod eodem redit, arcuum differentia $z-w$ a data quadratura pendeat.
Ponatur breuitatis gratia

$$\surd(1+pp)+\surd(1+qq)=r$$
$$\surd(1+pp)-\surd(1+qq)=s$$

vt ſit

$$y=px-\int xdp;\ u=qx-\int xdq$$
$$z=\tfrac{x(r+s)}{2}-\tfrac{1}{2}\int x(dr+ds);\ w=\tfrac{x(r-s)}{2}-\tfrac{1}{2}\int x(dr-ds)$$
$$z+w=xr-\int xdr$$
$$z-w=xs-\int xds.$$

Efficiendum ergo eſt, vt hae tres formulae:

$\int xdp$; $\int xdq$ et $\int xdr$ fiant algebraicae,

ſimulque vt formula $\int xds$ a data quadratura pendeat. Ad hoc ponatur $\int xdp=L$, erit $x=\frac{dL}{dp}$, et

$\int xdq$

$$\int x\,dq = \int dL.\frac{dq}{dp} = \frac{L\,dq}{dp} - \int L\,d.\frac{dq}{dp}$$
$$\int x\,dr = \int dL.\frac{dr}{dp} = \frac{L\,dr}{dp} - \int L\,d.\frac{dr}{dp}$$
$$\int x\,ds = \int dL.\frac{ds}{dp} = \frac{L\,ds}{dp} - \int L\,d.\frac{ds}{dp}$$

Iam ponatur $\int L\,d.\frac{dq}{dp} = M$, seu $L = \frac{dM}{d.\frac{dq}{dp}}$ erit $\int L\,d.\frac{dr}{dp}$

$$= \int dM\,\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = M\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int M\,d.\frac{d\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} \text{ et } \int L\,d.\frac{ds}{dp} = \int dM\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}$$
$$= M\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int M\,d.\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}$$

Quod si iam ad abbreuiandum scribatur:

$$\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \mu \text{ et } \frac{d\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \nu$$

vt sit

$$\int L\,d.\frac{dr}{dp} = M\mu - \int M\,d\mu$$
$$\int L\,d.\frac{ds}{dp} = M\nu - \int M\,d\nu$$

Superest, vt formula $\int M\,d\mu$ reddatur algebraica, altera vero $\int M\,d\nu$ a data quadratura pendeat. Sit ergo $\int M\,d\mu = N$ seu $M = \frac{dN}{d\mu}$, erit

$$\int M\,d\nu = \int dN\,\frac{d\nu}{d\mu} = N\frac{d\nu}{d\mu} - \int N\,d.\frac{d\nu}{d\mu}$$

Sit iam P eiusmodi functio transcendens, quae datam quadraturam inuoluat, ac ponatur:

$$\int N\,d.\frac{d\nu}{d\mu} = P \text{ vt sit } N = \frac{dP}{d.\frac{d\nu}{d\mu}}$$

quo valore in praecedentibus formulis substituto, reperientur binae curuae algebraicae quaesito satisfacientes. Sumatur

matur ſcilicet pro q functio quaecunque ipſius p, ita vt r et s fiant functiones ipſius p, eruntque etiam μ et ν functiones ipſius p; quare pro P capi debebit functio transcendens ipſius p, quae quidem propoſitam quadraturam inuoluat, hocque modo N dabitur per P, vnde deinceps vtraque curua definietur. Hinc autem cum $\frac{d\mu}{d\nu}$ ſit functio ipſius p, alia ſolutio exhiberi poterit.

Scilicet ponatur: $\int M\,d\mu = R$ et $\int M\,d\nu = S$, ita vt R ſit functio algebraica, S vero datam quadraturam includat, eritque $M = \frac{dR}{d\mu} = \frac{dS}{d\nu}$, vnde fit $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{dR}{dS}$, ex qua aequatione quantitas p definietur per nouam variabilem ν, ſiquidem pro R et S capiantur functiones ipſius ν, vnde denuo determinationes pro vtraque curua inuenientur.

SCOLION.

75. Haec iam ſufficere videntur, ad oſtendendum quousque mihi quidem in cultura huius nouae methodi adhuc pertingere licuit; neque dubito, quin haec ſpecimina aliis anſam ſint praebitura, vires ſuas ad hanc methodum vlterius promouendam intendendi. Si enim methodus, quae Diophantea appellari ſolet, quondam ab excellentiſſimis ingeniis omni ſtudio eſt exculta, haec certe noua methodus, quae in quaeſtionibus longe ſublimioribus verſatur, minore attentione digna non eſt aeſtimanda.

DE