# SOLVTIO PROBLEMATIS
## DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM, QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM, NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore
*L. EVLERO.*

1.

Etsi problemata huius generis, quae Diophantea appellari solent, parum vtilitatis afferre videntur: tamen certum est, Analysin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita versatur, ex methodo problemata Diophantea soluendi, maxima incrementa cepisse. Non solum autem huiusmodi problemata, si sint difficiliora, fines Analyseos plurimum amplificauerunt: sed etiam vim ingenii mirifice acuere solent, vt etiam in aliis problematibus, quomodo solutionem institui oporteat, facilius perspicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue si modus soluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda esse arbitror. Dum enim singularia artificia ad eorum solutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia subsidia ad vniuersam Analysin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potissimum referendum videtur problema propositum, quandoquidem id diu et

et multum per varia Methodi Diophanteae artificia frustra tractaui, vt fere etiam de eius solutione penitus desperauerim. Tandem vero, quasi inopinato, solutionem sum consecutus, quae eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc satisfacientes elicere potui, sunt ita praegrandes, vt mirum non sit, solutionem tantis difficultatibus fuisse inuolutam. Quare cum methodo singulari ad istam solutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vsu non esse carituram arbitror, cum simili fortasse modo aliae quaestiones multo adhuc difficiliores superari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres sequentes conditiones conueniant:

I. Vt eorum summa sit numerus quadratus.

II. Vt summa productorum ex binis sit numerus quadratus.

III. Vt productum omnium trium sit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari potest, vt quaeratur aequatio cubica $z^3 - pzz + qz - r = 0$, omnes suas radices habens rationales, cuius singuli coefficientes $p$, $q$ et $r$ sint numeri quadrati. Posset adhuc adiici haec conditio, vt isti numeri sint integri, verum per se est perspicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis satisfacientibus, ex iis facile integri, qui etiam satisfaciant, formari queant. Quicunque enim terni numeri satisfacere fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcunque multiplicati aeque satisfacient, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur $nx$, $ny$, $nz$ tres huiusmodi numeri quaesiti, ac satisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt sit $n(x+y+z) =$ Quadrato

II Vt sit $nn(xy+xz+yz)$ seu $xy+xz+yz =$ Quadrato

III. Vt sit $n^3 xyz$ seu $nxyz =$ Quadrato.

At primae et tertiae conditioni satisfiet, si reddatur,

$$xyz(x+y+z) = \text{Quadrato.}$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z) = vv(x+y+z)^2$$

vnde per $x+y+z$ diuidendo erit

$$xyz = vv(x+y+z), \text{ hincque } z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat $xyz = \frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$,

vt $nxyz$ prodeat, quadratum capi debet,

$$n = m^2 xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro $z$ et $n$ assumtis, satisfactum erit primae et tertiae conditioni.

5. Hinc itaque nostri tres numeri erunt

primus $nx = mmxxy(x+y)(xy-vv)$

secundus $ny = mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius $nz = mmvvxy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrarium $m$ fractiones, si quae forte occurrent, tolli poterunt. Verum contemplemur iam secundam conditionem, quae ob $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ requirit, vt sit:

$$xy + \frac{vv(x+y)^2}{xy-vv} = \text{Quadrato.}$$

Pona-

Ponamus in hunc finem:

$xy - vv = uu$; vt fit $y = \frac{vv+uu}{x}$ et $z = \frac{vv(x+y)}{uu}$

erit $xy = vv + uu$ et $x + y = \frac{xx+vv+uu}{x}$

efficiendumque est, vt fit

$$vv + uu + \frac{vv(xx+vv+u^2)^2}{uuxx} = \text{Quadrato.}$$

6 Ponatur $x = tv$; vt fit $y = \frac{vv+uu}{tv}$, esseque debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt+1)+uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato},$$

seu multiplicando per $ttuu$

$ttuuvv + ttu^4 + v^4(tt+1)^2 + 2uuvv(tt+1) + u^4 = \text{Quadrato},$
siue $v^4(tt+1)^2 + uuvv(3tt+2) + u^4(tt+1) = \text{Quadrato}.$
Statuatur huius quadrati radix $= vv(tt+1) + suu$, erit

$vv(3tt+2) + uu(tt+1) = 2svv(tt+1) + ssuu$;
vnde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-3tt-2} = \text{Quadrato.}$$

Sit porro $s = t - r$, et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt-rr+1}{2t^3-(2r+3)tt+2t-2(r+1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per $2rt - rr + 1$, vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt-rr+1)^2}{4rt^4-2(3rr+3r-1)t^3+(2r^3+3rr+2r-3)tt-2(3r-1)(r+1)t+2(r-1)(r+1)^2}$$

7. Tota ergo quaestio huc est perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: posito enim

$$4rt^4 - 2(3rr+3r-1)t^3 + (2r^3+3rr+2r-3)tt$$
$$- 2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1(r+1)^2 = QQ$$

 erit

erit definitis hinc $t$ et $r$

$$\frac{v}{u} = \frac{2rt - rr + 1}{Q}, \text{ tum vero } x = tv \text{ et } y = \frac{vv + uu}{tv}$$

vnde numeri quaesiti definientur. Ante autem, quam ad istam aequationem pertigimus, solutionem iam limitauimus positione $xy - vv = uu$; quae restrictio probe est notanda, quoniam nullum est dubium, quin eiusmodi extent solutiones, in quibus $xy - vv$ non sit numerus quadratus, easque propterea hinc non reperiemus. Verum hanc limitationem ideo facere sum coactus, vt ad istam formulam quadrato aequandam peruenire licuerit, quippe quae ita est comparata, vt per cognita artificia resolui possit. Sicque tota solutionis vis in reductionibus §. praeced. est sita.

8. Pluribus autem casibus haec formula et quidem infinitis modis quadratum effici potest, quorum praecipui, et qui statim se offerunt sunt: 1°). Si coefficiens ipsius $t^4$, scilicet $4r$, seu $r$, fuerit numerus quadratus. 2°) Si terminus vltimus $2(r-1)(r+1)^2$ seu $2(r-1)$ fuerit numerus quadratus: vtroque enim casu per regulas cognitas valores idonei pro $t$ elici, tum vero porro ex quolibet alii noui inueniri possunt. Sin autem simul et $r$ et $2(r-1)$ fuerint quadrata, vna operatione plures valores idoneos pro $t$ eruere licet, neque vero hic, vt plerumque fieri solet, solutio simplicior se offert; etsi enim si $2(r-1) =$ quadrato, satisfacit valor $t = 0$, tamen inde prodit $x = 0$ et $y = \infty$, qui valores pro natura quaestionis plane sunt incongrui. Excluduntur enim solutiones, quibus vnus trium numerorum quaesitorum euanesceret, quia tum

quaestio

quaeſtio eſſet facillima et circa duos numeros verſaretur, quorum tam ſumma, quam productum, eſſet quadratum.

## Caſus 1. quo ponitur $r = 1$.

9. Hic caſus ſimpliciſſimus videtur, quia vltimus terminus noſtrae formae euaneſcit, primusque fit quadratus. Habemus ergo

$$4t^4 - 10t^3 + 4tt - 8t = QQ \text{ et } \frac{v}{u} = \frac{2t}{Q}.$$

Ad hanc aequationem ſoluendam ſtatuamus $Q = 2tt - \frac{5}{2}t$ eritque

$$4tt - 8t = \frac{25}{4}tt;\ \frac{9}{4}t = -8;\ \text{et } t = -\frac{32}{9}.$$

At hinc fiet $\frac{v}{u} = \frac{4}{4t-5} = \frac{-36}{173}$; vnde habebimus

$$v = -36;\ u = 173;\ t = \frac{-32}{9} \text{ et } x = tv = 128$$

indeque porro $y = \frac{36^2 + 173^2}{128} = \frac{31225}{128} = \frac{25 \cdot 1249}{128}$.

Erit ergo $x + y = \frac{47609}{128}$ et $z = \frac{36^2 \cdot 47609}{173^2 \cdot 128}$

ac tres numeri quaeſiti erunt, ob $xy - vv = uu$,

$$\text{Primus} = \frac{128^2 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128 \cdot 128} mm$$

$$\text{Secundus} = \frac{128 \cdot 25^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128^2 \cdot 128} mm$$

$$\text{Tertius} = \frac{36^2 \cdot 128 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609^2}{128 \cdot 128^2} mm.$$

10. Ad fractiones tollendas ponamus $m = \frac{128}{5} r$ eruntque terni noſtri numeri

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Primus} = 128^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \cdot 47609 & = 128^2 \cdot 173^2 \\ \text{Secundus} = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 & = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \\ \text{Tertius} = 36^2 \cdot 1249 \cdot 47609^2 & = 36^2 \cdot 47609 \end{array}\right\} \text{in } 1249 \cdot 47609$$

quibus numeris euolutis erit

Primus $= 490356736 \cdot 59463641$

Secundus $= 934533025 \cdot 59463641$

Tertius $= 617011264 \cdot 59463641$

quorum productum manifesto est quadratum 2 quippe

$$5^2 \cdot 36^2 \cdot 128^2 \cdot 173^4 \cdot 1249^4 \cdot 47609^4.$$

Summa autem reperitur

$$25 \cdot 59463641^2$$

et summa productorum ex binis:

$$173^2 \cdot 59463641^2 \cdot 18248924559376$$

cuius radix quadrata est $173 \cdot 59463641 \cdot 4271876$

11. Pro eadem aequatione resoluenda poni potest $Q = 2tt - \frac{5}{2}t - \frac{9}{16}$, vt tres primores termini tollantur, ac prodibit

$$-8t = +\tfrac{45}{16}t + \tfrac{81}{256}, \text{ seu } 0 = 173t + \tfrac{81}{16}, \text{ ergo } t = \frac{-81}{16 \cdot 173}.$$

Hinc $Q = \frac{81^2}{128 \cdot 173^2} + \frac{405}{32 \cdot 173} - \frac{9}{16} = -\frac{9 \cdot 207563}{128 \cdot 173^2}$

et $\frac{v}{u} = \pm \frac{144 \cdot 173}{207563}$. Sumi enim potest valor ipsius Q tam negatiue quam positiue. Statuatur ergo

$v = -144 \cdot 173$; $u = 207563$; erit $x = 9 \cdot 81 = 729$ et $y = \frac{vv + uu}{729}$; vnde iam manifestum est, ad tam enormes perueniri numeros, vt solutio praecedens prae hac multo simplicior sit aestimanda. Superfluum autem foret, huiusmodi solutiones nimis complicatas vlterius euoluere, quia in huius generis quaestionibus solutione simplicissima plerumque contenti esse solemus.

Casus

## Casus 2. quo ponitur $r = \frac{3}{2}$.

12. Hac positione vltimus formulae nostrae terminus fit quadratum, eritque $\frac{v}{u} = \frac{12t-5}{4Q}$, existente

$$QQ = 6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 + \tfrac{27}{2}tt - \tfrac{35}{2}t + \tfrac{25}{4}.$$

Iam, ad tres terminos vltimos tollendos, statuatur

$$Q = \tfrac{5}{2} - \tfrac{7}{2}t + \tfrac{1}{4}tt, \text{ eritque}$$

$$6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 = \tfrac{1}{16}t^4 - \tfrac{7}{4}t^3 \text{ et } t = \tfrac{60}{19}$$

hincque $Q = \frac{4375}{722}$ et $\frac{v}{u} = \frac{19}{14}$, vnde $v = 19$ et $u = 14$.
Nunc igitur erit $x = tv = 60$; et $y = \frac{vv+uu}{x} = \frac{557}{60}$
ideoque $x + y = \frac{4157}{60}$ et tres numeri quaesiti:

$$\text{Primus} = \frac{60^2 \cdot 557 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 60^2 \cdot 557 \cdot 4157$$

$$\text{Secundus} = \frac{60 \cdot 557^2 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 557^2 \cdot 4157$$

$$\text{Tertius} = \frac{361 \cdot 60 \cdot 557 \cdot 4157^2}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 19^2 \cdot 557 \cdot 4157^2$$

posito $m = 60$: hique numeri iam notabiliter sunt minores quam ii, qui casu primo sunt inuenti.

13. Quoniam ergo hi numeri ob paruitatem attentione digni videntur, ii ita exhibeantur:

$$\text{Primus} = 705600 \cdot 2315449$$

$$\text{Secundus} = 109172 \cdot 2315449$$

$$\text{Tertius} = 1500677 \cdot 2315449.$$

Quorum numerorum summa est $= 2315449^2$, et productum $= 14^4 \cdot 19^2 \cdot 60^2 \cdot 557^4 \cdot 4157^4$, sicque vterque numerus quadratus.
At summa productorum ex binis erit

$$(14^2 \cdot 60^2 \cdot 14^2 \cdot 557 + 14^2 \cdot 60^2 \cdot 19^2 \cdot 4157 + 14^2 \cdot 557 \cdot 19^2 \cdot 4157)\, 2315449^2$$

quae

quae reducitur ad hanc formam:

$$14^2\, 2315449^2 \cdot 6631333489$$

cuius radix quadrata est

$$14 \cdot 2315449 \cdot 81433.$$

Sunt autem hi numeri circiter 15000 vicibus minores, quam primum inuenti.

## Casus 3. quo ponitur $r=3$.

14. Posito $r=3$, fit $\frac{v}{u}=\frac{6t-8}{Q}$, et habebitur haec aequatio resoluenda:

$$QQ=12t^4-70t^3+84tt-64t+64.$$

Iam ad ternos vltimos terminos tollendos statuatur

$$Q=8-4t+\tfrac{17}{4}tt\text{, eritque}$$

$$12t^4-70t^3=\tfrac{289}{16}t^4-34t^3$$

vnde elicitur $t=-\frac{576}{97}$. et $Q=\pm\frac{8\cdot 213601}{97\cdot 97}$

Ergo $\frac{v}{u}=-\frac{97\cdot 529}{213601}=-\frac{97\cdot 23}{9287}=-\frac{23\cdot 97}{37\cdot 251}$.
ideoque $v=-23\cdot 97$ et $u=37\cdot 251$: tum $x=tv=23\cdot 24^2$ et $y=\frac{91225730}{23\cdot 24^2}$. Verum facile perspicitur, hos numeros in immensum excrescere, vnde iis euoluendis supersedemus. Contemplemur ergo adhuc vnum casum, quo tam primus, quam vltimus terminus formulae $QQ$ fiunt quadrati.

## Casus 4. quo ponitur $r=9$.

15. Posito $r=9$, fit $\frac{v}{u}=\frac{18t-80}{Q}$, existente

$$QQ=36t^4-538t^3+1716tt-520t+1600$$

Tollamus terminos primum et duos vltimos, ponendo

$$Q=40-\tfrac{13}{2}t\pm 6tt\text{, et habebimus}$$

$$-538t^3+1716tt=\mp 78t^3\pm 480tt+\tfrac{169}{4}tt$$

vnde

vnde elicimus pro vtroque ſigno

ſuperiori $t = \frac{5 \cdot 191}{16 \cdot 23}$ vtrinque autem prodeunt
inferiori $t = \frac{5 \cdot 1723}{32 \cdot 77}$ numeri nimis magni.

Tollamus ergo tres terminos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \tfrac{15}{2} t + \tfrac{2319}{64} tt;$$

hinc autem numeri multo adhuc maiores reſultant. Poſſet porro pro binis terminis primis cum vltimo tollendis poni $Q = 6tt - \frac{269}{6} t \pm 40$, verum hinc multo minus ad numeros ſimpliciores perueniemus.

16. Ex his ſatis tuto concludi poſſe videtur, minimos numeros problemati ſatisfacientes eſſe eos, quos §. 13. elicuimus, qui ergo, ſi penitus per multiplicationem euoluantur, erunt:

Primus = 1633780814400.
Secundus = 252782198228.
Tertius = 3474741058973.

Sin autem in fractionibus numeri ſatisfacientes ſimpliciſſimi deſiderentur, ii indidem aſſignari poterunt, his per $2315449^2$ diuidendis: ita vt hi numeri futuri ſint:

Primus $= \frac{705600}{23\ 5449}$
Secundus $= \frac{196}{4157}$
Tertius $= \frac{361}{557}$.

quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis, et omnium trium productum, ſunt numeri quadrati.