DE MOTV ET ATTRITV LENTIVM DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Inter plures modos, quibus lentes ſuper catinis, ſiue immotis, ſiue in gyrum actis, atteri ac poliri ſolent, hic eum tantum ad examen reuocare conſtitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope ſtyli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipſa lens circa ſtylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini diſcrepat, eidem atteratur, ſicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem ſuper catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inueſtigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab. IV. Fig. 1. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem aſſumo, vt motus catini in plano horizontali abſoluatur. Lens autem AEBF ope ſtyli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, vt punctum C immotum seruetur, lens autem circum id libere reuolui queat. Catino iam in gyrum acto, ipsa lens circa stylum in motum abripietur, moxque vniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiri oportet, quam effectus attritus, seu celeritas, qua singula lentis puncta super catino teruntur, assignari queat.

3. Denotet u celeritatem gyratoriam catini, ita ad distantiam quandam fixam a centro O, vnitate indicandam relatam, vt in distantia a centro quaecunque z sit celeritas vera $= uz$, cuius quadratum $uuzz$, vt mensuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera u motus catini prorsus determinatur, quippe qua constat, punctum quodcunque catini Z, cuius distantia ab axe O fuerit $OZ = z$, ita moueri, vt eius directio sit recta Zm ad OZ normalis, celeritas vero $= uz$, quae tanta est intelligenda, quanta ex lapsu grauis per altitudinem $uuzz$ acquiri solet; quandoquidem catinus in plagam PQRS circumagitur; si enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti Z foret eadem, sed directio Zm contraria esset statuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter AB in computum est ducendus, cuius semissis sit $CA = CB = a$. Deinde plurimum refert, in quanta distantia eius centrum C a centro catini O ope styli fixum detineatur, quae distantia sit $OC = c$. Tum vero si de effectu attritus iudicare velimus, vis qua

ea

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit, quae vis aequetur ponderi $= P$. Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis qua quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimitur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; siquidem assumimus, lenti iam catini figuram esse inductam, totumque negotium sola politura esse absoluendum.

5. His quae circa lentem sunt nota constitutis, inuestigandus est eius motus, qui ob centrum C fixum alius esse nequit, nisi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam PQRS fieri pono, in similem plagam AEBF abreptum iri; sed celeritas huius motus etiam nunc est incognita. Sit ergo simili modo huius motus celeritas gyratoria $= v$, ita ad distantiam fixam $= 1$ relata, vt puncti lentis cuiuscunque Z, cuius distantia ab eius centro C fuerit $CZ = x$, celeritas vera futura sit $= vx$, directione existente Zn ad CZ normali. Tum vero vt punctum C immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auehere conatur, stylo praeterea vim contranitentem applicatam esse oportet, cuius quantitas pariter erit inuestiganda.

6. Quo nunc felicius haec, quae sunt incognita, definire liceat, ante omnia motum respectiuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus consistit. Ac primo quidem at-

attritus centri lentis C ſuper catino per ſe eſt manifeſtus; cum enim ob. diſtantiam $OC = c$, punctum catini C celeritate $= cu$ in directione Cc ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quieſcat, haec ipſa cu erit celeritas attritus; quae ergo eo maior eſt, quo longius centrum lentis C a centro catini O detineatur. Euidens autem eſt, effectum polliturae ab hac attritus celeritate ita pendere, vt partim illi ipſi, partim preſſioni futurus ſit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum ſuper catino, non ſolum ab huius, ſed etiam a lentis motu pendet, ad quam inueſtigationem figuram ſecundam maiori ſpecie expreſſam accommodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z Tab. IV. Fig. 2. diſtantia $CZ = x$ et angulus $ACZ = \Phi$, ad CZ normaliter iungatur $Zn = vx$ motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum ſubiectum Z, poſita diſtantia $OZ = z$, feretur in directione Zm ad OZ normali celeritate $= uz$. Sumta ergo $Zm = uz$, ſi catino et lenti ſimul motum imprimi concipiamus ſecundum directionem $Z\nu$, ipſi Zn oppoſitam, et celeritate $Z\nu = vx$; tum vero completo parallelogrammo $mZ\nu z$ ducamus diagonalem Zz, res eodem redibit, ac ſi puncto lentis Z quieſcente catinus ſub eo promoueatur in directione Zz celeritate $= Zz$, quae ergo erit celeritas attritus puncti Z.

8. Cum autem ſit $OC = c$; $CZ = x$, et angulus $ACZ = \Phi$, erit $OZ = z = \sqrt{(cc + xx + 2cx \operatorname{coſ.} \Phi)}$. Deinde poſito angulo $COZ = \omega$, erit tang. $\omega = \frac{x \operatorname{ſin.} \Phi}{c + x \operatorname{coſ.} \Phi}$

 et

et $\sin.\omega = \frac{x \sin.\Phi}{z}$: porro ang. $CZO = \Phi - \omega$, et $\tang.(\Phi-\omega) = \frac{c \sin.\Phi}{x + c \cos.\Phi}$, atque $(\Phi - \omega) = \frac{c \sin.\Phi}{z}$. In triangulo autem $Z\nu z$ est $Z\nu = vx$; $z\nu = Zm = uz$ et angulus $Z\nu z = CZO = \Phi - \omega$; vnde colligitur $Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxz\cos.(\Phi-\omega))}$.

Inde vero colligitur $z\cos.(\Phi-\omega) = x + c\cos.\Phi$, quo valore substituto fit

$$Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxx - 2cuvx\cos.\Phi)} \text{ seu}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}.$$

9. Pro situ deinde huius lineae Zz, quae celeritatem attritus puncti lentis Z exprimit, erit primo $CZ\nu$ angulus rectus, tum vero $\cos.\nu Zz$

$$= \frac{Zz^2 + Z\nu^2 - z\nu^2}{2Zz.Z\nu} = \frac{-(u-v)x - cu\cos.\Phi}{Zz} = \sin.(CZ\nu + \nu Zz)$$

Tab. IV. Fig. 1. at $\sin.\nu Zz = \frac{z\nu.\sin.Z\nu z}{Zz} = \frac{uz\sin.(\Phi-\omega)}{Zz} = \frac{cu\sin.\Phi}{Zz} = -\cos.(CZ\nu + \nu Zz)$. Si ergo in fig. 1. lineam Zz superne cum CZ angulum constituere assumamus, erit

$$\sin.CZz = \frac{(v-v)x + cu\cos.\Phi}{Zz} \text{ et}$$
$$\cos.CZz = \frac{-cu\sin.\Phi}{Zz} \text{ existente}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)};$$

vnde patet, si fuerit $ACZ = \Phi = 0$, fore $Zz = cu + (u-v)x$; et angulum CZz rectum, ac si praeterea sit $x = 0$, erit vt ante celeritas attritus centri lentis $C = cu$.

10. Iam quaestio huc redit, quamnam habitura sit rationem celeritas gyratoria lentis v ad celeritatem gyratoriam catini u? ad quam resoluendam duae patent viae, altera indirecta ex principio minimae actionis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum est dubium, quin motus lentis ita comparatus sit futurus, vt attritus totus fiat minimus. Quare si in Z elementum superficiei lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam distantiae $CZ = x$, quam anguli $ACZ = \Phi$, ita expressum $= x\,dx\,d\Phi$, quod per celeritatem attritus Zz multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x\,dx\,d\Phi\sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\,\mathrm{cos}.\,\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

cuius integrale per totam lentem extensum minimum esse debet.

11. Producta recta ZC vltra C, concipiatur par elementum superficiei $x\,dx\,d\Phi$ ad alteram partem rectae AB, et quia hic fit vel x vel $\mathrm{cos}.\,\Phi$ negatiuum, eius quantitas attritus erit

$$x\,dx\,d\Phi\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\,\mathrm{cos}.\,\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

Collectis his ambobus elementis, euidens est, eorum summam fieri minimam, si sumatur $v = u$, id quod vtraque formula irrationali in seriem conuertenda facillime patet, dum additione potestates impares ipsius x, ac proinde etiam ipsius $u-v$, se destruant, vnde minimum ratione celeritatis v inuestigando manifesto elicitur $v = u$, quod cum de omnibus elementorum sibi hoc modo oppositorum paribus valeat, sequitur etiam, totius lentis attritum minimum esse futurum, si fuerit $v = u$, ideoque lens aeque celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita vt ambo aequalibus temporibus suas reuolutiones absoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem conclusionem manuducet. Cum enim experimentis constet, frictionem a sola pressione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, siue ad augendam, siue diminuendam frictionem, conferre, elementum superficiei $xdxd\Phi$ in Z vi quadam ipsi proportionali, ob pressionem vbique aequalem, in directione Zz sollicitabitur; quae vis ergo sit $= \alpha x dx d\Phi$; et quia centrum lentis C immotum tenetur, erit huius respectu momentum illius vis $= \alpha x dx d\Phi . CZ \sin. CZz$

$= \frac{\alpha x dx d\Phi . x((u-v)x + cu \cos \Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2 xx)}}$. Ex elemento autem opposito, vti supra, sumto, orietur momentum

$\frac{\alpha x dx \Phi . x((u-v)x - cu \cos. \Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2 xx)}}$.

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniformitatem compositus statuitur, necesse est, vt horum momentorum summa vniuersa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppositis, si capiatur $v = u$, idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem solito more elucet, posito enim $v = u$, ex elemento Z oritur momentum $= \alpha xxdxd\Phi \cos. \Phi$, vnde pro sectore elementari CZ colligitur momentum $= \frac{1}{3}\alpha x^3 d\Phi \cos. \Phi$, et pro toto ad marginem vsque extenso $= \frac{1}{3}\alpha a^3 d\Phi \cos. \Phi$, cuius denuo integrale est $= \frac{1}{\alpha} a^3 \sin. \Phi$, quod per totam lentem extensum, donec fiat $\Phi = 360°$, manifesto in nihilum abit, quod non fieret, si non esset $v = u$. Vicissim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per se sit euidens, patet

simul

simul alterum, quo frictio a sola pressione pendere assumitur, veritati omnino esse consentaneum.

14. Definita iam celeritate $v = u$, non difficile erit determinare vim, cui stylus centro lentis C applicatus, praeter pressionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim sit $v = u$, erit $Zz = cu$, sin $CZz = \cos.\Phi$ et $\cos. CZz = -\sin.\Phi$, ita vt sit $CZz = 90^\circ + \Phi$, et $zZn = \Phi = ACZ$. Ob frictionem autem vrgetur elementum superficiei lentis $x\,dx\,d\Phi$ secundum directionem Zz vi constante; et quia tota superficies, quae est $= \pi aa$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est $= 1$, apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi $= \frac{P x\,dx\,d\Phi}{\pi aa}$ cuius parti quasi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius λ pro parte tertia, ita vt elementum in Z secundum Zz sollicitetur vi $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi}{\pi aa}$, quae secundum directionem CZ praebet vim $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi \sin.\Phi}{\pi aa}$ et secundum directionem ad illam normalem vim $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi \cos.\Phi}{\pi aa}$.

15. At per ea, quae supra ostendimus, omnes istae vires normales se destruunt, vnde stylus sustinere debet alteras illas vires secundum CZ agentes, quae sunt $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi \sin.\Phi}{\pi aa}$, et quasi ipsi centro lentis C secundum directionem CZ applicatae essent, concipi possunt. Quaelibet vero huiusmodi vis resoluatur secundum directiones fixas CA et Cc, eritque vis secundum $CA = \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi \sin.\Phi \cos.\Phi}{\pi aa}$, et vis secundum $Cc = \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi \sin.\Phi^2}{\pi aa}$. Illa primum integrata, posito

 $x = a$

$x = a$, dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\,\Phi\, \text{cof.}\,\Phi = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\, 2\Phi$, cuius porro integrale eſt $= \frac{\lambda}{8\pi} P(1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$. Poſito nunc pro tota lente $\Phi = 360^\circ$, haec vis ſecundum CA euaneſcit. Altera vis ſecundum Cc ſemel integrata dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\,\Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi(1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$, cuius ſequens integrale eſt $= \frac{\lambda}{4\pi} P(\Phi - \frac{1}{2}\text{fin.}\, 2\Phi)$, et poſito $\Phi = 360^\circ = 2\pi$ prodit vis ſecundum $Cc = \frac{1}{2}\lambda P$.

16. Ob motum ergo catini ſtylus ſuſtinet vim $= \frac{1}{2}\lambda P$ ſecundum directionem Cc, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo deſtruere debet, ſiquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare ſi $\lambda = \frac{1}{3}$, haec vis aequatur ſextae parti preſſionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui concluſioni per ſe verae vnicus caſus aduerſatur, quo centrum lentis C ipſi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nullusque attritus exercetur, ſtylus etiam nullam vim ſuſtinet. At huiusmodi exceptio ſemper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardiſſimo frictio aeque ſit magna atque in celerrimo, motu tamen plane euaneſcente frictio quaſi ſubito euaneſcit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo eſt imputandum.

17. Cum duplici demonſtratione euictum ſit, eſſe $v = u$, idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones ſemper exactiſſime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inaequali-

quali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obſeruare licuit. Vnde patet ſtatim ab initio motus reuolutiones lentis ſe ad eam aequalitatem componere, quam calculus oſtendit; quin etiam motu catini modo intenſo, modo remiſſo, lens eandem inaequalitatem ſequi obſeruata eſt. Hic ergo inſigne cernitur ſpecimen foecundiſſimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum ſucceſſu adhiberi potuerit, cum hactenus eius vſus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, ſit oſtenſus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus $v = u$, ſequitur eſſe celeritatem $Zz = cu$, patet in eodem lentis ſitu omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipſo hic mechanismus non mediocriter reliquis antecellit, cum alias alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri ſoleant. Praeterea vero hic perſpicitur, celeritatem attritus rationem ſequi interualli $OC = c$, ita vt ſi centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus ſit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino neceſſe eſt, vt catini magnitudo multum ſuperet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obſeruari ſolet.

19. Hic igitur ingens conſpicitur diſcrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confundi ſolent.

ſolent. Frictio enim, ſiue motus ſit tardior, ſiue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effectus, qui in abraſione eſt conſtituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodiſſime metiemur eius celeritate Zz in preſſionem ducta. Quare ſi in ſuperficie lentis conſideremus elementum dZ, quod quia catino apprimitur vi $= \frac{P dZ}{\pi aa}$, teriturque celeritate $= cu$, erit quantitas attritus $= \frac{P cu dZ}{\pi aa}$. Hinc ergo lens eo promtius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas $\frac{P cu}{\pi aa}$; quae proportionalis eſt 1°, vi P, qua lens catino apprimitur, 2°, celeritati u, qua catinus in gyrum agitur, 3°, interuallo $OC = c$ quo centrum lentis diſtat a centro catini, et 4°, denique reciproce ſuperficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum eſt reſpiciendum, ſed quia catinus etiam atteritur, eiusque ſuperficies abraditur, niſi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a propoſita aberrans inducatur. Quam ob rem neceſſe eſt, vt etiam attritus ipſius catini accuratius inueſtigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aeque remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Conſideremus ergo catini punctum quodcunque L a centro catini O diſtans interuallo $OL = y$, quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum MON profertur. Cum igitur attritus momentaneus ſit $= \frac{P cu}{\pi aa}$, vna reuolutione integra totus attritus cenſendus erit $= \frac{P cu}{\pi aa} \cdot \frac{ang. MON}{360°}$, ſiquidem puncti

Tab. IV. Fig. 3.

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimatur per $\frac{Pcu}{\pi aa}$.

21. Cum nunc fit $CM = CA = a$; $OC = c$; $OM = OL = y$, erit cof. $LOM = \frac{cc+yy-aa}{2cy}$, vnde, ob $\pi = 180^\circ$, erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione $= \frac{Pcu}{\pi\pi aa}$. A cof. $\frac{cc-aa+yy}{2cy}$, quae expreffio tantum pro iis catini punctis valet, quorum diftantia a centro O intra limites $AO = c + a$ et $BO = c - a$ continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euanefcit. Hic autem notandum eft, fi fuerit $c < a$, et $y = a - c$, fore A cof. $\frac{cc-aa+yy}{2cy} = 180^\circ = \pi$, feu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, fi fuerit $y < a - c$, hoc fcilicet cafu fpatium circulare circa centrum catini O, cuius radius eft $= a - c$, perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens eft fubiecta. Cuiusmodi attritu fi totus catinus afficeretur, non effet metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem folum fpatium annulare catini lenti fe applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde fphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a fcopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

num circa centrum atterunt, sed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam superficiem aequaliter radatur. Deinde vero etsi hoc modo attritus non tam inaequabilis sit, quam si lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege distribuitur, vnde sit, vt figura catini a sphaerica mox notabiliter recedat, solique fortunae sit tribuendum, si quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, si frustum quoddam vitri praeter lentem super catino atteratur, cuius figura et pressio ita sit comparata, vt singula catini puncta, tam a lente, quam ab isto frusto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius frusti figura simplicior prodeat, ponamus interuallum BO euanescere, seu esse $OC = c = CB = a$, catinique radium OA diametro lentis $2a$ esse aequalem, quandoquidem, cum lens perpetuo in eodem loco detineatur, superfluum foret, catinum ampliorem efficere. Sit igitur $ECbi$ figura illius frusti vitrei quaesita, quod continuo catino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere $= Q$ apprimatur, cuius area sit $= ee$. Quoniam nihil refert, quo in loco hoc frustum applicemus, concipiamus id in situ DOHVT.

Tab. V. Fig. 1.

24. Cum igitur catini puncta L a centro O interuallo $OL = y$ distantia ob $c = a$ a lente attritum

pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione est $= \frac{Pu}{\pi\pi a} A \cos. \frac{y}{2a} = \frac{Pu}{\pi\pi ay}. LM$. Tum vero eadem puncta L sub frusto vitri per arcum VR deferuntur celeritate uy, et quia pressio in singulis punctis est vt $\frac{Q}{ee}$, erit quantitas attritus in vna reuolutione $= \frac{Quy}{ee}. \frac{KV}{2\pi y} = \frac{Qu}{2\pi ee}. KV$, vbi $2\pi y$ peripheriam totius circuli denotat. Necesse ergo est, vt summa harum expressionum $\frac{Pu}{\pi\pi ay}. LM + \frac{Qu}{2\pi ee}. KV$ sit quantitas constans, quae statuatur $= \frac{Pu}{\pi\pi a}. \frac{\pi}{2}$. At posita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK $= \frac{\pi}{2} y$, erit haec constans $= \frac{Pu}{\pi\pi ay}. LMK$; ita vt habeatur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi\pi ay}. LM + \frac{Qu}{2\pi ee}. KV = \frac{Pu}{\pi\pi ay}. LMK$$

quae reducitur ad hanc: $\frac{Q}{2ee}. KV = \frac{P}{\pi ay}. MK$.

25. Erit ergo arcus $KV = \frac{2Pee}{Q\pi ay}. MK$, existente $OK = y$; vnde porro area spatii $DOHVI = ee$ definiri potest. Cum enim sit $MK = y A \sin. \frac{y}{2a}$, habebitur $KV = \frac{2Pee}{Q\pi a} A \sin. \frac{y}{2a}$; hincque areae elementum $KV. dy = \frac{2Pee}{Q\pi a} dy. A \sin. \frac{y}{2a}$, cuius integrale est

$$\frac{2Pee}{Q\pi a} (y A \sin. \frac{y}{2a} + \sqrt{(4aa - yy)} - 2a)$$

quod per totum frustum extensum ponendo $y = 2a$ praebet aream totam

$$ee = \frac{2Pee}{Q\pi a} (2a. \frac{\pi}{2} - 2a) = \frac{2Pee}{Q\pi} (\pi - 2)$$

vnde quidem non area ee, sed pondus apprimens Q, ita definitur, vt sit $Q = \frac{2P(\pi - 2)}{\pi}$; vnde siue ponatur $\pi = \frac{22}{7}$

siue $\pi = \frac{355}{113}$, dat $Q = \frac{8}{11}P$, seu $Q = \frac{258}{355}P$, vnde constat, quanto pondere frustum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem frusti vitrei inueniendam quia inuenimus $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi - 2}$, habebimus hanc aequationem $KV = \frac{ee}{(\pi - 2)ay}.MK$, vbi ee pro lubitu assumere licet. Statuamus ergo $ee = (\pi - 2)aa$, vt area frusti fit ad aream lentis, vt $\pi - 2$ ad π, seu 4 ad 11, fiatque $KV = \frac{a}{y}.MK$. Ad quam aequationem construendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM secet in T, erit $TX = \frac{a}{y}.MK$, ideoque $KV = XT$. Vbique ergo sumatur arcus KV aequalis arcui XT, et spatium curua OHVI et radio OD inclusum dabit figuram frusti DOHVI, seu in situ lentem non impediente $EObvi$, quod pondere $Q = \frac{8}{11}P$ catino appressum desideratum praestabit effectum, vt figura catini non deformetur.

27. Etsi constructio lineae $Obvi$ est facilis, dum vbique arcus kv arcui xt aequalis est capiendus, constituto semicirculo OmD semissi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales saltem proxime reduci. Sit igitur $Op = p$ et $pv = q$, existente $Ok = y = \sqrt{(pp + qq)}$ et $Ox = a$, et vocetur angulus $kOm = A\,\text{sin.}\frac{y}{2a} = \Phi$, vt sit $y = 2a$ $\text{sin.}\Phi$, vnde ob $kv = xt = a\Phi$, hincque angulum $kOv = \frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2\,\text{sin.}\Phi}$ reperietur:

$$p = 2a\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos}\,\frac{\Phi}{2\,\text{sin.}\Phi} \quad \text{et} \quad q = 2a\,\text{sin.}\Phi\,\text{sin.}\frac{\Phi}{2\,\text{sin.}\Phi},$$

vnde

vnde approximando colligitur

$$q = 0,5463p + 0,03513 \cdot \frac{p^3}{aa}.$$

Initio ſcilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo 28°, 39′, cuius arcus ſemiſſi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem i fiunt coordinatae $p = q = a\sqrt{2}$.

28. Facillime autem huius fruſti figura in praxi hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis aequali deſcribatur circulus, in quo primo capiatur arcus $Ei = 45°$, tum vero arcus En ſemiſſi rectae OE aequalis, qui continebit quaſi 28°, 39′: Deinde centro O radio dimidio Oc deſcribatur arcus cg continens 30°, ac ducta recta On linea quaeſita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum g tranſibit, indeque proferetur ita in punctum i, vt hic circulum Ei tangat. Fruſtum ergo vitri terminandum eſt primo recta OE, tum arcu Ei, ac denique linea curua Ogi oſtenſo modo praeſcripta: hocque vitrum catino appreſſum pondere $Q = \frac{8}{11}P$, dum P eſt pondus, quo lens ei apprimitur, impediet catini deprauationem. Tab. V. Fig. 2.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conſeruandi in vſum vocari nequit, niſi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vsque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane non attereretur, quoniam etiam a fruſto vitri, quod catino immotum

 in-

incumbere aſſumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo deprauatio eius caueri poſſet. Quae eſt cauſa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi aſſumſerim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope ſtyli, quam totum vitri fruſtum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex ſtrenuus ope ſimplicis mechaniſmi haud difficulter hoc exequetur, ſimulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, fruſtum vitri debito pondere Q, quod ad illud ſit vt 8 ad 11, ſit oneratum. Hocque pacto lentibus praeſcripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non deprauatur.

DE

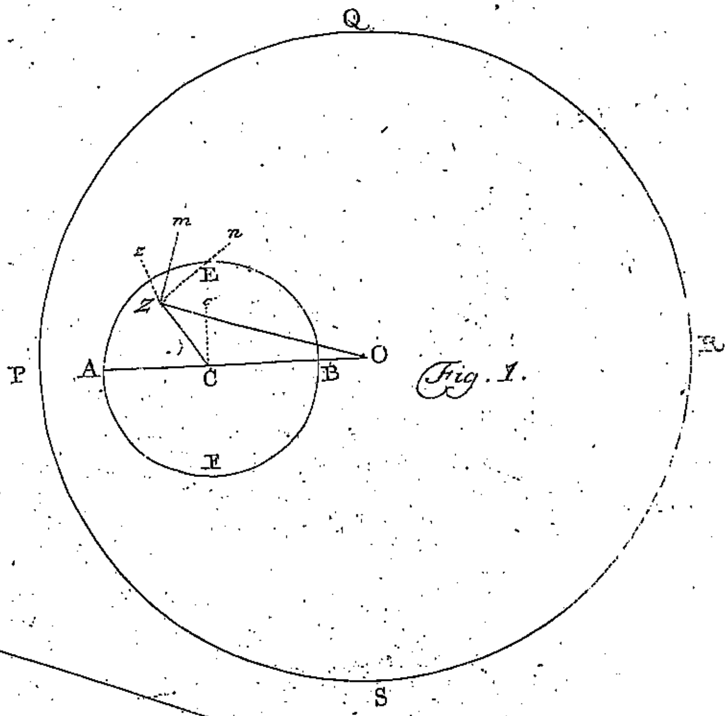

Fig. 1.

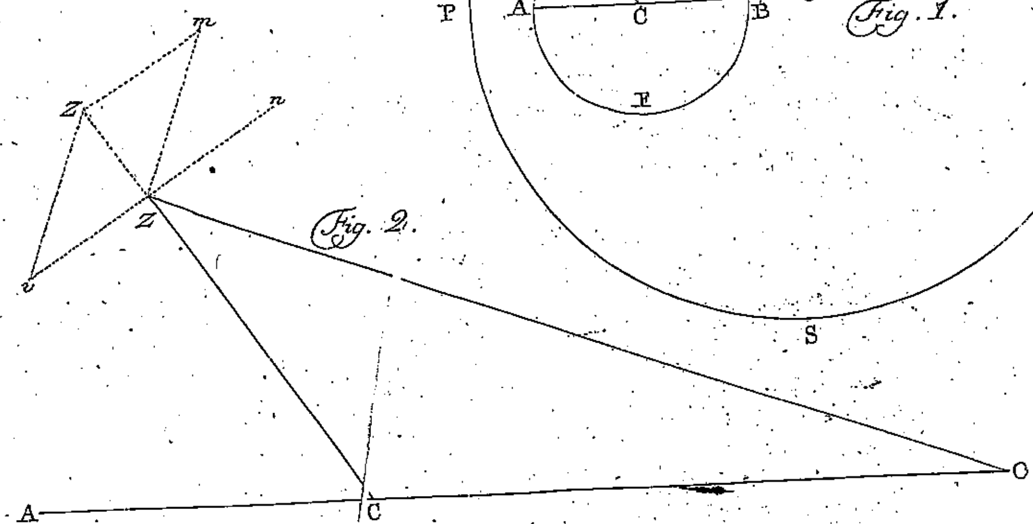

Fig. 2.

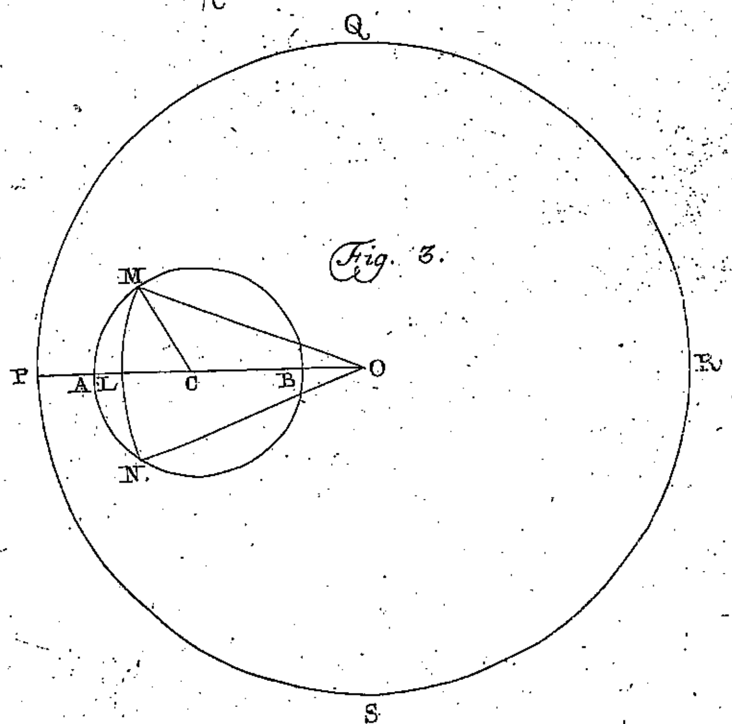

Fig. 3.

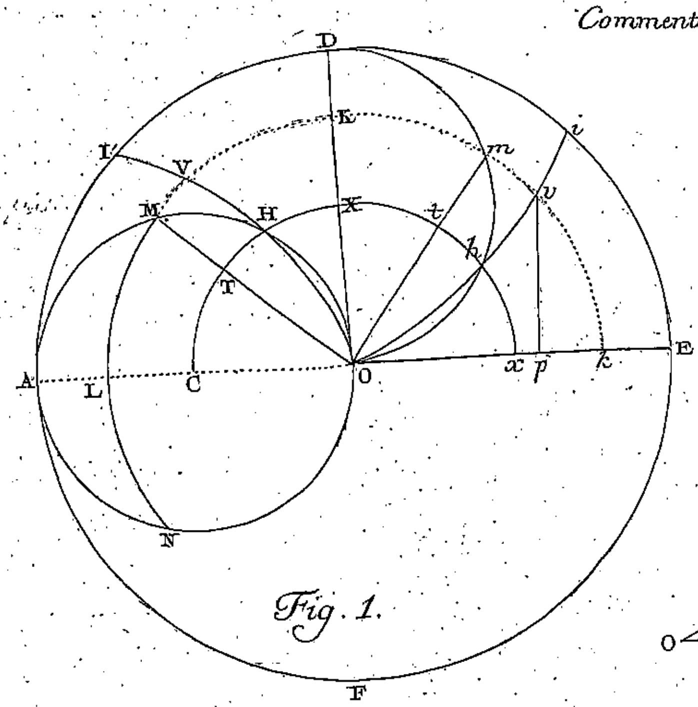

Fig. 1.

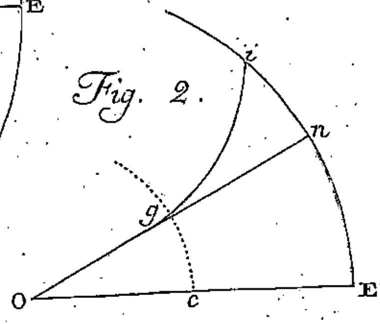

Fig. 2.

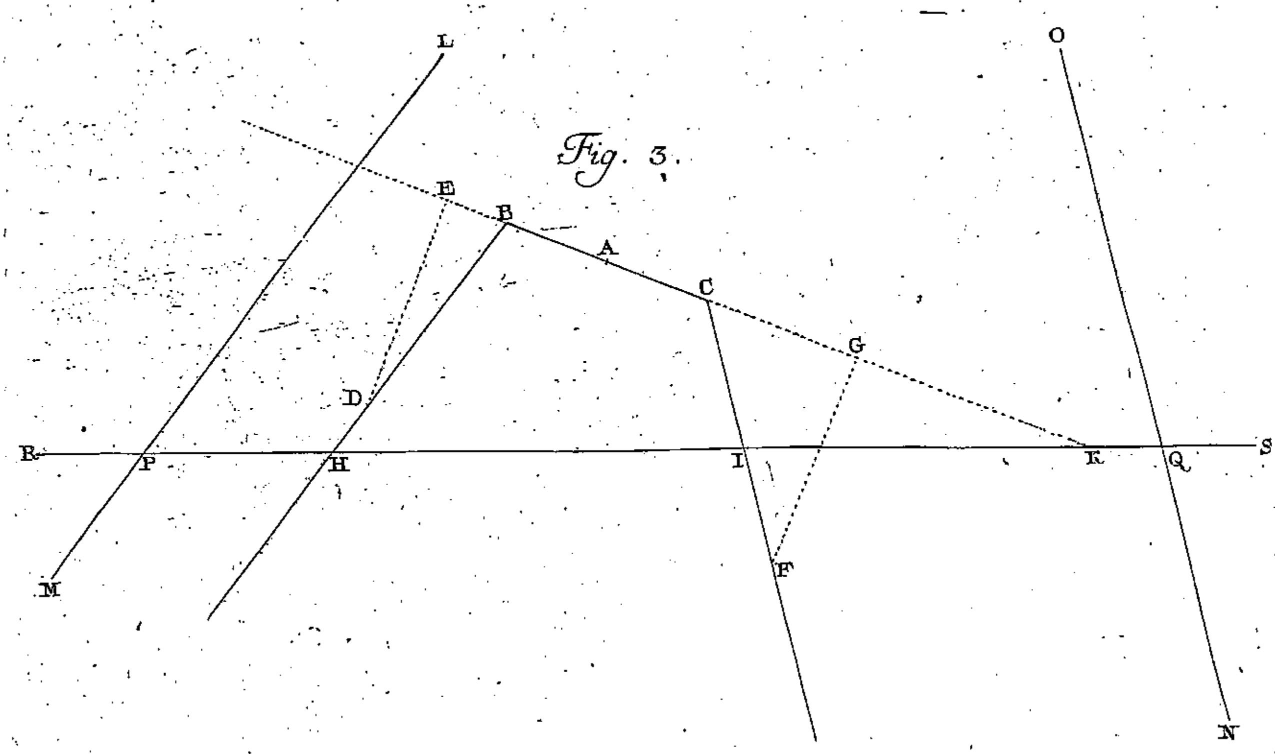

Fig. 3.