go omnibus caſibus integratio expedita eſt cenſenda; ex quo haec inueſtigatio calculo integrali haud leue incrementum attuliſſe eſt aeſtimanda.

II.

Elementa Calculi variationum

et III.

Analytica explicatio methodi Maximorum et Minimorum.

Auctore Leon. Eulero pag. 51. et 94.

Iam ante celeberrimum problema iſoperimetricum inſignia quaedam ſpecimina huc pertinentia a Geometris ſunt edita, cum antiquiſſimis iam fuerit exploratum, circulum inter omnes alias figuras pari perimetro incluſas maximam aream complecti; quam quidem proprietatem ex circuli natura concluſerunt, minime vero ipſam quaeſtionem directe aggredi ſunt auſi, vt inter omnes figuras aequali perimetro terminatas eam inueſtigarent, quae maximam aream includeret. Haec ſcilicet quaeſtio nimis eſt ardua, quam vt ante inſignem calculi infinitorum promotionem de ea ſaltem cogitare licuiſſet. Mox vero primis quaſi iactis huius calculi fundamentis ab acutiſſimo *Iohanne Bernoulli* quaeſtio de brachyſtochronis feliciſſimo ſucceſſu eſt reſoluta: quippe qua inter omnes lineas a puncto ſublimiori ad humilius ductas ea quaerebatur, ſuper qua graue tempore breviſſimo deſcendat, quam egregiam proprietatem cycloidi competere inuenerat. Methodus autem, qua Vir celeberrimus erat vſus, fratri ipſius natu maiori *Iacobo Bernoulli* manifeſto occaſionem praebuiſſe videtur ſolutionem magni problematis iſoperimetrici, quod deinceps tractauit, meditandi. Latiſſimo ſcilicet ambitu omnes huius generis quaeſtiones in hoc problemate eſt complexus, vt inter omnes lineas intra data duo puncta ducendas, ſiue debeant eſſe eiusdem longitudinis, (vnde quîdem nomen iſoperimetrici eſt natum) ſiue alia quadam indole communi praeditae, eam inueſtigaret, quae vel maximam aream, vel circa datum axem rotata maximum ſolidum, vel in genere quamcumque maximi minimiue proprietatem contineret. Methodum autem, qua ſummus illius temporis Geometra eſt vſus, perpendentes ancipites haeremus, vtrum magis eius incredibilem patientiam in prolixiſſimis et taedioſiſſimis calculis expediendis, an ſummam ſagacitatem in concluſionibus ſatis concinnis inde deducendis admirari debeamus. Ob hanc ipſam autem cauſam, quod concluſiones prodierint ſatis concinnae, mox ſuſpicari licebat, viam planiorem ac breuiorem dari eodem perducentem; quam etiam eius frater iunior *Iohannes* ſatis feliciter eſt ingreſſus, etiamſi ſtatim pro quibusdam caſibus nimis abſconditis negotium minus ſucceſſerit, quem tamen defectum deinceps, toto hoc argumento profundius retractato, largiter

giter compensauit. Longo postea interiecto tempore Auctor harum dissertationum in eodem problemate euoluendo summum studium collocauit, et cum perspexisset, omnes huius generis quaestiones eo redire, vt eiusmodi linea curua aequatione inter coordinatas x et y exprimenda inuestigetur, in qua talis formula integralis $\int V\, d\, x$ quomodocunque quantitas V per x et y fuerit data, maximum minimumue valorem obtineat. Nunc autem euidens est in ista quantitate V infinitam varietatem locum habere posse, prout in eam praeter ipsas variabiles x et y tam earum differentialia cuiuscunque ordinis, quam nouae insuper formulae integrales ingrediuntur. Quodsi iam solutiones *Bernoullianae* ad hanc normam examinentur, eae tantum ad eos casus, quibus quantitas V sola differentialia primi gradus inuoluit, restrictae reperiuntur, ac praeterea casus, quibus in quantitate V nouae formulae integrales insunt, inde penitus excluduntur, paucissimis exceptis, quos facile pro indole quaestionis ab hoc incommodo liberare licet. Hunc igitur defectum noster Auctor feliciſſime cum in his Commentariis, tum in opere singulari de hoc argumento edito, suppleuit, vt vix quicquam quod amplius desiderari queat, reperiatur. Interim tamen ipsa methodus, etiamsi totum negotium satis expedite conficiat, tamen ipsi non satis naturalis est visa, propterea quod vis solutionis tota in consideratione elementorum curuae inuestigandae erat posita, ipsa vero quaestio facile ita adornari possit, vt ex Geometria penitus ad solam Analysin puram reuocetur.

cetur. Quaeſtio enim ita propoſita, vt data quantitate V vtcunque ex binis variabilibus x, y, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis, quin etiam ex formulis integralibus vtcunque conflata, ea inter x et y relatio inueſtigari debeat, qua formulae integrali $\int V\, d\, x$ maximus minimusue valor concilietur? hoc inquam modo quaeſtio propoſita prorſus a Geometria ſegregatur; ex quo etiam methodus genuina eam reſoluendi a Geometria immunis eſſe debebat: et quo difficilius Analyſis ad hunc ſcopum accommodari poterat, eo maiora incrementa huius ſcientiae, ſi res ſucceſſerit, merito ſperare licebat. Tametſi autem Auctor de hoc diu multumque eſſet meditatus, atque amicis hoc deſiderium aperuiſſet, tamen gloriae primae inuentionis acutiſſimo Geometrae Taurinenſi la Grange erat reſeruata, qui ſola Analyſi vſus eandem plane ſolutionem eſt adeptus, quam Auctor ex conſiderationibus geometricis elicuerat. Verum ipſa illa ſolutio ita erat comparata, vt nouam plane Analyſeos ſpeciem conſtituere, eiusque fines non mediocriter promouere, videretur; ex quo Auctori occaſio eſt oblata hanc ſcientiam nouo Calculi genere locupletandi, quem *Calculum variationum* appellat, et cuius elementa hic tradere ac dilucide explicare conſtituit. Hic quidem calculus perinde ac differentialis in incrementis infinite paruis inter ſe comparandis verſatur, verum in ratione tractationis ab eo maxime diſcrepat. Cum enim in calculo differentiali ex data quantitatum variabilium relatione, relatio inter earum differentialia cuiusque ordinis inueſtigetur;

in

in calculo variationum ipſa relatio inter variabiles infinite parum immutari concipitur: ita vt dum ſecundum relationem datam pro quouis alterius variabilis x valore, altera y certum valorem ſortitur, calculo variationum huic ipſi valori y incrementum quoddam infinite paruum adiiciatur, ex quo deinceps, quemadmodum formulae tam differentiales quam integrales varientur, definiri oportet. Incrementum illud cuicunque valori y adiectum ab Auctore eius variatio vocatur, ac ne cum differentialibus confundatur hoc charactere δy deſignatur: cum igitur hinc omnes formulae tam differentiales quam integrales, quatenus quantitatem y inuoluunt, certas variationes nanciſcantur, auctor in priore diſſertatione principia ac praecepta ſtabilit, quorum ope omnium huiusmodi formularum variationes definiri poſſunt: ita ſi W denotet huiusmodi formulam quamcunque; eius variationem δW per regulas peculiares aſſignare docet. Quo ſingulari calculo conſtituto deinceps in ſequente diſſertatione eius applicationem ad omnia problemata, quae circa maxima et minima excogitari poſſunt, clariſſime oſtendit, inque negotio hoc imprimis obſeruari meretur, quod ita noua methodus mere analytica multo pleniores ac perfectiores ſolutiones ſuppeditet, quam prior illa ex Geometria petita.