

SOLVTIO GENERALIS  
 QVORVNDAM PROBLEMATVM  
 DIOPHANTAEORVM QVAE VULGO NONNISI  
 SOLVTIONES SPECIALES ADMITTERE  
 VIDENTVR.

Auctore

L. EVLERO.

I.

**A**nalysis Diophantaea, quae in problematibus integro terminatis per numeros racionales vel etiam integros soluendis versatur, duplicis generis problemata tractare solet; quorum discrimen in ratione solutionis maxime est positum. Alia enim problemata ita sunt comparata, vt solutiones generales exhiberi queant, quae omnes plane numeros satisfaciētes in se complectuntur: alia vero nonnisi solutiones particulares admittunt, vel saltem per methodos cognitās nonnisi tales solutiones eruere licet, ita vt praeter numeros, qui forte reperiuntur, infiniti alii problemati satisfaciētes existant, qui in solutione inuenta non contineantur. Vbi quidem in genere notari conuenit, prioris ordinis problemata multo facilius resolui, quam ea, quae ad alterum ordinem referuntur, quippe quae plerumque singularem sagacitatem cum eximiis artificiis coniunctam requirunt, in quibus maxima vis huius Analysis cernitur. Quare

ob hanc causam problemata Diophantaea in has duas classes distribui debere videntur.

2. Diophantus quidem ipse omnium quaestionum, quas tractat, solutiones tantum specialissimas tradit, numerosque, quibus vnica solutio continetur, plerumque indicasse est contentus. Neque vero eius methodus ad has solutiones specialissimas adstricta est: putanda; quia enim tunc temporis vsus litterarum, quibus numeri indefiniti designentur, nondum erat receptus, huiusmodi solutiones, latius patentes, quales nunc quidem exhiberi solent, ab ipso expectari non poterant; interim tamen ipsae methodi, quibus ad quaelibet problemata soluenda vtitur, aequae late patent, quam eae, quae hodie sunt in vsu: quia etiam fateri cogimur, vix vllam in hoc analysicos genere adhuc esse inuentam, cuius vestigia satis luculenta non iam in ipso Diophanto deprehendantur. Non obstante igitur hac apparente particularitate solutionum Diophantearum, disparitas problematum supra memorata, in ipso iam Diophanto manifesto cernitur, siquidem ad methodos eius respiciamus: quarum aliae ita sunt comparatae, vt omnes omnino solutiones, quae problemati satisfacere possunt, suppeditare queant, aliae vero nonnullas tantum solutiones praebeant, vel etiamsi earum numerus in infinitum augeri possit, tamen in iis innumerabiles aliae, quae aequae satisfaciunt, non contineantur.

3. Exemplum problematis, cuius solutio generalis exhiberi potest, praebet quaestio vulgata, qua quaeruntur duo numeri quadrati, quorum summa sit quadratum;

tum; siue sumtis  $x$  et  $y$  pro radicibus istorum quadratorum, ut  $xx+yy$  sit numerus quadratus. Suntis enim pro lubitu tribus numeris  $a, p$  et  $q$ , haec habebitur solutio generalis:  $y = 2apq$ , et  $x = a(pp - qq)$ , ex his namque valoribus prodit  $\sqrt{(xx+yy)} = a(pp+qq)$ . De qua solutione tenendum est, nullos plane dari numeros pro  $x$  et  $y$  substituendos, quorum quadratorum summa fiat quadratum, qui non simul in formulis datis contineantur. Atque haec generalitas non solum inde perspicitur, quod pro tribus litteris  $a, p$ , et  $q$  numeros quocumque accipere liceat, unde iam infinites infinita solutionum multitudo obtinetur, sed etiam ipsa harum formularum inuestigatio euincit, nullam plane dari solutionem, quae non in iis comprehendatur. At vero hoc posterius criterium longe certius est priori, cum saepe multae litterae indefinitae in solutionem ingredi queant, neque tamen solutio propterea reddatur generalis.

4. Inuestigationis autem ratio in hoc exemplo nobis solutionis vniuersalitatem plane ostendit: cum enim  $\sqrt{(xx+yy)}$  debeat esse numerus rationalis, is certe erit maior quam  $x$ ; statuatur ergo  $= x+z$ . Tum vero quaecumque sit ratio ipsius  $y$  ad  $z$ , poni poterit  $z = \frac{q}{p}y$ , neque hoc modo generalitas positionis limitatur. Posito autem  $\sqrt{(xx+yy)} = x + \frac{q}{p}y$  sumtis quadratis habebimus:  $xx+yy = xx + \frac{2q}{p}xy + \frac{qq}{p^2}yy$ . Deleto vtrinque termino  $xx$ , ac residuo per  $y$  diuiso, prodibit,

$$y = \frac{2q}{p}x + \frac{qq}{p^2}y \text{ seu } (pp - qq)y = 2pqx.$$

Erit ergo  $\frac{x}{y} = \frac{pp - qq}{2pq}$ , hincque  $x$  et  $y$  sunt vel aequae multipla, vel aequae submultipla, numerorum  $pp - qq$  et  $2pq$ . Sumta ergo  $a$  pro indice generali siue multiplorum, siue submultiplorum, nanciscemur

$$y = 2apq \text{ et } x = a(pp - qq)$$

et ob  $z = \frac{q}{p}y = 2aqq$  erit  $x + z = \sqrt{(xx + yy)} = a(pp + qq)$ .

5. Problematis autem, cuius solutio per methodos cognitae generalis exhiberi nequit, exemplum esto quaestio de inueniendis tribus cubis quorum summa sit cubus: siue quaerendi sint tres numeri  $x, y$  et  $z$  ita, ut sit  $x^3 + y^3 + z^3 = \text{cubo}$ . Quod problema cum ab ipso Diophanto, tum a recentioribus, pluribus modis extat solutum, atque ita quidem, ut infinita multitudo solutionum sit exhibita; neque tamen vlla solutio tam late patet, ut omnes plane casus huic quaestioni satisficientes in se complectatur. In hoc problemate etiam vel vnus cubus  $x^3$ , vel duo  $x^3 + y^3$ , tanquam dati spectari possunt, vnde vel duos reliquos cubos, vel vnicum quaeri oportet, ut summa fiat cubus: quomocunque autem solutio instituat, tamen maxime particularis euadit.

6. Quod quo clarius perspiciatur, solutiones dari solitas hic breuiter commemoremus. Sint igitur primo dati duo cubi  $a^3$  et  $b^3$ , tertiumque  $x^3$  inueniri oportet, ut omnium trium summa  $a^3 + b^3 + x^3$  denuo fiat cubus: Manifestum iam quidem est, radicem huius cubi maiorem fore quam  $x$ , sed etiamsi statuatur  $= x + v$ , tamen aequatio quadratica pro inueniendo  $x$  prodit, ficque

sicque difficultas non diminuitur. Poni igitur solet  $x = p - b$ , ut summa trium cuborum fiat:

$$a^3 + 3bbp - 3b^2p + p^3 = \text{Cubo} = v^3$$

atque hac quidem positione amplitudo solutionis non restringitur. Porro autem eiusmodi cubus assumi debet, ut incognita  $p$  per aequationem simplicem; ideoque rationaliter exhiberi queat. Manifestum autem est hoc duplici modo fieri posse: primo enim sumto  $v = a + p$ , fiet

$a^3 + 3bbp - 3b^2p + p^3 = a^3 + 3aap + 3app + p^3$   
 ubi cum termini  $a^3$  et  $p^3$  se destruant, reliquum per  $3p$  diuisum dat:

$$bb - bp = aa + ap, \text{ ideoque } p = \frac{bb - aa}{a + b} = b - a$$

unde fit  $x = p - b = -a$ , quo casu utique fit:

$$a^3 + b^3 + x^3 = a^3 + b^3 - a^3 = b^3 = \text{cubo}$$

7. Hanc autem solutionem maxime particularem esse, ex assumptione valoris  $v = a + p$  evidens est, cum vbique fieri possit, ut quantitas

$a^3 + 3bbp - 3b^2p + p^3$ , sit cubus, cuius radix non sit  $a + p$ ,

ita ut hac restrictione solutio maxime sit limitata, unde factum est, ut etiam unicum valorem pro  $p$  ac proinde pro  $x$  exhibuerit, qui adeo ne solutionem quidem idoneam suppeditasse est censendus, propterea quod inuenimus  $x = -a$ , qui casus tam est obuius sua sponte, ut ne pro solutione quidem admitti queat. Pro  $v$  igitur alius valor fingi solet, talis tamen, ut in-

uentio

ventio ipsius  $p$  ad aequationem simplicem perducatur, quod vsu venit ponendo  $v = a + \frac{b^2}{a} p$ ; fiet enim:

$a^3 + 3bbp - 3b^2p^2 + p^3 = a^3 + 3bbp + \frac{3b^4}{a^2} pp + \frac{b^6}{a^6} p^3$   
 quae vtrunque deletis terminis  $a^3 + 3bbp$  per  $pp$  diuisa dat:

$$-3b + p = \frac{3b^4}{a^2} + \frac{b^6}{a^6} p \text{ seu } p = \frac{3a^6 + 3a^2b^4}{a^6 - b^6}.$$

8. Cum igitur hinc inuenerimus  $p = \frac{3a^2b(a^2 + b^2)}{a^6 - b^6}$   
 $= \frac{3a^2b}{a^3 - b^3}$ , erit  $x = p - b = \frac{3a^2b + b^4}{a^3 - b^3} = \frac{b(2a^2 + b^2)}{a^3 - b^3}$ , quae  
 est radix tertii cubi ad duos datos  $a^3 + b^3$  addendi, vt  
 summa fiat cubus. Ent autem summae radix cubica  
 per hypothesin  $= v = a + \frac{b^2}{a} p = a + \frac{3a^2b^3}{a^3 - b^3}$ , siue  
 $v = \frac{a^4 + 3a^2b^3}{a^3 - b^3} = \frac{a(a^3 + 3b^3)}{a^3 - b^3}$ . Quicumque ergo numeri  
 pro  $a$  et  $b$  fuerint assumti, hinc habebuntur tres cubi,  
 quorum summa est cubus. Hi scilicet erunt:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^2 + b^2)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 3b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3.$$

Verum et hanc solutionem maxime esse specialem ex ipsa inuestigatione perspicuum est, cum plane pro arbitrio nostro radicem trium cuborum fixerimus  $v = a + \frac{b^2}{a} p$ , cum sine dubio infinitos quoque alios valores recipere possit.

9. Porro autem datis duobus cubis vnicus reperitur tertius cubus, qui cum iis coniunctus producat cubum; manifestum autem est, infinitos huiusmodi dari cubos. Si enim sit  $a = 4$  et  $b = 3$ , radix tertii cubi hinc prodit

$$x = \frac{3(2 \cdot 64 + 27)}{64 - 27} = \frac{465}{37}, \text{ et } v = \frac{472}{37}, \text{ ita vt fit}$$

$$4^3 + 3^3 + \left(\frac{465}{37}\right)^3 = \left(\frac{472}{37}\right)^3.$$

Noui-

Nouimus autem cubum quinarium ad hos cubos  $4^3 + 3^3$  additum quoque producere cubum scilicet senarii, seu esse  $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ , qui tamen casus in hac solutione non continetur. Quare si ad hoc problema soluendum, ut sit  $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ , quis dicat sumi debere:

$$x = a; y = b; \text{ et } z = \frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}$$

tumque fore  $v = \frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}$ , hae formulae quidem satisfaciunt, sed etiam si, ob duos numeros  $a$  et  $b$ , arbitrio nostro relictos, infinites infiniti cuborum terniones hinc exhiberi possint, quorum summa faciat cubum, tamen infiniti alii existunt cuborum terniones idem praestantes, qui in istis formulis non sunt contenti; veluti hic casus  $x = 3$ ,  $y = 4$  et  $z = 5$ , pro quo fit  $v = 6$ .

10. Latius quidem patens reperitur solutio, si vnicus tantum trium cuborum quasi datus assumatur, ita ut fieri oporteat

$$a^3 + x^3 + y^3 = v^3.$$

Ponatur hunc in finem  $x = pu + r$  et  $y = qu - r$ , qua quidem positione nulla restrictio inducitur, fietque

$$a^3 + 3rr(p+q)u + 3r(pp-qq)uu + (p^3 + q^3)u^3 = v^3.$$

Iam ut quantitas  $u$  hinc rationaliter definiri queat, fingatur  $v = a + \frac{rr}{aa}(p+q)u$ , qua positione utique solutio iam vehementer limitatur: ex ea autem obtinebitur:

$$v^3 = a^3 + 3rr(p+q)u + \frac{3r^4}{a^3}(p+q)^2uu + \frac{r^6}{a^6}(p+q)^3u^3.$$

Deletis ergo vtrunque terminis  $a^3 + 3rr(p+q)u$ , et residuo  $(p+q)uu$  diuiso, emerget haec aequatio:

$$3r(p-q) + (pp-pq+qq)u = \frac{3r^4}{a^3}(p+q) + \frac{r^6}{a^6}(p+q)^2$$

ex qua eruitur:  $u = \frac{3a^3r^4(p+q) - 2a^6r(p-q)}{a^6(pp-pq+qq) - r^6(p+q)^2}$

11. Valore ergo hoc pro  $u$  inuento, erit

$$x = pu + r = \frac{3a^3pr^4(p+q) - a^6r(2pp-2pq-q^2) - r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq) - r^6(p+q)^2}$$

$$y = qu - r = \frac{3a^3qr^4(p+q) - a^6r(pq+2pq-2q^2) + r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq) - r^6(p+q)^2}$$

$$\text{et } v = a + \frac{rr}{aa}(p+q)u = \frac{a^7(pp-pq+qq) - 3r^4r^3(pp-q^2) + 2ar^6(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq) - r^6(p+q)^2}$$

Cum igitur quatuor litterae  $a$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$  pro arbitrio assumi queant, haec solutio utique infinities latius patet, quam praecedens, vbi duae tantum litterae arbitrio nostro relinquebantur. Verum tamen notandum est, rationem tantum litterarum  $p$  et  $q$  in computum ingredi, ita vt hinc litterae arbitrariae ad tres tantum reducantur: nihilo vero minus et haec solutio, ob limitationem circa radicem  $v$  adhibitam, pro particulari est habenda, ita vt terniones cuborum existant in his formulis non contenti. Solutio autem antecedens ex hac emergit, sumpto  $p=0$ , ita vt haec infinities illa sit generalior.

12. Adhuc generaliore[m] autem obtinebimus, si nullum trium cuborum tanquam cognitum assumamus, seu in genere quaeramus  $x$ ,  $y$  et  $z$ , vt sit  $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ . In hunc finem ponatur

$$x = pt + u; y = -pt + qu, \text{ et } z = t - qu$$

quibus positionibus nihil adhuc limitatur: facta autem substitutione, oritur

$$t^3 + 3pprtu + 3ptuu + u^3 = v^3$$

$$+ 3ppqtu - 3pqqtuu$$

$$- 3qtuu + 3qqtuu$$



Iam fingatur  $v = t + u$ , vnde quidem maxima limitatio nascitur, et aequatione per  $3tu$  diuisa, reperietur

$$(pp + ppq - q)t + (p - pq + qq)u = t + u, \text{ seu}$$

$$\frac{t}{u} = \frac{-1 + p + qq - pq}{1 + q - pp - ppq}; \text{ capi ergo poterit:}$$

$$t = n(-pq + qq + p - 1) \text{ et } u = n(-ppq - pp + q + 1)$$

vnde elicitur:

$$x = n(-ppqq + pq - ppq - p + q + 1)$$

$$y = n(p + q - pp + qq - ppq - pq)$$

$$z = n(+ppqq - pq + ppq + p - q - 1)$$

$$av = n(-pq - ppq - pp + qq + p + q).$$

Hiuc autem fit  $z = -x$  et  $v = y$ , qui est casus per se obuius.

13. Sequenti autem modo solutio latius patens eruitur: Ponatur

$$x = mt + pu; y = nt + qu \text{ et } z = -nt + ru, \text{ eritque}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = m^3t^3 + 3mmp \left. \begin{array}{l} + 3mnp \\ + 3nnq \end{array} \right\} ttu + 3nqq \left. \begin{array}{l} + 3nqr \\ - 3nrr \end{array} \right\} tuu + q^3 \left. \begin{array}{l} + p^3 \\ + r^3 \end{array} \right\} u^3,$$

quae summa cum debeat esse cubus  $= v^3$  ponatur:

$$u = mt + \frac{mmp + nn(q+r)}{m} u; \text{ eritque diuidendo per } uu$$

$$3t(mpp + n(qq - rr)) + u(p^3 + q^3 + r^3) =$$

$$\frac{3t}{m^3} (mmp + nn(q+r))^2 + \frac{u}{m^3} (mnp + nn(q+r))^2,$$

sicque neglecto communi factore, qui ab arbitrio nostro pendet, erit

$$t = m^3(p^3 + q^3 + r^3) - (mmp + nn(q+r))^3$$

$$u = 3m^3(mmp + nn(q+r))^2 - 3m^3(mpp + n(qq - rr))$$

X 2

quae

quae formae si denuo per communem factorem  $q+r$  diuidantur, prodit

$$t = m^6(qq - qr + rr) - 3m^4npp - 3mmn^4p(q+r) - n^6(q+r)^2$$

$$u = -3m^6n(q-r) + 6m^5nnp + 3m^3n^4(q-r).$$

14. Hinc iam pro  $x, y, z$ , emergunt sequentes expressiones:

$$x = m^7(qq - qr + rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5npp - mn^6(q+r)^2$$

$$y = -m^6n(2qq - 2qr - rr) + 6m^5nnpq - 3m^4n^3pp + 3m^2n^4q(q+r) - 3mmn^5p(q+r) - n^7(q+r)$$

$$z = +m^6n(-qq - 2qr + 2rr) + 6m^5nnpq + 3m^4n^3pp + 3m^2n^4r(q+r) + 3mmn^5p(q+r) + n^7(q+r)^2$$

quorum cuborum summa iterum est cubus radicem habens  $v$ , ut fit

$$v = m^7(qq - qr + rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5npp - 3m^4n^3(qq - rr) + 6m^3n^4p(q+r) + 2mn^6(q+r)^2$$

Hi vero numeri etiam sequenti modo exhiberi possunt:

$$x = +3m^5n^3pp - 3m^6npq + 3m^5npr + m^7 \left. \begin{array}{l} -mn^6 \end{array} \right\} qq - 2mn^6 \left. \begin{array}{l} qr + m^7 \end{array} \right\} rr$$

$$y = -3m^4n^3pp + 6m^5n^2 \left. \begin{array}{l} -3m^2n^5 \end{array} \right\} pq - 3m^2n^5pr - 2m^6n \left. \begin{array}{l} +3m^2n^4 \end{array} \right\} qq + 3m^2n^4 \left. \begin{array}{l} +2m^6n \end{array} \right\} qr + m^6n \left. \begin{array}{l} -n^7 \end{array} \right\} rr$$

$$z = +3m^4n^3pp + 3m^2n^5pq + 6m^5n^2 \left. \begin{array}{l} +3m^2n^5 \end{array} \right\} pr + m^6n \left. \begin{array}{l} -m^6n \end{array} \right\} qq - 2m^6n \left. \begin{array}{l} +3m^2n^4 \end{array} \right\} qr + 3m^2n^4 \left. \begin{array}{l} +2m^6n \end{array} \right\} rr + 2n^7 \left. \begin{array}{l} +n^7 \end{array} \right\}$$

$$v = 3m^5n^3pp - 3m^6n \left. \begin{array}{l} +6m^3n^4 \end{array} \right\} pq + 3m^6n \left. \begin{array}{l} +6m^3n^4 \end{array} \right\} pr + m^7 \left. \begin{array}{l} -3m^2n^5 \end{array} \right\} qq - m^7 \left. \begin{array}{l} +4mn^6 \end{array} \right\} qr + 3m^4n^3 \left. \begin{array}{l} +m^7 \end{array} \right\} rr + 2mn^6 \left. \begin{array}{l} +2mn^6 \end{array} \right\}$$

Quibus valoribus substitutis actu fit  $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ .

15. Si

15. Si singuli hi numeri insuper per coefficientem indefinitum multiplicentur, hae formulae continebunt 6 litteras ab arbitrio nostro pendentes, quae quidem ad quatuor reducentur, unde eae latissime patere, omnesque omnino casus in se complecti, videntur, verum tamen ex ipsa solutione, qua ipsi  $v$  valorem a litteris  $x, y$  et  $z$  pendente tribuimus, perspicitur has formulas non nisi pro particularibus haberi posse. Ceterum quoque per alias positiones aliae eruuntur solutiones, quae pro certis casibus magis sint futurae idoneae; tum etiam methodus habetur ex inuenta solutione quacunque particulari alias solutiones particulares elicijendi. His tamen omnibus artificiis, nisi in infinitum reiterentur, nulla solutio, quae pro generali haberi queat, obtineri potest. Quin etiam in vniuersum fere adhuc est creditum, huius generis problemata natura sua ita esse comparata, vt solutionem generalem prorsus non admittant, ex quo sequens istius problematis solutio, quae reuera est generalis, imprimis notatu digna et finibus Analyseos Diophantaeae promouendis apta videtur.

### Problema.

16. *Inuenire generatim omnes cuborum terniones, quorum summa sit cubus.*

### Solutio.

Sint  $A, B, C$  radices ternorum cuborum, et  $D$  radix cubica summae eorum; ita vt sit  $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$ ,

X 3 .cui

cui aequationi haec forma tribuatur :  $A^2 + B^2 = D^2 - C^2$ .  
Ponatur iam :

$A = p + q$ ;  $B = p - q$ ;  $C = r - s$  et  $D = r + s$   
qua positione amplitudo solutionis neutiquam restringitur. Hinc autem fit :

$A^2 + B^2 = 2p^2 + 6pqq$  et  $D^2 - C^2 = 2s^2 + 6rrs$   
sicque erit :

$$p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$$

quae aequatio subsistere nequit, nisi  $pp + 3qq$  et  $ss + 3rr$  communem habeant diuisorem. Constat autem tales numeros alios non habere diuisores, nisi qui eiusdem sint formae : quod vt obtineatur, loco quatuor litterarum  $p, q, r$  et  $s$ , aliae sex nouae introducuntur, hoc modo :

$$\begin{aligned} p &= ax + 3by & s &= 3cy - dx \\ q &= bx - ay & r &= dy + cx \end{aligned}$$

vnde multo minus amplitudini solutionis vis infertur. Hinc autem erit :

$$\begin{aligned} pp + 3qq &= (aa + 3bb)(xx + 3yy) \text{ et} \\ ss + 3rr &= (dd + 3cc)(xx + 3yy) \end{aligned}$$

ac nostra aequatio per  $xx + 3yy$  diuisa induet sequentem formam :

$$(ax + 3by)(aa + 3bb) = (3cy - dx)(dd + 3cc)$$

qua id iam sumus consecuti, vt litterae  $x$  et  $y$  vnicam tantum obtineant dimensionem, ideoque rationaliter definiti queant. Cum enim fit :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{-3b(aa + 3bb) + 3c(dd + 3cc)}{a(aa + 3bb) + d(dd + 3cc)}, \text{ ponatur} \\ x &= -3nb(aa + 3bb) + 3nc(dd + 3cc) \\ y &= na(aa + 3bb) + nd(dd + 3cc) \end{aligned}$$

Ex

Ex quibus valoribus litterae  $p, q, r, s$  ita definiuntur, ut fit:

$$\begin{aligned} p &= 3n(ac+bd)(dd+3cc) \\ q &= n(3bc-ad)(dd+3cc) - n(aa+3bb)^2 \\ r &= n(dd+3cc)^2 - n(3bc-ad)(aa+3bb) \\ s &= 3n(ac+bd)(aa+3bb) \end{aligned}$$

Atque hinc tandem radices cuborum quaesitorum  $A, B, C, D$  erunt:

$$\begin{aligned} A &= n(3ac+3bc-ad+3bd)(dd+3cc) - n(aa+3bb)^2 \\ B &= n(3ac-3bc+ad+3bd)(dd+3cc) + n(aa+3bb)^2 \\ C &= n(dd+3cc)^2 - n(3ac+3bc-ad+3bd)(aa+3bb) \\ D &= n(dd+3cc)^2 + n(3ac-3bc+ad+3bd)(aa+3bb) \end{aligned}$$

quibus valoribus obtinetur, ut fit:

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

et cum solutio nulla restrictione sit limitata, utique latissime patet omnesque cuborum terniones completitur, quorum summa iterum est cubus.

### Coroll. I.

17. Deriuemus hinc formulas magis speciales, ac primo quidem fit  $d=0$ ; eritque

$$\begin{aligned} A &= 9n(a+b)c^3 - n(aa+3bb)^2 \\ B &= 9n(a-b)c^3 + n(aa+3bb)^2 \\ C &= 9nc^4 - 3nc(a+b)(aa+3bb) \\ D &= 9nc^4 + 3nc(a-b)(aa+3bb) \end{aligned}$$

Si hic

Si hic ulterius ponatur  $b = a$ , fiet

$$A = 18nac^2 - 16na^3; \quad B = 16na^4; \quad C = 9nc^3 - 24na^2c \\ \text{et } D = 9nc^4;$$

sin autem fiat  $b = -a$ , eruetur

$$A = -16na^4; \quad B = 18nac^3 + 16na^4; \quad C = 9nc^4; \\ \text{et } D = 9nc^4 + 24na^2c.$$

### Coroll. 2.

18. Ponamus nunc  $c = 0$ , eritque

$$A = n(3b - a)d^2 - n(aa + 3bb)^2 \\ B = n(3b + a)d^2 + n(aa + 3bb)^2 \\ C = nd^4 - nd(3b - a)(aa + 3bb) \\ D = nd^4 + nd(3b + a)(aa + 3bb)$$

Si ulterius ponatur  $b = a$ , erit

$$A = 2nad^2 - 16na^4; \quad B = 4nad^2 + 16na^4; \quad C = nd^4 - 8na^2d; \\ D = nd^4 + 16na^2d$$

Sin autem fiat  $a = -b$ , erit

$$A = 4nbd^2 - 16nb^4; \quad B = 2nbd^2 + 16nb^4; \quad C = nd^4 - 16nb^2d; \\ D = nd^4 + 8nb^2d.$$

### Coroll. 3.

19. Sit nunc  $b = 0$ , formulaeque nostrae fient:

$$A = na(3c - d)(dd + 3cc) - na^3 \\ B = na(3c + d)(dd + 3cc) + na^3 \\ C = n(dd + 3cc)^2 - na^2(3c - d) \\ D = n(dd + 3cc)^2 + na^2(3c + d)$$

Quod

Quod si iam praeterea statuatur  $d=c$ , erit

$$A=8nac^2-na^4; B=16nac^3+na^4; C=16nc^4-2na^3c;$$

$$D=16nc^4+4na^3c;$$

sin autem fiat  $d=-c$ , erit

$$A=16nac^2-na^4, B=8nac^3+na^4; C=16nc^4-4na^3c$$

$$D=16nc^4+2na^3c.$$

### Coroll. 4.

20. Ponatur denique  $a=0$ , atque obtinebimus:

$$A=3nb(c+d)(dd+3cc)-9nb^4$$

$$B=3nb(d-c)(dd+3cc)+9nb^4$$

$$C=n(dd+3cc)^2-9nb^2(c+d)$$

$$D=n(dd+3cc)^2+9nb^2(d-c)$$

Si ulterius ponatur  $d=c$ , erit

$$A=24nbc^3-9nb^4; B=9nb^4; C=16nc^4-18nb^2c; D=16nc^4$$

sin autem sit  $c=-d$ , habebitur

$$A=-9nb^4; B=24nbd^3+9nb^4; C=16nd^4;$$

$$D=16nd^4+18nb^2d.$$

### Coroll. 5.

21. Si numerorum A, B, C vnus fiat negativus, quod pro lubitu effici potest, veluti si fiat  $A=-E$ , erit  $B^2+C^2=D^2+E^2$ , sicque simul hoc problema generalissime dedimus solutum, quo bina cuborum paria quaeruntur, quorum summae sint inter se aequales. Sin autem duae radices prodeant negatiuae, veluti

Tom. VI. Nou. Com.                      Y                      A =

$A = -E$  et  $B = -F$ , erit  $C^5 = D^5 + E^5 + F^5$ , sicque denuo nostri problematis, solutio habebitur.

### Scholion 1.

22. Formulæ specialissimæ, in his corollariis exhibitæ, ad binas has reducuntur, siquidem in Coroll. 3. præscribatur  $a$  et  $n = \frac{n^5}{16}$ , et in Coroll. 1,  $\frac{1}{2} a$  pro  $a$

$$\begin{array}{ll} A = nac^3 - na^4 & A = 9nac^3 - na^4 \\ B = 2nac^3 + na^4 & B = na^4 \\ C = nc^4 - na^3c & C = 9nc^4 - 3na^3c \\ D = nc^4 + 2na^3c & D = 9nc^4 \end{array}$$

quarum prior conuenit cum supra §. 8. inuenta, altera autem præbet hunc casum simplicissimum  $A=8$ ,  $B=1$ ,  $C=6$  et  $D=9$ , ita ut sit  $1^5 + 6^5 + 8^5 = 9^5$ .

### Scholion 2.

23. Primo intuitu formulæ generales in problemate erutæ non latius patere videntur, quam formulæ supra §. 14. exhibitæ, cum vtrinq. quinque insint litteræ arbitrariæ, atque istæ insuper coefficientem communem recipere queant, ita ut etiam magis generales videantur. Interim tamen ipsa solutionis ratio declarat, formulæ in problemate inuentas esse amplissimas, dum superiores insigni restrictione sunt limitatæ. Quæ restrictio quo clarius perspicitur, ex §. 13. perpendatur positio  $v = mt + \frac{m^2 p + n n (q+r)}{m m} u = mt + pu + \frac{n n}{m m} (q+r)u$ . Iam vero est  $mt + pu = x$  et  $y + z = (q+r)u$ , ita



ita ut positio sit  $v = x + \frac{nn}{m} (y + z)$ . Quare, ut fiat  $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ , in illa solutione assumitur esse  $\frac{v-x}{y+z} = \frac{nn}{m} = \text{quadrato}$ ; sicque illa ad alios casus non pateat, nisi in quibus sit  $\frac{v-x}{y+z}$  seu  $\frac{D-A}{B+C}$  numerus quadratus. Quoties igitur  $\frac{D-A}{B+C}$  non fit quadratum, casus in superioribus formulis non continetur: huiusmodi autem casus dari, vel ex exemplo  $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$  liquet, in quo neque  $\frac{9-1}{6+8}$ , neque  $\frac{9-6}{1+8}$ , neque  $\frac{9-8}{1+6}$  fit quadratum. Solutio autem problematis tali restrictione non limitatur; cum sit  $\frac{D-C}{A+B} = \frac{s}{p} = \frac{pp+3rr}{ss+3rr} = \frac{aa+3bb}{dd+3cc}$ ; unde ex solutione generali ii tantum casus, quibus  $\frac{aa+3bb}{dd+3cc}$  est numerus quadratus in formulis superioribus §. 14. continentur; ex quo summa generalitas nostrae solutionis manifesto elucet.

### Scholion 3.

24. Natura autem huius problematis numeros integros tantum postulat, et quidem tales, qui fiat primi inter se; si enim fuerit  $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$ , tum problemati quoque satisficient omnia tam aequae multiplica, quam aequae submultiplica numerorum A, B, C, D; ideoque sufficet, eos tantum notare casus, quibus numeri A, B, C, D sunt inter se cum integri, tum primi inter se. Hunc in finem sumtis pro  $a, b, c, d$  numeris quibuscunque, siue affirmatiuis, siue negatiuis, inde primum formentur

$$x = 3n(c(dd + 3cc) - b(aa + 3bb))$$

$$y = n(d(dd + 3cc) + a(aa + 3bb))$$

Y 2

ac

ac pro  $n$  talis sumatur fractio, ut  $x$  et  $y$  fiant integri et primi inter se. Ex his porro formentur :

$$p = ax + 3by; q = bx - ay; r = dy + cx \text{ et } s = 3cy - dx,$$

qui denuo per communem diuisorem, si quem habent, deprimantur. Hinc denique habebitur  $A = p + q$ ;

$$B = p - q; C = r - s \text{ et } D = r + s; \text{ sicque fiet}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2. \text{ Atque casus, quibus vnus ho-}$$

rum numerorum sit negativus, simul omnes solutiones praebebant, quibus summa duorum cuborum aequalis

est summae duorum aliorum cuborum. In hoc calculo

conueniet copiam numerorum formae  $mm + 3nn$  in

promptu habere, vnde deinceps formulae  $aa + 3bb$

et  $dd + 3cc$  desumi queant.

QVORVND. PROBL. DIOPHANTAEORVM. 173

Tabula numerorum formae  $m^2 + 3n^2$

numerus  $n$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
1	1	4	13	28	49	76	109	148	193	244	301	364	433	508	589	676	769	868	973
2	4	7	16	31	52	79	112	151	196	247	304	367	436	511	592	679	772	871	976
3	9	12	21	36	57	84	117	156	201	252	309	372	441	516	597	684	777	876	981
4	16	19	28	43	64	91	124	163	208	259	316	379	448	523	604	691	784	883	988
5	25	26	37	52	73	100	133	172	217	268	325	388	457	532	613	700	791	892	997
6	36	39	48	63	84	111	144	183	228	279	336	399	468	543	624	711	802	903	
7	49	52	61	76	97	124	157	196	241	292	349	412	481	556	637	724	815	916	
8	64	67	76	91	112	139	172	211	256	307	364	427	496	571	652	739	830	931	
9	81	84	93	108	129	156	189	228	273	324	381	444	513	588	669	756	847	948	
10	100	103	112	127	148	175	208	247	292	343	400	463	533	607	688	775	866	967	
11	121	124	133	148	169	196	229	268	313	364	421	484	553	628	709	796	887	988	
12	144	147	156	171	192	219	252	291	336	387	444	507	576	651	732	819	910		
13	169	172	181	196	217	244	277	316	361	412	469	532	601	676	757	844	935		
14	196	199	208	223	244	271	304	343	388	439	496	559	628	703	784	871	962		
15	225	228	237	252	273	300	333	372	417	468	525	588	657	732	813	900	991		
16	256	259	268	283	304	331	364	403	448	499	556	619	688	763	844	931			
17	289	292	301	316	337	364	397	436	481	532	589	652	721	796	877	964			
18	324	327	336	351	372	399	432	471	516	567	624	687	756	831	912	999			
19	361	364	373	388	409	436	469	508	553	604	661	724	793	868	949				
20	400	403	412	427	448	475	508	547	592	643	700	763	832	907	988				
21	441	444	453	468	489	516	549	588	633	684	741	804	873	948					
22	484	487	496	511	532	559	592	631	676	727	784	847	916	991					
23	529	532	541	556	577	604	637	676	721	772	829	892	961						
24	576	579	588	603	624	651	684	723	768	819	876	939							
25	625	628	637	652	673	700	733	772	817	868	925	988							
26	676	679	688	703	724	751	784	823	868	919	976								
27	729	732	741	756	777	804	837	876	921	972									
28	784	787	796	811	832	859	892	931	976										
29	841	844	853	868	889	916	949	988											
30	900	903	912	927	948	975													
31	961	964	973	988															

## Scholion 4.

25. Ex hac tabula iam pro lubitu numeri pro  $aa+3bb$  et  $dd+3cc$  assumi poterunt, unde valores litterarum  $a, b, c, d$  habebuntur, quos tam affirmative, quam negative accipere licet. Quodsi vero minores numeri pro  $A, B, C, D$  desiderentur, conueniet pro  $aa+3bb$  et  $3cc+dd$  eiusmodi valores capi, qui communem habeant diuisorem. Statuatur ergo

$$aa+3bb=mk \text{ et } dd+3cc=nk$$

Tum vero fit  $ac+bd=f$  et  $3bc-ad=g$ , hincque fiet:

$$A=n(3f+g)-mmk$$

$$B=n(3f-g)+mmk$$

$$C=nnk-m(3f+g)$$

$$D=nnk+m(3f-g)$$

ubi notandum est, quicumque valores pro  $f$  et  $g$  fuerint inuenti, eos tam affirmative, quam negative, capi posse, ob numeros  $a, b, c, d$  ambiguos; unde pro quouis casu sequentes habebuntur determinationes:

$$\text{vel } \begin{matrix} f = \pm (cc+bd) \\ g = \pm (3bc-ad) \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} f = \pm (ac-bd) \\ g = \pm (3bc+ad) \end{matrix}$$

Patet autem, si manente  $g$  capiatur  $f$  negative, eosdem numeros esse prodituros ordine tantum permutato, unde sufficit pro  $f$  valores tantum affirmatiuos assumisse. Praeterea manifestum est, si fit  $m=n$ , seu  $aa+3bb=dd+3cc$ , tum fore  $A=-C$  et  $D=B$ , unde et hos casus excludi oportebit. Denique si  $f=0$ , fit  $A=-B$  et  $C=-D$ ; qui propterea casus quoque sunt

sunt omittendi. Saepe numero quoque euenit, vt vel pro  $a$  et  $b$ ; vel pro  $c$  et  $d$ , vel pro vtrisque plures valores oriuntur, ex quibus solutionum numerus eo maior euadit.

### Exemplum I.

26. Capiatur  $aa + 3bb = 19$ , erit  $a = 4$  et  $b = 1$ , tum vero  $dd + 3cc = 76$ , eritque:

vel  $d = 1$     vel  $d = 7$     vel  $d = 8$   
 $c = 5$      $c = 3$      $c = 2$

Tum vero fit  $m = 1$ ;  $n = 4$ ; et  $k = 19$ . Pro  $f$  autem et  $g$ , sequentes prodibunt valores ::

I.  $f = 21$ ;    II.  $f = 19$ ;    III.  $f = 19$ ;  
 $g = \pm 11$ ;     $g = \pm 19$ ;     $g = \pm 19$ ;  
 IV.  $f = 5$ ;    V.  $f = 16$ ;    VI.  $f = 0$ ;  
 $g = \pm 37$ ;     $g = \pm 26$ ;     $g = \pm 38$ ;

vnde tertius casus et sextus sunt excludendi. Atque hinc erit:

$$\begin{aligned} A &= 12f + 4g - 19 \\ B &= 12f - 4g + 19 \\ C &= 304 - 3f - g \\ D &= 304 + 3f - g. \end{aligned}$$

Hinc ergo reperietur pro valore primo  $f = 21$  et  $g = \pm 11$ :

	pro signis sup.	pro signis inf.	
$A = 233 \pm 44$	$A = 277$	$A = 189$	$A = 3$
$B = 271 \pm 44$	$B = 227$	$B = 315$	feu $B = 5$
$C = 241 \pm 11$	$C = 230$	$C = 252$	$C = 4$
$D = 367 \pm 11$	$D = 356$	$D = 378$	$D = 6$

Casus

Casus autem 2 et 3 dividendo formulas per 19, ob  $f=1 \cdot 19$  et  $g=\pm 1 \cdot 19$ , dabunt:

	vel		vel
$A = 11 \pm 4$	$A = 15$	$A = 5$	$A = 7$
$B = 13 \pm 4$	ergo $B = 9$	feu $B = 3$	$B = 17$
$C = 13 \pm 1$	$C = 12$	$C = 4$	$C = 14$
$D = 19 \pm 1$	$D = 18$	$D = 6$	$D = 20$

Casus IV quo  $f=5$  et  $g=\pm 37$  dat:

	vel		vel
$A = 41 \pm 148$	$A = 189$	$A = -107$	$A = 63$
$B = 79 \pm 148$	ergo $B = -69$	$B = 227$	feu $B = -23$
$C = 289 \pm 37$	$C = 252$	$C = 326$	$C = 84$
$D = 319 \pm 37$	$D = 282$	$D = 256$	$D = 94$

Casus V quo  $f=16$  et  $g=\pm 26$  dat:

	ergo		feu
$A = 173 \pm 104$	$A = 277$	$A = 69$	$A = 23$
$B = 211 \pm 104$	$B = 107$	$B = 315$	$B = 105$
$C = 256 \pm 26$	$C = 230$	$C = 282$	$C = 94$
$D = 352 \pm 26$	$D = 326$	$D = 378$	$D = 126$

En ergo plures cuborum terniones ex vnica positione inuentos:

$$\begin{array}{l}
 227^3 + 230^3 + 277^3 = 356^3 \quad 107^3 + 356^3 = 227^3 + 326^3 \\
 107^3 + 230^3 + 277^3 = 326^3 \quad 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3 \\
 23^3 + 94^3 + 105^3 = 126^3 \\
 7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3 \\
 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3
 \end{array}$$

vnde colligitur

$$356^3 - 227^3 = 230^3 + 277^3 = 326^3 - 107^3; \text{ item } 126^3 - 105^3 = 63^3 + 84^3 = 23^3 + 94^3$$

Exem-

Exemplum 2.

27. Sit  $aa+3bb=28$ , erit  $ve$   $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$  vel  $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$  vel  $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$   
 cum vero fit:

$dd+3cc=84$ , erit  $ve$   $\begin{cases} d=3 \\ c=5 \end{cases}$  vel  $\begin{cases} d=6 \\ c=4 \end{cases}$  vel  $\begin{cases} d=9 \\ c=1 \end{cases}$ .

Hincque  $k=28$ ;  $m=1$  et  $n=3$ ; tum vero pro  $f$  et  $g$  sequentes prodibunt valores:

- I.  $f = 14$ ; II.  $f = 4$ ; III.  $f = 22$ ;  
 $g = \pm 42$ ;  $g = \pm 48$ ;  $g = \pm 30$ ;  
 IV.  $f = 14$ ; V.  $f = 28$ ; VI.  $f = 26$ ;  
 $g = \pm 42$ ;  $g = \pm 0$ ;  $g = \pm 18$ ;

vbi notandum est, hos valores, quorum I et IV conveniunt, oriri ex sola positione  $a=1$  et  $b=3$ , et reliquas duas eosdem producere. Hinc ergo habebimus:

$$\begin{aligned} A &= 9f + 3g - 28 \\ B &= 9f - 3g + 28 \\ C &= 252 - 3f - g \\ \hline D &= 252 + 3f - g \end{aligned}$$

vnde casus primus et quartus dabunt per 14 diuidendo

$$\begin{aligned} A &= 7 \pm 9 & A &= 16 = 8 & A &= -2 = 1 \\ B &= 11 \pm 9 & B &= 2 = 1 & B &= 20 = 10 \\ C &= 15 \pm 3 & C &= 12 = 6 & C &= 18 = 9 \\ \hline D &= 21 \pm 3 & D &= 18 = 9 & D &= 24 = 12 \end{aligned}$$

Casus vero secundus per 4 diuidendo dat:

$$\begin{aligned} A &= 2 \pm 36 & A &= 38 = 19 & A &= -34 = -17 \\ B &= 16 \pm 36 & B &= -20 = -10 & B &= 52 = 26 \\ C &= 60 \pm 12 & C &= 48 = 24 & C &= 72 = 36 \\ \hline D &= 66 \pm 12 & D &= 54 = 27 & D &= 78 = 39 \end{aligned}$$

Casus tertius per 2 diuisus dat :

$$\begin{array}{r}
 A = 85 \div 45 \\
 B = 113 \div 45 \\
 C = 93 \div 15 \\
 \hline
 D = 159 \div 15
 \end{array}
 \text{ ergo I. }
 \begin{array}{r}
 A = 130 = 65 \\
 B = 68 = 34 \\
 C = 78 = 39 \\
 \hline
 D = 144 = 72
 \end{array}
 \text{ II. }
 \begin{array}{r}
 A = 40 = 20 \\
 B = 158 = 79 \\
 C = 108 = 54 \\
 \hline
 D = 174 = 87
 \end{array}$$

Casus quintus dat per 28 diuisus :

$$\begin{array}{r}
 A = 8 = 4 \\
 B = 10 = 5 \\
 C = 6 = 3 \\
 \hline
 D = 12 = 6
 \end{array}$$

Casus denique sextus per 2 diuisus dat :

$$\begin{array}{r}
 A = 103 \div 27 \\
 B = 131 \div 27 \\
 C = 87 \div 9 \\
 \hline
 D = 165 \div 9
 \end{array}
 \text{ ergo vel }
 \begin{array}{r}
 A = 130 = 65 = 5 \\
 B = 104 = 52 = 4 \\
 C = 78 = 39 = 3 \\
 \hline
 D = 156 = 78 = 6
 \end{array}
 \text{ II. }
 \begin{array}{r}
 A = 76 = 38 \\
 B = 158 = 79 \\
 C = 96 = 48 \\
 \hline
 D = 174 = 87
 \end{array}$$

Ex hoc ergo exemplo sequentes resultant formulae :

$$\begin{aligned}
 1^2 + 6^2 + 8^2 &= 9^2 \\
 34^2 + 39^2 + 65^2 &= 72^2 \quad 1^2 + 12^2 = 9^2 + 10^2 \\
 20^2 + 54^2 + 79^2 &= 87^2 \quad \text{et } 10^2 + 27^2 = 19^2 + 24^2 \\
 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 6^2 \quad 17^2 + 39^2 = 26^2 + 36^2 \\
 38^2 + 48^2 + 79^2 &= 87^2
 \end{aligned}$$

hincque sequitur

$$87^2 - 79^2 = 20^2 + 54^2 = 38^2 + 48^2$$

Patet ergo ex quouis exemplo assumto plures huiusmodi formulas obtineri, inter quas autem eadem saepius recurrent; quemadmodum casus  $3^2 + 4^2 + 5^2 = 6^2$  in hoc exemplo et praecedente bis occurrit.



QUORUND. PROBL. DIOPHANTAEORVM. 179

28. En ergo solutionem generalem problematis, quo quaeruntur quatuor numeri rationales A, B, C, D, ita ut sit  $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$ , seu quod eodem redit, quo quaeruntur quatuor numeri rationales, p, q, r et s, ut sit  $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$ . Quae problema cum methodis solitis non nisi particulariter resolui queant, manifestum est, has methodos solitas adhuc insigni defectu laborare, ideoque notabilem adhuc perfectionem desiderare. Tum vero, quod hic de unico problemate ostendimus, nullum est dubium, quin id in infinitis aliis pari successu praestari possit. In genere quidem patet, simili modo huiusmodi aequationem  $\alpha p(mpp + nqq) = \beta s(mss + nrr)$ , vel etiam hanc latius patentem  $(\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \epsilon)(mpp + nqq) = (\alpha p + bq + cr + ds + e)(mrr + nss)$  rationaliter generalissime resolui posse, ponendo:

$$\begin{aligned} p &= nfx + gy & r &= n'bx + ky \\ q &= mfy + gx & s &= m'by - kx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{erit enim } mpp + nqq &= (gg + mnff)(nxx + myy) \text{ etc.} \\ mrr + nss &= (kk + m'n'b'b)(nxx + myy) \end{aligned}$$

unde aequatio diuisa per  $nxx + myy$  continebit incognitas  $x$  et  $y$  vnus tantum dimensionis, ex qua propterea sine vlla restrictione earum valores rationaliter determinabuntur.

29. Non immerito igitur suspicari licet, et aliorum problematum Diophantaeorum, quorum adhuc non nisi solutiones particulares sunt repertae, solutiones quoque generales dari, neque discrimen supra memora-

tum ex solutionum generalitate et particularitate petitur esse essenziale; unde patet quanta adhuc incrementa in Analyſi Diophantaea desiderentur. Ad quae ſi vnquam penetrare contigerit, nullum eſt dubium, quin inde vniuerſa Analyſis, tam finitorum, quam infinitorum, haud contemnenda ſubſidia ſit acceptura. Cum enim in calculo integrali praecipuum artificium in hoc verſetur, vt formulae differentiales irrationales in rationales tranſformantur: hoc artificium ipſum, vti ex Analyſi Diophantaea in hunc calculum eſt tranſlatum, ita etiam indidem maiora auxilia merito expectantur; ex quo ſtudium, quod in iſta Analyſi, vtcunq; ſterilis alias in ſe ſpectata videatur, amplificanda impenditur, neſtquam inutiliter collocari eſt cenſendum.

30. Hic porro alia conditio non minus attentione digna notari meretur, quod ſaepe in Analyſi Diophantaea eiusmodi problemata occurrunt, quae per methodos conſuetas ſolutionem generalem admittere videntur, cum tamen haec ſolutio tantum ſit particularis; quibus caſibus peculiaria artificia adhiberi debent, vt reſtrictio, qua methodus conſueta eſt limitata, tollatur. Veluti ſi duo cubi in numeris integris quaerantur, quorum ſumma ſit numerus quadratus; ſolutio nullo modo reſtricta obtineri videtur, ſi iſta aequatio  $x^3 + y^3 = z^2$  ita reſoluatur, vt ponatur  $x = \frac{p^2}{r}$  et  $y = \frac{q^2}{r}$ . Fiet enim  $(p^2 + q^2)z = r^2$ , ideoque  $z = \frac{r^2}{p^2 + q^2}$ , et  $x = \frac{p^2 r}{p^2 + q^2}$ ,  $y = \frac{q^2 r}{p^2 + q^2}$ . Vnde, vt  $x$  et  $y$  ſiant numeri integri, ſtatuatur  $r = n(p^2 + q^2)$ , vt habeatur:

$$x = np(p^2 + q^2) \text{ et } y = nq(p^2 + q^2)$$

eritque  $x^3 + y^3 = n^3(p^2 + q^2)^3 = \text{quadrato.}$

31. Etſi

31. Etsi autem ista solutio generalis videtur, tamen nulli alii numeri pro  $x$  et  $y$  inveniuntur, nisi qui communem habent factorem  $p^2 + q^2$ , ita ut hinc concludendum videatur, nullos dari numeros inter se primos, qui, pro  $x$  et  $y$  substituti, quaestioni satisfaciant. Interim, tamen casu, quo  $x=1$  et  $y=2$ , perspicuum est, fore  $x^2 + y^2 = 9 =$  quadrato. Tametsi autem hic casus ex formulis nostris deriuari potest, ponendo  $p=1$ ,  $q=2$ , et  $n=\frac{1}{3}$ , vnde utique prodit  $x=\frac{1}{3}, 9=1$  et  $y=\frac{2}{3}, 9=2$ ; tamen ut hinc alii huius generis casus eliciantur, necesse est, ut pro  $p$  et  $q$  eiusmodi numeri accipiantur, quorum cuborum summa sit quadratum, puta  $=55$ , ut deinceps poni possit  $n=\frac{1}{5}$ : vnde prodibit  $x=p$  et  $y=q$ : quo pacto id ipsum, quod hic quaeritur, iam tanquam cognitum postulatur, ut scilicet duo cubi assignari queant, quorum summa sit quadratum. Quemadmodum ergo huic incommodo sit occurrendum, in sequenti problemate videamus.

### Problema.

32. Inuenire duos numeros integros inter se primos, quorum cubi additi faciant quadratum.

### Solutio.

Sint  $x$  et  $y$  numeri quaesiti, ita ut esse debeat  $x^3 + y^3 =$  quadrato. Debet ergo  $(x+y)(xx-xy+yy) =$  quadratum. At de his duobus factoribus annoto, eos esse vel primos inter se, vel ternarium pro communi mensura admittere, vnde solutio fiet bipartita,

qua autem ita in vnam compingetur, vt vterque factor seorsim  $x+y$  et  $xx-xy+yy$  vel quadratum esse debeat, vel triplum quadratum.

I. Sit primum vterque factor quadratus; ac ponatur  $xx-xy+yy = (pp-pq+qq)^2$ , eritque vel  $x = pp-2pq$  et  $y = pp-qq$ , vel  $x = 2pq-pp$  et  $y = qq-pp$ . Priori casu ergo oportet vt fit  $x+y = 2pp-2pq-qq$  quadratum. Quae forma cum sit  $= 3pp - p + q)^2$ , si ponatur  $= rr$ , oporteret esse  $3pp = p + q^2 + rr =$  summae duorum quadratorum, quod est impossibile. Relinquitur ergo alter casus, quo  $x+y = qq + 2pq - 2pp = (q+p)^2 - 3pp =$  quadratum, cui satisfit ponendo

$$p = 2mn \text{ et } q = 3mm - 2mn + nn$$

$$x = 2pq - pp = 4mn(3mm - 2mn + nn)$$

$$y = qq - pp = (3mm + nn)(3mm - 4mn + nn) \\ = (m-n)(3m-n)(3mm + nn)$$

II. Tum vero ponatur  $xx-xy+yy =$  triplo quadrato  $= 3(pp-pq+qq)^2$  eritque, cui triplici modo satisfit:

$$\text{I. } x = 2pp - 2pq - qq \quad \text{II. } x = 2pp - 2pq - qq \quad \text{III. } x = pp + 2pq - 2qq \\ y = pp + 2pq - 2qq \quad y = pp - 4pq + qq \quad y = -pp + 4pq - qq$$

Casu primo fit:

$x+y = 3pp - 3qq = 3$  plo quadrato, seu  $pp-qq =$  quadrato: vnde fit  $p = mm + nn$ ; et  $q = 2mn$ , ideoque

$$x = 2(m^2 - 2m^2n - 2mn^2 + n^2)$$

$$y = m^2 + 4m^2n - 6m^2nn + 4mn^2 + n^2$$

Casu

PROBL. DIOPHANTAEORVM. 183

Casu secundo fit:  $x^2 + y^2 = 3pp - 6pq = 3$  plo quadrato; ergo  $pp - 2q =$  quadrato, cui satisfit ponendo  $p = 2mn$  et  $q = mn - n^2$ ; vnde oritur

$$x = 3m^2 + 6mnn - n^2$$

$$y = -3m^2 + 6mnn + n^2$$

Casu denique tertio fit  $x + y = 6pq - 3qq = 3 \square$  et  $2pq - qq = \square$

vnde fit:  $p = mn + n$  et  $q = 2m$ ; ideoque

$$x = -3m^2 + 6mnn + n^2$$

$$y = 3m^2 + 6mnn - n^2$$

quae cum illis congruant.

En ergo ternas solutiones problematis propositi:

$$\text{I. } \begin{cases} x = 4mn(3m - 3n + n) \\ y = (m - n)(3m - n)(3m + n) \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x = 2(m^2 - 2m^2n - 2mn^2 + n^2) \\ y = m^2 + 4m^2n - 6mnn + 4mn^2 + n^2 \end{cases}$$

$$\text{III. } \begin{cases} x = 3m^2 + 6mnn - n^2 \\ y = -3m^2 + 6mnn + n^2 \end{cases}$$

vbi quidem secunda forma in tertia, quae cum quarta conuenit, contenta deprehenditur, ita vt secunda, vt magis complicata, omitti possit.

Coroll. I.

33. Si hae formulae, pro  $x$  et  $y$  intentae, per numerum quadratum quemcunque multiplicentur, eas quaesito aequae satisficient, ita scilicet summa cuborum  $x^3 + y^3$  fiat numerus quadratus; vnde numeri quocunque non primi inter se obtinebuntur. Simili autem modo

modo si hae formulae communem habuerint diuisorem quadratum, per eam diuisae quaesito perinde satisficient, unde numeri inter se primi pro  $x$  et  $y$  inueniantur, quales hic proprie quaeruntur. Geminas ergo pro hoc negotio habebimus formulas:

$$\text{I. } \begin{aligned} x &= 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y &= (m-n)(3m-n)(3mm+nn) \end{aligned} \quad \text{II. } \begin{aligned} x &= 3m^2+6mmn-n^2 \\ y &= -3m^2+6mmn+n^2 \end{aligned}$$

### Coroll. 2.

34. Euidens est, dari infinitos casus, quibus altera harum formularum recipit valorem negatiuum: quod in prioribus euenit, si vel  $m$  fit negatiuum, vel  $n$ ; vel  $n$  contineatur intra limites  $m$  et  $3m$ : in posterioribus autem, si vel  $\frac{n^2}{m^2}$  fit maius, quam  $3(1+\sqrt{2})$ , vel  $\frac{n^2}{m^2}$  minus, quam  $3(\sqrt{2}-1)$ . His ergo casibus duo reperiuntur cubi, quorum differentia est quadratum.