METHODVS
INVENIENDI INFINITAS CVRVAS ISOPERIMETRAS ALIAVE COMMVNI PROPRIETATE PRAEDITAS.

Auctore

L. EVLERO.

In celebri illo problemate iſoperimetrico quaeri ſolet, inter omnes lineas curuas per data duo puncta transeuntes ac longitudine aquales, ea quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat. Hoc igitur problema innititur iſti hypotheſi, quod datis duobus punctis infinitae exiſtant lineae curuae longitudine aequales, quae omnes intra haec puncta tanquam terminos contineantur. Quanquam autem nullum eſt dubium, quin per data duo puncta innumerabiles duci queant lineae curuae, quae omnes longitudinem eandem habeant, tamen ſi omnes iſtae curuae exhiberi debeant, vel aequatio generalis deſideretur eas omnes complectens, quaeſtio non parum ardua videtur. Atque ſi ad ſolutionem problematis iſoperimetrici id opus fuiſſet, vt omnes curuae iſoperimetrae intra datos terminos contentae exhiberentur, et ad electionem maximi minimi-

ve quasi proponerentur, nondum fortasse aditus ad hoc problema patuisset.

Remota autem huius problematis mentione, ipsa quaestio de inueniendis infinitis lineis curuis isoperimetris, quae intra datos terminos sint descriptae, omni attentione digna videtur; et quoniam eius solutio peculiaria calculi artificia postulat, quemadmodum cuique tentanti mox patebit, pro Analysi inde non spernenda incrementa expectare licebit. Praecipue autem multo maiorem fructum hinc percipiemus, si problemati longe ampliorem extensionem tribuamus, ita, vt nonsolum curvas eiusdem longitudinis, sed quae alia quacunque indole communi sint praeditae, definire doceamus, quae intra eosdem terminos sint contentae. Quousque igitur mihi in tractatione huius problematis latiori sensu accepti, pertingere licuerit, hic dilucide explicare constitui, atque vt ordine procedam, a quaestionibus simplicioribus huc pertinentibus exordiar.

Problema 1.

1. Inuenire aequationem generalem pro omnibus curuis, quae per data duo puncta transeant.

Solutio.

Referentur omnes hae curuae inueniendae ad eundem axem, easdemque coordinatas orthogonales, sitque abscissa $= x$, applicata $= y$. Bina autem puncta data respondeant his duobus ipsius x valoribus; $x = 0$ et $x = a$;

ac

ac pro illo quidem ſit $y=b$, pro hoc vero $y=c$. Quaeſtio ergo huc redit, vt eiusmodi relatio in genere inter x et y definiatur, quae poſito $x=o$ praebeat $y=b$, poſito autem $x=a$, det $y=c$; ſin autem abſciſſae x alii valores tribuantur, reſpondentes applicatae y valores in infinitum variare debent, propterea quod ſingulae curuae inter ſe debent eſſe diuerſae. Sit X eiusmodi functio ipſius x, quae poſito $x=o$ vel $x=a$ fiat vel $=b$ vel $=c$, atque manifeſtum eſt, aequationem $y=X$ vnam praebere curuam per propoſita ambo puncta transeuntem. Denotet iam P functionem quamcunque ipſius x indefinitam, ac ponatur $y=X+x(a-x)P$, vbi manifeſtum eſt, ſiue ſtatuatur $x=o$, ſiue $x=a$, alterum membrum $x(a-x)P$ in nihilum eſſe abiturum; dummodo P neque per x, neque per $a-x$ ſit diuiſum, ſicque alteruter factorum x et $a-x$ tollatur. Idem eueniet, ſi ponatur $y=X+x^m(a-x)^nP$, dummodo exponentes m et n ſint nihilo maiores, ex quo perſpicuum eſt, omnes curuas hac aequatione $y=X+x^m(a-x)^nP$ contentas ita fore comparatas, vt ſiue ponatur $x=o$, ſiue $x=a$, iidem pro y prodeant valores, quaecunque functio ipſius x loco P ſubſtituatur. Ergo omnes hae curuae per eadem duo puncta abſciſſis $x=o$ et $x=a$ reſpondentia tranſibunt, per quae tranſit curua aequatione $y=X$ contenta: et quoniam aſſumtio functionis P latiſſime patet, perſpicuum eſt, hanc aequationem omnes omnino curuas per ambo propoſita puncta tranſeuntes continere.

Coroll. 1.

2. Data ergo curua hac aequatione $y = X$ expressa, vel saltem eius portione, quae respondet abscissae $= a$, cuius propterea ambo termini erunt noti, omnes curuae hac aequatione generalissima contentae:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

per eosdem terminos transibunt, quaecunque pro P substituatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, neuterque horum factorum x^m et $(a-x)^n$ per diuisionem destruatur. Quippe qui factores sunt necessarii ad hanc proprietatem producendam.

Coroll. 2.

3. Scilicet si curuae hac aequatione $y = X$ expressae punctum abscissae $x = 0$ respondens sit A, abscissae vero $x = a$ respondens sit B, quae puncta A et B in figura notata sunt intelligenda, tum omnes curuae hac aequatione $y = X + x^m (a-x)^n P$ contentae per eadem duo puncta A et B transibunt.

Coroll. 3.

4. Si in curua, cuius aequatio $y = X$, notentur tria puncta A, B, C, quae tribus abscissis $x = 0$, $x = a$, $x = b$ conueniant, simili modo infinitae aliae curuae exhiberi poterunt, quae per eadem tria puncta A, B, C transibunt, omnes enim hac aequatione generali continebuntur $y = X + x^m (a-x)^n (b-x)^p P$.

Coroll.

Coroll. 4.

5. Simili modo facile erit infinitas curuas inuenire, quae per quatuor pluraue puncta data datae curvae $y=X$ transeant, si enim haec puncta sint A,B,C,D, etc. quae respondeant abscissis;

$$x=0,\ x=a,\ x=b,\ x=c,\ \text{etc.}$$

curuae quaesitae hac comprehendentur aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^n(b-x)^p(c-x)^q \text{ etc. } P$$

dummodo exponentes m,n,p,q etc. sint nihilo maiores, nullusque factorum per indolem functionis P destruatur.

Coroll. 5.

6. Si ergo curua data sit circulus, in eiusque peripheria puncta quotcunque notentur, aliae infinitae curuae describi poterunt, quae per omnia haec puncta transeant.

Scholion 1.

7. Si coordinatae curuae datae per functiones quasdam nouae variabilis u dentur, ita, vt sit:

$$x=U \quad \text{et} \quad y=V$$

huiusque curuae duo puncta A et B reperiantur si ponatur $u=f$ et $u=g$, ita vt posito $u=f$ fiat $x=0$ et posito $u=g$ fiat $x=a$; tum infinitae aliae inuenientur curuae per eadem duo puncta A et B transeuntes, ope harum formularum:

$$x=U+(f-u)^\mu(g-u)^\nu P$$
$$\text{et } y=V+(f-u)^m(g-u)^n Q$$

quae-

quaecunque functiones ipsius u loco P et Q scribantur dummodo factorum nullus destruatur, exponentesque μ, ν, m, n nihilo sint maiores. Perspicuum est enim, siue ponatur $u = f$, siue $u = g$, coordinatas x et y prodire plane easdem, quaecunque functiones litteris P et Q tribuantur. Simili etiam modo solutio adornabitur, si curuae quaesitae per tria pluraue puncta data curuae propositae transire debeant; atque etiam patet hoc modo non solum curuas algebraicas, sed etiam transcendentes cuiusque ordinis exhiberi posse, cum nihil impediat, quominus pro P et Q etiam functiones transcendentes ipsius u accipiantur.

Scholion 2.

8. Cuique patet, functionibus P et Q eiusmodi adiunctos esse factores, qui vtroque casu proposito $u = f$ et $u = g$ euanescant, ita vt his casibus, quibus oriuntur abscissae $x = o$ et $x = a$, posteriora vtriusque formulae membra euanescant, indeque pro coordinatis iidem prodeant valores $x = U$ et $x = V$, qui ipsi curvae propositae conueniunt. Haec ergo conditio vt impleatur, haec istorum factorum forma $(f-u)^m(g-u)^n$ simplicissima et commodissima est visa; interim tamen occurrere possunt casus, quibus haec forma idoneos non suppeditat factores, veluti si alterum curuae punctum obtineatur ponendo $u = \infty$, ita vt sit $g = \infty$; tum enim huius modi factor $(f-u)^m(\infty-u)^n$ calculum maxime perturbaret. Hoc autem casu non erit difficile eiusmodi formas excogitare in terminis finitis, quae tam casu

casu $u=f$, quam casu $u=\infty$ euanescant: scilicet huic conditioni satisfaciet haec forma $\frac{(f-u)^m}{(k+u)^n}$ dummodo sit $n>m$, quo casu $u=\infty$ numerator prae denominatore, etiamsi vterque fiat infinitus, euanescat; k autem ita capi debet, vt numerator et denominator communem non adipiscantur diuisorem. Ita si ambo puncta data prodeant ex valoribus $u=o$ et $u=\infty$, factores idonei erunt:

$$\frac{u}{(k+u)^2} \text{ vel } \frac{u}{k+u^2} \text{ vel } \frac{u^m}{A+Bu^\alpha+Cu^\beta+Du^\gamma \text{ etc.}}$$

dummodo in denominatore altior occurrat potestas ipsius u, quam est numerator u^m.

Problema 2.

9. Infinitas inuenire lineas curuas, quae non solum per data duo puncta transeant, sed etiam in his punctis communi gaudeant tangente.

Solutio.

Sit vt ante $y=X$ aequatio pro vna curua, quae datam habeat proprietatem, atque duo puncta data oriantur ex valoribus abscissae $x=o$ et $x=a$.

Iam vt omnes curuae quaesitae per eadem puncta transeant, videmus eas hac contineri aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^n P$$

existente P functione quacunque ipsius x. Tum vero, vt in his punctis omnes curuae communi tangente gaudeant,

deant, necesse est, vt casu vtroque $x=0$ et $x=a$, valor $\frac{dy}{dx}$ idem plane prodeat, qui oritur ex aequatione $y=X$, seu vt is sit $=\frac{dX}{dx}$. Fiet autem inde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+mx^{m-1}(a-x)^n P-nx^m(a-x)^{n-1}P+x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$

vbi manifestum est hunc valorem redigi ad $\frac{dX}{dx}$ casibus $x=0$ et $x=a$, si non solum exponentes m et n, sed etiam $m-1$ et $n-1$ fuerint nihilo maiores. Quamobrem aequatio

$$y=X+x^m(a-x)^n P$$

etiam in propositis duobus punctis eandem tangentium positionem praebebit, si exponentes m et n non solum nihilo, sed etiam vnitate fuerint maiores.

Simili modo si ambae coordinatae x et y per novam variabilem u dentur, cuius valores $u=f$ et $u=g$ data duo puncta exhibeant, infinitae curuae quaesito satisfacientes in his formulis continebuntur.

$$x=U+(f-u)^m(g-u)^n P$$
$$\text{et } y=V+(f-u)^\mu(g-u)^\nu Q$$

quaecunque functiones ipsius u, siue algebraicae, siue transcendentes, pro P et Q substituantur, dummodo, quae cautio semper est tenenda, neutra factorem sibi adiunctum destruat. Insuper vero ad communionem tangentium in his punctis requiritur, vt exponentes m, n, μ, ν singuli sint vnitate maiores. Quoniam enim tum vtroque casu $u=f$ et $u=g$ fit $\frac{dx}{du}=\frac{dU}{du}$ et $\frac{dy}{du}=\frac{dV}{du}$, erit etiam $\frac{dy}{dx}=\frac{dV}{dU}$, qui valor a functionibus P et Q neutiquam pendet.

Coroll.

Coroll. 1.

10. Data ergo curua quacunque intra duo puncta A et B descripta, cuius aequatio inter coordinatas x et y est vel $y = X$, vel his formulis continetur $x = U$ et $y = V$, infinitae aliae curuae exhiberi possunt, quae non solum per eosdem terminos A et B transeant, sed etiam in his punctis communi tangente gaudeant.

Coroll. 2.

11. Quodsi exponentes in formulis inuentis adhibiti non solum vnitate, sed etiam binario, fuerint maiores, tum etiam vtroque casu $x = 0$ et $x = a$, vel $u = f$ et $u = g$, hoc est in ambobus terminis, differentialia secundi gradus inter se conuenient. Scilicet in his punctis non solum omnium curuarum inuentarum eadem erit directio, sed etiam eandem curuaturam habebunt.

Scholion.

12. Quemadmodum ergo ante vidimus, si habeatur variabilis cuiusdam u talis functio z, vt sit

$$z = (f-u)^m (g-u)^n P$$

vtroque casu $u = f$ et $u = g$ fieri $z = 0$, quaecunque P fuerit functio ipsius u, dummodo exponentes m et n fuerint nihilo maiores: ita nunc porro patet:

II. Si exponentes m et n fuerint vnitate maiores, fore vtroque casu $u = f$ et $u = g$

et $z = 0$ et $\frac{dz}{du} = 0$

III. Si exponentes m et n fuerint binario maiores, fore vtroque casu $u=f$ et $u=g$

et $z=0$, et $\frac{dz}{du}=0$ et $\frac{ddz}{du^2}=0$.

IV. Si exponentes m et n sint ternario maiores, fore vtroque casu $u=f$ et $u=g$.

et $z=0$ et $\frac{dz}{du}=0$ et $\frac{ddz}{du^2}=0$ et $\frac{d^3z}{du^3}=0$ etc.

Perspicuum est, quae hic de duobus casibus $u=f$ et $u=g$ sunt annotata, etiam ad casus tres, nempe $u=f$, $u=g$, et $u=h$ extendi, si aequatio fuerit huiusmodi:

$$z=(f-u)^m(g-u)^n(h-u)^p P$$

Quodsi autem in casu duorum punctorum fuerit $g=\infty$ tum loco factoris $(f-u)^m(g-u)^n$ capi debet factor huius formae $\frac{(f-u)^m}{\alpha+\beta u^\mu+\gamma u^\nu+\text{etc.}}$ ita vt in denominatore summae potestatis exponens sit maior quam m, atque tum ex solo exponente m definietur, ad quemnam vsque ordinem differentialia ipsius z his duobus casibus euanescant.

Problema 3.

13. Per data duo puncta infinitas ducere lineas curuas, quae omnes cum axe et applicatis extremis aequales areas includant.

Solutio.

Respondeant puncta haec data abscissis $x=0$ et $x=a$, ac posita cuiusque curuae applicata $=y$, erit aequa-

aequatio generalis pro omnibus curuis per haec duo puncta transeuntibus:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

dummodo curua $y = X$ per haec duo puncta transeat. Cum iam area huius curuae sit

$$\int y\,dx = \int X\,dx + \int x^m (a-x)^n P\,dx$$

quia ea euanescere debet posito $x = 0$, posito autem $x = a$ aequalis esse debet $\int X\,dx$, manifestum est, integrale $\int x^m (a-x)^n P\,dx$ euanescere debere vtroque casu $x = 0$ et $x = a$. Sit igitur

$$\int x^m (a-x)^n P\,dx = x^{m+1} (a-x)^{n+1} Q$$

quam formam ideo assumo, vt inde P sine fractionibus determinetur. Hinc ergo fiet

$$P = (m+1)(a-x)Q - (n+1)xQ + x(a-x)\frac{dQ}{dx}, \text{ seu}$$

$$P = ((m+1)a - (m+n+2)x)Q + \frac{x(a-x)dQ}{dx}$$

Quare pro curuis quaesitis aequatio generalis erit

$$y = X + ((m+1)a - (m+n+2)x)x^m (a-x)^n Q + x^{m+1}(a-x)^{n+1}\frac{dQ}{dx}$$

quaecunque enim pro Q assumatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, omnes curuae per data duo puncta transibunt et cum axe et applicatis extremis, quae scilicet abscissis $x = 0$ et $x = a$ respondent, easdem includent areas, atque curua aequatione $y = X$ contenta.

Aliter

Sit $\int y\,dx = z$ erit $y = \frac{dz}{dx}$. Iam vt quaesito satisfiat, pro z eiusmodi functionem ipsius x quaeri oportet, vt vtroque casu $x = 0$ et $x = a$, tam valor ipsius z quam ipsius $\frac{dz}{dx}$ pro omnibus curuis prodeat idem, id quod euenit, si statuatur

$$z = Z + x^m(a-x)^n P$$

dummodo exponentes m et n sint vnitate maiores, quaecunque enim pro P assumatur functio ipsius x, vtroque casu $x = 0$ et $x = a$, tam pro z, quam pro y, iidem prodibunt valores. Sit $Z = \int X\,dx$ erit

$$dz = X\,dx + (ma - (m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}P\,dx + x^m(a-x)^n\,dP$$

Pro curuis ergo quaesitis haec habebitur aequatio generalis;

$$y = X + (ma - (m+n)x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}P + x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$

dummodo numeri m et n sint vnitate maiores, quae solutio cum praecedente congruit. Pro numeris enim m et n ibi vsurpatis hic posuimus $m-1$ et $n-1$, atque Q pro P.

Coroll. 1.

14. Data ergo curua quacunque $y = X$ eiusue saltem portione intra abscissas $x = 0$ et $x = a$ contenta, aequatio inuenta infinitas alias praebebit curuas, quae non solum per eosdem terminos transibunt, sed etiam intra hos terminos aequales areas complectentur.

Coroll.

Coroll. 2.

15. Si in solutione posteriori exponentes m et n fuerint non solum vnitate, sed etiam binario, maiores, tum omnes hae curuae etiam in vtroque termino communem habebunt tangentem. Quin etiam insuper communem habebunt curuaturam, si exponentes illi m et n quoque ternario erunt maiores.

Coroll. 3.

16. Si curua data $y = X$ fuerit algebraica, non solum infinitae aliae curuae algebraicae eiusdem areae hinc reperientur, sed etiam infinitas curuas transcendentes eiusdem proprietatis exhibere licebit, siquidem pro P functiones transcendentes ipsius x assumantur.

Coroll. 4.

17. Si pro P sumatur quantitas constans quaecunque C, hinc iam pro infinitis ipsius C valoribus infinitae reperientur curuae, cum data $y = X$, tam eosdem terminos, quam eandem aream habentes, quae in hac aequatione continebuntur:

$$y = X + C(ma - (m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}$$

existentibus numeris m et n vnitate maioribus.

Coroll

Coroll. 5.

18. Si ambo termini A et B, qui abſciſſis $x=0$, et $x=a$ reſpondent recta AB iungantur, erit haec recta omnium curuarum inuentarum corda communis. Atque etiam areae, quas omnes hae curuae cum iſta corda continent, inter ſe erunt aequales, quatenus quidem ad eandem cordae partem fuerint ſitae; quae enim portiones forte in partem oppoſitam cadent, eae pro negatiuis ſunt habendae.

Exemplum 1.

19. *Propoſito circuli quadrante, inuenire infinitas alias curuas intra eosdem terminos deſcriptas, quae eandem aream includant.*

Sit radius circuli $=a$; eiusque aequatio $y=\sqrt{(aa-xx)}$ prodibunt quadrantis termini ſi ponatur $x=0$, et $x=a$ et poſita 1 : π ratione diametri ad peripheriam erit area quadrantis $=\frac{1}{4}\pi aa$, cui aequales eſſe debent areae omnium curuarum per quadrantis terminos ductarum. Omnes ergo iſtae curuae hac continebuntur aequatione: $y=\sqrt{(aa-xx)}+(ma-(m+n)x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}\mathrm{P}+x^m(a-x)^n\frac{d\mathrm{P}}{dx}$ vbi m et n debent eſſe numeri vnitate maiores.

Ut hinc curuam quampiam ſimpliciorem eliciamus, ponamus $m=2$; $n=\frac{3}{2}$ et $\mathrm{P}=\mathrm{C}(a+x)^{\frac{3}{2}}$ erit $d\mathrm{P}=\frac{3}{2}\mathrm{C}dx(a+x)^{\frac{1}{2}}$, vnde fiet

$y=$

$$y = \sqrt{(aa - xx)} + C(2a - \tfrac{7}{2}x)x(a + x)\sqrt{(aa - xx)} + \tfrac{3}{2}Cx^2(a - x)\sqrt{(aa - xx)}$$

seu $y = \sqrt{(aa - xx)} + Cx(2aa - xx)\sqrt{(aa - xx)}$

Ad homogeneitatem conseruandam sit $C = \frac{1}{\alpha a^3}$ vt fiat

$$y = \frac{(\alpha a^3 + 2aax - 5x^3)\sqrt{(aa - xx)}}{\alpha a^3}$$

si ponamus $m = 3$, $n = \frac{5}{2}$, $P = C(a + x)^{\frac{5}{2}}$ et $C = \frac{1}{2a^4}$

$$y = \frac{(aa + 2xx)(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{a^4}$$

Exemplum 2.

20. *Propositus sit semicirculus terminos suos in diametri terminis habens, atque inuenire oportet infinitas alias curuas per terminos diametri transeuntes, quae omnes cum diametro areas semicirculo aequales includant.*

Sit diameter $= a$, erit aequatio $y = \sqrt{(ax - xx)}$, vnde cum fiat $y = 0$, posito tam $x = 0$, quam $x = a$, idem quoque in omnibus curuis, quae quaeruntur, euenire debet; deinde, quia etiam areae, earum diametro insistentes, ipsi semicirculo aequales esse debent, huic conditioni satisfiet hac aequatione generali:

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + (ma - (m + n)x)x^{m-1}(a - x)^{n-1}P + x^m(a - x)^n \frac{dP}{dx}$$

dummodo pro m et n accipiantur numeri vnitate maiores. Quoniam igitur etiam pro P functionem quamcunque ipsius x assumere licet, modo ne inconuenienti aliquoties memorato sit obnoxia, patet omnes omnino curuas quaestioni satisfacientes in hac aequatione contineri debere.

Ut curuam quampiam simpliciorem eruamus, ponamus $m = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, vt sit

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + (3(\tfrac{1}{2}a - x)P + x(a-x)\tfrac{dP}{dx})\sqrt{(ax-xx)}$$

Ponatur $P = \frac{x}{3b}$ fietque

$$y = \sqrt{(ax-xx)} + \frac{(a-2x)}{b}\sqrt{(ax-xx)}$$

sit $b =$ vel $y = \frac{(b+a-2x)}{b}\sqrt{(ax-xx)}$

pro linea quarti ordinis.

Si iam sit $b = -a$, erit $y = \frac{2x}{a}\sqrt{(ax-xx)}$.

Haec ergo curua, super diametro semicirculi descripta, aream habebit semicirculo aequalem. Eadem curua situ inuerso prodit, si ponatur $b = a$.

Scholion.

21. Prior huius problematis solutio etsi magis naturalis videtur, tamen in problematibus difficilioribus locum non inuenit. Hanc ob causam adieci alteram solutionem, cuius fundamentum in eo est positum, quod expressionem areae integralem $\int y\,dx$ ante ad expressionem finitam reuocauerim. Haec enim reductio omnino necessaria deprehenditur, si formulae integrales, quae loco arearum sunt considerandae, magis fuerint complicatae. Veluti si omnes curuae per data duo puncta ducendae eiusdem longitudinis esse debeant, ita vt iam non $\int y\,dx$ sed $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ datum valorem inter abscissas $x = 0$ et $x = a$ continere debeat; tentanti mox patebit, formam assumtam $y = X + x^m(a-x)^n P$ parum iuuare ad idoneas functiones pro P eruendas. Quamquam enim arcus $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ simili expressione con-

contineri debet, scilicet $\int \sqrt{(dx^2 + dX^2)} + x^\mu (a - x)^\nu Q$, ita, vt hoc posterius membrum pariter vtroque casu $x = 0$ et $x = a$ euanescat, tamen instituto calculo ad aequationem tantopere implicatam peruenitur, vt inde nullo modo relatio inter functiones P et Q erui posse videatur. Hoc ergo incommodum vt euitetur, coordinatae x et y primum ita per alias formulas erunt exprimendae, vt inde arcus per formulam finitam expressus prodeat, id quod praestari poterit per methodum Diophanteae analogam in analysi infinitorum, cuius nuper quaedam specimina in medium attuli.

Problema 4.

22. Infinitas inuenire curuas per data duo puncta transeuntes, ita vt omnium arcus inter haec duo puncta comprehensi sint inter se aequales.

Solutio.

Positis coordinatis x et y sit arcus $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = s$; iam vt hae tres quantitates per nouam variabilem formulis a signo integrali liberis exprimatur, sit $dy = pdx$ eritque

$$\left.\begin{array}{l} y = \int p\,dx = px - \int x dp \\ s = \int dx \sqrt{(1+pp)} = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}} \end{array}\right\} \text{ponatur} \begin{array}{l} \int x dp = q \\ \int \frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}} = r \end{array}$$

erit $x = \frac{dq}{dp} = \frac{dr\sqrt{(1+pp)}}{pdp}$, vnde fit $dr\sqrt{(1+pp)} = pdq$ et $p = \frac{dr}{\sqrt{(dq^2 - dr^2)}}$ vbi r denotet functionem quamcunque ipsius q. Cum igitur, sumto elemento dq constante, sit $dp = \frac{dq^2\,ddr}{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}$

per hanc nouam variabilem q coordinatae x et y cum arcu s ita exprimentur, vt sit

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr}$$
$$y = \frac{dr\,(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q$$
$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} - r.$$

Sint iam f et g valores ipsius q, qui praebeant pro punctis datis abscissas, nempe $x = 0$ et $x = a$, ac ponatur

$$r = Q + (f - q)^m (g - q)^n Z$$

vbi Q sit functio data ipsius q, Z vero functio quaecunque indefinita, ita vt, hac variabilitate non obstante, haec formula quaestioni aeque satisfaciat, ac si esset $Z = 0$. Nunc manifestum est, si exponentes m et n fuerint binario maiores, tum vtroque casu $q = f$ et $q = g$, non solum pro r, sed etiam pro $\frac{dr}{dq}$ et $\frac{ddr}{dq^2}$ eosdem prodire valores, quaecunque functio ipsius q pro Z substituatur. Hinc vtroque casu $x = 0$ et $x = a$, tam applicata q, quam arcus s, eosdem quoque nanciscentur valores, atque idcirco omnes infinitae curuae, quae ex diuersitate functionis Z nascuntur, non solum per data duo puncta transibunt, sed etiam omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, inter se erunt aequales.

Aliter.

Possunt etiam aliae formulae a signo integrali liberae pro x, y et s inueniri, quae ad solutionem simpliciorem deducent. Ponatur scilicet, vt ante, $\int x\,dp = q$,

vt

vt sit $x = \frac{dq}{dp}$, hicque valor in altera formula integrali substitutus dabit:

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dq}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Iam ponatur $\frac{\int q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = r$, eritque $q = \frac{dr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, vbi r significat functionem quamcunque ipsius p. Sumto ergo dp constante, erit $dq = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} + 3p\,dr\sqrt{(1+pp)}$, ideoque $x = \frac{dq}{dp} = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$.

Tum vero habebitur $y = px - q = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$ et $s = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr(1+pp)}{dp} - \frac{p\,dr(1+pp)}{dp} + r$.

Ergo per hanc nouam variabilem p, cuius r est functio quaecunque, coordinatae x, y cum arcu s ita erunt expressae:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^{2}}{dp^2} + \frac{3p\,dr(1+pp)}{dp} + r.$$

Sint iam f et g valores ipsius p, qui praebent pro datis duobus punctis abscissas $x = o$ et $x = a$, ac ponatur:

$$r = P + (f-p)^m(g-p)^n Z$$

vbi P denotet functionem ipsius p datam, Z vero indefinitam; sintque exponentes m et n binario maiores. Cum igitur quaecunque Z sit functio casibus $x = o$ et $x = a$, tam pro r, quam pro $\frac{dr}{dp}$ et $\frac{ddr}{dp^2}$ iidem prodeant

valores, ac si esset $Z = o$ et $r = P$, perspicuum est etiam casibus $p = f$ et $p = g$ pro x, y et s eosdem proditutos esse valores, scilicet pro x valores o et a. Consequenter omnes istae curuae per data duo puncta transibunt, eruntque omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, eiusdem longitudinis.

Coroll. 1.

23. Si in solutione priore Q, in posteriori vero P, sit functio algebraica, atque pro Z etiam functiones algebraicae capiantur, omnes curuae inde oriundae non solum erunt algebraicae, sed etiam rectificabiles. Sin autem pro Z sumantur functiones transcendentes, ipsae curuae fient transcendentes, earumque rectificatio indefinita a quapiam quadratura pendebit.

Coroll. 2.

24. Sin autem in solutione priori pro Q, in posteriori vero pro P, eiusmodi capiantur functiones transcendentes, vt ibi $\frac{dQ}{dq}$, hic vero $\frac{dP}{dp}$, fiant functiones algebraicae, insuperque Z sit functio algebraica, tum curuae quidem erunt algebraicae, sed non rectificabiles.

Coroll. 3.

25. Duo puncta, per quae omnes curuae inueniendae transire debent, reperiuntur ex binis valoribus f et g, si ii in solutione priori pro q, in posteriori vero

pro

pro p, substituantur. Vnde patet eandem solutionem locum habere, vbicunque duo illa puncta assignentur.

Coroll. 4.

26. Assumtis autem pro lubitu his valoribus f et g, vicissim duo illa puncta omnibus curuis communia reperientur; atque, quo hoc facilius expediatur, functio Z pro nihilo habeatur, quoniam, quaecunque fuerit haec functio, eadem semper puncta reperiuntur.

Coroll. 5.

27. Si loco membrorum $(f-q)^m(g-q)^n Z$ in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n Z$ in posteriori, adhibeantur huiusmodi $(f-q)^m(g-q)^n(h-q)^\mu Z$ in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n(h-p)^\mu Z$ in posteriori solutione, tum omnes curuae in formulis inuentis contentae, per tria data puncta A, B, C transibunt, atque non solum omnes arcus AB, sed etiam omnes arcus BC, ac proinde etiam AC, erunt inter se longitudine aequales, dummodo exponentes singuli m, n, et μ fuerint binario maiores.

Coroll. 6.

28. Simili modo infinitae curuae inueniri poterunt quae per quatuor pluraue puncta data transibunt, et quarum omnium arcus, inter bina quaeque puncta intercepti, futuri sint inuicem aequales.

Scho-

Scholion.

29. Formulae $(f-q)^m (g-q)^n Z$ ita debent esse comparatae, vt vtroque casu $q=f$ et $q=g$ non solum ipsae in nihilum abeant, sed etiam earum differentialia prima et secunda, quod vtique euenit, si exponentes m et n fuerint binario maiores. Atque si f et g sint quantitates finitae, in assumtione huiusmodi formularum nulla inest difficultas. Verum si alter valor g fiat infinitus, idem remedium erit adhibendum, quod iam supra est indicatum, scilicet tum formula ita debebit instrui:

$$\frac{(f-q)^m}{\alpha+\beta q^\mu+\gamma q^\nu \text{ etc.}} Z$$

vt summae potestatis in denominatore exponens maior sit quam m, hinc vero m binario maiorem esse oportet. Atque vt hoc casu conditiones problematis adimpleantur, vti Z non diuisum esse debet per vllam potestatem ipsius $f-q$, ita etiam in numeratore ipsi q aequalem vel altiorem potestatem inducere non debet, quam in denominatore. Nisi ergo Z sit quantitas constans debet esse eiusmodi fractio, in cuius numeratore variabilis q non ad altiorem potestatem exsurgat, quam in denominatore. Sin autem eueniat, vt ambo valores f et g fiant infiniti, veluti $f=\infty$ et $g=-\infty$, tum manifestum est, pro illo altero membro assumi posse fractionem quamcunque, in cuius denominatore variabilis q altiorem habeat potestatem, quam in numeratore. Huiusmodi enim functio, non solum euanescet posito $q=\infty$, sed etiam eius differentialia omnium graduum.

Proble-

Problema 5.

30. Data curua quacunque inuenire infinitas alias, quae eam in datis duobus punctis intersecent, ita vt omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, aequales sint arcui curuae datae inter eadem puncta contento.

Solutio.

Pro curua data respondeat abscissae x applicata $=v$, quae ergo functioni cuipiam ipsius x aequabitur. Pro curuis inueniendis vero sit applicata abscissae x respondens $=y$ et arcus $=s$. Quoniam nunc ex praecedentis problematis solutione priore sequentes formulae

$$x=\frac{(dq^2-dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddr}$$
$$y=\frac{dr(dq^2-dr^2)}{dqddr}-q$$
$$s=\frac{dq^2-dr^2}{ddr}-r$$

si ponatur $r=Q+(f-q)^m(g-q)^n Z$, pro variis functionis Z determinationibus, infinitas praebent curuas per duo puncta transeuntes, arcusque inter haec puncta aequales continentes, quae duo puncta ex valoribus $q=f$ et $q=g$ definiuntur, si modo pro m et n numeri accipiantur binario maiores; tantum opus est, vt curua data in his formulis generalibus reperiatur. Efficiamus ergo, vt hae formulae casu $Z=0$, curuam datam producant, et inuestigemus, qualis functio ipsius q pro Q ad hoc obtinendum substitui debeat, seu quia hoc casu est $r=Q$, quaeramus qualis functio r ipsius q esse debeat.

beat. Cum igitur pro curua data sit v applicata respondens abscissae x, erit filum solutionis praecedentis euoluendo $p = \frac{dv}{dx}$ et $q = \int x\,dp = px - v$, ideoque $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, ex qua aequatione valor ipsius x per q definitur; deinde est $r = \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = x\sqrt{(1+pp)} - \int dx\sqrt{(1+pp)}$ seu $r = \frac{x\sqrt{(dx^2+dv^2)}}{dx} - \int \sqrt{(dx^2+dv^2)}$, vnde fit, si elementum x constans accipiatur, $dr = \frac{x\,dv\,ddv}{dx\sqrt{(dx^2+dv^2)}}$; atque si hic pro x substituatur eius valor per q iam inuentus, apparebit, qualis functio ipsius q sit r, quae deinceps pro Q scribi debet. Ambo autem puncta data in curua proposita reperientur, ponendo $q = f$, et $q = g$, vnde vicissim ex datis punctis valores litterarum f et g elicientur. Quibus definitis si pro Q scribatur ille valor pro r inuentus ac per q expressus, pro Z autem functiones quaecunque ipsius q substituantur, infinitae prodibunt lineae curuae, per eadem duo puncta transeuntes, et inter ea pares cum curua proposita arcus interceptos habentes.

Aliter.

Si alteram solutionem generalem problematis superioris in subsidium vocemus, quae pro curuis quaesitis sequentes suppeditauerat formulas:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdr\sqrt{(1+pp)}}{dp},$$

$$y = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp},$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdr(1+pp)}{dp} + r,$$

ponen-

ponendo $r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$, existentibus m et n numeris binario maioribus: efficiendum est, vt hae formulae casu $Z = 0$ curuam propositam exhibeant. Cum igitur hoc casu sit $p = \frac{dv}{dx}$ hinc valor ipsius x per p definiatur. Deinde ob $q = \int x\,dp = px - v$ erit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, et $r = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$: quodsi ergo in q loco x valor eius per p inuentus substituatur, habebitur pro r functio ipsius p, quae curuam propositam producit. Haec iam functio ipsius p pro r inuenta loco P scribatur, ita vt sit $P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et quaecunque functiones litterae Z tribuantur, semper eiusmodi valores habebuntur

$$\text{pro } r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$$

quae infinitas praebebunt curuas, datam in duobus punctis fixis intersecantes, et cum data inter haec duo puncta aequales arcus interceptos habentes. Quomodo autem si illa puncta pro lubitu dentur, inde valores debiti pro f et g sint eruendi, ante est expositum.

Coroll. 1.

31. Cum in solutione priore sit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, erit $dq = \frac{x\,d\,dv}{dx}$, hinc cum Q aequalis sit valori ipsius r inde orto, erit $Q = \int \frac{dv\,dq}{\sqrt{(dx^2 + dv^2)}}$. At ob $dv = \frac{(q+v)\,dx}{x}$ erit quoque $Q = \int \frac{(q+v)\,dq}{\sqrt{(xx + (q+v)^2)}}$, vbi tantum opus est, vt pro x et v valores ex aequatione $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$ per q

 expressi

expressi substituantur; hocque modo pro Q obtinebitur debita functio ipsius q in formulis substituenda.

Coroll. 2.

32. Pro solutione altera valor ipsius x per p quaeri debet ex hac aequatione $p = \frac{dv}{dx}$; vnde simul ob aequationem inter v et x datam, elicitur valor ipsius v itidem per p expressus. Tum vero elabitur quoque $q = px - v$ per p, ideoque etiam functio quaesita:

$$P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(px-v)\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Coroll. 3.

33. Si linea proposita esset recta, foret in solutione priori q, in posteriori vero p quantitas constans, hincque etiam ibi Q, hic vero P, quantitates constantes. Quia ergo hoc casu x, y et s per p definire non licet, manifestum est, solutionem non succedere. Hoc autem per se est perspicuum, quia linea recta est breuissima intra suos terminos, neque propterea inter eosdem terminos lineae curuae rectae aequales exhiberi possunt.

Exemplum.

34. Sit curua data circulus hac aequatione expressus: $v = \sqrt{(aa-xx)}$, erit $\frac{dv}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, et pro solutione priori $q = \frac{-xx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \sqrt{(aa-xx)} = \frac{-aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Hinc

Hinc $x = \frac{a\sqrt{(qq-aa)}}{q}$ et $v = \frac{-qq}{q}$. Vnde reperitur, $Q = \int \frac{(qq-aa)dq}{\sqrt{(aa(qq-aa)+(qq-aa)^2)}}$, siue $Q = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq-aa)}$. Quare si statuatur $r = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq-aa)} + (f-q)^m(g-q)^n Z$, existentibus m et n numeris binario maioribus, quaecunque functio ipsius q pro Z ponatur, sequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2-dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr} \text{ et } y = \frac{dr(dq^2-dr^2)}{dq\,ddr} - q$$

infinitas exhibebunt lineas curuas, circulum in duobus punctis secantes, quarum omnium arcus inter haec puncta contenti, ipsi arcui circulari futuri sint aequales. Haec autem duo puncta in circulo definientur ex abscissis $x = \frac{a\sqrt{(ff-aa)}}{f}$ et $x = \frac{a\sqrt{(gg-aa)}}{g}$. Vicissim autem si hae abscissae dentur, erit f vel $g = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Pro altera solutione erit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, ideoque $x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $v = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde fit $q = px - v = a\sqrt{(1+pp)}$, ita vt functio quaesita P hinc prodeat $P = \int \frac{ddp}{1+pp}$ atque $r = \int \frac{adp}{1+pp} + (f-p)^m(g-p)^n Z$, et ambo puncta respondebunt abscissis $x = \frac{af}{\sqrt{(1+ff)}}$ et $x = \frac{ag}{\sqrt{(1+gg)}}$; vel ex datis his abscissis litterae f et g elicientur ex aequatione $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Sit breuitatis gratia $(f-p)^m(g-p)^n - Z = V$, vt sit

$$r = \int \frac{adp}{1+pp} V, \text{ erit}$$

$$\frac{dr}{dp} = \frac{a}{1+pp} + \frac{dV}{dp} \text{ et}$$

$$\frac{ddr}{dp^2} = \frac{-2ap}{(1+pp)^2} + \frac{ddV}{dp^2}.$$

Omnes ergo curuae quaesitae his formulis continebuntur:

$$x = \frac{-2ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-2app}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{a(2pp-1)}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = -2ap + 2ap + \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

siue

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

Scholion.

35. Pro altera hac solutione si valor ipsius p ad alterutrum punctum datum relatus est infinitus, quo casu pro V huiusmodi valorem $\frac{(f-p)^m Z}{\alpha+\beta p^\mu+\gamma p^\nu+\text{etc.}}$ accipi oportere vidimus, vt maxima potestas ipsius p in denominatore maior sit, quam eius maxima potestas in numeratore, sequentem obseruationem adiici conuenit, quae non solum in hoc exemplo, sed in genere etiam est tenenda. Primo quae hactenus de hoc casu sunt tradita huc redeunt, vt pro V assumi debeat huiusmodi fractio, cuius numerator factorem habeat $(f-p)^m$, exponente m excedente binarium. Deinde vero requiritur, vt maxima potestas ipsius p in denominatore superet maximam eius potestatem in numeratore

ratore. Verum etsi hoc modo casu $p = \infty$ non solum ipsa quantitas V, sed etiam $\frac{dV}{dp}$ et $\frac{ddV}{dp^2}$ euanescunt, tamen ad functiones ipsius p, per quas hae quantitates in nostris formulis sunt multiplicatae, spectari debent, ne ob eas haec euanescentia tollatur. Quae circumstantia vt probe obseruetur, ponamus in ea fractione, quae pro V assumitur, μ esse exponentem maximae potestatis ipsius p in numeratore, in denominatore vero esse $\mu + \nu$ exponentem maximae potestatis ipsius p. Iam casu $p = \infty$, quo inferiores ipsius p potestates omnes prae maxima euanescunt, erit valor ipsius $V = \frac{A}{p^\nu}$ ipsius $\frac{dV}{dp} = \frac{B}{p^{\nu+1}}$ et ipsius $\frac{ddV}{dp^2} = \frac{C}{p^{\nu+2}}$, qui vtique hoc casu $p = \infty$ euanescunt. Sed quoniam in nostris formulis $\frac{dV}{dp}$ per $(2pp - 1)\sqrt{(1 + pp)}$ et per $p(1 + pp)$ hoc est casu $p = \infty$ per p^3 reperitur multiplicatum, ac $\frac{ddV}{dp^2}$ per $p(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$ et $(1 + pp)^2$ hoc est per p^4, ne cesse est, vt posito $p = \infty$ etiam $\frac{p^3 dV}{dp} = \frac{Bp^3}{p^\nu}$ et $\frac{p^4 ddV}{dp^2} = \frac{Cp^2}{p^{\nu}}$ euanescant. Vnde manifestum est exponentem ν binario maiorem esse debere. Hinc ergo concludimus: si duo puncta data respondeant valoribus $p = f$ et $p = \infty$, pro V assumi debere huiusmodi fractionem, cuius numerator primo factorem habeat $(f - p)^m$, in quo exponens m sit binario maior, deinde

maxima

maxima poteſtas ipſius p in denominatore, non ſolum maior eſſe debet quam in numeratore, ſed etiam exceſſus maior eſſe debet, quam quadratum p^2; ita vt ſi μ ſit exponens maximae poteſtatis in numeratore, maximae poteſtatis in denominatore exponens maior eſſe debeat, quam $\mu+2$. Simili modo ſi ambo puncta data conueniant valoribus $p=+\infty$ et $p=-\infty$, pro V quoque eiusmodi fractio aſſumi debebit, cuius denominator vltra quadratum maiores contineat poteſtates ipſius p quam numerator. His igitur notatis, exempli propoſiti ſequentes euoluamus caſus praecipuos.

Caſus I.

36. *Dato circuli quadrante infinitas aſſignare curvas per eius terminos tranſeuntes, ita vt ſingularum arcus intra hos terminos comprehenſi, aequales ſint arcui quadrantis.*

Poſito radio quadrantis $=a$, vt ſit $v=\sqrt{(aa-xx)}$ termini quadrantis reſpondebunt abſciſſis $x=0$ et $x=a$. Cum iam ſit $p=\frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, valores ipſius p erunt pro illo termino $p=0$, pro hoc vero $p=\infty$, erit ergo $f=0$; ideoque pro V eiusmodi aſſumi debet functio fracta, cuius numerator factorem habeat p, exiſtente exponente m binario maiore, denominatoris vero maxima poteſtas ipſius p ſupra quadratum excedat maximam poteſtatem in numeratore. Quibus praeceptis obſeruatis formulae ante datae omnes curuas quaeſtioni ſatisfacientes exhibebunt.

bunt. Ex quibus vt ſimpliciores eliciamus, ponamus $V = \frac{bp^3}{(1+pp)^3}$, ſit enim exponens maximae poteſtatis, in denominatore ternario ſuperat numeratorem. Erit ergo:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{3b(pp-p^4)}{(1+pp)^4} \text{ et } \frac{ddV}{dp^2} = \frac{6b(p-5p^3+2p^5)}{(1+pp)^5}.$$

qui valores in formulis noſtris ſubſtituti dabunt:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bp(2-7pp+p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bpp(1-7pp+2p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1+pp} + \frac{bp(6-23pp+6p^4)}{(1+pp)^3}$$

Aliter.

Obtinetur etiam arcus 90°, ſi termini conſtituantur $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, vnde fit $p = -1$ et $p = +1$, ita vt pro his terminis ſit $f = -1$ et $g = +1$. Quare V eiusmodi eſſe debet functio ipſius p, quae factorem habeat $(1+p)^m(1-p)^n$, exiſtentibus exponentibus m et n binario maioribus. Hincque poſito

$$V = (1+p)^m(1-p)^n Z$$

formulae ſuperiores omnes praebebunt curuas quaeſito ſatisfacientes. Simpliciores ergo prodibunt ponendo

$$V = b(1-pp)^3 \text{ vel } V = \frac{b(1-pp)^3}{1+pp}$$

Alio praeterea modo, idque generaliter, termini ambo ita definientur, vt inter eos arcus 90° contineatur, ſi

ponatur pro altero $\frac{x}{a} = \sin\Phi$, pro altero vero $\frac{x}{a} = -\cos.\Phi$. Cum igitur pro illo sit $\sqrt{(aa-xx)} = a\cos.\Phi$ pro hoc vero $\sqrt{(aa-xx)} = a\sin.\Phi$ erunt ipsius p valores, alter $p = -\tang.\Phi$, alter $p = +\cot.\Phi$, sicque erit $f = -\tang.\Phi$ et $g = \cot.\Phi$: vnde valor ipsius V erit

$$V = (\tang.\Phi + p)^m (\cot.\Phi + p)^n Z$$

ac si $m = n > 2$, posito $\cot.\Phi - \tang.\Phi = \alpha$, erit

$$V = (1 + \alpha p - pp)^m Z.$$

Casus 2.

37. *Data semicircumferentia circuli, inuenire infinitas alias curuas illi aequales, atque intra ipsius terminos, existentes.*

Posito circuli radio $= a$, vt sit $v = \sqrt{(aa-xx)}$, termini circumferentiae, quia in diametri extremitatibus sunt siti, orientur ex valoribus abscissae $x = a$ et $x = -a$: hinc autem ipsius p valores prodibunt $f = -\infty$ et $g = \infty$. Hinc, vti ante notauimus, functio V eiusmodi debet esse fractio, in cuius denominatore exponens maximae potestatis ipsius p plus quam binario superet exponentem maximae potestatis in numeratore, haecque sola conditio sufficiet pro casu proposito. Casus ergo simpliciores prodibunt ponendo

$$V = \frac{b}{p(1+pp)} \text{ vel } V = \frac{b + cp}{(1+pp)^2}.$$

Notandum autem hic est, formam $\frac{b}{p(1+pp)}$ non conuenire, quoniam ex ea coordinatae x et y in infinitum essent:

essent abituraе casu $p=o$, ita vt curuae intra datos terminos in infinitum excurrent; quare pro V eiusmodi formulas accipi oportet, vt nullo casu, vel ipsa formula V, vel eius differentialia in infinitum abeant. Sit ergo

$$V = \frac{b+cp}{(1+pp)^2} \text{ eritque}$$

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{4bp+c(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

$$\frac{ddV}{dp^2} = \frac{-b(4-20pp)-c(12p-12p^3)}{(1+pp)^4}$$

hincque pro constructione curuarum sequentes obtinebuntur formulae:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{4b(1-2pp)-3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{12bp^3-c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$s = \int\frac{adp}{1+pp} - \frac{3b(1-4pp)-3cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

Omnes hae curuae etiam diametro normaliter insistent, atque si sit $b=o$, earum applicatae maximae in centrum circuli cadent, quia posito $p=o$ fit $x=o$; applicata autem maxima erit $=a+c$, atque ad vtramque partem curuae erunt sibi similes. Hae ergo curuae prae ceteris notatu dignae ex his formulis construentur:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} \text{ vnde erit}$$

$$s = \int\frac{adp}{1+pp} - \frac{3cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

Hinc porro intelligitur capi debere $c < \frac{1}{6}a$, si enim esset $c > \frac{1}{6}a$, tum sumto p valde paruo, arcus s prodiret negatiuus, arcusque idcirco alicubi negatiuos valores nanciscerentur, contra naturam quaestionis. Perspicuum enim est, si applicata media et maxima $a+c$ certum terminum transgrediatur, fieri plane non posse, vt curua vno tractu procedens semicircumferentiae circuli esset aequalis. Pro c interim quantitates infinitae, tam affirmatiuae, quam negatiuae, accipi possunt, dummodo satis sint paruae et quidem minores quam $\frac{1}{6}a$.

DE