

P R I N C I P I A
T H E O R I A E M A C H I N A R U M .

Auctore

L. E V L E R O .

I.

Primum omnes machinas in duas classes distribui convenit: quarum prima eas complectitur, quae dum in actione versantur, ita uniformiter moventur, ut omnes eius partes perpetuo motu uniformi ferantur. Ad alteram vero classem eae pertinent machinae, quarum singulae partes in motu suo modo accelerantur, modo retardantur, etiamsi forte tota machina motum uniformem mentiatur.

Prioris classis sunt machinae oneribus elevandis destinatae, item molae frumentariae, quippe quae dum in actione debita versantur, omnes earum partes iugiter motu uniformi agitantur, ita ut nusquam neque acceleratio, neque retardatio motus, adsit. Pistina vero, aliaeque machinae, quae tundendo opus conficiunt, quoniam pistilla alternatim attolluntur, ac remittuntur, ad classem posteriorem sunt referendae: quorsum etiam pertinent omnis generis horologia, in quibus cum nullum proprie adsit onus superandum, tota actio in alterna partium acceleratione ac retardatione consumitur. Machinae quoque aquis attollendis destinatae huic classi sunt annumerandae, quoniam cum embola non motu uniformi

formi agitantur, tum etiam ipsi aquae, quae primum fuerat in quiete, motus imprimi debet, ad quod necessario acceleratio requiritur. Posterior ergo classis latissime patet, atque adeo saepe machinas, quae ad priorem pertinere debebant, recipit; id quod earum vitio euenit, quando dentes, quibus rotae se mutuo vrgent, non ita fuerint elaborati, vt dum vna motu vniiformi gyratur, reliquae pari motu cieantur, sed quasi per succussiones impellantur. Alio autem loco ostendi, cuiusmodi figuram dentibus binarum rotarum se inuicem trudentium tribui oporteat, vt dum altera motu vniiformi circumagitur, alterius quoque motus futurus sit vniiformis. Quam necessaria autem haec sit machinarum distinctio, ad earum actionem recte perspiciendam, mox clarius exponetur.

2. In Machinis primae classis, quae in omnibus partibus motu vniiformi feruntur, vis ad earum motum conseruandum requisita praecise aequalis est ei, qua opus est ad aequilibrium, seu quae resistentiae tantum non superandae par est.

Quae igitur vis aequilibrio producendo sufficit, eadem motum quantumuis celerem in machina, dummodo fuerit vniiformis, conseruare valet. Hinc si machina ponderi 100 librarum eleuando destinata ita sit instructa, vt pro aequilibrio opus sit vi 10 librarum, eadem vis 10 librarum sufficiet ad idem pondus 100 librarum celeritate quantumuis magna vniiformiter eleuandum. Statim enim ac motus machinae ad vniiformitatem est perductus, quia singulae partes ob inertiam ad hunc

motum conseruandum sunt dispositae, continuatio motus plus non requirit, quam vt resistentia motui aduersans superetur, quae cum eadem sit atque in statu quietis, eadem vis, quae machinam in statu quietis conseruare, eue motum vel minimum valet, ad motum vniuniformem conseruandum sufficit. Mirum quidem videbitur et experientiae contrarium, quod celerrimus motus maiori vi non indigeat, quam tardissimus; cum tamen in machinis, vel aqua, vel animalibus actis, nullum sit dubium, quin ad motum velociorem producendum maior aquae copia, maiorue animalium numerus requiratur. Verum his casibus perpendendum est, augendo vel aquae copiam, vel animalium numerum, vim inde ortam non augeri, propterea quod, quo velocius machina mouetur, siue aquae, siue animalium vis in machinam agens minuatur: vnde fit, vt etiamsi pro motu celeriori maior vis non requiratur, tamen maiori siue aquae copia, siue animalium numero sit opus: quod idem de reliquis virium generibus, quae ad machinas mouendas adhiberi solent, est tenendum. Minime igitur nostra propositio, qua motum etiam velocissimum, dummodo fuerit vniuniformis, maiorem vim non exigere statuimus, quam tardissimum affirmamus, veritati aduersari est censenda, quin potius, vti firmissimis Theoriae principiis innititur, ita quoque experientiae apprime conformis deprehenditur, dummodo quantitatem virium aite aestimare discamus.

3. *Hinc euidentis est, si vis machinam sollicitans vel maior fuerit, vel minor ea, quae ad aequilibrium conseruandum requiritur, seu quae ipsi vel minimum motum*

imprimere valet, tum motum machinae priori casu acceleratum posteriori vero retardatum iri.

Vicissim ergo intelligitur, si motus machinae debeat accelerari, maiorem vim requiri, quam quae aequilibrio conservando sufficiat: hoc enim casu non solum resistantiam, seu vim motui machinae proprie aduersantem, vinci oportet, sed etiam ipsi accelerationi inertia tam oneris, quam singularum ipsius machinae partium, reluctatur. Quamobrem si ex vi data, quae superet eam, qua ad aequilibrium sustinendum opus est, motus machinae acceleratus definiri debeat, praeter vim resistantem simul inertiae ratio est habenda, quae investigatione idcirco proprie ex principiis motus est expedienda, dum consideratio motus uniformis per sola principia statica, seu aequilibrii, perfici potest. Vnde fit, ut si accelerationem cuiuspiam machinae definire velimus, in calculos plerumque admodum molestos prolabamur, dum motus uniformis facillime ad calculum reuocatur. Similis est ratio retardationis motus, quae oritur, si vis sollicitans minor fuerit ea, quam aequilibrii conservatio exigit: tum enim vis resistantiae, motui machinae reluctans, quatenus vim sollicitantem superat, in retardationem motus impenditur; cuius accurata explicatio pariter ex motus principiis est petenda. Quando ergo machina alternatim motu accelerato et retardato agitur, tuto concludere possumus, vim sollicitantem alternatim maiorem minoremque esse ea, quae ad motum uniformem esset necessaria: difficillimum autem plerumque erit ipsam accelerationem et retardationem assignare. Interim tamen sine dubio pronunciare licet, si omnes

illae vires modo maiores, modo minores, ad mediam quandam vim reuocentur, hanc minorem non esse futuram ea vi, quae ad motum vniiformem requireretur; si modo acceleratio et retardatio vtrunque aequae a motu vniiformi discedant.

4. *In machinis prioris classis, quae motu vniiformi agitantur, productum ex vi sollicitante in celeritatem, qua incedit, aequale est producto ex vi resistente in celeritatem, qua promouetur.*

Haec propositio sequitur ex principio vniuersali aequilibrii, quo constat tum binas vires contrarias machinae cuiusque applicatas esse in aequilibrio, cum impresso machinae vel minimo motu vires fuerint reciproce vt spatia percursa, seu vt celeritates; hinc enim producta vtriusque vis in suam celeritatem fient inter se aequalia. Ostendimus autem, in motu machinarum vniiformi ad resistantiam vincendam maiorem vim non requiri, quam in statu aequilibrii: vnde, cum motus machinae tam vi sollicitanti, quam resistenti, certum celeritatis gradum tribuat, si vtraque vis per suam celeritatem multiplicetur, ambo producta necesse est, vt inter se sint aequalia. Verum celeritas, qua vis quaecunque mouetur, secundum directionem eius propriam aestimari debet, in directione scilicet vis mente concipiatur fixum quodpiam punctum, cum quo conferatur punctum, vbi vis machinae applicatur; et ex mutatione momentanea distantiae horum punctorum celeritatem definiti oportet. Quomodo autem quouis casu haec bina producta, quorum aequalitate actio machinae continetur, recte exprimi conueniat, mox accuratius exponetur.

tur. Quod autem ad machinas motu non vniformi operantes attinet, hinc satis est perspicuum, si productum ex vi sollicitante in suam celeritatem maius fuerit, quam productum ex vi resistente in suam celeritatem, quoniam tum vis sollicitans maior est quam motus vniformitas requirit, motum machinae inde accelerari; contra vero, si illud productum hoc fuerit minus, retardari. Ex quo intelligitur, istorum productorum accuratam cognitionem ad actionem omnis generis machinarum definiendam maxime esse necessariam. Quomocunque ergo machina fuerit composita, hic non tam ipsa compositionis ratio in computum ingreditur, quam ratio celeritatum, quibus cum potentia tum onus, dum machinae motus imprimi concipitur, promouentur: quandoquidem ex hac ratione statim ratio inter potentiam et onus, quam tam motus vniformis, quam acceleratus et retardatus requirit, innotescit.

5. *Momentum effectus inuenitur, si vis motui machinae reluctans, seu cui mouendae machina destinatur, per viam ab ea dato tempore descriptam multiplicetur. Pro hoc autem tempore hic perpetuo minutum secundum assumemus.*

In hoc momento effectus vera continetur notio effectus a machina quacunq; editi. Quo celerius enim onus, seu vis resistens, mouetur, seu, quo maius fuerit spatium, per quod dato tempore promouetur, eo maior aestimatur machinae effectus, et, manente celeritate eadem, quo maior fuerit ipsa resistentia, eo maior quoque effectus censetur. Ad hoc ergo momentum definiendum primo ipsa vis resistens, quatenus motui machinae reluctatur, explorari, eiusque quantitas

per pondus aequivalens exprimi debet, tum vero discipendum est, per quantum spatium ea dato quodam tempore promoueat. Hinc momentum effectus ad definitum quodpiam tempus adstringitur, pro quo hic commoditatis gratia minutum secundum assumamus; ita ut hac expressione effectus vno minuto secundo editus indicetur, vnde autem facile ad quoduis aliud tempus, siquidem motus fuerit vniformis, transferri poterit. Ita si onus, cuius pondus = Q , sit verticaliter attollendum, idque singulis minutis secundis per altitudinem a eleuetur, erit momentum effectus = Qa . Sin autem onus horizontaliter promoueri debeat, eius tantum frictio superanda est, quae si aequiualeat ponderi Q , onusque pariter per spatium a singulis minutis secundis protrahatur, momentum effectus pariter erit = Qa . At si onus super plano inclinato sursum trahi debeat, vis resistens Q partim pondere oneris, partim frictione exprimenda erit. Quod si in molis momentum effectus sit aestimandum, indagari debet vis ad molam circum agendam requisita, cuius quidem punctum applicationis imprimis est spectandum; quod enim quo magis ab axe motus fuerit remotum, eo minor vis resistentiae superandae par erit. Quoniam vero haec vis per spatium vno minuto secundo per cursum multiplicari debet, quod in ratione distantiae ab axe crescit, productum eandem quantitatem retinebit, siue distantia illa maior minorue assumatur, vnde momentum effectus fixum obtinebit valorem. Si machina ad aquam eleuandam fuerit accommodata, ex Theoria fluidorum ostendi potest, momentum effectus inueniri, si copia aquae, eius

eius scilicet pondus, quae singulis minutis secundis elevatur, per totam altitudinem elevationis multiplicetur, similique modo pro omnibus omnino casibus momentum effectus assignari poterit.

6: *Momentum impulsus simili modo reperitur, si vis machinam actu impellens multiplicetur per spatium, quod ab ea dato tempore conficitur: ubi iterum pro hoc dato tempore minutum secundum assumetur.*

Duae ergo res requiruntur ad momentum impulsus constituendum; primo scilicet ipsa vis impellens, cuius quantitatem pondere metiri licet, deinde spatium, quod ea agendo singulis minutis secundis absoluit: harumque duarum quantitatum multiplicatione momentum impulsus oritur, quod ergo homogeneum erit cum momento effectus. Circa aestimationem ipsius vis impellentis plerumque ad celeritatem, qua in machinam agit, est respiciendum; nisi enim haec vis a gravitate ponderis descendens petatur, quod, dummodo aequabiliter descendat, perpetuo aequali vi urget, aucta celeritate, qua in machinam agit, simul eius quantitas diminui solet, idque diversimode pro varia virium sollicitantium natura. Ita si machina operis hominum animaliumve impellatur, eorum vis actu exerta maxime ab actionis celeritate pendet: cum enim animal vi indigeat ad se ipsum movendum, atque omni, quo pollet, nisu adhibito se ultra certum celeritatis gradum movere nequeat, quo propius eius actio ad hunc gradum accesserit, eo minorem vim exerere valebit, quippe quae cum illum gradum attigerit, penitus evanescet. Quare vim impellentem aestimare velimus, minime magni-

tudinem conatus, quo machinam quiescentem sollicitat, tanquam eius mensuram accipere debemus, sed ad hoc iam ipsam celeritatem, qua machina mouetur, spectari oportet, vnde pro natura vis agentis eius vera quantitas definiiri queat: atque hanc demum vim per viam minuto secundo percursam multiplicando obtinebimus verum momentum impulsus. Istud vis agentis decrementum a motu iam acquisito ortum clarissime perspicitur in machinis a vi illabentis aquae impulsis: quo celerius enim rota aquaria gyratur, eo minorem vim ab aqua sustinet; dum contra vis aquae in rotam quietam est maxima. Probe igitur cuiusque generis virium, quae ad machinas mouendas adhibentur, natura est exploranda, vt pro quolibet celeritatis gradu vera vis agentis quantitas assignari possit.

7. *Si machina frictione careat, eiusque motus fuerit vniformis, momentum effectus praecise aequale erit momento impulsus; ideoque ex cognito momento impulsus verus effectus eiusue momentum poterit determinari.*

Assumo hic primum, machinam frictione carere, tum vero eius motum esse vniformem, vt conseruatio motus machinae nullam vim requirat, totaque vis impellentis actio in onus promouendum impendatur. Ita enim fiet, vt superatio vis reluctantis maiorem vim non exigat, quam quae aequilibrio continendo sufficeret, propterea quod solum onus motui machinae resistantiam opponit. Cum igitur productum ex vi resistente in suam celeritatem aequale sit vi impellenti per

per suam celeritatem multiplicatae, haeque celeritates sint ut spatia eodem tempore confecta, si earum loco spatia vno minuto secundo absoluta substituamus, illa producta abeunt in momenta impulsus et effectus, prouti ea modo definiuimus, quae igitur inter se aequalia esse oportet. Hinc si cognita fuerit quantitas vis impellentis vna cum celeritate, qua agit, inde simul momentum effectus innotescit; ita si vis impellens sit $=P$, spatiumque, quod ab ea singulis minutis secundis conficitur, $=p$, exprimet Pp momentum impulsus, cui cum aequale sit momentum effectus, si Q designet resistentiam oneris, et q spatium, per quod vno minuto secundo promoueatur, erit $Qq = Pp$, hincque $q = \frac{Pp}{Q}$. In hac formula nota illa aequalitas inter causam et effectum continetur, quatenus ea quidem rite ad actionem machinarum accommodatur; eique actioni machinarum certus terminus praefigitur, quem nunquam transgredi valeant. Pendet igitur quantitas effectus non solum a quantitate vis impellentis, sed etiam a celeritate, qua agere potest, et quoniam vidimus, plerasque vires, quae ad machinas agitandas adhiberi solent, ita esse comparatas, ut aucta celeritate ipsae minuantur, de quantitate effectus nihil certi definire licet, nisi exploratum sit, qua lege quantitas vis impellentis pro singulis celeritatis augmentis diminuatur. Atque hinc euenire potest, ut manente eadem vi sollicitante, effectus machinae plurimum variari possit, prout scilicet ea vis alia atque alia celeritate fuerit praedita, quod tamen neutiquam aequalitatem inter causam et effectum enertit, propterea quod in iusta causae aestimatione simul celeritatis ratio haberi debet. 8.

8. *Frictio vero, quam partes machinae, dum inter se commouentur exerunt, non admodum iudicium machinarum turbat; quoniam enim motui machinae reluctatur, resistantiam oneris tantum augere est censenda, ex quo momentum effectus data quadam quantitate augeri debet, antequam momento impulsus aequale statuatur.*

Hic ex experientia assumitur frictionis quantitatem eandem manere, quantacunque celeritate machina moueatur: vnde machinae cuiusuis propositae frictio explorari potest, si remota oneris resistantia inuestigetur, quanta vi opus sit, ad machinam, dum est in quiete, vel tantillum commouendam; tanta enim vis deinceps quoque in motu, vtcunque fuerit rapidus, perpetuo ad frictionem superandam requiretur. Perinde igitur erit, ac si resistantia oneris certa quadam quantitate sit aucta, sicque commode frictio cum ipso onere coniungetur, ita vt ob frictionem resistantia oneris maior sit aestimanda, quam re vera est. Quoniam enim resistantia oneris perpetuo eadem manet, quacunque celeritate moueatur, frictio congrue ad oneris resistantiam adiicitur. Dum minus congrue propter eam vis impellens quapiam quantitate imminui conciperetur, quia haec cum celeritate motus variatur, etiamsi ratione recte instituta res eodem redeat. Atque hinc frictionis nulla ratione seorsim habita resistantia oneris ob eam aucta statim per experientiam cognosci poterit: quaecunque enim machina cum adiuncta oneris resistantia fuerit proposita, quaeratur vis, quae illi vel tantillum commouendae par sit, atque ex regulis staticis statim colligetur, quanta sit tota vis resistantiae, quae tam ex onere

onere ipſo , quam ex frictione reſultat. Quae ſi fuerit cognita, ac ponatur $= Q$, ea in momentum effectus introduci debet , cui deinceps momentum impuſus erit coaequandum , dummodo motus fuerit vniformis , prorſus vt ante eſt praeceptum. Totum ergo negotium huc redit , vt in computo ob frictionem reſiſtentia oneris data quapiam quantitate augeatur , ac momentum effectus ex hac reſiſtentia aucta determinetur , cui aeque ac ante momentum impuſus aequale ſtatui debebit.

9. Propoſita machina cum reſiſtentia ſuperanda ante omnia indagari debet quantitas vis impellentis , quae ad eam in motu vniformi conſeruandam requiritur. Haecque inueſtigatio commodiſſime per experimenta inſtituitur , vt ſimul frictio in effectu comprehendatur.

In hunc finem binae machinae loca praecipue ſunt notanda , vbi tam vis impellens , quam reſiſtentia oneris , applicatur , atque ex ſtructure machinae patebit , quae-
nam ratio , dum mouetur , iſter celeritatem vis impellentis et celeritatem oneris intercedat. Quare ſi quantitas oneris, ſeu vis motui machinae reſiſtantis, fuerit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem vis reſiſtantis ſit vt m ad n , quantitas vis impellentis foret $= \frac{Qn}{m}$, ſi motus machinae ob frictionem non impediretur. Quando ergo frictio aedeſt , quae inſuper vincit debet , maior vis impellens requiritur , ad quam inueniendam , cum frictio difficilius a priori defini queat , commodiſſime ad experimenta confugietur. Machina ſcilicet in quiete conſtituta ei in loco , vbi vis

impellens est applicanda, vis adhibeatur, quae primo aequilibrio conseruando par sit, deinde ea sensim augeatur, quoad machinae vel minimum motum imprimere valeat; hocque modo habebitur ea ipsa vis, quae motui machinae quantumuis celeri, dummodo fuerit uniformis, conseruando sufficiet. Ob frictionem autem haec vis maior prodibit, quam $\frac{Qn}{m}$, eoque magis hanc quantitatem excedet, quo maior fuerit frictio; seu posita hac vi per experimentum inuenta = P, erit $P > \frac{Qn}{m}$, ideoque $P = \frac{Qn}{m} + F$, existente F eius augmento ad frictionem superandam requisito. Vel si ponatur $F = \frac{Gn}{m}$, ob $P = \frac{n}{m}(Q + G)$, frictio eundem praestabit effectum, ac si loco resistentiae Q maior resistentia $Q + G$ superari deberet. Neque vero opus est, vt in hoc experimento vis explorans P in eo ipso loco, vbi deinceps vis impellens applicari debet, applicetur; si enim in alio loco applicetur, cuius celeritas ad celeritatem in loco vis impellentis sit vt μ ad ν , eaque vis reperiat = Π , hinc facile concludetur vera vis impellentis P quantitas, quippe quae erit $P = \Pi \frac{\mu}{\nu}$: quemadmodum ex principiis staticis est manifestum. Hoc ergo modo plura experimenta institui poterunt, quo certiores de vera quantitate vis P reddamur.

10. *Quantacunque fuerit resistentia superanda, machina semper ita instrui potest, vt data vis impellens, quae simul data celeritate agat, ei uniformiter mouendae sufficiat; vnde itaque momentum effectus sponte innotescet.*

Ex.

Exprimat Q resistantiam superandam, quae simul frictionem rite aestimatam et ad locum resistantiae reductam complectatur: deinde sit P vis impellens, quae singulis minutis secundis spatium p absoluat; quoniam enim vires, quibus machinae agitari solent, ita sunt comparatae, ut aucta actionis celeritate minuantur, de earum quantitate absolute nihil certi pronunciare licet, nisi celeritas, qua agant, simul definiatur. His positis, ex vulgariis Mechanicae elementis constat, quemadmodum partes machinae instrui ac disponi debeant, ut vis P resistantiam Q in aequilibrio continere valeat. Efficiendum scilicet est, ut dum machina tantillum movetur, spatia tam a vi impellente P , quam a resistantia Q percurra ipsis viribus sint reciproce proportionalia. Machina igitur ita instructa, motus quicumque uniformis maiorem vim impellentem quam P non requiret; et quia vis impellentis quantitas eatenus est $=P$, quatenus ea praescripta celeritate agit, hoc est singulis minutis secundis spatium $=p$ conficit, etiam in motu machinae uniformi haec celeritas vi impellenti conveniet. Cum igitur momentum impulsus sit $=Pp$, eidem momentum effectus erit aequale, ita si q denotet spatium, per quod resistantia Q singulis minutis secundis promovetur, quia est $Qq = Pp$, erit $q = \frac{Pp}{Q}$, sicque verus machinae effectus innotescit, siquidem motus uniformis sit capax. Quoniam vero in resistantia superanda Q frictionem sumus complexi, evidens est, quo maior fuerit frictio, eo minorem esse futurum verum machinae effectum. Hinc si frictio aequivaleat vi G in loco resistantiae applicatae, atque iam Q denotet

H h 2.

ipsam

ipsam resistantiam superandam, erit $Pp = (Q + G)q$, ideoque verum momentum effectus $Qq = Pp - Gq$, seu ob $q = \frac{Pp}{Q + G}$ erit id $Qq = \frac{PQ}{Q + G} p = \frac{Q}{Q + G} Pp$; scilicet in ratione $Q + G$ ad Q minus erit, quam momentum impulsus Pp .

II. *Nisi vis impellens sit pondus descendens, eius quantitas a celeritate, qua agit, pendet, ita ut pro celeritate nulla sit maxima, tum vero aucta celeritate decrescat, donec, cum celeritas datum gradum attigerit, penitus evanescat; neque unquam hunc gradum superare queat.*

Ista vis impellentis diminutio ratione auctae celeritatis clarissime in impulsu aquae contra obicem mobilem perspicitur. Ponamus enim obicem esse planum, et aquam in eum directe celeritate altitudini c debita illidere, obicisque superficiem esse $= aa$, erit vis aquae aequalis ponderi massae aquae, cuius volumen est $= aac$, quae statuatur $= A$. Iam si obex habeat motum, quo impulsui aquae directe cedat, eiusque celeritas debita sit altitudini v , perinde erit, ac si aqua tantum celeritate $\sqrt{c} - \sqrt{v}$ illidat, cum ante celeritate \sqrt{c} incurrisset, unde nunc vis impulsus aequabitur ponderi massae aquae, cuius volumen est $= aa(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$, quae ergo ob $aac = A$ erit $= A(1 - \sqrt{\frac{v}{c}})^2$. Cum igitur haec vis evanescat, si fiat $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, eademque sit $= A$, dum adhuc in quiete versatur, generalius actionem huiusmodi virium ita describere poterimus, ut dicamus, si quantitas talis vis, dum quiescit, sit $= A$, dum autem singulis minutis secundis spatium $= f$ percurrit;

percurrit, evanescat, tum si ita moueatur, vt singulis minutis secundis spatium p , existente $p < f$, absoluat, eius quantitatem fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quae etsi ex natura impulsus aquae sunt desumpta, tamen latius patere, atque adeo in actione hominum animaliumque locum habere videntur; de quo eo minus dubitare licet, cum huiusmodi vires nonnisi propemodum ad calculum revocari queant. De hominibus ergo atque animalibus, quorum ope machinae agitari solent, statuemus, si hominis animalisue, dum quiescit, vis fuerit $= A$, ea vero, quando singulis minutis secundis spatium $= f$ percurrit, evanescat, tum eiusdem vim, dum ita movetur, vt singulis minutis secundis spatium $= p$ absolvat, fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quodsi ergo talis vis, dum singulis minutis secundis per spatium $= p$ fertur, ponatur $= P$, erit $P = A(1 - \frac{p}{f})^2$, ac si insuper constet vis A , quam eadem vis in quiete exerit, hinc vicissim concludemus maximam eius celeritatem f , qua nullam amplius vim exeret: erit enim $1 - \frac{p}{f} = \sqrt{\frac{P}{A}}$, hincque $f = \frac{p\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}$, vnde natura huiusmodi virium distincte intelligitur.

12. Si huiusmodi vis ad machinam mouendam adhibeatur, quae in quiete maior sit, quam resistentiae aequilibrium requirit, tum machina mox ad motum uniformem perducetur, quo deinceps perpetuo agitabitur, siquidem ipsa machina motus uniformis fuerit capax.

Sit igitur haec vis impellens ita comparata, vt in quiete eius quantitas sit $= A$; dum autem singulis

minutis secundis spatium $=f$ absoluit, in nihilum abeat: eiusdem ergo vis impellentis quantitas erit $=A(1-\frac{p}{f})^2$; dum minuto secundo spatium $=p$ conficiet. Sit porro tota resistentia superanda $=Q$, qua simul frictio comprehendatur, ipsaque Machina ita instructa, ut status aequilibrum vim $=\frac{n}{m}Q$ requirat. His positus, quia assumo esse $A > \frac{n}{m}Q$, statim ab initio motus machinae accelerabitur, et quoniam aucto motu vis impellens continuo imminuitur, acceleratio tamdiu durabit, quoad vis impellens quantitatem $\frac{n}{m}Q$ attigerit. Re vera quidem hoc demum tempore elapso infinito eueniet, verum plerumque mox ab initio machinae talis motus imprimetur, qui ab isto uniformitatis gradu vix parte centesima differat, qui igitur in praxi iam pro uniformi haberi poterit. Quod si euenerit, motusque iam pro uniformi haberi possit, necesse est, ut sit $A(1-\frac{p}{f})^2 = \frac{n}{m}Q$ ideoque $1-\frac{p}{f} = \sqrt{\frac{nQ}{mA}}$ et $p = \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} \cdot f$, quae formula spatium exprimit, quod tum a vi impellente singulis secundis absoluetur; visque resistens ergo eodem tempore per spatium $=\frac{n}{m}p = \frac{n}{m} \cdot \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} \cdot f$ promovebitur. Vnde momentum effectus habebitur $=\frac{n}{m} \cdot \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} \cdot fQ = \frac{n}{m}(1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}})fQ$, quo simul momentum impulsus definitur. Patet ergo, quo maioris celeritatis vis impellens fuerit capax, antequam actionem amittat, eo maiorem ab ea produci effectum; his autem casibus machina tardius ad motus uniformitatem perducetur. Ac si adeo spatium f fuerit infinitum, quo casu vis impellens constanter eandem quantitatem A retineret,

retineret, tum quidem tandem effectum in infinitum excrefcere poffe, verum mox tam debilia incrementa acciperet, vt a leuiffima refiftentia vltior acceleratio impediri poffet. Semper tamen caeteris paribus effectus eo maior obtinebitur, quo maius fuerit fpatium f , etiamfi is non in eadem ratione augeri fit cenfendus.

13. *Etiamsi igitur eadem impulfione ad eandem refiftentiam superandam vtamur, effectus tamen plurimum a machinae indole pendeat, feu a ratione $m:n$, quae inter celeritates vis impellentis et refiftentis ftatuitur. Haecque adeo ita temperari poterit, vt maximus effectus confequatur.*

Quoniam pro pofitionibus modo in genere traditis inuenimus momentum effectus $= \frac{n}{m} (1 - V^{\frac{nQ}{mA}}) fQ$, patet eius quantitatem manentibus A, f et Q plurimum a ratione $m:n$, quam ftuctura machinae praebet, pendere; fi enim fuerit vel $\frac{n}{m} = 0$, vel $\frac{nQ}{mA} = 1$, feu $\frac{n}{m} = \frac{A}{Q}$ vtroque cafu effectus penitus euanefcit. Vnde inter limites 0 et $\frac{A}{Q}$ dabitur valor quidam medius pro fractione $\frac{n}{m}$ capiendus, qui cum maximo effectu futurus fit coniunctus; quem ergo potiffimum operae pretium erit cognouiffe. Ponamus in hunc finem $\frac{n}{m} = zz$, et huic formulae $zz - z^{\frac{nQ}{mA}}$ maximum valorem conciliari oportebit; reperietur autem $2z - 3zzV^{\frac{nQ}{mA}} = 0$, ideoque $z = \frac{2}{3} V^{\frac{nQ}{mA}}$, quare habebitur $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$; feu machina ita inftitui debet, vt fit celeritas vis impellentis ad celeritatem vis refiftentis vt $9Q$ ad $4A$. Quodfi ergo ifte valor

valor $\frac{4A}{9Q}$ pro fractione $\frac{n}{m}$ substituat, fiet $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$
 et $1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{1}{3}$; hincque maximum momentum effectus obtinebitur

$$\frac{4A}{9Q} \cdot \frac{1}{3} \cdot fQ = \frac{4}{27} Af.$$

Hinc igitur luculenter perspicimus, quantopere effectus ab idonea machinae dispositione pendeat, cum vnico modo iste effectus maximus obtineri queat, scilicet efficiendo, vt sit $m:n = 9Q:4A$, a qua proportione si machina recesserit, semper minorem effectum producet, etiam si tam vis impellens, quam vis resistens, cum frictione maneant eadem, quam si haec iusta ratio obseruetur. Interim si vel tantillum ab ea aberretur, detrimentum in effectu vix erit sensibile, quoniam maxima et minima aliquam latitudinem admittunt, id quod commode evenit, quia in praxi hanc rationem summo rigore vix obseruare licet. In eo tamen erit elaborandum, vt machina, quam fieri potest exactissime, ad hanc rationem accommodetur.

14 *Si vis impellens ita sit comparata, vt celeritate f omnem actionem amittat, machina semper maximum praestabit effectum, si ita instruat, vt vis impellentis celeritas fiat pars tertia ipsius f.*

Sumo hic, vt et in sequentibus, spatium vno minuto secundo percursum pro mensura celeritatis; ac huiusmodi vim impellentem contemplor, cuius dum est in quiete quantitas sit $= A$, quae autem celeritate f lata omni actione destituatur. Huius igitur vis, dum celeritate $= p$ procedit, quantitas erit $= (1 - \frac{p}{f})^2$.
 Quodsi

Quodsi iam resistentia ope machinae superanda sit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem resistentiae ponatur $= m:n$, quae ratio a structura machinae pendet, vidimus, vt effectus maximus obtineatur, statui oportere $\frac{n}{m} = \frac{4}{9} \frac{A}{Q}$. Tum vero pro celeritate vis impellentis nanciscimur $p = \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} f = (1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}) f$: erit itaque ob $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3} f$. Hoc autem immediate ex actione vis impellentis colligi poterit, quippe cuius momentum impulsus maximum reddi debet, vt maximum momentum effectus obtineatur. Verum si vis impellens celeritate p agere assumatur, quia tunc eius quantitas est $= A(1 - \frac{p}{f})^2$, erit momentum impulsus $= Ap(1 - \frac{p}{f})^2$, quod maximum factum praebet $A(1 - \frac{p}{f})^2 = \frac{2Ap}{f}(1 - \frac{p}{f})$, seu

$$1 - \frac{p}{f} = \frac{2p}{f}, \text{ hincque } 3p = f \text{ et } p = \frac{1}{3} f.$$

Effectus igitur maximus produci nequit, nisi vis impellens ita agat, vt eius celeritas p sit pars tertia celeritatis f , qua omni actione priuatur. Posito autem $p = \frac{1}{3} f$, erit quantitas vis impellentis $= A(1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} A$, vnde pro data vi resistente machina ita attemperari debet, vt vis $\frac{4}{9} A$ in aequilibrio consistat cum vi resistente frictione simul complexa, seu vt vis $\frac{4}{9} A$ tantum non motum machinae imprimere valeat. Scilicet si tota vis resistens sit $= Q$, celeritas vis impellentis ad celeritatem resistentis statui debet, vt $9Q$ ad $4A$, quo facto momentum effectus, ideoque et momentum impulsus erit $= \frac{4}{27} Af$, quod nullo modo maius effici

poterit seu fieri omnino nequit, vt ab eadem vi impellente maior effectus obtineatur.

15. Cum ratione celeritatis, qua vis impellens agit, machina ad maximum effectum producendum fuerit instructa, frictio quoque spectari debet, quae primo, quantum fieri potest, erit diminuenda, tum vero eius effectus eo minor reddetur, quo longius vis impellens ab axe, circa quem machinam vrget, remouetur.

Assumo ergo frictionem iam eo vsque esse minutam, vt minor fieri nequeat, et vim impellentem rotae esse applicatam, cuius radius sit $=r$, in eadem autem distantia vi opus esse F ad frictionem superandam. Iam sit Mf momentum impulsus, idque maximum, cuius vis impellens est capax, quae agat celeritate $=p$, et quia vis ad frictionem superandam requisita F , vtpote in eodem loco applicata, eadem celeritate agit, erit eius momentum $=Fp$, ideoque verum momentum effectus detracta frictione erit $=Mf - Fp$, ex quo quantitas effectus ob frictionem minutus aestimari debet. Ponamus iam, rotae illius primariae radium augeri in ratione $1:\lambda$, ita vt vis impellens eadem nunc applicetur in distantia λr ab eius axe, et in hoc loco vi tantum opus erit $\frac{1}{\lambda}F$ ad frictionem superandam: machina autem paucis mutandis denuo ita instruatur, vt pro motu vniformi vis impellens celeritate p , cui maximum momentum impulsus respondeat, incedat, et cum frictio nunc tantum huius momenti partem $\frac{1}{\lambda}Fp$ postulet, verum momentum effectus hoc casu

casu erit $= Mf - \frac{1}{\lambda} Fp$, ideoque eo maius, quam casu praecedente, quo maior fuerit numerus λ . Hinc igitur patet fieri posse, ut ab eadem vi impellente, frictione non imminuta, multo maior effectus impetrari possit: hic autem suppono, aucto illius rotas diametro frictionem non augeri, unde haec regula ita debet limitari, ut quatenus augenda rota hac principali frictione vel non augetur, vel saltem in minore ratione augetur, quam diameter rotae, eatenus semper conveniat hanc rotam maximam fieri. Antequam autem ad hanc regulam confugiamus, maxime interest, ut notis artificiis frictionem, quantum quidem fieri potest, diminuere conemur; tum vero observatio huius regulae nihilominus maximam afferet utilitatem, propterea quod, etiamsi frictio sit minima, ob eam momentum effectus adhuc notabiliter diminui posset, si scilicet λ denotaret fractionem valde parvam.

16. Denique plurimum ad machinarum perfectionem confert motus uniformitas, ad quam ideo imprimis machinas instrui oportet; si enim motus non fuerit uniformis, sed per intervalla modo intendatur, modo remittatur, tum effectus semper erit minor eo, qui secundum regulas praecedentes obtineri posset.

In motus difformitate enim non solum portio vis impellentis in superanda inertia consumitur, sed etiam nonnisi maxima celeritas aequalis est ei; quam machina esset habitura, si motus foret uniformis. Namque dum motus acceleratur, vis impellens maior

est vi ad aequilibrium requisita, eiusque idcirco celeritas minor, quam ea, quae motui uniformi conueniret; etsi autem interdum machinae motus celerior inesse queat, quia tamen hoc euenit, quando machina non in totum onus agit, inde nihil omnino in augmentum effectus redundat; vtroque ergo casu semper non parum de vi impellente perit, quando motus non erit uniformis. Quare in hoc potissimum est incumbendum, vt machinae, quantum fieri potest, motus uniformis concilietur. Hunc in finem igitur, primo rotae, quae se mutuo mouent, ita sunt fabricandae, vt dum vna uniformiter mouetur, etiam reliquarum motus prodeat uniformis, id quod dentibus rotarum debita figura inducenda efficietur, quod argumentum antehac pertractaui. Deinde defectus uniformitatis imprimis est per timefcendus, quando machina pistillis alternatim attolendis ac demittendis, vel deprimendis, destinatur, propterea quod corpori, quod est in quiete, non subito motus imprimi potest. His ergo casibus machina ad pistilla ita est applicanda, vt motus machinae non sequatur motum pistillorum, seu vt ille uniformis manere possit, etiamsi hic a statu quietis acceleretur iterumque retardetur, qui effectus commodissime per brachia incuruata impetrari solet; dum enim huiusmodi brachium pistillum eleuandum primum arripit, motum suum continuare potest, etiamsi pistillum parum attolatur; id quod etiam vsu venit, quando pistillum ad maximam altitudinem fuerit eleuatum. Quoniam autem hoc pacto pistilla motui machinae non semper pari

vi

vi reluctantur, ea, si plura fuerint, ita disponi oportet, ut machina quouis momento in pistilla plura, quorum alia sint in loco imo, alia in summo, aliaque in medio statu versentur, agat, sic enim reluctantia aequalis reddetur. Idem obseruandum est in omnibus machinis, quibus motus reciproci produci solent; ac perpetuo, quando his tribus regulis erit satisfactum, certi esse possumus, machinas ad summum perfectionis gradum, cuius sunt capaces, esse euectas.
