

C O N S T R U C T I O
A E Q U A T I O N I S D I F F E R E N T I O -
D I F F E R E N T I A L I S

$Aydu^2 + (B + Cudy + (D + Eu + Fuu)dy) = 0,$
sumto elemento du constante.

A u c t o r e

L. E U L E R O.

I.

A equationem hanc differentio-differentialem latissime patere, ex plurimis formis, in quas eam transmutare licet, facile intelligitur; plerumque autem eiusmodi complectitur casus, qui, cum sint aequationi *Riccatianae* similes, solitis methodis neque ad integrationem, neque ad variaribilium separationem reduci possunt. Primo enim, ponendo $y = e^{\int z du}$, reuocatur ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$dz + \frac{(B - Cu)z du}{D + Eu + Fuu} + zz du + \frac{A du}{D + Eu + Fuu} = 0,$

quae deinceps ad alias substitutiones amplissimum campum patefacit. Quam ob rem non parum Analyfi consultum fore arbitror, si in genere istius aequationis constructionem docuero, id quod per ea, quae olim de aequatione *Riccatiana* proposui, sequentem in modum praestari poterit.

2. Concipio autem y determinari formula quampiam integrali praeter quantitatem u nouam variabilem x inuolente, ita ut in hac integratione sola x , ut variabilis,

riabilis,

miabilis, quantitas u vero vt constans, tractetur. Cum autem integratio, siue analytice, siue per constructionem quadraturarum, fuerit absoluta, quantitati x valor quidam constans datus tribuitur, quo factò integrale repraesentabit functionem quandam ipsius u , quae sit ea ipsa, quam aequatio proposita exigit. Totum ergo negotium huc redit, vt formula illa integralis quantitates u et x inuoluens inueniatur, quae hoc modo tractata verum valorem ipsius y exhibeat.

3. Ponamus ergo esse $y = \int P dx (u+x)^n$, in qua formula P denotet functionem quandam ipsius x ab u immunem, quam quidem demum definiti oportet. Quae cum fuerit cognita, integrale saltem per quadraturas concedetur, idque pro quocunque valore ipsius u , quae in integratione vt constans spectatur. Tum integrali ita sumto, vt pro quopiam valore ipsi x tributo euanescat, statuatur pro x alius quispiam valor definitus et constans, ab u scilicet non pendens; quo factò aequabitur y functioni cuiuspiam determinatae ipsius u , quae sit ea ipsa, qua aequatio proposita resoluitur.

4. Etsi autem in integratione $\int P dx (u+x)^n$ quantitas u pro constante habetur, tamen eius incrementum assignari potest, quod capit, si pro u statuatur $u+du$, et integratio simili modo absoluitur. Ex principiis autem alibi expositis colligitur hoc incrementum $= n du \int P dx (u+x)^{n-1}$. Quare si haec formula eodem modo tractetur, ipsique x post integrationem valor determinatus tribuatur, cum fuerit $y = \int P dx (u+x)^n$ erit nunc, quatenus variato u simul y variationem subit, $dy = n du \int P dx (u+x)^{n-1}$. Ac si porro simili modo

modo differentiale ex variatione ipsius u ortum colligamus, ob du constans consequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int P dx (u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praescripto ita sumtis, vt ipsi x valor quidam determinatus tribuatur, sicque ea in meras functiones ipsius u abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int P dx (u+x)^n; \quad \frac{dy}{du} = n \int P dx (u+x)^{n-1}$$

$$\text{et } \frac{d^2y}{du^2} = n(n-1) \int P dx (u+x)^{n-2}$$

necessè est, vt vi aequationis propositae fit

$$A \int P dx (u+x)^n + n(B+Cu) \int P dx (u+x)^{n-1} \\ + n(n-1)(D+Eu+Fu) \int P dx (u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus sola x vt variabilis spectatur, u vero pro constante habetur. Haec autem aequatio tum solum locum habere debet, cum post singulas integrationes quantitati x valor ille determinatus ab u non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipsi x iste valor assignatur, ista quantitas non euanesct, sed potius cuiuspiam quantitati ex u et x compositae aequabitur, quae autem ita comparata esse debet, vt illo casu, quo pro x valor ille determinatus scribatur, euanesct. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui superior forma in genere aequetur, vbi R fit eiusmodi functio ipsius x , quae tam pro eo valore ipsius x , quo integralia singula euanescentia redduntur, quam pro eo, qui ipsi post integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipsa indole huius functiones R colligi

colligi conuenit, haecque etiam est causa, cur eos non statim determinauerim.

7. Quamdiu ergo x ad huc est variabilis, et u constantius spectatur, necesse est, ut expressio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int Pdx(u+x)^{n-1} \left(\begin{array}{lll} +Au & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ +nBu & +n(n-1)D & \\ +n(n-1)Eu & +n(n-1)Eu & \end{array} \right)$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2} (u dR + x dR + (n-1)R dx)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones satisfaciētes his aequationibus continentur:

$$\begin{aligned} A + nC + n(n-1)F &= 0 \\ dR &= (2A + nC)Pxdx + n(B + (n-1)E)Pdx \\ x dR + (n-1)R dx &= APxxdx + nBPxdx + n(n-1)DPdx. \end{aligned}$$

8. Si valor ipsius dR ex secunda in tertia substituatur, habebitur:

$$\begin{aligned} (n-1)R &= -(A+nC)Pxx - n(n-1)EPx + n(n-1)DP \\ \text{et quia ex prima est } -A - nC &= n(n-1)F, \text{ prodit} \\ R &= nP(Fxx - Ex + D). \end{aligned}$$

Deinde ob $2A + nC = -2n(n-1)F - nC$ secunda induit hanc formam:

$$dR = nPdx \left(-(C + 2(n-1)F)x + B + (n-1)E \right)$$

quae per illam diuisa dat:

$$\frac{dR}{R} = \frac{-(C + 2(n-1)F)xdx + (B + (n-1)E)dx}{Fxx - Ex + D}$$

154 CONSTRUCTIO AEQVATIONIS

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P dx = \frac{R dx}{F x x - E x + D},$$

exponens autem n per primam aequationem definitur
 vnde fit $n = \frac{F - C + \sqrt{(F - C)^2 - 4AF}}{2F}$.

9. Hic plures casus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis n , si is prodierit imaginarius; puta $n = \mu + \nu \sqrt{-1}$, notandum est, esse $r^{\nu \sqrt{-1}} = \cos. \nu r + \sqrt{-1} \sin. \nu r$, ideoque $r^n = r^{\mu} (\cos. \nu r + \sqrt{-1} \sin. \nu r)$, vnde imaginarium exponentis ope finium ad imaginaria simplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum destructio mutua facilius perficietur. Deinde inuestigatio functionis R huc redigitur, vt sit

$$R = -(n-1)(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cxdx - Bdx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur :

$$R = -(n-1 + \frac{C}{2F})(Fxx - Ex + D) + (B - \frac{CE}{2F}) \int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}$$

Nisi ergo sit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum est, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores simplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores sit irresolubilis? praeterea c sus, quo $F = 0$ peculiarem evolutionem postulat, quos diuersos casus seorsim pertractabo.

I. Casus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo resoluenda erit

$$A y + \frac{C}{2F} (E + 2Fu) \frac{dy}{du} + (D + Eu + Fu^2) \frac{d^2y}{du^2} = 0$$

pro qua si sumamus $y = \int P dx (u+x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{F - C + \sqrt{(F - C)^2 - 4AF}}{2F}, \text{ tum vero}$$

$$R =$$

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \text{ hincque}$$

$$Pdx = \frac{1}{n} dx (D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}}, \text{ ita vt sit}$$

$$y = \frac{1}{n} \int \frac{dx(u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{-n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipsius x comprehendendi debet, quibus quantitas $(u+x)^n (D - Ex + Fxx)^{-n+\frac{C}{2F}}$ evanescat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici casu evanescit, unde bini integrationis termini constitui possunt; ad hoc autem necesse est, vt eius exponens $-n+1-\frac{C}{2F}$, qui sit $= \frac{F \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}$, sit positivus, quia alioquin quantitas illa, cui formula proposita aequalis statuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur casu constructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob signum ambiguum exponenti semper valor positivus tribui potest. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio si habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negativum, altera certe erit positiva. Quem casum diligenter prosequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio sit resoluenda:

$$Ay + \frac{Cu dy}{au} + (aa - uu) \frac{ddy}{au^2} = 0,$$

V 2

eritque

156 CONST. AEQVAT. DIFFER. DIFFERENT.

eritque $n = \frac{1+C \pm \sqrt{(1+2C+CC+4A)}}{2}$, cuius valor semper est realis, nisi A sit quantitas negativa maior quam $\frac{1}{4}(1+C)^2$: hinc erit

$$m = -n \pm 1 \pm \frac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1+2C+CC+4A)}}{2}$$

cuius valore positivo sumta, erit pro resolutione nostrae aequationis

$$y = \int dx (u+x)^n (aa-xx)^{m-n}$$

quod integrale ita capiatur, vt posito $x = a$ evanescat; tum vero statuatur $x = -a$, et pro y prodibit functio ipsius u aequationi satisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, sequentia exempla subiungamus.

13. *Exemplum 1.* Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt proposita sit haec aequatio:

$$-2y' + \frac{2udy'}{du} + \frac{(aa-uu)ddy'}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx (u+x)$, et ob

$$-2y' + \frac{2udy'}{du} + \frac{(aa-uu)ddy'}{du^2} = aa-xx$$

integratio ipsius y ita absolui debet, vt pro terminis integralis $aa-xx$ evanescat, hoc est si fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et posito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi utique satisfacit, et generalius quidem $y = au$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aandz + (aa-uu)uddz = 0, \text{ seu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa-uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2adu}{aa-uu} = 0$, quae integrata dat

$$\frac{udz}{aa-uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

consequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNOS