

DE
FRICTIONE CORPORVM
ROTANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Si corpus super plano ita incedat, vt solo motu progressiuo seu repente feratur, quantam tum a frictione resistantiam patiat, a Phisicis iam satis exploratum videtur. Per experimenta enim compertum est, in huiusmodi motibus resistantiam semper esse eiusdem magnitudinis, ita vt nequaquam a celeritate corporis pendeat; proportionalis autem est inuenta pressioni, qua corpus ad planum apprimitur, quippe cuius parti tertiae vel quartae frictio plerumque aequalis deprehenditur. Interim tamen, quo magis superficies plani et corporis fuerit laeuigata, eo magis inde frictionis quantitas diminuitur; vnde fit, vt pro corporibus et planis admodum politis frictio multo minor parte quarta pressionis, pro valde asperis vero maior parte tertia, existere possit. Praeterea vero neque figura corporis, neque basis magnitudo, qua planum contingit, quicquam ad frictionem conferre obseruantur.

2. Prouenit scilicet frictio ab attritu partium mutuo, dum corpus super plano incedit, ex quo principio tam quantitas quam reliqua frictionis phaenomena

Tom. VI. Nou. Com.

G g

fatis

fatis dilucide sunt explicata. Quando autem corpus non motu repente, sed rotatorio, super plano incedit, multo difficilior videtur frictionis determinatio. Si enim rotatio corporis ita ad motum progressuum fuerit attemperata, ut nulla partium attritio locum habeat, quemadmodum fit in rotis voluendo super solo ingredientibus, tum ob attritus defectum etiam nulla frictio adesse censetur. Quodsi vero motus corporis rotatorius vel maior fuerit vel minor, quam iste casus exigit, difficillimum videtur veram frictionis quantitatem accurate assignare, nisi plurima experimenta circa casus quosque summa cura instituta in subsidium vocentur.

3. Considero hic autem tantum corpora rotunda, quorum centrum grauitatis in ipsorum axe est situm, ita ut quomodocunque rotentur, eorum centrum grauitatis a plano, super quo incedunt, perpetuo eandem seruet distantiam. Quae conditio ut pro omni motu locum inueniat, corpus motum sphaericam figuram habere oportet, in cuius centro ipsum grauitatis centrum sit situm. Vtcunque autem hoc corpus moueatur, eius motum semper in binos motus resolvere licet, alterum progressuum, quo centrum grauitatis profertur, alterum vero rotatorium, quo corpus interea circa quempiam axem per centrum grauitatis transeuntem voluitur. Atque hic imprimis positio axis rotationis respectu motus progressui est perpendenda, ut inde verus motus, quo planum a corpore teritur, cognosci, frictioque inde oriunda aestimari possit.

Tab. III. 4. Sit EF planum, super quo corpus mouetur,
Fig 1. ad quod certa quadam vi, quae fit $\equiv P$, apprimatur,
quoniam

quoniam ab hac vi appressionis frictio praecipue pendet. Iam primum consideretur motus corporis progressiuus, seu promotio centri grauitatis O , corpore existente sphaerico $ABCD$, in cuius centro O centrum grauitatis versetur; eritque quouis momento directio huius motus plano EF , super quo fit motus, parallela. Sit igitur praesenti saltem temporis puncto recta OD huius motus directio, eiusque celeritas debita altitudini v , seu tanta, quantam graue, ex altitudine v delapsum acquirit. Sit hoc instanti A punctum contactus, et per centrum grauitatis O secundum directionem motus progressiui OD transire concipiatur planum AOD ad planum, super quo fit motus, normale, quod planum hic quidem ipso plano tabulae repraesentetur.

5. Cum hoc plano conferatur iam motus corporis rotatorius, seu axis per centrum grauitatis O transiens, circa quem hoc saltem momento corpus rotatur. Atque hic casus imprimis notatu dignus occurrit, si axis rotationis ad planum OAD fuerit normalis, quo quidem casu euident est, axem istum plano, super quo fit motus, fore parallelum. Tum vero alii dantur casus, quibus quidem axis rotationis plano EF est parallelus, sed non ad planum AOD normalis, verum ad id utcumque inclinatus. Denique habentur casus, quibus axis rotationis tam ad planum AOD , quam ad planum, super quo fit motus, positionem tenet obliquam, atque hae triplices axis rotationis positiones probe sunt notandae, quia ad eos omnes plane motus, quoscunque mente concipere licet, reducuntur.

6. Inter hanc autem infinitam varietatem tres positiones primariae prae reliquis sunt notatu dignae, quarum prima est eadem, quam modo primo loco exposuimus, quando scilicet axis rotationis ad planum AOD est normalis, qui casus in plerisque motibus mixtis locum habere solet. Secunda positio primaria est quando corpus circa axem OD cum directione motus progressiui conspirantem rotatur, quo casu uti in primo axis rotationis plano, super quo fit motus, est parallelus. Tertia positio axis principalis constituatur, quando corpus circa axem CA ad planum EF perpendicularem rotatur. Quanquam autem hae tres positiones inter infinitas sunt electae, tamen si frictionem pro iis tantum assignare potuerimus, nullum est dubium, quin inde pro qualibet axis positione obliqua veram frictionis quantitatem colligere valeamus. Ac prima quidem positio sola iam tantum investigationis campum completitur, ut plurimum is praestitisse videatur, qui omnes casus in eo contentos rite euoluerit.

7. Positioni ergo primae inhaerens, qua globum circa axem ad planum AOD normalem rotari assumo, primum obseruo ad eam non solum globum, sed quaecumque corpora rotunda, quae a plano ABCD in duas partes similes et aequales dirimantur, suumque grauitatis centrum in puncto O, quod simul est centrum figurae, habeant positum, esse accommodata, ita ut axis rotationis simul sit eorum axis, circa cuius conuersionem sint nata. Talia ergo corpora praeter globum sunt cylindri recti, et quaeuis corpora sphaeroidica, quae oriuntur, si

Tab. III.
Fig. 2. figura quaecumque GCH diametro OC praedita, circa
axem

axem GH ad CO normalem reuoluatur, dummodo centrum grauitatis in puncto O sit positum. In figura Tab. III. igitur prima circulus ABCD repraesentat huiusmodi Fig. 1. corporis sectionem per punctum O ad axem GH normaliter factam.

8. Si iam progressuum corporis motum secundum directionem OD fieri concipiamus, celeritate debita altitudini v , corpusque interea circa axem GOH ad planum AOD normalem gyretur, duo casus principales considerandi occurrunt, prout corpus vel in plagam ABCD gyretur, vel in plagam contrariam ADCB. Ille motus cum progressiuo conspirare censetur, hic vero eidem aduersari; si enim corpus secundum directionem EF protruditur, quasi sponte sua in plagam ABCD prouoluitur, dum motus contrarius non nisi a vi peculiari gignitur. Hinc motus progressiuus cum rotatione in plagam ABCD coniunctus prouolutio vocari solet, eaque est perfecta, si celeritas gyratoria puncti A circa axem O ipsi celeritati progressiuae V est aequalis. Tum enim ob vtrumque motum aequalem et contrarium punctum A puncto saltem temporis in quiete versatur, et quia super plano EF nullus attritus locum habet, nulla quoque frictio adesse existimatur, ex quo hic casus singularem attentionem meretur.

9. Quo igitur clarius appareat, quomodo huiusmodi diuersas vtriusque motus combinationes tractari conueniat, ponamus praesenti saltem temporis momento motum corporis gyratorium circa axem O ad planum AOD normalem et in plagam ABCD ita fieri, ut

puncti A celeritas debita fit altitudini u , quae quidem ad axem O quasi quiesceret, refertur, unde posito circuli ABCD radio $OA = a$, prodit celeritas angularis $= \frac{vu}{a}$. Tum vero posita motus progressiui secundum AF celeritate $= \sqrt{v}$, erit puncti A celeritas, qua super plano EF secundum directionem AF incedit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, quae celeritate attritus corporis super plano EF fieri concipiendus est. Unde manifestum est, si fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, hanc celeritatem puncti A, ideoque et attritum euanescere, nullamque propterea frictionem locum habere, qui est casus prouolutionis perfectae.

10. Sin autem fit $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, punctum A, quo fit corporis cum plano EF contactus, super hoc plano incedet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, atque ob attritum frictio oriatur, qua punctum A in directionem oppositam AE retrahetur. Hac ergo vi motus corporis progressiuius imminuetur, gyratorius autem augebitur: ac si motus gyratorius fuerit nullus, seu $\sqrt{u} = 0$, ab eadem frictione etiam motus gyratorius in plagam ABCD generabitur. Sin autem \sqrt{u} habeat valorem negatiuum, quo casu corpus habet motum gyratorium in plagam contrariam ADCB, multo adhuc maior existet attritus celeritate scilicet $\sqrt{v} + \sqrt{u}$, et a frictione inde oriunda vterque motus, tam progressiuius, quam gyratorius, debilitabitur. At si fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, gyratione in plagam ABCD tendente, motus puncti A super plano EF in regionem AE erit directus, unde frictio vim gignet in plagam AF directam, qua motus progressiuius accelerabitur, gyratorius vero retardabitur.

11. Quae-

11. Quaecunque iam subsistat ratio inter ambas celeritates \sqrt{v} et \sqrt{u} ; vim frictionis determinari oportet, ut iade, quantum vterque motus perturbetur, definiiri queat. Ac primo quidem, si motus gyratorius fuerit nullus, seu $\sqrt{u} = 0$, casus redit ad cognita frictionis phaenomena, quia corpus solo motu progressiuo super plano EF prorepat. Constat scilicet, frictionis vim fore constantem, atque ad vim, qua corpus ad planum apprimitur, certam tenere rationem, quae neque a figura corporis, neque ab eius celeritate, pendeat. Pressione nimirum corporis ad planum existente $= P$, frictio erit $= \nu P$, denotante ν certam quampiam fractionem, haecque vis motui corporis ita est contraria, ut si corpus promoueatur secundum directionem OP, seu AF, id a frictione retrahatur in directione AE, quae per ipsum contactum A sit transitura.

12. Neque tamen hoc casu frictio plane nequaquam a corporis motu pendere dici potest; primum enim directio frictionis vtiq; per motus directionem determinatur, cum ipsi sit contraria. Posita porro corporis celeritate secundum directionem AF celeritate $= \sqrt{v}$, etsi frictio νP , cuius directio est AE, non a quantitate celeritatis \sqrt{v} pendet, tamen signum eius maxime frictionem afficit, ita ut si valor \sqrt{v} fiat negatiuus, etiam frictionis quantitas subito euadat negatiua, ipsa eius quantitate eadem manente, quia tum frictio in plagam contrariam AF motui quippe oppositam dirigitur. Hic saltus eo magis fit notabilis, quod, celeritate \sqrt{v} euanescente, ipsa quoque frictio euanescat, etiamsi alias semper certum eumque constantem valorem

rem obtineat: qui saltus tametsi legibus naturae aduersari videtur, tamen alio loco eum ita explicavi, ut cum principiis mechanicis, ideoque etiam cum legibus naturae, consistere possit. Non mediocrem ergo hinc illustrationem cum insigni limitatione adipiscitur regula vulgaris, qua nullus in mundo saltus statuitur.

13. Interim tamen haec ipsa lex frictionis etiam casu, quo nullus datur motus gyratorius, exceptioni cuiuspiam obnoxia videtur. Experimenta enim non obscure innuere videntur, frictionem in ipso motus initio aliquanto maiorem esse, quam in motus continuatione; siue maiorem vim requiri ad vim frictionis primam superandam, quam ad eandem corporis celeritatem conservandam. Ita si vis primae motus productioni reluctans fuerit $= vP$, idem corpus, cum iam motum fuerit consequutum, minori vi ob frictionem retardari videtur. Dolendum autem est, nondum eiusmodi experimenta esse instituta, ex quibus hoc discrimen frictionis, si quod datur, in prima motus productione eiusque continuatione accurate definiri queat, cum tamen haec quaestio, per experimenta debita solertia facta, non difficulter dirimi posset.

14. Hoc ergo casu, quo $v u = 0$, expedito, quem quasi cognitum assumamus, contemplemur alterum casum praecipuum, quo $v u = v v$, et ob $v v - v u = 0$ attritus plane enanescit. Hoc igitur casu, qui prouolutio perfecta dici solet, nulla prorsus frictio adesse censetur, propterea quod attritui nullus relinquatur locus. Quaestio autem hic occurrit maximi momenti: an isto casu nulla prorsus adsit vis, quae motui

tui corporis opponatur? Experientia enim manifesto indicat, etiamsi corpus prouolutione perfecta feratur, eius tamen motum sensim diminui, atque tandem prorsus ad quietem redaci, qui effectus nulli alii causae, nisi vi cuiusdam motui contrariae, adscribi potest. Cum igitur etiam prouolutio perfecta resistentiae sit obnoxia, et quidem tali, qua motus mox penitus extinguatur, vnde haec resistentia oriatur, imprimis inuestigari oportet; tamen enim ea fortasse a frictione proprie sic dicta sit seiungenda, tamen nullum est dubium, quin etiam in aliis casibus sentiatur, motuique reluctetur.

15. Primum quidem videri posset, hanc motus in prouolutione perfecta imminutionem a sola resistentia aeris proficisci, verum, praeter quam quod verisimile sit, huiusmodi retardationem etiam in vacuo locum esse habituram, dummodo calculum consulamus, mox deprehendemus, aeris resistentiam nimis esse paruum, quam ut ab ea motus tam cito consumi possit. Deinde etiam certum est, quamuis a resistentia aeris motus corporum imminuatur, tamen ab ea motum nunquam plane extingui posse. Cum enim resistentia cum celeritate et quidem in eius ratione duplicata decrescat, fieri omnino nequit, ut ab ea motus omnino deleatur: ex quo manifestum est, causam, cur motus in prouolutione perfecta diminuatur, et ad quietem redigatur, in aeris resistentia poni non posse.

16. Cum igitur tota causa huius retardationis non in aeris resistentia sit quaerenda, etiamsi ei pars quaequam recte tribuatur, nihil aliud relinquitur, nisi ipsa superficies, super qua fit incessus, vnde haec re-

tardatio oriri sit statuenda. Ac si superficies sit panno obducta, obseruamus, globum eo citius motum suum amittere, quo pannus fuerit villosior, vnde recte concludimus, villositatem superficiei motui aduersari, et causa quidem est manifesta, quod corpus hos villos continuo deprimere debet, id quod sine quadam motus iactura fieri nequit. Reagunt scilicet villi in globum, vti in α cernere licet, cuius vis directio, etsi per centrum globi O secundum αO transit, tamen eo magis motui resistit, quo maior fuerit angulus $AO\alpha$, hoc est, quo profundius globus his villis immergitur. Obiici quidem posset, globum ex altera parte posteriori pari vi vrgeri, quod vtique si corpus quiesceret, esset verum, sed dum corpus modica celeritate versus F promouetur, citius villos posteriores deserit, quam illi se erigere et in corpus cedens pressionem exerere queant; vnde dubitare non licet, quin a parte antica resistentia quae a villositate superficiei oriatur.

17. Quaecumque autem fuerit haec resistentia, ea non solum ad hunc casum, quo $\sqrt{v} - \sqrt{u} = 0$, est adstricta, sed ad omnes plane casus prouolutionis ex motu progressiuo et gyratorio vtrunque mixtae aequae patet, propterea quod a solo motu progressiuo, quantum a depressione villorum efficitur, provenit; quam ob rem in istam resistentiam, quae a frictione probe est distinguenda, accuratius inquiri conueniet. Neque vero ea tantum a villositate superficiei oriri est censenda, sed cuiuscumque etiam fuerit naturae superficies, ob pressionem corporis quae a parte anteriori ei quasi immergitur, supremaeque superficiei partes aliquantillum com-

primus

primuntur. Ab hac compressione similis redundat reactio in corpus motum atque a villositate, hincque motui resistentia opponitur, quae pro ratione tam superficiei, quam pressionis, utcumque variare, nunquam autem plane in nihilum abire potest. Atque haec vera videtur esse causa, cur motus etiam volutorius tandem penitus extinguatur, quem effectum resistentiae aeris tribuere non licet.

18. Promoueat^r ergo corpus super plano EF Tab. III.
villis utcumque obsito, cui ad profunditatem $\alpha\beta$ Fig. 3.
immergatur, ita ut, dum progreditur continuo, villos ad $\beta\gamma$ erectos in spatium $A\alpha\beta$ comprimat, cui compressioni cum villi reluctantur, eam efficient resistentiam, quam hic inuestigare animus est; siue autem ea a veris villis oriatur, siue a quapiam plani mollitie, qua impressionem quampiam patitur, perinde est. Sit igitur naturalis villorum erectio $\alpha\beta = f$, quae simul profunditatem impressionis in vero contactu A factae indicat; et in quolibet puncto M, dum progrediendo villum PM ulterius comprimit, existet quaedam vis reactionis in corporis superficiem normaliter nitens, cuius propterea directio erit MO per centrum grauitatis O transiens, et cuius quantitas aestimari potest proportionalis compressioni iam factae, seu differentiae $\alpha\beta - PM$. Posita ergo $PM = y$, magnitudo huius vis in directione MON agentis erit interuallo $f - y$ proportionalis.

19. Ponamus rigorem villorum esse tantum, ut a basi $= cc$ vi, seu pondere, $= K$ appressa per spatium $= k$ comprimantur, sicque compressionis effectus ckk vi pres-

tionis K tribui debeat. Primum autem corpus, quod movetur, sit discus, seu cylindrus, radii $OA = a$, et crassitiei $= b$, et, posito $AP = x$, compressio villorum spatioso $Pp = dx$ respondentium valet $(f-y)bdx$, quae ergo requirit vim $= \frac{K}{ccb} (f-y)bdx$, cuius directio est MON . Spatiolum enim PM praeter radio disci $OA = a$ iam parvum contemplor, ut angulus AOM sit minimus, et ratio elementorum Pp ad Mm ad aequalitatem accedere censei possit. Hinc erit $xx = 2ay$, et $dx = \frac{a dy}{\sqrt{2ay}}$, unde tota vis sursum virgens portionem AM erit $\frac{Kbfay}{3ccb} (3f-y)$, et vis tota elevans, a spatio A nata, posito $y=f$, erit $= \frac{2Kbf^2af}{3ccb}$.

20. Huic ergo vi aequalis est tota vis, qua corpus ad planum apprimitur, quae cum supra posita sit $= P$, habebimus hanc aequationem $\frac{2Kbf^2af}{3ccb} = P$; unde colligimus:

$$fVf = \frac{3Pccb}{2Kbf^2af} \text{ et } f = \sqrt{\frac{3Pccb}{2Kbf^2af}}$$

Hic scilicet eos tantum villos in computum ducō, qui ante corpus sunt siti, et quos, dum progreditur, comprimere cogitur, eos vero, qui pone corpus iam sunt compressi, vel elateris expertes assumo, vel tales, ut sua restitutione motum corporis non assequantur, neque idcirco in illud agere valeant. Dum igitur corpus quiescit, quia tum etiam a parte posteriori sustinetur, minorem faciet impressionem, quatenus ea a pressionis duratione non augetur. Dubitari enim nequit, quin continuata pressione, saltem per aliquod tempus, corpus aliquanto profundius immergatur; at ob hanc ipsam causam

causam in motu actio villorum post corpus recte negli-
gigi potest.

21. Etsi autem in hoc calculo angulus AOM
minimus est positus, tamen eius rationem haberi oportet,
si vim motui resistantem inuestigare velimus. Cum
enim huius vis directio MON per centrum gravitatis O
transeat, multiplicetur ea per cosinum anguli NOB, seu
sinum anguli AOM, qui est $= \frac{a}{r}$, et vis resultans secun-
dum directionem OB motui contrariam erit $= \frac{K}{cc} (f-y)$
 $\frac{badi}{a}$, ideoque ob $x dx = a dy$ erit ea $= \frac{Kb}{cc} (f-y) dy$,
cuius integrale est $= \frac{Kb}{cc} (fy - \frac{1}{2}yy)$, unde tota vis mo-
tui repugnans, sumendo $y = f$, prodit $= \frac{Kbff}{2cc}$. Cum
igitur sit $f = \frac{Pc^2k}{4Kb} \sqrt{\frac{Pcc}{Kaab}}$, erit ista tota vis $= \frac{1}{8} P \sqrt{\frac{Pcc}{Kaab}}$
vbi pro eadem superficie quantitas $\frac{cc}{K}$ est constans:
ergo si corporis gravitas specifica exprimat per m , ob
P vt $maab$, erit vis istius resistantiae vt $P \sqrt{m}$, ita
vt gravitate specifica eadem manente resistantia sit pon-
deri vel volumini corporis proportionalis.

22. Sin autem corpus sit sphaericum, con-
siderari debet tota eius impressio a parte anteriori facta,
quae erit semicirculus $\delta a \delta$ centrum habens in A, cu-
ius radius medius A α directionem motus representabit.
In perimetro ergo huius circuli altitudo villorum po-
natur vt ante $= f$; in distantia autem a centro AP
 $= AS = x$, sit ea $= y$, eritque $xx = 2ay$, denotante a
radium corporis sphaerici. Posito angulo quocunq;
 $\alpha A \mu = \Phi$, erit arcus PS $= x \Phi$, eiusque differentiale
ET $= x d\Phi$, unde arcola Psp $= x dx d\Phi$, in qua compressio
villorum tota valebit $(f-y) x dx d\Phi$. Hinc ergo cor-

Tab. III.
Fig. 4.

pus sursum urgebitur vi $\frac{K}{cck}(f-y)x dx d\Phi = \frac{K}{cck}f-y) a dy d\Phi$
 cuius integrale pro spatio PAS est $= \frac{K}{cck}(fy - \frac{1}{2}yy) a d\Phi$,
 ideoque pro spatio $\alpha A \mu = \frac{K aff d\Phi}{2cck}$: unde posita dia-
 metri ad peripheriam ratione $= 1:\pi$, vis sursum pel-
 lens tota reperitur $= \frac{\pi K aff}{2cck}$, vi pressionis P aequanda;
 ex quo fit $ff = \frac{2Pcck}{\pi Ka}$, ubi f denotat profunditatem, ad
 quam globus immergitur.

23. Ex vi autem $\frac{K}{cck}(f-y) a dy d\Phi$, spatiolo
 STst respondente, resultat vis secundum directionem
 plani SA urgens, si ea per $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ multiplicetur,
 ita ut vis ista sit $= \frac{K d\Phi \sqrt{2a}}{cck}(f-y) dy \sqrt{y}$, quae per
 cos. Φ multiplicata dabit vim motui contrariam, cuius
 scilicet directio per centrum gravitatis globi transit, va-
 de ista vis sit $= \frac{K d\Phi \cos \Phi \sqrt{2a}}{cck}(f-y) dy \sqrt{y}$, quae inte-
 grata, et posito $y=f$, reperitur: $\frac{4K f d\Phi \cos \Phi \sqrt{2a} f}{15cck}$: Ac
 si altera integratio pro angulo Φ instituat, fit re-
 sistentia ex spatio $\alpha A \mu$ orta $= \frac{4K f f \sin \Phi \sqrt{2a} f^3}{15cck}$, cuius
 duplum posito $\Phi = 90^\circ$ praebebit totam resistantiam
 $= \frac{8K f f \sqrt{2a} f^3}{15cck} = \frac{16P}{15\pi} \sqrt{\frac{2f}{a}}$, ob $ff = \frac{2Pcck}{\pi Ka}$; indidem igitur
 ista resistantia erit $= \frac{16P}{15\pi} \sqrt{\frac{2Pcck}{\pi Ka^3}}$, unde pro eodem
 plano ea erit, ut $P \sqrt{\frac{P}{a^3}}$. Huius vero vis directio mo-
 tui est contraria, et per globi centrum transit.

24. Hanc itaque resistantiam, quae a frictione
 probe est distinguenda, sentiunt omnia corpora, siue solo
 motu progressivo, siue insuper cum rotatorio, super plano
 quocunque ferantur, neque ea, ut vidimus, a motu rota-
 torio

torio pendet, neque ab ipsa velocitate motus progressivi; quam ob causam ea etiam vulgo cum frictione confusa videtur. Maxime tamen a frictione proprie sic dicta discrepat, propterea quod frictionis directio per ipsum contactum transit, huius autem resistentiae directio per corporis centrum grauitatis, vnde haec vis motum rotatorium aliter non afficit, nisi quatenus motu progressiuo mutato etiam in rotatorium necessario mutatio redundat. Deinde vero frictio plurimum a ratione inter motum rotatorium et progressiuum pendet, quemadmodum vidimus, eam insignem existere, si $\sqrt{u} = 0$, penitus autem euanescere, si $\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0$, dum altera resistentia ab hac diuersitate nequaquam afficitur, sed pro quacunque relatione inter ambas celeritates \sqrt{v} et u eandem quantitatem constanter retinet.

25. Stabilita ergo hac noua resistentia ab impressione mutua corporis et plani orta, pergamus ad frictionem inuestigandam pro casibus, vbi neque $\sqrt{u} = 0$, neque $\sqrt{v} - \sqrt{u} = 0$, quorum illo vidimus frictionem tantam esse, quanta vulgo experimentis aestimari solet, siquidem simul illius resistentiae ratio habeatur, hoc vero omnino euanescere. Quaestio igitur hic statim se offert, vtrum frictio, quando est $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, minor sit quam casu $\sqrt{u} = 0$, an vero ei sit aequalis? Non desunt rationes, quae vtrumque suadere videntur; nam cum accedente motu rotatorio in plagam ABCD attritus minuatur, atque tandem euanescat, cum fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, attritus minorem etiam minor frictio sequi debere videtur, quoniam attritu euanescente frictio adeo in nihilum abire est inuenta. Deinde etiam nul-

Tab. III.
Fig. 1.

lum

lum est dubium, quin frictio, si celeritas rotationis V_{ω} excedat celeritatem progressiuam Vv , fiat negativa, seu corpus in plagam contrariam rapiat.

26. Super hac quaestione ingens cernitur dissensio in Comment. Acad. Petrop. Tomo XIII, vbi Celeb. Vir *Daniel Bernoulli* et ego idem argumentum de descensu corporis rotundi super plano inclinato pertractauimus. Assumerat autem Vir Celeb. huiusmodi corpus super plano inclinato descendens semper eandem pati frictionem, quamcunque rationem tenuerit motus progressiuus ad motum rotatorium, atque adeo in prouolutione perfecta, vbi ratio illa fit aequalitatis, eandem manere frictionis quantitatem, atque hinc concludit, quamdiu plani eleuatio non certum quemdam gradum excedat, corpus rotundum prouolutione perfecta esse descendurum. Quia etiam Celeb. *Krafft* experimentis institutis euentum huic effato eximie respondere deprehendit. Ego vero contra, secundum ea, quae hic exposui, assumeram, in prouolutione perfecta nullam prorsus dari frictionem, eamque fore eo minorem, quo propius motus mixtus ad prouolutionem perfectam accesserit; vnde sequebatur, nullo plane casu globum super plano inclinato prouolutione perfecta descendere posse, cui conclusioni experientiam contrariam agnoscere cogor.

27. Quamuis autem Celeb. *Bernouilli* Theoria experientiae sit consentanea, tamen non patet, quomodo eius hypothesis, quod etiam in prouolutione perfecta frictio tanta sit, quanta in solo motu progressiuo esse solet, cum veritate conciliari possit. Contemplemur enim casum, quo globus super plano horizontali per-

perfecte prouoluitur, atque nullum est dubium, si nientem, tam ab aëris resistentia, quam ab ea, quae ante est definita, abstrahamus, quin corpus sine vlla diminutione motum suum sit prosequuturum. Vbi autem nulla motus diminutio apprehenditur, ibi certe nulla frictio statui potest; ex quo etiam in descensu super plano inclinato, quamdiu corpus prouolutione perfecta fertur, nulla frictio admitti posse videtur, contra principium, cui *Theoria Bernoulliana* innitur. Verum si hoc casu, vti ego feci, frictio tollitur, tum prouolutioni perfectae nullus plane locus relinquitur, etiamsi plani inclinati elevatio quam minima statuatur, quod tamen experientiae aduersari certum est.

28. Quo huius nodi solutionem reperiamus, hos duos casus prouolutionis perfectae super plano horizontali et inclinato accuratius inter se conferamus; et cum super plano horizontali nullam frictionem admittere liceat, super inclinato autem per experimenta frictionis existentia euincatur, manifestum est, hunc casum ad illum reduci, si grauitatis sollicitationem, qua corpus secundum directionem plani acceleratur, euanescere concipiamus. Ex quo hanc conclusionem adipiscimur; si in prouolutione perfecta super plano inclinato nulla adesset vis motum accelerans, tum etiam nullam frictionem esse adfuturam, contra vero cum vi motum accelerante necessario frictionem fore coniunctam. Hic igitur fontem erroris, quo meum ratiocinium premebatur, detego, qui in hoc consistit, quod frictionem ex solo statu motus, quo corpus actu cietur, definiri debere putaueram, cum tamen potius ex viribus accel-

ratricibus determinari debeat: atque hinc frictionis effectus maxime a resistentia fluidorum aliisque resistentiae generibus discrepat, quod hae resistentiae vnice a statu motus corporum pendeant.

29. Quod autem frictio a viribus sollicitantibus potissimum pendeat, ex ipso statu quietis luculenter perspicitur. Si enim corpus plano horizontali incumbat, nullisque viribus ad motum sollicitetur, nullus quoque frictionis cernitur effectus; si autem hoc corpus protrahatur a vi, quae frictionem superare non valeat, corpus etiam nunc quiescet; vnde hoc casu frictio ex-erit vim, vi protrahenti aequalem et contrariam, vnde patet, vim a frictione exertam per se non esse determinatam, sed demum per vim protrahentem determinari, siquidem ea fuerit minor, quam tota frictio, quae se motui opponit; ex quo his casibus pars tantum frictionis effectum praestare est censenda. At si vis protrahens frictioni vel fuerit aequalis, vel ea maior, tota frictio se se eius actioni opponit, et illo quidem casu corpus etiam nunc quiescet, hoc vero promouebitur excessu vis sollicitantis supra frictionem totam. Quemadmodum igitur corpus frictione impeditum, a statu quietis ad motum concitetur a viribus quibuscunque sollicitantibus, ante accuratius erit inuestigandum, quam ad eius effectum in motu explorandum progrediamur.

30. Verum si corpus plano incumbens a viribus quibuscunque sollicitetur, quatuor casus existere possunt:

I. Vel enim primo corpus in quiete omnino perseverat, dum vires sollicitantes neque corpori motum imprimere, neque frictionem superare valent.

II. Vel

II. Vel secundo corpus quidem ad motum incitabitur, sed ita ut punctum contactus, vel eius extremitas, primo saltem instanti immota maneat, sicque nullus oriatur attritus; hoc evenit scilicet si vires frictioni superandae sunt impares.

III. Vel tertio corpus super plano rependo progredietur, sine vilo motu gyatorio.

IV. Vel quarto denique corpus cum rependo, tum gyando, simul promovebitur.

Corpore ergo quocunque proposito, quod plano incumbat, et a viribus quibuscunque sollicitetur, characteres primum inuestigemus, ex quibus dignosci possit, quisnam horum quatuor casuum locum sit habiturus.

31. Ut igitur hos characteres inueniamus, consi- Tab. III.
deremus corpus quodcunque basi sua GH plano EF Fig. 5.
incumbens, cuius massa sit $=M$, centrum grauitatis
O, et momentum inertiae respectu axis per O trans-
euntis, circa quem fiat motus, si quis detur, sit
 $=Mkk$. Hic scilicet axis concipiatur ad planum tabu-
lae normalis, dum tabula refert sectionem ad planum
EF normalem et per centrum grauitatis O factam.
Sollicitetur hoc corpus a viribus quibuscunque, quae
primum omnes directionibus sibi parallelis in centro
grauitatis O applicatae concipiantur, eaeque resoluantur
in duas vires secundum directiones OA et OD, illam
ad planum EF normalem, quae sit $=P$, hanc vero
plano EF parallelam, quae sit $=Q$. Tum ex iisdem
viribus colligatur momentum respectu axis O, quod
sit KL. $OK = Vb$, quod conetur corpus in plagam

BCD gyron; hac quippe duplici consideratione totus virium sollicitantium effectus exhaurietur.

32. Videamus iam, sub quibus conditionibus corpori eiusmodi motus inducatur, qui cum nullo attritu fuerit coniunctus; id quod eveniet, si basis HG extremitas G in quiete permaneat, corpusque gyrondo circa G motum incipiat. Quoniam igitur ista basis extremitas G in censum venit, iuncta recta GO vocetur $=g$, atque angulus HGO $=\theta$, unde fiet recta OA $=g \sin. \theta$ et AG $=g \cos. \theta$. Nunc cum frictio agat secundum directionem GH, videamus quanta vi, quae sit $=Z$ corpus secundum directionem GH vrgeri debeat, vt punctum G immotum conseruetur; quod si enim haec vis Z reperiatur minor frictione tota, vel saltem ei aequalis; ob frictionem hic ipse motus, quem fingimus, efficietur, motusque corpori gyronorius circa punctum G immotum imprimetur; sin autem vis ista Z prodeat maior frictione tota, perspicuum est, a sola frictione punctum G non posse in quiete retineri; ex quo re vera abripietur, motusque ad casum tertium relatus nascetur: hisque rationibus characteres quaesiti innituntur.

33. Quia ergo supponimus, motum primo instanti fieri circa punctum G, centrum grauitatis O feretur per arcum Oo centro G radio GO $=g$ descriptum, interea vero corpus circa axem O per similem angulum in plagam BCD gyronbitur, ita vt celeritas gyronoria puncti G circa O ipsi celeritati puncti O per Oo aequalis sit futura. Dum autem hic motus producitur, totus nifus corporis in planum EF in puncto

puncto G colligetur, unde ad superiores vires corpus sollicitantes insuper vis accedit, corpus in puncto G a plano EF perpendiculariter sursum secundum GI vrgens, quae vis aequalis est pressioni corporis contra planum dum motus exoritur. Quae vis quia etiam nunc est incognita, tantisper indicetur littera Y, ita vt duas habeamus vires incognitas, Z secundum GH et Y secundum GI, quae ita sunt determinandae, vt punctum G in quiete conferretur.

34. Viribus autem his cum datis, quasi essent cognitae assumtae, ex iis primum acceleratio centri gravitatis O definiatur, quod fiet, has vires secundum suas directiones centro gravitatis applicando. Quare a viribus datis centrum gravitatis O, in quo tota corporis massa M collecta est concipienda, sollicitabitur secundum OD vi = Q, et secundum OA vi = P, a viribus autem incognitis secundum OB vi = Z et secundum OC vi = Y. Hinc massa M in O collecta ab utrisque sollicitabitur secundum directionem OD vi = Q - Z, et secundum OC vi = Y - P; inde ergo nascetur acceleratio = $\frac{Q-Z}{M}$, hinc vero = $\frac{Y-P}{M}$. Quam ob rem si acceleratio secundum ipsam motus directionem Oo vocetur = s, per resolutionem ob angulum COo = HGO = θ obtinebitur acceleratio secundum Ot = s sin. θ , et secundum Ov = s cos. θ , ex quo obtinebimus has duas aequationes:

$$s \sin. \theta = \frac{Q-Z}{M} \quad \text{et} \quad s \cos. \theta = \frac{Y-P}{M}$$

unde fit $(Q-Z) \cos. \theta = (Y-P) \sin. \theta$, hincque

$$Y = P + (Q-Z) \frac{\cos. \theta}{\sin. \theta}$$

35. Iam ad accelerationem motus rotatorii corporis circa axem O obtinendam in plagam BCD , quam in distantia $OG = g$ per hypothesin aequalem esse oportet s , momenta virium sollicitantium sunt colligenda. Atque ex datis quidem viribus nasci ponitur momentum $= Vb$ in plagam BCD tendens: tum vero ex vi $GH = Z$ ob $OA = g \sin. \theta$ in eandem plagam oritur momentum $= Zg \sin. \theta$, ex vi $GI = Y$ vero in plagam contrariam ob $OI = g \cos. \theta$ nascitur momentum $= Yg \cos. \theta$, ita vt momentum totale motum gyratorium producus sit $= Vb + Zg \sin. \theta - Yg \cos. \theta$, quod per momentum inertiae Mkk diuisum, et per distantiam $OG = g$ multiplicatum suppeditabit accelerationem motus rotatorii in G , quae cum per hypothesin sit $= s$, habebimus hanc aequationem

$$s = \frac{Vgb + gg(Z \sin. \theta - Y \cos. \theta)}{Mkk}$$

36. Cum igitur sit $s \sin. \theta = \frac{Q-Z}{M}$ erit:

$$\frac{Q-Z}{M} = \frac{Vgb \sin. \theta + gg(Z \sin. \theta - Y \cos. \theta) \sin. \theta}{Mkk}$$

sive:

$$kk(Q-Z) = Vgb \sin. \theta + ggZ \sin. \theta^2 - ggY \sin. \theta \cos. \theta$$

Est vero $Y \sin. \theta = P \sin. \theta + (Q-Z) \cos. \theta$

quo valore substituto habebimus:

$$kk(Q-Z) = Vgb \sin. \theta + ggZ \sin. \theta^2 - ggP \sin. \theta \cos. \theta - gg(Q-Z) \cos. \theta^2$$

seu:

$$kkQ = kkZ + Vgb \sin. \theta + ggZ - ggP \sin. \theta \cos. \theta - ggQ \cos. \theta^2$$

vnde

vnde colligitur :

$$Z = \frac{ggP \sin. \theta \cos. \theta + (kk + gg \cos. \theta^2) Q - Vg b \sin. \theta}{kk + gg}$$

hincque :

$$Q - Z = \frac{ggQ \sin. \theta^2 - ggP \sin. \theta \cos. \theta + Vg b \sin. \theta}{kk + gg}$$

$$\text{et } Y = \frac{ggQ \sin. \theta \cos. \theta + (kk + gg \sin. \theta^2) P + Vg b \cos. \theta}{kk + gg}$$

37. Inuenta iam vi Z , quae ad punctum G immotum conseruans dum requiritur, quoniam frictio hanc vim suppeditat, necesse est, vt vis Z totam frictionem non superet. Frictio autem pendet a vi, qua corpus ad planum apprimitur, ad eamque certam quandam tenet rationem, quae fit vt 1 ad ν . Cum igitur, dum corpus circa extremitatem basis G gyrari incipit, tota pressio in G colligatur, et aequalis sit inuenta Y , tota frictio erit $= \frac{1}{\nu} Y$. Quam ob rem vt corpus circa extremitatem basis G immotam gyretur, et quidem in plagam BCD , necesse est, primo, vt sit $Z < \frac{1}{\nu} Y$, hoc est, vt sit :

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vg b \sin. \theta < \frac{1}{\nu} (Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vg b \cos. \theta)$$

tum vero etiam necesse est, vt acceleratio ν habeat valorem affirmatiuum, vnde cum sit $\nu = \frac{Q - Z}{M \sin. \theta}$, siue

$$\nu = \frac{g(Q \sin. \theta - P \cos. \theta + Vb)}{M(kk + gg)}$$

oportet, vt sit praeterea $Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta$.

38. Hinc

38. Hinc igitur pro motu casus secundi hanc nanciscimur conclusionem:

si fuerit

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vgb \sin. \theta < \frac{2}{3} (Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vgb \cos. \theta)$$

atque insuper $Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta$
 tum corpus circa extremitatem basis G immotam in plagam BCD moueri incipere, foreque accelerationem huius motus gyratorii pro distantia g,

$$\varepsilon = \frac{g(Qg \sin. \theta - Pg \cos. \theta + Vb)}{M(kk + gg)}$$

Si eueniat ut sit $Qg \sin. \theta + Vb < Pg \cos. \theta$, minime concludere licet, motum gyratorium fieri in plagam oppositam circa G; tali enim motui pars reliqua basis GH plano innitens sese opponit. Namque motus contrarius fuerit circa alteram basis extremitatem H, pro quo casu peculiari calculo respondentes vires Z et Y, quarum haec iam in H applicata esset concipienda, definiiri oporteret, simili quidem modo quo hic sumus vsi.

39. Si ergo sit $Qg \sin. \theta + Vb = Pg \cos. \theta$ nullus dabitur motus gyratorius; ut autem simul punctum G quiescat, requiri, ut sit $Q < \frac{2}{3} P$, hocque ergo casu corpus plane quiescet. At si sit $Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta$, seu acceleratio ε positivum obtineat valorem, tunc corpus motum gyratorium circa G adipiscetur; ut autem punctum G quiescat, oportet sit valore ipsius ε introducto:

$$Q < \frac{2}{3} P + M\varepsilon(\sin. \theta + \frac{1}{3} \cos. \theta)$$

Quando

Quando ergo $Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta$, corpus circa G rotari incipiet, punctumque G quiescet, si non solum fuerit $Q < \frac{1}{2}P$, sed etiam si sit vel $Q = \frac{1}{2}P$, vel $Q > \frac{1}{2}P$, dummodo sit

$$Q < \frac{1}{2}P + Ms (\sin. \theta + \frac{1}{2} \cos. \theta)$$

existente $s = \frac{g(Qg \sin. \theta - Pg \cos. \theta + Vb)}{M(gg + kk)}$

At si fuerit $Q > \frac{1}{2}P + Ms (\sin. \theta + \frac{1}{2} \cos. \theta)$, durante motu gyatorio punctum G quoque versus F abripietur, neque enim frictio ei retinendo par erit.

40. Pro quadruplici ergo corporis statu criteria sumus adepti, quibus status corporis vel ad casum secundum, vel ad quartum pertinebit: scilicet pro casu secundo hae requiruntur conditiones, ut sit

$$Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vgb \sin. \theta < \frac{1}{2}(Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vgb \cos. \theta)$$

Hoc nempe casu corpus circa basis extremitatem G in plagam BCD gyari incipiet, ipsa basis extremitate G immota manente.

Casus autem quartus locum habebit sub his conditionibus, si fuerit

$$Qg \sin. \theta + Vb > Pg \cos. \theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vgb \sin. \theta > \frac{1}{2}(Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vgb \cos. \theta)$$

Hoc videlicet casu corpus quoque circa basis extremitatem G in plagam BCD gyari incipiet; sed haec

ipsa basis extremitas versus F promovebitur, et cum attritu super plano EF progredietur.

41. Hoc ergo casu quarto, corpus totam frictionem patietur, quae cum sit $= \frac{1}{2}Y$, erit $Z = \frac{1}{2}Y$; atque etiam accelerationem puncti G super plano EF assignare poterimus. Si enim ponamus hanc accelerationem $= \omega$, manente acceleratione motus gyratorii circa centrum gravitatis $O = s$, erit pro motu centri gravitatis O acceleratio secundum $OD = s \sin. \theta + \omega$, et acceleratio secundum $OC = s \cos. \theta$, unde habemus ob $Z = \frac{1}{2}Y$ has aequationes:

$$s \sin. \theta + \omega = \frac{Q - \frac{1}{2}Y}{M}; \quad s \cos. \theta = \frac{Y - P}{M}$$

$$\text{et } s = \frac{Vgb + \frac{1}{2}Ygg \sin. \theta - Ygg \cos. \theta}{Mkk} = \frac{Y - P}{M \cos. \theta}$$

hinc ergo fiet:

$$Vgb \cos. \theta + \frac{1}{2}Ygg \sin. \theta \cos. \theta - Ygg \cos. \theta^2 = Ykk - Pkk.$$

$$\text{ideoque } Y = \frac{Pkk + Vgb \cos. \theta}{kk + gg \cos. \theta^2 - \frac{1}{2}gg \sin. \theta \cos. \theta}$$

42. Ex his colligimus:

$$Y - P = \frac{Vgb \cos. \theta - Pgg \cos. \theta (\cos. \theta - \frac{1}{2} \sin. \theta)}{kk + gg \cos. \theta^2 - \frac{1}{2}gg \sin. \theta \cos. \theta}$$

unde concluditur fore:

$$s = \frac{g(Vb - Pg(\cos. \theta - \frac{1}{2} \sin. \theta))}{M(kk + gg \cos. \theta (\cos. \theta - \frac{1}{2} \sin. \theta))}$$

quae est acceleratio motus rotatorii; ex cuius valore eoque, qui pro Y est inuentus, obtinebimus accelerationem progressivi motus puncti G

$$\omega = \frac{Q}{M}$$

$$\omega = \frac{Q \sqrt[3]{Pkk} + \sqrt[3]{Vgb} \cos \theta - \sqrt[3]{Vgb} \sin \theta + Pgg \sin \theta (\cos \theta - \sqrt[3]{\sin \theta})}{M(kk + gg \cos \theta (\cos \theta - \sqrt[3]{\sin \theta}))}$$

sive:

$$\omega = \frac{Q(kk + gg \cos \theta^2 - \sqrt[3]{gg} \sin \theta \cos \theta) - P(\sqrt[3]{kk} + \sqrt[3]{gg} \sin \theta^2 - gg \sin \theta \cos \theta) - \sqrt[3]{Vgb} (\sin \theta + \sqrt[3]{\cos \theta})}{M(kk + gg \cos \theta^2 - \sqrt[3]{gg} \sin \theta \cos \theta)}$$

cuius numerator est utique affirmativus, si fuerit, ut ante notaueramus,

$$Pgg \sin \theta \cos \theta + Q(kk + gg \cos \theta^2) - \sqrt[3]{Vgb} \sin \theta > \sqrt[3]{P} (Qgg \sin \theta \cos \theta + P(kk + gg \sin \theta^2) + \sqrt[3]{Vgb} \cos \theta)$$

43. Hinc iam rectius conditiones agnoscimus, sub quibus quartus casus in motu corporis locum habet: hae eaim conditiones sunt

$$\sqrt[3]{P} g \sin \theta + Vb > P g \cos \theta \quad \text{et}$$

$$Pgg \sin \theta \cos \theta + Q(kk + gg \cos \theta^2) - \sqrt[3]{Vgb} \sin \theta > \sqrt[3]{P} (Qgg \sin \theta \cos \theta + P(kk + gg \sin \theta^2) + \sqrt[3]{Vgb} \cos \theta)$$

vbi prior conditio aliquantum discrepat a superiori. Interim tamen nulla est repugnantia; cum enim ante viderimus casum quartum postulare $Q > \sqrt[3]{P} + M \cdot g (\sin \theta + \sqrt[3]{\cos \theta})$ erit utique $\sqrt[3]{P} < Q$, ideoque multo magis prima conditio ibi allata, ut sit

$$Qg \sin \theta + Vb > P g \cos \theta$$

hic locum habebit. Videmus ergo has conditiones latius patere, quam praecedentes, casumque quartum evenire, dummodo sit

$$\sqrt[3]{P} g \sin \theta + Vb > P g \cos \theta$$

adiuncta altera conditione, quae vtrinque est eadem.

44. Si fuerit $\sqrt[3]{P} g \sin \theta + Vb = P g \cos \theta$ motus gyriorius evanescet, corpusque solo motu progressivo

et rectorio super plano promouebitur, siquidem altera conditio locum obtineat, quae ob $Vb = Pg \cos \theta - \frac{1}{2}Pg \sin \theta$, abit in hanc:

$$Q(kk + gg \cos \theta) + \frac{1}{2}Pg \sin \theta > \frac{1}{2}(Qgg \sin \theta \cos \theta + P(kk + gg) - \frac{1}{2}Pg \sin \theta \cos \theta)$$

seu diuidendo per $kk - gg \cos \theta + \frac{1}{2}gg \sin \theta \cos \theta$ in hanc:

$$Q > \frac{1}{2}P$$

Sin autem fuerit $\frac{1}{2}Pg \sin \theta + Vb < Pg \cos \theta$, nihilo minus motus gyrotorius manebit nullus; quia corpus in plagam contrariam gyron nequit, eritque idcirco $\omega = 0$, unde fit $Y = P$, et ut corpus simul prorepit, necesse est $Q > \frac{1}{2}Y$, hoc est, ut fit $Q > \frac{1}{2}P$. Pro casu ergo tertio haec habemus criteria:

$$Q > \frac{1}{2}P \text{ et}$$

$$\frac{1}{2}Pg \sin \theta + Vb > Pg \cos \theta;$$

ac si manente hac posteriori conditione sit $Q > \frac{1}{2}P$, corpus plane quiescet, sicque habemus etiam conditiones casus primi.

45. His quatuor casibus adiungi potest quintus, quo extremitas basis G , dum corpus circa eam in plagam BCD gyrotur, regreditur versus E , cuius casus conditiones ex quarto deriuantur, ponendo Z negativum, seu $Z = -Y$ simulque accelerationem ω negativam. Positis ergo ν et ω negativis, habebimus pro hoc casu quinto has conditiones:

$$\omega = \frac{g(Vb - Pg) \cos \theta + \frac{1}{2}g \sin \theta}{M(kk + gg \cos \theta (\cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta))}$$

$$\omega = \frac{Vgb \sin. \theta - \frac{1}{2} \text{col.} \theta) \cdot Q(kk + gg \text{col.} \theta^2 + \frac{1}{2} g \sin. \theta \text{col.} \theta) - P(\frac{1}{2}kk + \frac{1}{2}gg \sin. \theta^2 + gg \sin. \theta \text{col.} \theta)}{M(kk + gg \text{col.} \theta (\text{col.} \theta + \frac{1}{2} \sin. \theta))}$$

Casus ergo quintus locum habet sub his conditionibus :

$$Vb - \frac{1}{2}Pg \sin. \theta > Pg \text{col.} \theta \text{ et}$$

$$Vgb \sin. \theta - Q(kk + gg \text{col.} \theta^2) - Pgg \sin. \theta \text{col.} \theta > \frac{1}{2}(Vgb \text{col.} \theta + kk + gg \sin. \theta^2) + Qgg \sin. \theta \text{col.} \theta$$

46. Cum ergo pro hoc casu esse debeat $Vb > Pg(\text{col.} \theta + \frac{1}{2} \sin. \theta)$ si ponamus $Vb = Pg(\text{col.} \theta + \frac{1}{2} \sin. \theta) + Ig$, altera conditio requiritur ut sit :

$$Q + \frac{1}{2}P < \frac{Igg(\sin. \theta - \frac{1}{2} \text{col.} \theta)}{kk + gg \text{col.} \theta (\text{col.} \theta + \frac{1}{2} \sin. \theta)}$$

seu $Q + \frac{1}{2}P < M \sin. \theta - \frac{1}{2} \text{col.} \theta$.

Quia ergo $Q + \frac{1}{2}P$ semper est quantitas positiva per hypothesin, hic casus plane subsistere nequit sine motu gyatorio, ideoque necesse est, ut sit $\sin. \theta > \frac{1}{2} \text{col.} \theta$, praeterea vero oportet esse

$$Vb > Pg(\text{col.} \theta + \frac{1}{2} \sin. \theta)$$

nec non $Vb > Pg \text{col.} \theta + Q(kk + gg \text{col.} \theta^2) : g \sin. \theta$
Vnde perspicuum est hunc casum existere non posse, nisi adsit momentum Vb corpus circa centrum gravitatis gyari tendens in plagam BCD. Hoc itaque patio adepti sumus criteria, ex quibus dignosci potest, ad quemnam casum corporis cuiuscunque propositi status referri debeat; atque hinc simul prima acceleratio definitur.

47. Quae ergo haec inuenimus huc redeunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q < \frac{1}{2} P \text{ et}$$

$$Vb + Qg \sin. \theta < Pg \cos. \theta$$

CONDITIONES CASVS II.

$$Vb + Qg \sin. \theta > Pg \cos. \theta \text{ et}$$

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vgb \sin. \theta < \frac{1}{2} P \\ (Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vgb \cos. \theta)$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \frac{1}{2} P \text{ et}$$

$$Vb + \frac{1}{2} Pg \sin. \theta < Pg \cos. \theta$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vb + \frac{1}{2} Pg \sin. \theta > Pg \cos. \theta$$

$$Pgg \sin. \theta \cos. \theta + Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Vgb \sin. \theta > \frac{1}{2} P \\ (Qgg \sin. \theta \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Vgb \cos. \theta)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vb - \frac{1}{2} Pg \sin. \theta > Pg \cos. \theta$$

$$Vgb \sin. \theta - Q(kk + gg \cos. \theta^2) - Pgg \sin. \theta \cos. \theta > \frac{1}{2} P \\ (Vgb \cos. \theta + P(kk + gg \sin. \theta^2) + Qgg \sin. \theta \cos. \theta)$$

48. Quod si ergo, uti in solidis rotundis usu venit, angulus θ fuerit rectus, conditiones horum quinque casuum erunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q > \frac{1}{2} P \text{ et } Vb + Qg < 0$$

CON.

CONDITIONES CASVS II.

$$Vb + Qg > 0 \text{ et } Qkk - Vgb < \frac{1}{2}P(kk + gg)$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \frac{1}{2}P \text{ et } Vb + \frac{1}{2}Pg < 0$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vk + \frac{1}{2}Pg > 0 \text{ et } Qkk - Vgb > \frac{1}{2}P(kk + gg)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vb - \frac{1}{2}Pg > 0 \text{ et } Vgk - Qkk > \frac{1}{2}P(kk + gg)$$

49. In his formulis nullam habuimus rationem illius alterius resistentiae, quae ob plani villositatem ad frictionem accedit, neque vero in genere pro qualibet corporis figura eam commode in calculum inducere licet, propterea quod eius directio, dum ad corporis superficiem in singulis punctis contactus est normalis, non certam positionem ad centrum grauitatis tenet. In corporibus autem rotundis, qualia hic potissimum contemplantur, directionem huius resistentiae per centrum grauitatis transire, motuique contrariam esse vidimus. Cum igitur ea ad pressionem etiam constantem teneat rationem, pressio vero his casibus, quibus θ est angulus rectus, semper sit $=P$, si hanc resistentiam ponamus $=\frac{1}{\mu}P$, in formulis §. praeced. loco vis Q scribi oportet $Q - \frac{1}{\mu}P$. Vnde colligimus tale corpus ob istam resistentiam in quiete esse mansurum, si sit $Q < (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2})P$ et $Vb + (Q - \frac{1}{\mu}P)g < 0$.

50. Cum igitur effectus huius resistentiae calculum non turbet, dum eam in ipsa vi sollicitante Q

com-

comprehendere licet, ea neglecta videamus, quomodo corpus quodcumque graue plano inclinato incumbens, se habere debeat. Jaceat ergo corpus ABCD super plano inclinato EF, cuius ad horizontem MF inclinatio sit angulus MFE = η . Sit massa corporis = M, centrum gravitatis O, momentumque inertiae = Mkk ; incumbat primum corpus basi sua GH, a cuius extremitate inferiori G recta ad O ducta, sit GO = g. Quia hoc corpus a sola gravitate sollicitari assumitur, momentum ad gyrationem tendens adest nullum, seu $Vb = 0$; ex vi autem gravitatis M secundum verticalem OP deorsum urgente, oriatur per resolutionem

vis normalis secundum OA seu $P = M \cos. \eta$

vis tangentialis secundum OD seu $Q = M \sin. \eta$

Praeterea notasse iuvabit esse angulum GON = $90^\circ - \theta - \eta$, unde si summa angulorum $\theta + \eta$ fuerit recto minor, perpendicularum OP supra basis extremitatem G cadet, contra vero infra.

§ 1. Quoniam ob $V = 0$ casus quintus locum habere nequit, nisi sit angulus θ obtusus, status huius corporis ad unum horum quatuor casuum referetur.

Primo corpus in quiete permanebit, si fuerit

$\sin. \eta < \frac{1}{\gamma}$; $\cos. \eta$ et $\sin. \eta \sin. \theta < \cos. \eta \cos. \theta$ seu $\eta + \theta < 90^\circ$ ubi quantitas frictionis ad pressionem rationem habere sumitur, ut 1 ad γ , ita ut per experimenta valor ipsius γ fit quasi 3 vel quatuor. Quare ut corpus plani inclinatione non obstante in quiete perseveret, duae conditiones requiruntur; altera ut rectae verticalis OP cum plano inclinato EF intersectio N supra G cadat: altera vero ut sit $\text{tang. } \eta < \frac{1}{\gamma}$. Si ergo $\gamma = 3$ vi huius con-

ditio-

ditionis angulus MFE minor esse debet, quam $18^{\circ}, 26'$; in hypothesi autem $v=4$ minor quam $14^{\circ}, 2'$. Ac nisi hae duae conditiones simul habeant locum, corpus immotum manere nequit.

52. *Secundus casus vero existet, seu corpus circa punctum G volui incipiet, ita ut primo saltem instanti punctum G in quiete perseveret; si fuerit:*

$$\sin.\eta \sin.\theta > \cos.\eta \cos.\theta, \text{ seu } \eta + \theta > 90^{\circ}, \text{ et} \\ gg \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \sin.\eta (kk + gg \cos.\theta^2) < \frac{1}{2} (gg \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta \\ + \cos.\eta (kk + gg \sin.\theta^2))$$

ex qua posteriori conditione angulus inclinationis η ita limitatur, ut esse debeat:

$$\text{tang. } \eta < \frac{kk + gg \sin.\theta^2 - v gg \sin.\theta \cos.\theta}{v(kk + gg \cos.\theta^2) - gg \sin.\theta \cos.\theta}$$

Primo ergo punctum N necessario infra G cadere debet; haec vero sola conditio non sufficit, sed necesse est, ut insuper plani inclinatio minor sit limite assignato. Unde sequitur, quia per conditionem priorem $\text{tang. } \eta > \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}$, illum limitem hoc esse debere maiorem, quod fieri nequit, nisi sit $\sin.\theta > v \cos.\theta$

53. *Tertius vero casus existet, seu corpus rependo super plano inclinato descendet sine ullo motu gyrationis, si fuerit:*

$$\sin.\eta > \frac{1}{2} \cos.\eta \text{ et } \frac{1}{2} \sin.\theta < \cos.\theta, \text{ seu } \cos.\theta > \frac{1}{2} \sin.\theta$$

quae conditiones eo redeunt, ut sit:

$$\text{tang. } \eta > \frac{1}{2} \text{ et } \cot.\theta > \frac{1}{2}, \text{ seu } \text{tang.}(90^{\circ} - \theta) > \frac{1}{2}$$

Si igitur $v=3$, necesse est, ut sit angulus MFE maior, quam $18^{\circ}, 26'$, et angulus AGO minor, quam $71^{\circ}, 34'$.

Sin autem sit $v=4$, hic casus locum habet, si fuerit angulus MFE maior, quam $14^{\circ}, 2'$ et angulus AGO minor, quam $75^{\circ}, 58'$. Neque vero hinc concludere licet, si planum EF sit verticale, statum corporis vel non ad hunc casum pertinere, etiamsi sit $\cos. \theta < \frac{1}{v} \sin. \theta$, vel ad casum secundum esse referendum: Cum enim pressio P evanescat, ob $V=0$ semper fit $v=0$, ideoque nullus aderit motus gyratorius, qui casus probe est notandus, dum altera conditio illa $\cos. \theta > \frac{1}{v} \sin. \theta$ eatenus tantum valet, quatenus P non est $=0$; proprie enim requiritur, ut $P(\frac{1}{v} \sin. \theta - \cos. \theta)$ non sit nihilominus.

54. Quartus denique casus existet, seu corpus tamen rependo, quam voluendo simul, super plano inclinato descendet, si fuerit:

$$P(\frac{1}{v} \sin. \theta - \cos. \theta) > 0, \text{ seu } \cos. \theta < \frac{1}{v} \sin. \theta \text{ nisi } P=0 \text{ et} \\ gg \cos. \eta \sin. \theta \cos. \theta + \sin. \eta (kk + gg \cos. \theta^2) > \frac{1}{v} (gg \sin. \eta \sin. \theta \cos. \theta \\ + \cos. \eta (kk + gg \sin. \theta^2))$$

$$\text{seu tang. } \eta > \frac{kk + gg \sin. \theta^2 - v gg \sin. \theta \cos. \theta}{v(kk + gg \cos. \theta^2) - gg \sin. \theta \cos. \theta}$$

Hoc ergo casu dabitur et motus progressivus puncti G cum acceleratione ω , et motus gyratorius cum acceleratione v , atque utraque acceleratio erit:

$$v = \frac{gg(\frac{1}{v} \sin. \theta - \cos. \theta) \cos. \eta}{kk + gg \cos. \theta (\cos. \theta - \frac{1}{v} \sin. \theta)} \\ \omega = \frac{\sin. \eta (kk + gg \cos. \theta^2 - \frac{1}{v} gg \sin. \theta \cos. \theta) - \cos. \eta (\frac{1}{v} kk + \frac{1}{v} gg \sin. \theta^2 - gg \sin. \theta \cos. \theta)}{kk + gg \cos. \theta^2 - \frac{1}{v} gg \sin. \theta \cos. \theta}$$

Statim vero atque motus gyratorius incipit, angulus θ augetur, ideoque hae accelerationes mutantur.

55. Quia

55. Quia igitur pro casu quarto exploratum habemus, quomodo motus sit inepturus, idem pro reliquis casibus videamus. Ac pro primo quidem casu, vbi corpus in quiete permanet, haec quaestio cessat, pro casu autem secundo, vbi solus datur motus gyriorius sine reptoio, eius acceleratio initialis est

$$s = \frac{gg(\sin.\eta \sin.\theta - \cos.\eta \cos.\theta)}{kk + gg} = \frac{-gg \cos.(\eta + \theta)}{kk + gg}$$

Pro casu autem tertio, vbi solus motus reptorius adest, sine vilo gyriorio, eius acceleratio erit super plano inclinato:

$$\omega = \frac{Q - \frac{1}{2}P}{M} = \sin.\eta - \frac{1}{2}\cos.\eta$$

Negue vero sufficit, vt haec accelerationes sint positivae, sed insuper opus est, vt sit

pro casu secundo:

$$gg \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \sin.\eta (kk + gg \cos.\theta^2) < \frac{1}{2}(gg \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \cos.\eta (kk + gg \sin.\theta^2))$$

et pro casu tertio:

$$\frac{1}{2}\sin.\theta < \cos.\theta, \text{ seu } \text{tang.}\theta < \nu.$$

56. Hinc ergo, si detur corpus quodcunque plano inclinato incumbens, statim definiri potest casus, ad quem status corporis sit referendus, simulque prima acceleratio, siquidem detur motus. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus, primum planum esse horizontale, seu angulum $\eta = 0$, atque corpus in quiete permanebit, dummodo fuerit angulus $AGO = \theta$ recto minor, qui est casus primus. Sin autem hic angulus θ

L 1 2

fuerit

fuerit obtusus, eiusque cosinus negatiuus, status corporis ad casum secundum pertinebit, quippe pro quo ob $\eta = 0$ conditiones sunt:

$$\theta > 90^\circ \text{ et } gg \sin. \theta \cos. \theta < \frac{1}{\nu} (kk + gg \sin. \theta^2)$$

quae ambae ob $\cos. \theta$ negatiuum locum habent. Dabitur ergo motus gyratorius circa punctum G , cuius, in distantia $= g$, acceleratio erit $\psi = -\frac{gg \cos. \theta}{kk + gg}$. Tertius autem casus, qui postulat $\sin. \eta > \frac{1}{\nu} \cos. \eta$, hic nunquam existere potest, neque etiam quartus; quia enim hic postulat, ut sit:

$$\cos. \theta < \frac{1}{\nu} \sin. \theta \text{ et } gg \sin. \theta \cos. \theta > \frac{1}{\nu} (kk + gg \sin. \theta^2)$$

hae duae conditiones inter se manifesto pugnant.

57. Si planum sit verticale, ideoque $\sin. \eta = 1$ et $\cos. \eta = 0$, casus primus nunquam locum habere potest, quia conditio prior $\sin. \eta < \frac{1}{\nu} \cos. \eta$ palam aduersatur. Pro casu autem secundo requiruntur hae conditiones: $\theta > 0$ et $kk + gg \cos. \theta^2 < \frac{1}{\nu} gg \sin. \theta \cos. \theta$, qui ergo locum habere poterit, si fuerit $kk < gg \cos. \theta (\frac{1}{\nu} \sin. \theta - \cos. \theta)$. Necessè ergo est, ut sit $\tan. \theta > \nu$, et acceleratio motus gyratorii in distantia g erit $\psi = \frac{gg \sin. \theta}{kk + gg}$.

Si autem fuerit $\tan. \theta < \nu$, casus tertius locum habebit, corpusque solo motu rectorio descendet acceleratione $\omega = 1$, corpus scilicet libere descendet; ad quem casum etiam quartus redibit, cum fiat $\psi = 0$ et $\omega = 1$. Qui cum nunquam non locum inueniat, casum secundum plane excludere videtur: verum notandum est, ad casum secundum opus esse, ut punctum G primo saltem instanti detineatur; statim enim ac punctum O motum

tum gyratorium concipit, in G dabitur pressio, unde frictio motui rectorio impediendo sufficiens nascetur, si quidem fuerit $kk + gg \cos. \theta < \frac{1}{v} gg \sin. \theta \cos. \theta$, ita vt hoc casu duplex motus sit possibilis.

58. Tribuamus nunc iterum plano EF inclinationem quaecunq; η , corpus autem ei incambens sit rotundum, seu angulus θ rectus; atque manifestum est, casum primum locum habere non posse, nisi quatenus resistentia a villositate plani orta, motui se opponit, cuius autem in superioribus formulis nullam habuimus rationem. Secundus autem casus locum inueniet, corpusque sine attritu prouolutione perfecta descendet, dum sit: $\eta < 0$ et $kk \sin. \eta < \frac{1}{v} (kk + gg) \cos. \eta$, seu $\text{tang. } \eta < \frac{kk + gg}{vkk}$; atque acceleratio motus gyratorii circa centrum gravitatis in distantia $OG = g$, cui acceleratio motus progressiui centri gravitatis est aequalis, erit $\omega = \frac{gg \sin. \eta}{gg + kk}$. Casus tertius nunquam visu venire potest: quartus vero, si sit $\text{tang. } \eta > \frac{kk + gg}{vkk}$, tum vero erit pro vtraque acceleratione:

$$\omega = \frac{gg \cos. \eta}{vkk} \text{ et } \omega = \sin. \eta \frac{(kk + gg) \cos. \eta}{vkk}$$

Quodsi $\text{tang. } \eta = \frac{kk + gg}{vkk}$, status intermedius resultat, qui autem ob $\omega = 0$ ad secundum adhuc est referendus.

59. Ex his ergo, quae exposuimus, intelligitur, quid vires quaecunq; valeant, quae corpus quiescens, et plano cuiusq; incumbens sollicitent; simulque motus, qui ab iis efficitur, prima acceleratio definiri potest. Quodsi vero corpus iam est in motu, duplex eius status est perpendendus, prouti motus sit sine attritu, vel cum attritu est coniunctus. Si nullus adest

atritus, seu corpus prouolutione perfecta mouetur, vires eundem praestabunt effectum, ac si corpus quiesceret; indeque ergo patebit, an atritus generetur, nec ne? sin autem iam atritus adsit, tum vires sollicitantes plenum exerent effectum, his autem adiungi oportet totam frictionem ex attritu natam: vbi notandum est, frictionem semper eiusdem fore magnitudinis, siue attritus fuerit maior, siue minor, secus ac putaueram in dissertatione supra memorata.

§ 60. Sic igitur vera principia, secundum quae effectus frictionis in motu corporum plano incumbentium diiudicari debet, mihi equidem tradisse videor; vbi hoc imprimis notatu dignum, et quasi paradoxum, occurrit, quod, nisi iam detur atritus, effectus virium sollicitantium non ex ipsa earum quantitate aestimari debeat, vti in omnibus reliquis motuum generibus fieri oportet, sed quod ipsa frictio effectum virium moderetur: vel quod eodem redit, etiamsi ob deficientem attritum nulla adsit frictio, tamen effectus virium sollicitantium ab ea afficitur, atque eo quidem modo, quem in applicatione frictionis ad quaternos casus ante stabilitos ostendi. Deinde non minus est paradoxon, quod dummodo adfuerit atritus, siue is fuerit maior, siue minor, frictio eundem semper effectum exerat; atque ex his principis omnia phaenomena motus corporum a frictione oriunda expedire licet.

