

DE
COCHLEA ARCHIMEDIS.

AUCTORE

LEON. EVLERO.

Cochlea Archimedis cum ob inuentionis antiquitatem, tum ob eius frequentissimum usum in aquis hauriendis, tantopere celebrata, atque in vulgus cognita, ut vix vllus Hydraulicarum Machinarum scriptor reperiatur, qui eius constructionem atque utilitatem non abunde explicuerit. Quod si vero ad causam spectemus, cur haec machina ad aquam eleuandam sit apta, et quomodo eius actio secundum mechanica principia absoluator, apud vetustiores quidem auctores nihil plane inuenimus, quod rationem saltem probabilem in se contineat, recentiores vero hanc inuestigationem vel prorsus praeterierunt, vel leuiter saltem ac minus accurate sunt persecuti. Ita quamuis haec machina sit notissima, eiusque praxis frequentissima, tamen fateri cogimur, eius Theoriam maxime adhuc esse absconditam, atque tam modum, quo aqua per eam eleuatur, quam vires ad eius actionem requisitas etiam nunc fere penitus latere. Atque hoc eo magis mirum videri debet, cum non solum ceterae Machinae ab antiquitate ad nos transmissae, felici cum successu ad leges mechanicas sint reuocatae, sed etiam ipsa scientia mechanica eousque exulta sit, ut ad omnis generis machinas explicandas sufficiens videatur. Quin

etiam a plerisque omne studium, quod a Geometris ope Analyseos sublimioris in Mechanica ulterius excolenda consumitur, subtile magis quam utile censei solet.

Verum si rationem cochleae Archimedis diligentius contemplemur, vulgariae mechanicae principia ei explicandae minime sufficientia deprehendemus: propterea quod ea manifeste ad Theoriam motus aquae per tubos mobiles pertineat quod argumentum a nemine fere adhuc est tractatum. Quod enim ad motum aquae in genere attinet, non dudum admodum est, ex quo istudiosius inuestigari atque ad principia mechanica inuestigari est coeptus, de motu autem aquae per tubos mobiles vix quisquam reperitur, qui aliquid in medium attulerit, vel tantum cogitauerit. Quam, obrem cum nunc quidem principia, quibus omnis aquae motus innitur, satis sint euoluta, operam dabo, ut ea quoque ad motum aquae, quo per cochleam hanc Archimedis fertur, accommodem, indeque omnia phaenomena, quae in hoc motu consideranda occurrant, clare ac distincte explanem. Quae igitur hac de re sum meditatus, sequentibus propositionibus sum complexurus; et quoniam cochleae Archimedeeae duplicis generis constructi solent, quarum alterae helices suas circa cylindrum, alterae vero circa conum habent circumvolutas, a cochlea cylindrica exordiar; eiusque Theoria stabilita ad cochleas quoque conicas perferendas non difficulter progredi licebit.

PROBLEMA. I.

1. Dato motu, quo cylindrus circumagitur, et aquae celeritate per cochleam seu helicem cylindro circumductam, determinare verum cuiusque aquae particulae motum, hoc est eum motum, qui ex motu gyatorio cylindri et motu aquae progressivo per helicem componitur.

SOLVTIO.

Sit circulus ACB basis cylindri, cuius superficiei helix est circumducta, recta CD ad basin in centro C perpendicularis axis cylindri, circa quem cylindrus cum helice in gyrum agitur. Ponatur basis semidiameter CA = CB = a, et sit EZ portio helicis in superficie cylindri, quae cum periphèria basis faciat angulum ZEY = ζ ; et a puncto helicis quocunque Z ad basin ducatur axi parallela ZY; voceturque arcus EY = s, est YZ = s tang. ζ ; quae cum helice faciet angulum EZY = $90^\circ - \zeta$; et longitudo helicis erit E = $Z \frac{s}{\cos. \zeta}$.

Iam aquae per helicem transfuentis celeritas sit debita altitudini v, helicem enim EZ ubique eiusdem amplitudinis assumo, ita ut eodem temporis instanti omnis aquae in helice contentae eadem sit celeritas = v. Deinde quia tota helix circa axem CD gy-ratur, sit puncti E celeritas gyratoria circa punctum C debita altitudini u. Recta autem AB sit fixa, quae scilicet non cum cylindro moueatur: atque initio quidem punctum E fuerit in A; inde autem tempore elapso = t motu angulari peruenerit in E, sitque arcus AE = p, erit ob motum angularem $dp = dt \sqrt{u}$.

262 DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

Nunc consideretur primo motus aquae per heli-
cem quasi quiescentem, ac celeritas particulae aquae in
 Z erit $= \sqrt{v}$ eiusque directio erit Zz , qui motus re-
soluatur in duos, quorum alterius directio sit secundum
 YZ , alterius secundum Zv seu Yy , atque celeritas se-
cundum YZ erit $= \sqrt{v}$, sin ζ celeritas vero secundum
 Zv seu Yy erit $= \sqrt{v} \cos. \zeta$.

Ad hunc posteriorem motum adiungi nunc debet
motus gyrotorius, quippe qui in eandem directionem
tendit, ex quo prodit tota celeritas puncti Z secundum
directionem $Yy = \sqrt{u} + \sqrt{v} \cos. \zeta$.

Quoniam vero directio Yy est variabilis, reduca-
tur ea ad directiones constantes; quem in finem ex Y
ad rectam fixam AB ducatur perpendicularis YX , ac
vocentur tres coordinatae locum puncti Z determinantes
 $CX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, erit primo $z = s$
 $\text{tang. } \zeta$; tum vero ob arcum $AY = p + s$, et angu-
lum $A = CY = \frac{p+s}{a}$, erit $CX = x = a \cos. \frac{p+s}{a}$, et XY
 $= y = a \sin \frac{p+s}{a}$. Tum ducta Yu rectae AB pa-
rallela erit angulus $Yyu = \frac{p+s}{a}$. Hinc motus secun-
dum Yy resoluetur in binos alios, alterum secundum
 Yu seu AC cuius celeritas $= (\sqrt{u} + \sqrt{v} \cos. \zeta) \sin.$
 $\frac{p+s}{a}$, alterum vero secundum XY cuius celeritas
 $= (\sqrt{u} + \sqrt{v} \cos. \zeta) \cos. \frac{p+s}{a}$; celeritate secundum YZ
existente $= \sqrt{v} \sin. \zeta$.

Quare loco puncti Z ad ternas coordinatas fixas
reducto, quae sunt:

$$CX = x = a \cos. \frac{p+s}{a}, \quad XY = y = a \sin. \frac{p+s}{a}, \quad \text{et } YZ = s \text{ tang. } \zeta$$

verus

veris particulae in Z versantis motus pariter secundum
 has ternas directiones fixas resoluetur, eritque

$$\text{Celeritas motus secundum } CX = -(\sqrt{u + \sqrt{v} \cos \zeta}) \sin \frac{p + s^2}{a}$$

$$\text{Celeritas motus secundum } XY = +(\sqrt{u + \sqrt{v} \cos \zeta}) \cos \frac{p + s^2}{a}$$

$$\text{Celeritas motus secundum } YZ = \sqrt{v} \sin \zeta$$

C O R O L L. 1.

2. Hinc iam facile reperitur vera celeritas parti-
 culae aquae in Z versantis, cum enim hae ternae di-
 rectiones sint inter se normales, erit vera celeritas
 aequalis radici quadratae ex summa quadratorum harum
 trium celeritatum, ex quo vera celeritas erit $= \sqrt{(u + v + 2\sqrt{uv} \cos \zeta)}$.

C O R O L L. 2.

3. Cum particula aquae in Z tempusculo dt per-
 ueniat in helice punctum z , existente $Zz = \frac{ds}{\cos \zeta}$, et
 $Yy, Zv = ds$, celeritas autem in helice fit $= \sqrt{v}$, erit
 $Zz \frac{ds}{\cos \zeta} = dt \sqrt{v}$, vnde fit $ds = dt \sqrt{v} \cos \zeta$, prae-
 terea vero iam vidimus esse $dp = dt \sqrt{u}$.

C O R O L L. 3.

4. Celeritates quoque particulae aquae Z secun-
 dum ternas directiones fixas exprimentur per differen-
 tialia coordinatarum x, y, z ad elementum temporis dt
 applicatas.

Erit scilicet ex natura resolutionis motus:

$$\text{Celeritas secundum } CX = \frac{dx}{dt} = -(\sqrt{u + \sqrt{v} \cos \zeta}) \sin \frac{p + s^2}{a}$$

$$\text{Celeritas secundum } XY = \frac{dy}{dt} = (\sqrt{u + \sqrt{v} \cos \zeta}) \cos \frac{p + s^2}{a}$$

$$\text{Celeritas secundum } YZ = \frac{dz}{dt} = \sqrt{v} \sin \zeta$$

Qua-

264 DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

Quarum formularum identitas intelligitur ex valoribus differentialibus $dp = dt \sqrt{u}$ et $ds = dt \sqrt{v} \cdot \cos. \zeta$.

P R O B L E M A. 2.

5. Datis tam celeritate, qua aqua per helicem promouetur, quam celeritate, qua cylindrus cum helice circa axem CD in gyrum agitur, inuenire vires, quibus quamque aquae particulam Z sollicitari oportet, ut hunc motum profequi queat.

S O L V T I O.

Sit celeritas qua aqua praesenti temporis momento per helicem EZ promouetur = \sqrt{v} , celeritas autem gyratoria cylindri = \sqrt{u} . Tum initium helicis iam sit in E ut sit AE = p , et particula aquae, quam consideramus, in Z, ut ducta ZY axi CD parallela, sit arcus EY = s , existente angulo helicis YEZ = ζ . Porro locus puncti Z reducatur ad ternas coordinatas fixas CX = x , XY = y et YZ = z ; erit uti vidimus:

$$x = a \cos. \frac{p+s}{a}; y = a \sin. \frac{p+s}{a} \text{ et } z = s \cdot \text{tang } \zeta$$

denotante a semidiametrum CA = CB basis cylindri. Posito vero elemento temporis = dt , ut sit $dp = dt \sqrt{u}$ et $ds = dt \sqrt{v} \cdot \cos. \zeta$, sumtoque hoc differentiali dt constanti, ex principiis mechanicis constat, particulam aquae in Z a tribus viribus acceleratricibus vigeri debere, quae sint:

$$\begin{aligned} \text{secundum directionem CX} &= \frac{2ddx}{dt^2} \\ \text{secundum directionem XY} &= \frac{2ddy}{dt^2} \\ \text{secundum directionem YZ} &= \frac{2ddz}{dt^2} \end{aligned}$$

Verum

Verum cum ex supra ostensis fit

$$\frac{dx}{dt} = -(Vu + Vv \cos. \zeta) \sin. \frac{p+s}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = (Vu + Vv \cos. \zeta) \cos. \frac{p+s}{a}$$

$$\text{et } -\frac{dz}{dt} = Vv \sin. \zeta$$

erit denuo differentiando

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{du}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{dt\sqrt{v}}\right) \sin. \frac{p+s}{a} - \frac{1}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \cos. \frac{p+s}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{du}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{dt\sqrt{v}}\right) \cos. \frac{p+s}{a} - \frac{1}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \sin. \frac{p+s}{a}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \sin. \zeta$$

Tres ergo vires acceleratrices quaesitae sunt

$$\text{I. sec. CX} = -\frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}}\right) \sin. \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \cos. \frac{p+s}{a}$$

$$\text{II. sec. XY} = +\frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}}\right) \cos. \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \sin. \frac{p+s}{a}$$

$$\text{III. sec. YZ} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \sin. \zeta.$$

COROLL. I.

6. Transferantur duae priores vires primum in punctum Y, ita vt hoc punctum a duabus viribus acceleratricibus vrgeatur, secundum directiones YM et YN, Fig. 2. quae sunt

$$\text{Vis sec. YM} = -\frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}}\right) \sin. \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \cos. \frac{p+s}{a}$$

$$\text{Vis sec. YN} = +\frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}}\right) \cos. \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2 \sin. \frac{p+s}{a}$$

COROLL. 2.

7. Nunc hae duae vires in duas alias transformari poterunt, quae agant secundum directiones Yy, et YO, quarum haec fit ad superficiem cylindri normalis; atque ob angulum MYOACY = $\frac{p+s}{a}$, ex his duabus viribus resultabit

Tor. V. Nou. Com.

L1

IVis

$$\text{I Vis secundum } Yy = \text{Vis } YN \cos. \frac{p+s}{a} - \text{Vis } YM \sin. \frac{p+s}{a}$$

$$\text{II Vis secundum } YO = \text{Vis } YN \sin. \frac{p+s}{a} + \text{Vis } YM \cos. \frac{p+s}{a}$$

COROLL. 3.

8. Hinc ergo loco duarum virium, quae sollicitabant secundum directiones CX et XY, vel YM et YN, in calculum introducentur duae hae aliae secundum directiones Yy et YO, quae erunt

$$\text{Vis secundum } Yy = + \frac{1}{a} \left(\frac{du}{\sqrt{v}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}} \right)$$

$$\text{Vis secundum } YO = - \frac{2}{a} (Vu + Vv \cos. \zeta)^2$$

sicque angulus $p + s$ non amplius in calculo reperitur.

PROBLEMA. 3.

9. Tres vires ante inuentas ad tres alias reducere, quarum vna fit secundum directionem helicis Zz directa, duae reliquae vero sint ad ipsam helicem normales.

SOLUTIO.

Tab. II. Sit Zz elementum helicis, vbi nunc particula
Fig. 3. aquae, quae vires inuentas sustinet, versatur: sitque Zo non solum ad helicem Zz, sed etiam ad ipsius cylindri superficiem in Z normalis, deinde sit recta Zr in ipsa superficie cylindri sita, atque ad Zz normalis. Tres igitur vires inuentae ad tres alias reduci debent, quae particulam aquae sollicitent secundum directiones Zz, Zo et Zr. Ac primo quidem vis inuenta secundum YZ agens = $\frac{dv}{a\sqrt{v}}$ sin ζ , ob angulum helicis YEZ = ζ , dabit

I vim

I vim secundum $Zr = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \sin. \zeta \cos. \zeta$

II vim secundum $Zz = +\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \sin. \zeta \sin. \zeta$

Deinde vis, quae secundum directionem Yy seu Zv agere inuenta est $= \frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv \cos. \zeta}{\sqrt{v}} \right)$, dabit vires

I secundum $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos. \zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cos. \zeta^2$

II secundum $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}} \sin. \zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \sin. \zeta \cos. \zeta$

Tertio vis, quae secundum directionem YO agere est inuenta, dabit nunc sola

vim secundum $Zo = -\frac{2}{a} (\sqrt{u} + \sqrt{v} \cos. \zeta)^2$

Quare tres vires acceleratrices, quibus particula aquae in Z sollicitari debet, vt motum propositum persequatur, erunt:

I secundum directionem $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos. \zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$

II secundum directionem $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}} \sin. \zeta$

III secundum directionem $Zo = -\frac{2}{a} (\sqrt{u} + \sqrt{v} \cos. \zeta)^2$

SCHOLIUM.

10. Habemus ergo vires, quibus singulae aquae particulae sollicitatae esse debent, vt motus, quem assumimus, subsistere possit. Istas autem vires hic ideo ad tres directiones Zz , Zr , et Zo reuocauimus, quo facilius cum viribus, quibus aqua in tubo actu sollicitatur, comparari possint; vt enim quantitates v et u verum aquae et cylindri motum exhibeant, necesse est, vt tres illae vires inuentae conueniant cum viribus, quibus aqua reuera vrgetur. Hae autem vires sunt primo status compressionis aquae in tubo, deinde appressio aquae ad

latera tubi, quae secundum ambas directiones Zr et $Z\theta$ ad directionem tubi normales exhiberi solet. Tertio vero grauitas, qua singulae aquae particulae deorsum nituntur, imprimis examini est subiicienda, quod sequenti problemate instituemus.

PROBLEMA 4.

II. Si cylindrus fuerit utcumque ad horizontem inclinatus, definire vires secundum ternas praedictas directiones, quibus singulae aquae particulae Z in helice ob grauitatem sollicitantur.

S O L U T I O.

Tab. II. Exprimat angulus θ inclinationem basis cylindri
 Fig. 4. ad horizontem, sitque in plano basis punctum fixum A summum, punctum B vero imum, ita ut recta AB cum axe cylindri CD in plano verticali sit constituta. In hoc plano per centrum basis C ducatur horizontalis CH , eritque angulus $ACH = \theta$, seu si ex puncto B erigatur recta verticalis BG axem in G interfecans, erit quoque angulus $BGC = \theta$, atque ob grauitatem singulae aquae particulae sollicitabuntur deorsum secundum directiones ipsi GB parallelas, et vis acceleratrix
 Fig. 1. haec vbique erit $= 1$. Iam in prima figura ducatur quoque recta BG cum axe CD constituens angulum $BGC = \theta$, ac particula aquae in Z vrgebitur vi acceleratrice $= 1$ secundum directionem rectae BG parallelam. Resoluatur haec vis secundum directiones GC et CB , prodibitque

Vis

Vis secundum GC = $\text{I} \cos. \theta$, et vis secundum CB = $\text{I} \sin. \theta$. Ex priori habebimus pro particula aquae Z vim secundum ZY = $\cos. \theta$, ex posteriori vero vim secundum YM = $-\sin. \theta$, vnde ob angulum MYO = $\frac{p+s}{a}$, oritur vis secundum YO = $-\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$ et vim secundum Yy = $+\sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a}$. Hinc ergo punctum Z sollicitabitur ab his tribus viribus acceleratricibus: Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

- I secundum directionem ZY vi = $\cos. \theta$
- II secundum directionem Zo vi = $-\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$
- III secundum directionem Zv vi = $+\sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a}$

Ex his porro ob angulum zZv = ζ orientur:

Primo vis secundum Zz = vi Zv $\cos. \zeta - vi ZY \sin. \zeta$

Tum vis secundum Zr = vi Zv $\sin. \zeta + vi ZY \cos. \zeta$

Quare pro tribus directionibus Zz, Zr et Zo obtinebimus sequentes vires acceleratrices ex grauitate oriundas:

- I Vim secundum Zz = $\cos. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin. \zeta \cos. \theta$
- II Vim secundum Zr = $\sin. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} + \cos. \zeta \cos. \theta$
- III Vim secundum Zo = $-\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$.

PROBLEMA 5.

12. Dato, vt haectenus, tam cylindri, quam aquae per helicem motu, definite statum compressionis aquae in singularis helicis punctis. Fig. 3.

L I 3

SOLV.

S O L V T I O .

Praesenti temporis instanti, quo initium helicis est in E, existente arcu $AE = p$, consideremus helicis punctum Z, ut sit $EY = s$, et $YZ = s \text{ tang } \zeta$ existente helicis angulo $YEZ = \zeta$, sitque status compressionis aquae in puncto $Z = q$, seu denotet q profunditatem, ad quam aqua quiescens in pari statu compressionis existat, eritque pro hoc momento q functio quaepiam ipsius s , et in puncto proximo z , existente $Yy = ds$, status compressionis erit $= q + dq$. Sit iam amplitudo helicis $= bb$, erit particula aquae in portiuncula Zz contenta $= \frac{bbds}{\text{cof. } \zeta}$; quae ergo in Z propelletur vi motrice $= bbq$, in z vero repelletur vi $= bb(q + dq)$; unde existit vis motrix repellens, seu secundum zZ vrgens $= bbdq$, quae praebet vim acceleratricem $= \frac{dq \text{ cof. } \zeta}{ds}$. Quare ob statum compressionis particula aquae in elemento helicis Zz contenta secundum directionem Zz sollicitabitur vi acceleratrice $= -\frac{dq \text{ cof. } \zeta}{ds}$. Praeterea vero ob gravitatem eadem particula, vti vidimus, sollicitatur secundum Zz vi acceleratrice $= \text{cof. } \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin. \zeta \text{ cof. } \theta$, unde coniunctim tam ob gravitatem, quam ob statum compressionis aquae, particula aquae in helicis puncto Z contenta vrgetur secundum directionem Zz vi acceleratrice, quae erit

$$\text{cof. } \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin. \zeta \text{ cof. } \theta - \frac{dq \text{ cof. } \zeta}{ds}$$

laacc-

haecque est vis, qua ista particula actu urgetur, secundum directionem Zz ; ex quo necesse est, ut ea aequalis sit illi vi , qua supra punctum Z ad motus conservationem sollicitari debere inuenimus, secundum eandem directionem Zz . Quae cum sit inuenta $= \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ $\cos. \zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ habebimus hanc aequationem:

$dq \cos. \zeta = ds \cos. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - ds \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{du}{dt\sqrt{u}} ds \cos. \zeta - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} ds$, ubi, quoniam ad praesens tantum temporis momentum respicimus, quantitates a tempore t pendentes, quae sunt p, u, v , itemque $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, tanquam constantes sunt spectandae, ex quo integratione instituta habebimus $q \cos. \zeta = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a} - s \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{s du \cos. \zeta}{dt\sqrt{u}} - \frac{s dv}{ds\sqrt{v}}$ unde status compressionis aquae in singulis helicis punctis pro praesenti temporis momento innotescit.

PROBLEMA 6.

13. Si data aquae portio in helice reperiatur, atque cylindrus datam ad horizontem inclinationem tenens motu quocunque in gyrum agatur, inuenire motum quo ista aquae portio per helicem promouebitur.

SOLVTIO.

Sit basis cylindri semidiameter $CA = CB = a$, et Tab. II. angulus, quem helix EF cum basi cylindri constituit Fig. 5. $BEF = \zeta$. Axis autem cylindri PQ cum recta verticali QR constituat angulum $PQR = \theta$, quo eodem angulo

gulo basis cylindri ad horizontem erit inclinata. In basi autem sit A punctum summum et B infimum. Praesenti autem temporis momento sit initium helices in E, existente eius a puncto summo intervallo seu arcu $AE = p$: et cylindrus in plagam AEB gyretur, ita vt puncti E celeritas sit $= \sqrt{u}$, erit $dp = dt \sqrt{u}$. Occupet nunc portio aquae in helice contenta spatium MN, cuius longitudo sit $MN = f$, ac ductis axi parallelis MS et NT sit aquae ab initio helices distantia $EM = x$, erit $EN = x + f$, et $ES = x \cos. \zeta$, atque $ET = (x + f) \cos. \zeta$; celeritas vero, qua haec aquae portio praesenti momento per helicem promouetur, sit $= \sqrt{v}$. His positis, si in portione aquae MN punctum quodpiam medium Z consideretur, et arcus EY ponatur $= s$, erit status compressionis aquae in Z, qui per altitudinem q exprimatur, vti in problemate praecedente est erutus;

$$q \cos. \zeta = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a} - s \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{s \sin. \cos. \zeta}{a \sqrt{u}} - \frac{s \sqrt{v}}{a \sqrt{v}}$$

Iam vero constat in vtroque termino M et N statum compressionis evanescere debere; siue ergo ponatur $s = x \cos. \zeta$ siue $s = (x + f) \cos. \zeta$, fieri debet $q = 0$: vnde duplex nascitur aequatio

$$0 = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} - x \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta - x \cos. \zeta \left(\frac{d \cos. \zeta}{dt \sqrt{u}} + \frac{dv}{a \sqrt{v}} \right)$$

$$0 = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+(x+f) \cos. \zeta}{a} - (x+f) \cos. \zeta (\sin. \zeta \cos. \theta + \frac{d \cos. \zeta}{dt \sqrt{u}} + \frac{dv}{a \sqrt{v}})$$

vnde, constantem C eliminando, obtinebitur, diuidendo per $\cos. \zeta$, haec aequatio.

a sin.

$$a \sin. \theta \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} = a \sin. \theta \cos. \frac{p+(x+f) \cos. \zeta}{a} + f \sin. \zeta \cos. \theta + \frac{f du \cos. \zeta}{dt \sqrt{u}} + \frac{f dv}{dt \sqrt{v}}$$

vnde motus aquae per helicem definiiri debet, vti enim est $dp = dt \sqrt{u}$, ita erit $dx = dt \sqrt{v}$.

Multiplicetur ergo haec aequatio per $dp + dx \cos. \zeta = dt \sqrt{u} + dt \cos. \zeta. \sqrt{v}$, eritque integrando

$$a^2 \sin. \theta \sin. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} = a^2 \sin. \theta \sin. \frac{p+(x+f) \cos. \zeta}{a} + f(p+x \cos. \zeta) \sin. \zeta \cos. \theta + \iint \left(\frac{du \cos. \zeta}{\sqrt{u}} + \frac{dv}{\sqrt{v}} \right) (\sqrt{u} + \cos. \zeta. \sqrt{v})$$

COROLL. 1.

14. Si igitur motus gyrationis cylindri fuerit vniformis, seu u constans, ponatur $u = k$, ob $du = 0$ erit

$$a^2 \sin. \theta \sin. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} = a^2 \sin. \theta \sin. \frac{p+(x+f) \cos. \zeta}{a} + f(p+x \cos. \zeta) \sin. \zeta \cos. \theta + 2f \sqrt{k} v + f v \cos. \zeta + \text{Const.}$$

Vbi est $p = t \sqrt{k}$, ita vt haec aequatio ob $\sqrt{v} = \frac{dx}{dt}$ duas tantum variables t et x inuoluat. Constans autem ex statu initiali debet definiiri.

COROLL. 2.

15. Si portio aquae in tubo MN fuerit infinite parua seu $f = 0$, erit $\sin. \frac{p+(x+f) \cos. \zeta}{a} = \sin. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} + \frac{f \cos. \zeta}{a} \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a}$

hoc ergo casu motus definietur hac aequatione:

$$\text{Const.} = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} + (p+x \cos. \zeta) \sin. \zeta \cos. \theta + 2 \sqrt{k} v + v \cos. \zeta. \text{ Quodsi ergo haec particula initio quieuerit in E, punctumque E fuerit in A, ita vt posito } x = 0, \text{ fit } p = 0 \text{ et } v = 0 \text{ erit } a \cos. \zeta \sin. \theta (1 - \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a}) = (p+x \cos. \zeta) \sin. \zeta \cos. \theta + 2 \sqrt{k} v + v \cos. \zeta.$$

274 DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

COROLL. 3.

16. Si in casu corollarii praecedentis ponatur angulus $\frac{p + x \cos \theta}{a} = \Phi$, vt fit $dt = \frac{ad\Phi}{\sqrt{k + \cos \zeta} \sqrt{v}}$, ob $dp = dt \sqrt{k}$ et $dx = dt \sqrt{v}$, relatio inter Φ et v hac exprimetur aequatione:

$$a \cos \zeta \sin \theta (1 - \cos \Phi) = a \Phi \sin \zeta \cos \theta + 2 \sqrt{kv} + v \cos \zeta$$

ex qua fit $\sqrt{k + \cos \zeta}$, $\sqrt{v} = \sqrt{(k - a \Phi \sin \zeta \cos \theta + a \cos \zeta^2 \sin \theta (1 - \cos \Phi)) + 2 \sqrt{kv} + v \cos \zeta}$

ideoque $dt = \frac{ad\Phi}{\sqrt{(k - a \Phi \sin \zeta \cos \theta + a \cos \zeta^2 \sin \theta (1 - \cos \Phi)) + 2 \sqrt{kv} + v \cos \zeta}}$

COROLL. 4.

17. Simili modo si generaliter, posito tamen motu gyatorio constante, seu $u = k$, ponatur $\frac{p + x \cos \theta}{a} = \Phi$ et $\frac{f \cos \zeta}{a} = \gamma$, erit quoque $dt = \frac{ad\Phi}{\sqrt{k + \cos \zeta} \sqrt{v}}$ et $\frac{a \cos \zeta \sin \theta}{\gamma} \sin \Phi = \frac{a \cos \zeta \sin \theta}{\gamma} \sin(\gamma + \Phi) + a \Phi \sin \zeta \cos \theta + 2 \sqrt{kv} + v \cos \zeta + C$.

ideoque $\sqrt{k + \cos \zeta} \sqrt{v} = \sqrt{(C + \frac{a}{\gamma} \cos \zeta^2 \sin \theta (\sin \Phi - \sin(\gamma + \Phi)) - a \Phi \sin \zeta \cos \theta)}$

unde fit

$$dt = \frac{ad\Phi}{\sqrt{(C + \frac{a}{\gamma} \cos \zeta^2 \sin \theta (\sin \Phi - \sin(\gamma + \Phi)) - a \Phi \sin \zeta \cos \theta)}}$$

vbi Φ denotat angulum ACS, et γ angulum SCT, qui est constans.

COROLL. 5.

18. Si cylindrus in partem contrariam celeritate $= \sqrt{k}$ circumagatur, pro \sqrt{k} scribi debet $-\sqrt{k}$, arcusque p negative erit accipiendus, ita vt fit $\Phi = \frac{x \cos \theta - p}{a}$.

Quare

Quare cum sit $p > \frac{x \cos \zeta}{a}$, etiam angulus Φ negative accipiatur, habebimus ergo pro hoc motu:
 $\Phi = p - \frac{x \cos \zeta}{a}$; et $dt = \frac{ad\Phi}{\sqrt{k - \cos \zeta} \cdot \sqrt{v}}$ atque $\sqrt{k - \cos \zeta} \cdot \sqrt{v}$
 $= \sqrt{(C - \frac{a}{\gamma} \cos \zeta)^2 \sin \theta \cdot \sin \Phi - \sin(\Phi - \gamma)} + a \Phi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$.

COROLL. 6.

19. Si hoc casu initio $t = 0$, quo erat $p = 0$, et $\sqrt{v} = 0$, fuerit $x = EM = g$; ideoque $\Phi = -\frac{g \cos \zeta}{a}$; ponamus hunc angulum initialem $ECS = \varepsilon$, ut fuerit initio $\Phi = -\varepsilon$, erit $\sqrt{k - \cos \zeta} \cdot \sqrt{v} = \sqrt{(k + \frac{a}{\gamma} \cos \zeta)^2 \sin \theta \cdot (\sin(\varepsilon + \gamma) - \sin \varepsilon - \sin \Phi + \sin(\Phi - \gamma)) + a(\varepsilon + \Phi) \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}$.

PROBLEMA 7.

20. Si, dum cylindrus data celeritate vniformiter in plagam BEA gyatur, helici in C particula aquae seu globulus inferatur, qui deinde a motu cylindri abripiatur, determinare motum globuli per helicem. Tab. II.
Fig. 5.

SOLVTIO.

Sit \sqrt{k} celeritas, qua punctum cylindri E in gyrum agitur, in sensum EA; fueritque eo momento, quo globulus in orificium helici E immittitur, angulus ACE = α , et $t = 0$. Fieri autem nequit, ut celeritas globuli initialis sit = 0; si enim celeritas eius respectu tubi secundum EM ponatur = \sqrt{v} , eius celeritas vera erit = $\sqrt{(k + v - 2 \cos \zeta \cdot \sqrt{k} \sqrt{v})}$, quae non potest euanescere. Ponamus ergo hanc celeritatem initio fuisse minimam, ac reperimus $\sqrt{v} = \cos \zeta \cdot \sqrt{k}$, ita ut celeritas vera fuerit = $\sin \zeta \cdot \sqrt{k}$, cuius directio ad

Mm 2

EM

EM erat normalis. Iam elapso tempore t , sit vt supra $AE = p$; globulus vero reperiatur in M existente $EM = x$, cuius celeritas relative in tubo secundum MN sit $= \sqrt{v}$, erit $dp = -dt\sqrt{k}$ et $dx = dt\sqrt{v}$; et per §. 15. motus definietur hac aequatione, sumpta scilicet celeritate \sqrt{k} negativa.

$$\text{Const} = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+x \cos. \zeta}{a} + (p+x \cos. \zeta) \sin. \zeta \cos. \theta - 2\sqrt{kv} + v \cos. \zeta.$$

Constans autem ita est definienda, vt posito $t = 0$, seu $\frac{p}{a} = \alpha$, fiat $x = 0$ et $\sqrt{v} = \cos. \zeta \sqrt{k}$, sicque erit

$$\text{Const} = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \alpha + \alpha a \sin. \zeta \cos. \theta - 2k \cos. \zeta + k \cos. \zeta^2$$

Ponatur angulus $ACS = \Phi$, erit $\Phi = \frac{p+x \cos. \zeta}{a}$ et $d\Phi = -\frac{dt\sqrt{k} + d \cos. \zeta \cdot \sqrt{v}}{a}$. Confecerit autem cylindrus motu angulari tempore t angulum $= \omega$, in plagam BEA, erit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, et $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, quem angulum loco temporis, tanquam eius mensuram in calculum introducamus, erit $\frac{p}{a} = \alpha - \omega$, $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x \cos. \zeta}{a}$; et ob $dx = dt\sqrt{v} = \frac{a d\omega \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ habebimus $d\Phi = -d\omega + \frac{d \cos. \zeta \cdot \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ seu $d\omega = \frac{d\Phi \sqrt{k}}{\sqrt{k} + \cos. \zeta \cdot \sqrt{v}}$. Nostra autem aequatio erit

$$a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \alpha + \alpha a \sin. \zeta \cos. \theta - 2k \cos. \zeta + k \cos. \zeta^2 = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \Phi + a \Phi \sin. \zeta \cos. \theta - 2\sqrt{kv} + v \cos. \zeta$$

ex qua obtinemus:

$$\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{k \sin. \zeta^2 + a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. \Phi)} + a (\alpha - \Phi) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta$$

vnde ad datum valorem ipsius Φ elicimus valorem ipsius \sqrt{v} , quo inuento erit

$$d\omega = \frac{-d\Phi \sqrt{k}}{\sqrt{k \sin. \zeta^2 + a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. \Phi)} + a (\alpha - \Phi) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta}$$

cuius integrale ita debet capi, vt posito $\omega = 0$, fiat

$$\Phi = \alpha.$$

$\Phi = \alpha$. Ex hac ergo aequatione integrali vicissim ad datum tempus angulo ω expressum, reperitur angulus Φ , ex eoque porro locus globuli in helice, seu portio

$$EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha + \omega)}{\cos. \zeta}, \text{ eiusque insuper celeritas rela-}$$

tiva in helice \sqrt{v} scilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\cos. \zeta} - \sqrt{(k \sin. \zeta^2 \text{ tang. } \zeta^2 + a \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. \Phi) + a (\alpha - \Phi) \text{ tang. } \zeta \cos. \theta)}$$

COROLL 1.

21. Expressio $\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k}$ designat celeritatem veram puncti S in basi, quod globulo in M respondet. Cum enim globulus velocitate \sqrt{v} in helice secundum MN progredi ponatur, erit eius celeritas angularis circa axem $= \cos. \zeta \cdot \sqrt{v}$, respectu helicis; quia autem helix ipsa in plagam oppositam conuertitur celeritate $= \sqrt{k}$, erit vera globuli celeritas rotatoria, seu motus quo punctum S a summitate A recedit $= \cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k}$.

COROLL 2.

22. Ipso autem motus initio, quo $\sqrt{v} = \cos. \zeta \sqrt{k}$; haec celeritas erat negativa, scilicet $= (\cos. \zeta^2 - 1) \sqrt{k} = -\sin. \zeta \sqrt{k}$, statim ergo ab initio etiam nunc erit negativa: seu angulus ACS $= \Phi$ diminuetur, quae est ratio, cur calculus pro $\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k}$ valorem praebuerit negativum

$$\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k \sin. \zeta^2 + a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. \Phi) + a (\alpha - \Phi) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)}$$

Hic ergo valor in affirmativum abire, seu angulus ACS $= \Phi$ augmenta capere nequit, nisi postquam fuerit quantitas illa radicalis $= 0$. Postquam autem hoc

euenerit, tum signi illius radicalis valor affirmatiue erit accipiendus.

COROLL 3.

23. Quoniam autem ab initio angulus Φ decrescit tam diu, donec valor quantitatis illius radicalis euanescit, eousque Φ ultra α diminuetur, seu erit $\Phi < \alpha$: Ponatur ergo $\Phi = \alpha - \psi$, vt fit

$$\text{cof. } \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{k \sin. \zeta^2 + a \text{cof. } \zeta^2 \theta (\text{cof. } \alpha - \text{cof. } (\alpha - \psi)) + a \psi \sin. \zeta \text{cof. } \zeta \text{cof. } \theta}$$

sicque quamdiu augendo valorem ipsius ψ , ista quantitas radicalis realem retinet valorem, tamdiu globulus a motu cylindri in plagam BEA abripietur; neque prius in plagam contrariam motum suum vertet, quam vbi ψ eousque increuerit, vt fit

$$k \sin. \zeta^2 + a \text{cof. } \zeta^2 \sin. \theta (\text{cof. } \alpha - \text{cof. } (\alpha - \psi)) + a \psi \sin. \zeta \text{cof. } \zeta \text{cof. } \theta = 0$$

COROLL 4.

24. Quia autem augendo ψ extremus terminus continuo crescit, medius vero qui est negatiuus $-a \text{cof. } \zeta^2 \sin. \theta (\text{cof. } (\alpha - \psi) - \text{cof. } \alpha)$ tamdiu tantum crescit; quoad fiat $\psi = \alpha$, seu $\Phi = 0$, manifestum est, nisi formula illa in nihilum abeat, antequam fiat $\psi = \alpha$, eam nunquam esse euanturam; globulumque continuo celerius secundum motum cylindri gyratorium abreptum iri. Hoc ergo casu punctum S continuo celerius in plagam BEA conuertetur.

COROLL 5.

25. Si ergo quantitas ista radicalis ponatur $= V$, vt fit $\text{cof. } \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -V$, seu $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\text{cof. } \zeta}$, ob valorem ipsius V hoc casu continuo crescentem, celeritas

ritas globuli progressiva in helice secundum directionem eius EMN tandem evanescet, posteaque adeo fiet negativa, quod ubi acciderit, globulus per helicem revertetur, ac per orificium E iterum erumpet; siquidem cylindrus fuerit longus, ut globulus in superiori helices termino K non erumpat, antequam revertatur.

SCHOLIUM.

26. Cum posito $\Phi = \alpha - \psi$, et

$$V = \sqrt{k \sin. \zeta^2 - a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha) + a \psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta}$$
 quantitas V tamdiu negative fit accipienda, seu habeatur $\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -V$, quamdiu augendo angulum ψ quantitas V realem obtinet valorem; statim autem atque haec quantitas V evaserit $= 0$, inde angulus ψ iterum decrescat, signumque contrarium ipsi V tribui debeat, ut fit $\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = +V$; duos habebimus casus principales evoluendos, quorum altero vspiam augendo ψ ab initio fit $V = 0$, altero vero hoc nunquam evenit. Statim autem ab initio fiet $V = 0$, si sit vel $k = 0$ vel $\zeta = 0$: tum aliquo tempore post initium hoc evenire ponamus, denique vero nunquam; vnde sequentes casus diligentius evoluamus.

CASVS I.

27. Ponamus ergo primo motum cylindri rotatorium penitus evanescere, seu esse $k = 0$. Cum igitur in ipso initio fiat $V = 0$, statim ab initio ipsi V contrarium signo tribui debet, ut fit $\cos. \zeta \sqrt{v} = +V$, seu $\sqrt{v} = \frac{V}{\cos. \zeta}$, atque angulus ψ inde iam erit negativus, seu angulus Φ continuo crescet, ut fit

$$V = \sqrt{v}$$

$$V = V(a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. \Phi) + a(\alpha - \Phi) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)$$

$$\text{et } dt = \frac{a dx}{\sqrt{k}} = \frac{ad\Phi}{V}, \text{ atque } EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha)}{\cos. \zeta}.$$

Quia ergo initio erat $\Phi = \alpha$, et $V = 0$, ponamus tempore elapso t , esse $\Phi = \alpha + \psi$, ut sit

$$V = V(a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. (\alpha + \psi)) - a\psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)$$

$$\text{et } x = \frac{a\psi}{\cos. \zeta} \text{ atque } dt = \frac{a d\psi}{V}.$$

Hic iam perspicua est, fieri omnino non posse, ut angulus ψ continuo crescat, nisi sit $\sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta = 0$, quem casum seorsim euoluere conueniet. Quodsi vero ψ crescere cesset, quo eueniet, ubi $V = 0$, ibi globulus ad statum quietis redigetur, ac in helice regredi incipiet, a quo ergo momento valor ipsius V negatiue capi debebit, angulusque ψ iterum decrescet, donec fiat $\psi = 0$. et tum corpus rursus in E , sicuti initio, haerebit; vnde eundem motum denno inchoabit.

At euenire potest, ut haec globuli reuersio in ipsam quasi initium motus incidat, atque angulus ψ ne minimum quidem augetur queat, quin angulus Φ maneat nullus, vel adeo fiat negatiuus.

Prior casus locum habebit, si posito ψ infinite paruo, valor ipsius V nihilominus maneat $= 0$; id quod vna veniet $\sin. a \cos. \zeta^2 \sin. \theta \sin. \alpha = a \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta$ seu $\sin. \alpha = \frac{\tan. \zeta}{\tan. \theta}$ ac tum corpus perpetuo in puncto E quiescet; hic enim directio helices erit horizontalis.

Posterior casus autem locum habebit, si $\sin. \alpha < \frac{\tan. \zeta}{\tan. \theta}$ quo globulus ne in helicem quidem ingrediatur, sed statim inde delabatur; vel si cylindrus deorsum esset continuatus, mutata directione globulus per helices partem interiorum descensurus esset; ita ut angulus ψ tum fieret negatiuus perinde ac valor ipsius x , et V .

Hi

Hi autem casus locum non inveniunt, nisi sit $\theta > \zeta$, seu inclinatio basis cylindri ad horizontem maior, quam angulus BEF, quem helix cum basi cylindri constituit. Hunc autem motum in helice quiescente fusus non persequor, cum nihil habeat difficultatis.

C A S V S II.

28. Ponamus motum gyratorium cylindri ita esse comparatum, ut motus gyratorius globuli circa axem, qui angulo ψ indicatur, et initio cum motu gyratorio cylindri in eandem plagam fuerat directus, post aliquod tempus in plagam oppositam reflectatur.

Angulus ergo ψ eo usque augeri poterit, ut fiat $k \sin. \zeta^2 = a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha) - a \psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta$ seu $V = 0$; hoc autem fieri nequit, nisi sit

$$\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha > \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta} \cdot \psi.$$

cum igitur ab initio fuisset $\psi = 0$, necesse est, ut posito ψ euanescente, sit $\sin. \alpha > \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$. Deinde valor ipsius $\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha - \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta} \psi$ erit maximus, si

$$\sin. (\alpha - \psi) = \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}.$$

Concipiamus hoc pro ψ valore substituto fieri

$$\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha - \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta} : \psi = M$$

atque ut valor ipsius V augendo ψ tandem euanescere queat, necesse est, ut sit $k \sin. \zeta^2 < a M \cos. \zeta^2 \sin. \theta$. Quare, ut hic casus locum habere possit, sequentes tres conditiones requiruntur.

I. ut sit $\text{tang. } \theta > \text{tang. } \zeta$ seu $\theta > \zeta$; ita ut fractio $\frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$ unitatem non excedat.

II. ut sit $\sin. \alpha > \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$: ac denique

III. ut sit $k < a M \frac{\cos. \zeta^2 \sin. \theta}{\sin. \zeta^2}$.

282. DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

Quoties ergo hae tres conditiones locum inveniunt, globulus in helice in sensum BEA circa axem cylindri circumferetur, donec descripserit angulum ψ , ut fiat:

$$V = \sqrt{(k \sin \zeta^2 - a \cos \zeta^2 \sin \theta) (\cos (\alpha - \psi) - \cos \alpha) + a \psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta} = 0;$$

tumque erit $\cos \zeta \sqrt{v} = \sqrt{k} \cos \zeta$, seu globuli celeritas relativa per helicem $Vv = \frac{\sqrt{k}}{\cos \zeta}$; cum antequam ad hunc locum perveniat, fit $Vv = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos \zeta}$; existente $x = \frac{a \omega - a \psi}{\cos \zeta}$ et $dx = \frac{d\psi \sqrt{k}}{a} = \frac{d\psi \sqrt{k}}{V}$. Post-

quam autem hunc locum attigerit, angulus ψ continuo decrescet, seu motus angularis globuli fiet contrarius motui cylindri, et tribuendo ipsi V signum contrarium, habebitur $Vv = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos \zeta}$, et quando fiet $\psi = 0$, erit $V = \sin \zeta \sqrt{k}$; hincque $Vv = \frac{(1 + \sin \zeta^2) \sqrt{k}}{\cos \zeta}$ et $x = \frac{a \omega}{\cos \zeta}$. Inde fiet ψ negativum, et distantia x adhuc magis crescet, dum posito ψ negativo fiet $x = \frac{a \omega + a \psi}{\cos \zeta}$, donec fiat

$$V = \sqrt{(k \sin \zeta^2 + a \cos \zeta^2 \sin \theta) (\cos \alpha - \cos (\alpha + \psi)) - a \psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta} = 0;$$

et eo usque erit $Vv = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos \zeta}$: ubi autem fuerit $V = 0$, evadet $Vv = \frac{\sqrt{k}}{\cos \zeta}$; qui ergo valor ante hoc tempus maximus fuit, ubi erat $\sin (\alpha + \psi) = \frac{\tan \zeta}{\tan \theta}$. Postquam autem fuerit $V = 0$, angulus ψ iterum decrescet, indeque etiam distantia x minora capiet incrementa, eritque $Vv = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos \zeta}$, donec evadat $\psi = 0$, tumque erit $V = \sin \zeta \sqrt{k}$ et $Vv = \cos \zeta \sqrt{k}$, atque $x = \frac{a \omega}{\cos \zeta}$. Hoc ergo tempore celeritas Vv eadem erit, quae erat initio, indeque motus simili modo propagabitur.

Motus:

Motus ergo per helicem continuo erit progressivus, si perpetuo fuerit $V < \sqrt{k}$: sin autem inter eas motus partes, ubi $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k-v}}{\cos \zeta}$, eueniat, ut fiat $V > \sqrt{k}$, iterum fiat affirmatiuum. Valores autem affirmatiui praeualebunt; vidimus enim post primam periodum, qua celeritas ad initialem redit, globulum spatium absoluisse in helice $x = \frac{a\omega}{\cos \zeta}$, et post n huiusmodi periodos promouebitur per spatium helices $x = \frac{n a \omega}{\cos \zeta}$, sicque continuo altius eleuabitur, donec tandem per superius orificium K eiiciatur.

C A S U S III.

29. Ponamus motum ita esse comparatum, ut postquam ab initio angulus $\psi = \alpha - \phi$ increfcere coepit, nunquam euadat

$$V = \sqrt{k \sin^2 \zeta - a \cos \zeta \sin \theta (\cos(\alpha - \psi) - \cos \alpha) + a \psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta} = 0$$

unde hic angulus ψ continuo magis augebitur, valorque ipsius V increfcet. Tum autem prodibit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k-v}}{\cos \zeta}$, ex quo sequitur, celeritatem \sqrt{v} tandem euanescere, globulumque inde ad inferiorem cylindri partem reuerti, donec in E iterum elabatur. Hoc etiam intelligitur ex formula $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos \zeta}$, distantia enim x diminuebitur, si fuerit $d\omega < d\psi$ seu, $\frac{d\psi \sqrt{k}}{v} < d\psi$, quod utique euenit, quando $\sqrt{k} < V$ seu \sqrt{v} negatiuum.

Hic ergo casus, quo globulum non ultra datum terminum in helice promouere licet, in sequentibus casibus locum habet:

1° Si tang. $\theta < \text{tang. } \zeta$ seu angulus $PQR < BEF$, quomodocunque reliquae quantitates se habeant.

2° Si fuerit $\text{fin. } a < \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$, ita ut etiam si sit $\zeta < \theta$ tamen hoc casu globulus reuertatur in helice.

3° Etiam si sit $\zeta < \theta$ et $\text{fin. } a > \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$, tamen casus tertius locum inuenit, si fuerit $k > \frac{a \text{ cof. } \zeta^2 \text{ fin. } \theta}{\text{fin. } \zeta^2}$. M denotante M maximum valorem, quem expressio $\text{cof. } (\alpha - \psi) - \text{cof. } \alpha - \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta} \cdot \psi$ induere valet.

Hinc ergo patet, gyrationis motum nimis celerem non esse aptum ad globulum ad datam quamuis altitudinem eleuandum, cum motus tardior hunc effectum praestare valeat. Fieri ergo potest, ut ob gyrationem nimium velocem effectum frustremur, quem tamen tardiore motu consequi possemus.

EXEMPLUM.

30. Sit $\frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta} = \frac{1}{2}$ et angulus initialis ACE rectus, seu $\alpha = 90^\circ$, atque $\psi = 90^\circ - \Phi$, sicque ψ denotabit angulum, quo globulus circa axem versus punctum summum A ab E est translatum tempore t , quo cylindrus per angulum $= \omega$ est conuersus, ita ut sit $d\omega = \frac{dt \sqrt{k}}{a}$. Habebimus ergo

$$V = \sqrt{(k \text{ fin. } \zeta^2 - a \text{ cof. } \zeta^2 \text{ fin. } \theta (\text{fin. } \psi - \frac{1}{2} \psi))}, \text{ et}$$

$$d\omega = \frac{d\psi \sqrt{k}}{V} \text{ atque } \sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\text{cof. } \zeta}; \text{ nec non } x = \frac{a(\omega - \psi)}{\text{cof. } \zeta}.$$

Quamdiu ergo motus gyratorius globuli in sensum BEA dirigitur, valor ipsius V in his formulis affirmatiue accipi debet, contra vero negatiue.

Ab initio ergo crescente ψ , decrescit valor ipsius V ob $\text{fin. } \psi > \frac{1}{2} \psi$: quamdiu manet $k \text{ fin. } \zeta^2 > a \text{ cof. } \zeta^2$
fin.

$\sin. \theta (\sin. \psi - \frac{1}{2} \psi)$. Cum igitur ipsius $\sin. \psi - \frac{1}{2} \psi$ valor maximus sit, $\sin. \psi = 60^\circ = \frac{1}{2} \pi$, denotante π angulum duobus rectis aequalem, fiatque hic valor maximus $= \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi = 0,3424267$. Quod si ergo fuerit $k \sin. \zeta^4 < 0,3424267 a \cos. \zeta^2 \sin. \theta$, casus secundus locum habebit, casus vero tertius si $k \sin. \zeta^4 > 0,3424267 a \cos. \zeta^2 \sin. \theta$. Illo scilicet globulus motu angulari tandem reuertetur, hoc vero nunquam. Sit breuitatis ergo $\frac{\cos. \zeta^2 \sin. \theta}{\sin. \zeta^4} = n$, vt fit

$$V = \sin. \zeta^2 \sqrt{(k - na (\sin. \psi - \frac{1}{2} \psi))}$$

I. Ac ponamus primo esse $k > 0,3424267 na$; atque angulus ψ continuo crescet, valor autem ipsius V initio decrescet, donec fiat $\psi = 60^\circ$, vbi valor ipsius V erit minimus, scilicet $= \sin. \zeta^2 \sqrt{(k - 0,3424267 na)}$, ideoque celeritas globuli progressiua per helicem maxima. Inde vero valor ipsius V iterum augebitur, tandemque quando $\sin. \psi = \frac{1}{2} \psi$, quod euenit si $\psi = 108^\circ, 36' 13''$, $56'''$, $22''$ fiet $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$ et $Vv = \cos. \zeta^2 \sqrt{k}$, quae celeritati initiali est aequalis. Postea vero crescente vltcrius angulo ψ , valor ipsius V magis augebitur, fietque tandem $V = \sqrt{k}$, seu $k(1 - \sin. \zeta^4) = a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi)$ seu $\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi = \frac{k(1 + \sin. \zeta^2)}{a \sin. \theta}$; hincque celeritas globuli in helice euanescet, ex quo ω reuerti incipiet, et quidem motu accelerato, quoniam, crescente ψ vltra hunc terminum, quantitas V eo maiora capit augmenta. Definito autem ψ ex aequatione $\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi = \frac{k(1 + \sin. \zeta^2)}{a \sin. \theta}$, quantitas $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos. \zeta^2}$ dabit spatium in helice, ad quod globulus penetrauerit, et vnde deinceps reuertitur. Tempus autem, quo huc vsque pertin-

git, seu angulus ω , a cylindro interea motu gyatorio confectus, definitur hac aequatione:

$$\omega = \int \frac{d\psi \sqrt{k}}{\sin. \zeta^2 \sqrt{(k - na \sin. \psi + \frac{1}{2} na \psi)}}$$

quo inuento simul vera via x in helice percurfa innotescit.

II. Ponamus esse $k < 0,3424267na$, angulusque ψ eo vsque crescet, donec fiat $k = na(\sin. \psi - \frac{1}{2}\psi)$, quod euenit antequam euadet $\psi = 60^\circ$; tumque erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\cos. \zeta}$ ob $V = 0$, haectenus ergo celeritas \sqrt{v} augendo increuit; hicque constituamus primam partem motus globuli per helicem.

2^{da}. Ab hoc autem momento angulus ψ iterum diminuetur, et valor $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{(k - na(\sin. \psi - \frac{1}{2}\psi))}$ negatiue capi debet, ut sit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k+V}}{\cos. \zeta}$, sicque labente tempore valor ipsius V iterum increset, donec euadente $\psi = 0$, fiat $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \frac{(1 + \sin. \zeta^2) \sqrt{k}}{\cos. \zeta}$; hicque secundam motus partem terminemus, in cuius fine $\psi = 0$, et celeritas globuli \sqrt{v} , maior existit, quam adhuc fuit.

3^o. Nunc igitur angulus ψ negatiue esse incipit; posito ergo $-\psi$ loco ψ , habebimus $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{(k + na(\sin. \psi - \frac{1}{2}\psi))}$, manente $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k+V}}{\cos. \zeta}$; et quia $\sin. \psi - \frac{1}{2}\psi$ crescit, quamdiu ψ est $< 60^\circ$, ad hunc vsque terminum $\psi = 60^\circ$, valor ipsius V , hincque celeritas \sqrt{v} augebitur; et facto $\psi = 60^\circ$, celeritas globuli in helice progressiua erit maxima, scilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k + \sin. \zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267na)}}}{\cos. \zeta}$$

4^{to}. Deinde ulterius crescens hoc angulus ψ , qui tunc est $= \Phi - \alpha$, valor ipsius V iterum decreset, et quando fit $\psi = 108^\circ, 36^I, 13^{II}, 56^{III}, 22^{IV}$, erit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$ et $Vv = \frac{(1 + \sin. \zeta^2) \sqrt{k}}{\cos. \zeta}$.

5^{to}. Angulus autem ψ ultra hunc terminum crescere perget, et quia tum $\frac{1}{2} \psi > \sin. \zeta$, erit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k - na}$ ($\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi$), et $Vv = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos. \zeta}$. Valor ergo ipsius V continuo fiet minor, indeque etiam celeritas Vv , donec fiat $\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi = \frac{k}{na}$, quo casu erit $Vv = \frac{\sqrt{k}}{\cos. \zeta}$.

6^{to}. Tum autem hic angulus ψ , qui maior est quam $108^\circ, 36^I$, iterum decreset, fietque $Vv = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$ existente $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k - na} (\frac{1}{2} \psi - \sin. \psi)$; sicque celeritas Vv decreset, et quando fit $\psi = 108^\circ 36^I$, prodibit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$ et $Vv = \cos. \zeta \sqrt{k}$, quae aequalis est celeritati initiali.

7^{mo}. Porro angulus ψ infra hunc terminum decreset, et ob $\sin. \psi > \frac{1}{2} \psi$, erit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k + na} (\sin. \psi - \frac{1}{2} \psi)$ et $Vv = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$; et quando fit $\psi = 60^\circ$, quo casu valor ipsius V erit maximus $= \sin. \zeta^2 \sqrt{k + 0,3424267 na}$, et celeritas globuli minima $Vv = \frac{\sqrt{k} - \sin. \zeta^2 \sqrt{k + 0,3424267 na}}{\cos. \zeta}$. Nisi ergo sit $\sqrt{k} > \sin. \zeta^2 \sqrt{k + 0,3424267 na}$ seu $k > \frac{0,3424267 a \sin. \theta^2}{1 + \sin. \zeta^2}$, cum sit $k < \frac{0,3424267 a \cos. \zeta^2 \sin. \theta^2}{\sin. \zeta^4}$, globulus antequam ad hunc terminum pervenit, regreditur in helice, propterea quod eius celeritas Vv fit negativa. Revertitur ergo globulus, si sit $k < \frac{0,3424267 a \sin. \theta^2}{1 + \sin. \zeta^2}$, non autem revertetur, sed perpetuo per cochleam progredi perget, si sit $k > \frac{0,3424267 a \sin. \theta^2}{1 + \sin. \zeta^2}$. Quia autem esse debet $k < \frac{0,3424267 a \cos. \zeta^2 \sin. \theta^2}{\sin. \zeta^4}$, manifestum est, hunc casum

casum locum obtinere non posse, nisi sit $1 > 2 \sin. \zeta^*$, seu $\sin. \zeta < \sqrt{\frac{1}{2}}$; hoc est: nisi angulus helices ζ minor sit quam $57^\circ, 14^1$.

8^{vo}. Postquam autem angulus ψ ultra 60° fuerit diminutus, etiam ulterius decrefcet, eritque adhuc

$V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k + na(\sin. \psi - \frac{1}{2} \psi)}$ et $Vv = \frac{\sqrt{k-v}}{\cos. \zeta}$ valorque ipsius V continuo fiet maior, ut et celeritas Vv , quae mox affirmatiua reddetur, et facto $\psi = 0$ redibit ea, uti erat initio, $Vv = \cos. \zeta. \sqrt{k}$,

Cum globulus huc peruenerit, angulus ψ iterum negatiuus euadet, seu motus angularis globuli motum cylindri sequetur, seu erit iam $\Phi < \alpha$, seu $\Phi < 90^\circ$; vel globulus in superiorem cylindri medietatem eleuabitur, cum a Nro. 3^{to} in inferiore esset uersatus: atque nunc pari modo motum suum profequetur, atque ab initio fecerat; ita ut iam eadem motus partes, quas descripsimus, sint reiturae.

Quod uero ad tempora attinet, quibus quaeque motus huius pars absoluitur, ea nonnisi per quadraturas definiiri poterunt ope formulae $d\omega = \frac{d\psi \sqrt{k}}{v}$; quippe cuius integratio exhiberi nequit.

PROBLEMA 8.

31. Si una integra helices circumuolutio EFG aqua fuerit repleta, atque cylindrus subito in gyrum agi incipiat celeritate uiformi, quae in puncto E sit $= \sqrt{k}$, idque in sensum helici contrarium BEA , inuenire motum, quo ista aquae portio per helicem promouebitur.

SOLV-

S O L V T I O.

Positis basis cylindri radio $CA = a$, angulo helicis $BEF = \zeta$, angulo, quem axis cylindri PQ cum verticali constituit, $PQR = \theta$; sit ipso motus initio angulus $ACE = \alpha$; quo tempore aqua in helice spatium $EFG = f$ occupet, quod cum vni integræ reuolutioni sit æquale, posito $\frac{f \cos \zeta}{a} = \gamma$, erit γ angulus quatuor rectis æqualis, seu denotante π : π rationem radii ad semicircumferentiam, erit $\gamma = 2\pi$ et $f = \frac{2\pi a}{\cos \zeta}$, et ipsa aquae copia $= -\frac{2\pi a b b}{\cos \zeta}$, siquidem $b b$ designet amplitudinem helicis.

Iam elapso tempore t , quo ipse cylindrus circa axem conuersus erit angulo $= \omega$, vt sit $d\omega = \frac{dt \sqrt{k}}{a}$, seu $\omega = \frac{t \sqrt{k}}{a}$, ideoque $t = \frac{a \omega}{\sqrt{k}}$, peruenit aqua in helice in situm $MFGem$; ponatur ergo spatium $EM = x$ et celeritas, qua aqua per helicem promouetur $= Vv$; vt sit $dx = dt Vv = \frac{a d\omega \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur angulus $ACS = \Phi$, et ob angulum $ECS = \frac{x \cos \zeta}{a}$, quia punctum E angulo ω ad A accessit, erit $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x \cos \zeta}{a}$, ideoque $\frac{x \cos \zeta}{a} = \omega + \Phi - \alpha$; et hinc $\frac{dx \cos \zeta}{a} = \frac{d\omega \cos \zeta \sqrt{v}}{\sqrt{k}} = d\omega + d\Phi$, ita vt sit $d\omega = \frac{d\Phi \sqrt{k}}{\cos \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k}}$. At ex §. 17 habebitur hæc æquatio ob $\gamma = 2\pi$ et $\sin(\gamma + \Phi) = \sin \Phi$:

$$\cos \zeta \cdot Vv - \sqrt{k} = \sqrt{k} (C - a \Phi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta).$$

Ipso autem motus initio aquae in tubo helicis eiusmodi motus imprimatur, vt sit $Vv = \cos \zeta \cdot \sqrt{k}$, quo casu cum sit $\Phi = \alpha$, erit

$$\cos \zeta \cdot Vv - \sqrt{k} = -\sqrt{k} (k \sin \zeta^2 + a(\alpha - \Phi) \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta).$$

290 DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

Ab initio ergo angulus Φ , qui ipso initio erat $= \alpha$,
 decrevit, seu terminus aquae MI propius ad lineam su-
 premam AA eleuatur, quam fuerat initio. Ponamus
 tempore t hanc appropinquationem factam esse per
 angulum Ψ , ut sit $\Phi = \alpha - \Psi$, erit $\frac{x \cos \zeta}{a} = \omega - \Psi$ et $x =$
 $\frac{a(\omega - \Psi)}{\cos \zeta}$ tum vero $\cos \zeta \sqrt{v} = \sqrt{k} = \sqrt{k \sin^2 \zeta +$
 $+ a \Psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}$ seu $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k - \sqrt{k \sin^2 \zeta + a \Psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}}}{\cos \zeta}$
 eritque $d\omega = \frac{a \Psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}{\sqrt{k - \sqrt{k \sin^2 \zeta + a \Psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}} dt$

Hinc cum initio quo $\omega = 0$, fit quoque $\Psi = 0$,
 erit integrando:

$$\frac{a \cos \zeta \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}{2 \sqrt{k}} = \sqrt{k \sin^2 \zeta + a \Psi \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta} - \sin \zeta \sqrt{k}$$

hincque porro $\Psi = \omega \sin \zeta + \frac{a \omega \omega}{4k} \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$

Ex quo obtinemus pro tempore per angulum ω
 indicato:

$$\sqrt{v} = \cos \zeta \sqrt{k} - \frac{a \omega \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta}{2 \sqrt{k}}$$

$$\text{erit } \omega = a \omega \cos \zeta - \frac{a a \omega \omega}{4k} \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$$

elapso autem tempore t est $\omega = \frac{t \sqrt{k}}{a}$; ita ut fit

$$\sqrt{v} = \cos \zeta \sqrt{k} - \frac{1}{4} t \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$$

$$\text{erit } x = t \cos \zeta \sqrt{k} - \frac{1}{4} t^2 \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$$

spatium ergo SMI, per quod aequal iam secundum dire-
 ctionem axis cylindri erit promota, erit

$$x \sin \zeta = t \sin \zeta \cos \zeta \sqrt{k} - \frac{1}{4} t^2 \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta$$

unde spatium, per quod verticaliter iam erit eleuata
 aqua concluditur

$$x \sin \zeta \cos \theta = t \sin \zeta \cos \zeta \cos \theta \sqrt{k} - \frac{1}{4} t^2 \sin \zeta \cos \zeta \cos^2 \theta$$

C O R O L L. II.

32. Si cylindrus plane non in gyrum ageretur,
 sed in quiete relinqueretur, ut esset $k = 0$, tunc elapso
 tempore

tempore t effiet $Vv = -\frac{1}{2}t \sin \zeta \cos \theta$ et $x = -\frac{1}{4}t^2 \sin \zeta \cos \theta$. Aqua ergo, siquidem cochlea deorsum ultra E effiet continuata, motu uniformiter accelerato, per cylindrum descenderet, eiusque motus similis foret descensui corporis super plano inclinato, cuius anguli inclinationis ad horizontem sinus effiet $= \sin \zeta \cos \theta$.

COROLL. 2.

33. Cylindro autem in gyrum acto in sensum BEA celeritate $= \sqrt{k}$, aqua quidem ab initio motus secundum cylindrum ascendet, quamdiu fuerit $k > \frac{1}{2} a \sin^2 \zeta \cos^2 \theta$ seu $\sqrt{k} > \frac{1}{2} t \sin \zeta \cos \theta$: Elapso autem tempore $t = \frac{2\sqrt{k}}{\sin \zeta \cos \theta}$, motus ascensus cessabit, posteaque aqua per cylindrum descendere incipiet.

COROLL. 3.

34. Posito ergo $t = \frac{2\sqrt{k}}{\sin \zeta \cos \theta}$, maximum spatium x per quod aqua in cochlea fuerit promota, erit $x = \frac{k \cos^2 \zeta}{\sin^2 \zeta \cos^2 \theta}$; adeoque secundum longitudinem cylindri confecit spatium $x \sin \zeta = \frac{k \cos^2 \zeta}{\cos^2 \theta}$; et perpendiculariter reperietur eleuata ad altitudinem $x \sin \zeta \cos \theta = k \cos \zeta$.

COROLL. 4.

35. Portio ergo aquae, quae integram spiralem reuolutionem implet, ope cochleae archimedee ad maiorem altitudinem eleuari nequit, quam quae sit $= k \cos \zeta$. Quo celerius ergo cylindrus in gyrum agitur, eo altius haec aquae portio eleuari poterit, et haec quidem altitudo proportionalis erit quadrato celeritatis gyrationis.

292 DE COCHLEA ARCHIMEDIS.

COROLL. 5.

36. Sit altitudo, ad quam aqua ope cochleae Archimedis eleuari debeat, $= c$; praestabiturque hoc tempore t ut fit

$$c = t \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta \sqrt{k} - \frac{1}{2} t t \sin. \zeta^2 \cos. \theta^2$$

$$\text{feu } t = \frac{2 \cos. \zeta \sqrt{k} - 2 \sqrt{(k \cos. \zeta^2 - c)}}{\sin. \zeta \cos. \theta}$$

Ut iam hoc tempus sit omnium minimum, angulus ζ ita esse debet comparatus, ut fit $\text{tang. } \zeta^2 = 1 - \frac{c}{k}$

$$\text{feu } \text{tang. } \zeta = \sqrt{1 - \frac{c}{k}}$$

COROLL. 6.

37. Posito autem $\text{tang. } \zeta = \sqrt{1 - \frac{c}{k}}$, erit tempus illud minimum, quo aqua per altitudinem c eleuatur:

$$t = \frac{2 \sqrt{k}}{\cos. \theta} (\cos. \zeta - \text{tang. } \zeta) = \frac{2 \sqrt{k} - 2 \sqrt{(k - c)}}{\cos. \theta \sqrt{1 - \frac{c}{k}}}$$

quod fit infinitum si $k = c$, at vero nullum si $k = \infty$. Quo maior ergo capiatur celeritas gyrationis \sqrt{k} , et quo minor simul statuatur angulus $\text{PQR} = \theta$, eo breuiori tempore aqua ad altitudinem c eleuabitur.

COROLL. 7.

38. Patet ergo etiam si cochlea Archimedis situm obtineat verticalem, eius tamen ope aquam ad quamvis altitudinem eleuari posse, dummodo cochlea satis celeriter in gyrum agatur. Hoc autem casu ob $\theta = 0$, perinde est siue aqua integram helicis revolutionem impleat, siue secus. Ac tempus quidem eleuationis hoc casu

casu minus erit, quam si cylindrus ad horizontem esset inclinatus.

SCHOLIUM.

39. Patet ergo insignem esse differentiam inter elevationem aquae per cochleam Archimedis, prout aqua eleuanda vel integram spirae reuolutionem impleat, vel tantum minimam eius portionem occupet, si enim aqua integram spiram adimplet, ea non ultra certam altitudinem eleuari potest, quantumuis celeriter cochlea in gyrum agatur; contra autem vidimus, si minima aquae portio tantum cochleae immittatur, fieri posse, ut ea ad quamuis altitudinem eleuetur, atque hoc quidem motu gyrationis non admodum celeri: nam ex praecedentibus perspicitur, motum nimis celerem ascensui aduersari, et aquam iterum deorsum ferre, quae tamen a motu tardiore continuo ascendere perrexisset. Ut enim particula aquae cochleae in E initio immissa continuo ascendere pergat, primum requiritur ut sit $\theta > \zeta$, seu ang. PQR $>$ ang. BEF. Deinde ut sit sin. α seu sin. ACE $>$ $\frac{\text{tang } \zeta}{\text{tang } \theta}$: tertio autem requiritur, ut, denotante M maximum valorem posituum, quem expressio $\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha - \frac{\text{tang } \zeta}{\text{tang } \theta}$ recipere valet, quod euenit casu sin. $(\alpha - \psi) = \frac{\text{tang } \zeta}{\text{tang } \theta}$ sit $k > a M. \frac{\cos. \zeta^2 \sin. \theta}{\sin. \zeta^2}$. Si ergo altitudo celeritati gyrationis debita k superaret hanc quantitatem, aqua, postquam ad certam altitudinem peruenisset, iterum delaberetur. Verum neuter horum casuum in praxi communi, ubi cochlea Archimedis ad aquas eleuandas adhibetur, locum habet: quodsi enim tota cylindri basis inferior AB aquae est sulcata, tota

Helix semper est aqua repleta, unde quaestio, quanta celeritate et ad quantam altitudinem cochlea in gyrum acta aquam sit eleuatura, ab his binis, quas tractauimus, penitus est diuersa, propterea quod aqua in E continuo influit, in K vero iterum egeritur. Hanc igitur quaestionem difficillimam in sequente problemate enodare conabor.

PROBLEMA 9.

40. Si tota basis cylindri aquae sit submersa, aequae motu uniformi in gyrum agatur, definire motum aquae per cochleam.

SOLVTIO.

Positis, vt haecenus, radio basis $CA = a$, angulo helicis $BEF = \zeta$, et inclinationis $PQR = \theta$: sit altitudo aquae supra centrum basis $C = c$, longitudo totius cylindri $Aa = Bb = b$, et EFGHIK representet totam helicem, cuius propterea longitudo est $= \frac{b}{\sin \zeta}$; ac si eius amplitudo dicatur $= bb$, erit quantitas aquae in helice contentae $= \frac{b \cdot bb}{\sin \zeta}$; tum vero summa spirarum ad basin relatarum praebabit in eius peripheria arcum $= \frac{b \cos \zeta}{\sin \zeta}$. Scilicet si a puncto helicis quocunque Z ad basin ducatur recta axi parallela ZY, arcusque EY ponatur $= s$, posito $s = 0$, habebitur terminus helicis inferior E, at posito $s = \frac{a \cos \zeta}{\sin \zeta}$ prodibit terminus helicis superior K. Gyretur nunc cylindrus in sensum BEA, ita vt celeritas puncti E sit $= \sqrt{k}$: positoque arcu EA $= p$, elapso tempusculo dt erit $dp = -dt \sqrt{k}$. Praesenti autem temporis momento sit aquae per heli-

cens

cem ascendenti celeritas $= \sqrt{v}$: quod si iam status compressionis aquae in helice loco quocunque Z ponatur $= q$, existente arcu $EY = s$, hanc supra inuenimus aequationem

$$q \cos. \zeta = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a} - s \sin. \zeta \cos. \theta \frac{s' d' v'}{a \sin. \zeta}$$

Quando autem aqua in K libere effluit, posito $s = \frac{b \cos. \zeta}{\sin. \zeta}$ status compressionis in K euanescere debet, erit ergo

$$C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \zeta \cos. \theta + \frac{b' d' v' \cos. \zeta}{a \sin. \zeta \sqrt{v}} \text{ Exprimat } g \text{ statum compressionis in altero termino } E, \text{ ubi } s = 0 \text{ erit}$$

$$g \cos. \zeta = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \zeta \cos. \theta + \frac{b' d' v' \cos. \zeta}{a \sin. \zeta \sqrt{v}}$$

$$- a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p}{a}$$

sive per $\cos. \zeta$ diuidendo:

$$g = a \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a} + b \cos. \theta + \frac{b' d' v'}{a \sin. \zeta \sqrt{v}}$$

Totum ergo negotium huc redit, vt status compressionis aquae in termino E definiatur, qui cum a profunditate orificii E , sub aqua pendeat, reperitur puncti E altitudo super centro $C = a \cos. \frac{p}{a} \sin. \theta$, ideoque profunditas orificii E sub aqua erit $= a - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a}$. Cum igitur celeritas aquae in helicem influentis sit debita altitudini w , status compressionis aquae in E aestimari debet per altitudinem $a - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a} - w$, vnde habemus:

$$a - a \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \theta + \frac{b' d' v'}{a \sin. \zeta \sqrt{v}} + w$$

ponatur angulus $ACE = \Phi$, vt sit $p = a \Phi$ et $dt = \frac{a d \Phi}{\sin. \zeta}$

tum vero sit angulus $\frac{b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} = \gamma$, seu $b = a \gamma \tan. \zeta$

erit $c = a \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma) + a \gamma \tan. \zeta \cos. \theta - \frac{\gamma d' v' \cos. \zeta}{d \Phi \cos. \zeta \sqrt{v}} + w$

ponamus $2 \sqrt{kw} = z$ vt sit $w = \frac{z^2}{4k}$ habemus:

— vlt

$$-\gamma dz + \frac{z z d \Phi \cos. \zeta}{+k} + a d \Phi \cos. \zeta \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma) \\ = d \Phi (c \cos. \zeta - a \gamma \sin. \zeta \cos. \theta)$$

Ex qua aequatione valor ipsius z defini debet.

Quod autem ad pressionem aquae ad latera tubi attinet, quatenus inde motui gyrationis resistitur, supra vidimus a gravitate aquae oriri vim secundum $Zr = \sin. \zeta \sin. \theta \sin.$

Tab. II. Fig. 3. $\frac{p+s}{a} + \cos. \zeta \cos. \theta$, unde oritur vis secundum $Zv = \sin. \zeta^2 \sin. \theta \sin. \frac{p+c}{a} + \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta$, quae per elementum aquae $= \frac{b h d s}{\cos. \zeta}$ et radium a multiplicata dat momentum elementare motui resistens, unde totum momentum erit

$a b h (b \cos. \zeta \cos. \theta + \frac{a \sin. \zeta^2 \sin. \theta}{\cos. \zeta} (\cos. \Phi - \cos. (\Phi + \gamma)))$
tantum ergo momentum a vi gyrante superari debet.

C O R O L L. 1.

41. Pendet ergo determinatio motus aquae per cochleam Archimedis a resolutione huius aequationis differentialis;

$$-\gamma dz + \frac{z z d \Phi \cos. \zeta}{+k} + a d \Phi \cos. \zeta \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma) \\ = d \Phi (\cos. \zeta - a \gamma \sin. \zeta \cos. \theta)$$

vel ob $\gamma = \frac{b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta}$ istius aequationis

$-\frac{b d z}{a \sin. \zeta} + \frac{z z d \Phi}{+k} + a d \Phi \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma) = d \Phi (c - b \cos. \theta)$
quae cum pluribus difficultatibus sit obnoxia, patet theoriam Cochleae Archimedis maxime esse arduam.

COR.

COROLL. 2.

42. Si cochlea in quiete relinquitur, ut sit $k=0$, loco elementi $d\Phi$ expedit in calculo relinqui elementum temporis dt et ob angulum Φ constantem habebitur:

$$\frac{bdv}{dt \sin. \zeta \sqrt{v}} + v = c - b \cos. \theta - a \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma)$$

unde mox nasceretur motus uniformis, $v = c - b \cos. \theta - a \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma)$ quo aqua per cochleam fluat, siquidem sit $c > b \cos. \theta + a \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma)$

COROLL. 3.

43. Si cylindrus in situ verticali sit positus ob $\theta=0$ erit $-\frac{bdz}{a \sin. \zeta} + \frac{zz d\Phi}{k} = d\Phi (c - b)$; unde fit $d\Phi = \frac{bdz}{(k(b-c) + z z a \sin. \zeta)}$ et integrando $\frac{a \Phi \sin. \zeta}{k} \sqrt{4k(b-c)}$ $= A \text{ tang. } \frac{z}{\sqrt{4k(b-c)}}$, ubi est $\sqrt{v} = \frac{z}{\sqrt{4k}}$. Cum autem, si initio fuerit $\Phi = 0$ et $z = 0$, labente tempore angulus Φ euadat negativus, perspicuum est, valorem quoque ipsius z prodire negativum; ideoque hoc casu aqua non ascendet, sed descendet, quod quidem per se est evidens.

COROLL. 4.

44. In casu autem coroll. praec. quo $b > c$, eiusmodi constantem addi oportet, ut posito $\Phi = 0$ fiat $\sqrt{v} = \frac{z}{\sqrt{4k}} = \cos. \zeta \sqrt{k}$, sicque erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}} = \text{tang. } \left(\frac{\cos. \zeta \sqrt{k}}{\sqrt{(b-c)}} + \frac{a \Phi \sin. \zeta}{2b} \sqrt{\frac{b-c}{k}} \right)$; progressu autem temporis fit Φ negativum, ideoque ascensus penitus cessat, cum fit $-\Phi = \frac{z b k \cos. \zeta}{2(b-c) \sin. \zeta}$.

SCHOLIUM.

45. Assumsi in huius casus integratione, cochleam initio fuisse aqua repletam, subitoque rotari incepisse; Tom. V. Nou. Com. P p sic

sic enim utique celeritas initialis aquae progressiva per cochleam fit $= \cos. \zeta \sqrt{k}$ Sin autem status initialis ita concipiatur, ut obturato inferiori orificio cochlea in gyrum agatur, tum vero subito orificium iterum aperiri, aqua hoc momento sese iam ad motum tubi accommodauerit necesse est, ita ut tum pro motus initio futurum sit $v = 0$. Hanc ergo ob rem aqua statim descendere incipiet, neque vlla eius gutta supra eicietur, siquidem sit $b > c$. Quanquam autem hunc casum quo $\theta = 0$ feliciter expedire licuit, tamen pro situ cochleae inclinato, nihil admodum ex aequatione inuenta elicere licet, sed natura motus aquae his casibus nobis abscondita manet, propterea quod haec aequatio ad formulam Riccatianam referenda commode tractari nequit. Ex quo insigne Analyseos defectus exemplum agnoscimus, quod machinae frequentissimo usu maxime peruulgatae effectus pendeat a resolutione huiusmodi aequationis, cui artificia in Analyfi adhuc detecta non sufficiant, qui casus mihi adeo mirabilis est visus, ut etiam si in hac inuestigatione scopum, quem mihi proposueram, non attigerim, tamen hoc argumentum dignissimum existimauerim, quo Geometrarum vires ad id penitus expediendum incitarem, quo labore non solum maxima commoda in Mechanicam redundabunt, sed etiam Analyseos limites haud mediocriter promouebuntur.

