

DE
IN SIGNI PROMOTIONE
METHODI TANGENTIVM INVERSAE.

Auctore
L. EULER O.

I.

Ad methodum tangentium inuersam referri solent ea problemata, quibus eiusmodi lineae curuae quaeruntur, quae certa quadam praescripta proprietate ratione tangentium sint praeditae; et cum per tangentes directio tractus curuarum determinetur, ac mutua relatione differentialium coordinatarum contineatur, ista methodus latissime patet, atque omnia problemata, quibus praescripta proprietas differentialia involuit, in se complectitur. Hac methodo plurima passim existunt problemata soluta, e quibus Analysis infinitorum maxima cepit incrementa; verum problemata eo pertinentia ad diuersa genera reuocanda videntur, prout proprietas praescripta, vel ad singula tantum curuae puncta, vel ad bina plura ve, immo infinita, respicit. Atque adhuc quidem alia problemata vix reperiuntur tractata, nisi in quibus proprietas praescripta, vel ad singula curuae puncta, vel ad bina, refertur, quae igitur primo vel secundo generi essent annumeranda.

2. Quae distinctio, cum minus sit usitata, quo clarius percipiatur, eam exemplis ad singula genera perti-

Tab. I. pertinentibus illustrari conueniet. Ex primo ergo
 Fig. 1. nere exemplo sit problema olim tractatum, quo qua-
 ritur curva AM, ut ducta ad axem AB ex quo
 puncto M tangente MN, data ratio inter rectas A
 et MN subsistat. Hic scilicet praescripta proprietas
 unum punctum M spectat, et per coordinatas hu-
 puncti AP = x , et PM = y , earumque differentiales
 exprimi potest; cum enim posito curvae elemento
 $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, sit $MN = \frac{y ds}{dy}$ et $AN = x - \frac{y ds}{dy}$
 rationem datam $m : n$ existere oportet inter has linea-
 vnde obtinetur aequatio:

$$m(x dy - y dx) = ny ds$$

quae cum alias lineas, nisi quae solum punctum
 (in se quidem indefinitum) respiciunt, non continet
 problema ad primum genus refero.

3. Genus autem secundum eiusmodi problemi
 complectetur, ad quae soluenda coordinatae ad
 curuae puncta pertinentes simul considerari debent;
 eiusmodi erat problema de trajectoriis reciprocis, illa
 que problema catoptricum, quod ante aliquot annos
 tractavi. Cum enim in his continuo bina curuae per-
 fecta inter se conferantur, et coordinatae ad ea perti-
 nentes in computum ingrediantur; per principium co-
 nuitatis effici debet, ut binā haec puncta ad eam
 lineam curvam referantur, sicque aequatio inter co-
 ordinatas unicum punctum spectantes eliciatur. Quam-
 rationem huiusmodi problemata merito multo diffi-
 cila censentur iis, in quibus singula tantum puncta
 sim consideranda proponuntur; quoniam hic pr

conditions propositas etiam principii continuitatis ratio est habenda. Quod quemadmodum ad calculum accommodari conueniat, ex solutione problematis trajectoriarum reciprocarum, catoptrici illius aliorumque similium intelligi potest, cui argumento propterea fusius explicitando hic supersedeo.

4. Circa huiusmodi autem bina puncta, ad quae in talibus problematibus simul est respiciendum, hoc imprimis notari meretur, quod ita inter se debeant esse correlata, vt qua lege ab uno transitus sit ad alterum, eadem lege vicissim ab isto ad illud fiat reuersio. Ita si quaepiam variabilis ad alterum relata ponatur $=z$, res commodissime ita concipi solet, vt eadem negatiue sumta ad alterum referatur; sic enim dum haec denuo negatiue capitur, quia tum iterum euadit positiva, ad prius punctum fit transitus. Atque ex hoc fonte, qui cum principio continuitatis arctissime est coniunctus, solutiones illorum problematum sunt haustae, sine quo vix via ad eas patueret. Alio autem modo tractari debebunt problemata, in quibus ad terna puncta correlata simul est respiciendum, vel adeo ad quaterna pluraue, quorsum referri possunt ea, quae nuper decuruunt, in quibus omnes arcus datae cuiuspiam amplitudinis debent esse inter se aequales, sum meditatus.

5. Verum si conditio praescripta ita ad duo curvae puncta simul respiciat, vt non simili modo regressus ab altero ad alterum locum habeat, sed eo modo, quo a primo ad secundum transitus, eodem modo a secundo ad tertium quodpiam, hincque ad quartum

Tom. X. Nou. Comm.

S

et

et ita in infinitum transitus procedat; tum non dum
sed innumerabilia curuae puncta simul ad propositam
conditionem referri sunt aestimanda; quam ob rem
methodus pro duobus punctis usurpari solita hic nullo
successu adhiberi poterit. Cum igitur ne meminerim
quidem ullum adhuc problema huius generis vel pro-
positum esse, vel solutum, haud ingratum Analyseos
cultoribus fore arbitror, si nonnulla huiusmodi proble-
mata hic in medium attulero, simulque methodum
soluendi aperuero. Tantum autem abest, ut hac me-
thodo omnia problemata, quae in hoc genere excogiti-
tari possunt, resolvi posse credam, ut potius eius in-
sufficientiam lubens agnoscam: verum quia cultura no-
plane generis haud parum temporis postulat, neminem
hos primos conatus meos in hac insueta Analyseos pa-
te excolenda reprehensurum esse confido.

Problema I.

Tab. I. Super axe AV eiusmodi construere lineam curuam EC
Fig. 2. ut ducta ad quodvis punctum I normali IQ applicata
ex punto Q educta QK aequalis fit ipsi
normali QI.

6. Hic quidem duo curuae puncta I et
inter se conferuntur, dum punctum K per applicata
QK in termino Q subnormalis PQ, quae puncto
respondet, erectam definitur; ac problema exigit,
sit $QK = QI$; verum eadem conditio postulat, ut
ad K ducatur normalis KR, ipsi quoque applicata RI
sit aequalis. Tum vero etiam si ad L normalis ducatur

tur LS, et in S constituta applicata SM ad M denuo
inormalis agatur MT, siveque porro ex T applicata TN,
et ad N normalis NV, sit continuo

$$QK=QI; RL=RK; SM=SL; TN=TM;$$

VO=VN etc.

Vnde ut problemati satisfiat, sumto curuae puncto
quocunque I, cum eo combinari debent alia puncta
innumerabilia K, L, M, N, O etc. quae ergo simul
cum eo in calculum introduci oportet; in quo ipso no-
vitas et difficultas huius problematis consistit.

7. Si abscissa puncto primo I respondens ponan-
tur $AP=x$, et applicata $PI=y$, quia est subnormalis
 $PQ=\frac{y dy}{dx}$, et ipsa normalis $QI=\frac{y \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$, per
principium continuitatis talis aequatio inter x et y de-
sideratur, ut si in ea loco x scribatur $AQ=x+\frac{y dy}{dx}$,
valor applicatae euadat $QK=\frac{y \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Verum
quemadmodum haec conditio sit adimplenda, difficilli-
me perspicitur. Aequatio quidem infinita solutionem
problematis complectens exhiberi potest; si enim bre-
vitatis gratia ponamus $\frac{y dy}{dx}=t$, quoniam pro x scribi
debet $x+t$, ut valor sequentis applicatae prodeat, qui
est $y \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}=\sqrt{(yy+tt)}$, habebimus $\sqrt{(yy+tt)}$
 $=y+\frac{tdy}{dx}+\frac{t+ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{t^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\frac{t^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dx^4}+$ etc.
sumto differentiali dx constante, sed haec ipsa aequatio
differentialis infinitesimi ordinis ita est comparata, ut
nullo modo pateat, quomodo ei per aequationem
quampliam finitam sit satisfaciendum.

DE M E T H O D O

8. Haud parum autem subsidii ad hoc problema soluendum afferet proprietas cum conditione praescripta coniuncta, qua declaratur, omnes has subnormales PQ , QR , RS , ST etc. inter se esse aequales; quod qui-

Tab. I. dem ita facilime geometricce ostenditur: Ductis tam
Fig. 3. applicata pi , quam normali qi proximis, si ex Q in
 qi demittatur perpendicularum $Q\mu$, erit triangulum
 $Qq\mu$ simile triangulo IQP , ideoque $Qq:q\mu = QI:PQ$.
Tum vero ob normalitatem designat $q\mu$ incrementum
normalis QI , vnde cum etiam sequens applicata proxi-
ma qk aequalis sit normali qi , erit eius incrementum
 $k\gamma = q\mu$, ducta scilicet axi parallela $K\gamma$, ita ut sit
 $K\gamma = Qq$. Quare cum pro normali KR sit $QK:QR = K\gamma:q\mu$
 $= K\gamma:qk$, erit quoque $QK:QR = Qq:q\mu = QI:PQ$.
At per hypothesim est $QK = QI$; vnde sequitur fore
 $QR = PQ$, atque ob eandem rationem perspicuum est,
omnes illas subnormales PQ , QR , RS , ST etc. inter
se aequales esse debere. Neque vero hinc vicissim
concludere licet, si omnes istae subnormales fuerint ae-
quales, etiam singulas applicatas normalibus anteceden-
tibus aequales esse futuras.

9. Ratiocinium hoc, quo aequalitatem subnorma-
lium demonstravi, quantumvis sit rigidum, tamen vni-
exceptioni est obnoxium, quae locum habet, si ele-
menta Qq et $q\mu$ in nihilum abeant, quoniam tum
ratio $Qq:q\mu$ euadit indefinita, neque amplius subnor-
mali sequenti QR definienda inseruit. Vnicum igitur
hunc casum seorsim euolui conuenit, in quo cum
sit Qq seu differentiale lineae $AQ = 0$, ipsa AQ erit
constans, et omnes curuae normales in eodem axis
puncto

puncto Q concurrent. Habebitur ergo hoc casu circulus in qua cum applicata ex Q erecta QK sit normalis. Quippe radio aequalis, circulus hoc singulari modo problemati satisficit. Cum enim omnes normales in centro conueniant, et applicata ex centro erecta ipsis sit aequalis, problema utique per circulum resolutum, etsi hic aequalitas subnormalium locum non habet. Verum haec solutio penitus est singularis et maxime discrepat ab ea, qua aliae curuae satisfacentes investigari debent, in quibus omnino ad infinita curuae puncta simul est respiciendum, quae aequalibus subnormalibus a se inuicem sunt dissita.

10. Neque vero hinc concludere licet, quod infinitis punctis eadem conueniat subnormalis: ubique prorsus quantitatem subnormalis esse eiusdem magnitudinis, ideoque constantem; parabola enim, cui haec proprietas competit, nostro problemati minime satisficit, etiam si omnes omnino subnormales habeat aequales. Atque hanc ob rem modo monueram, ne illa propositio, quae cum inde praescripta punctorum I., K., L., M. etc. aequalitatem subnormalium coniunxerat, inuertatur. Res igitur ita concipi debet, vt, quemadmodum punctum I. ad innumerabilia alia puncta K., L., M., etc. deducit, quibus cum illo communis subnormalis conueniat, ita ab alio quoquis puncto incipiendo peculiaris series infinitorum punctorum oriatur, quibus pariter communis subnormalis, sed ab illa diuersa, conueniat, sicque in curua infinitae series innumerabilium punctorum concipi debeat; quarum unaquaeque sibi peculiarem subtangentis quantitatem habeat; ita ut nullum curuae punctum simul ad plures series pertineat. Ex quo quaelibet illarum

rum infinitarum serierum a reliquis magnitudine subtangenter distinguetur, ac sumta quapiam subtangentis quantitate $\equiv t$, ea communis erit infinitis curuae punctis, quae cum ea quasi connexa sunt intelligenda.

11. Haec autem consideratio nos ad solutionem problematis manuducit: cum enim subnormali t infinita curuae puncta I, K, L, M, N etc. ideoque etiam infinitae abscissae AP, AQ, AR, AS etc. conueniant, hae abscissae per functionem infinitiformem subnormalis t exprimendae sunt. Sumto ergo quodam angulo Φ , per cuius sinum et cosinum subnormalis determinetur, idem valor t conueniet his infinitis angulis

$\Phi; 2\pi + \Phi; 4\pi + \Phi; 6\pi + \Phi; 8\pi + \Phi; 10\pi + \Phi$ etc.
denotante π semiperipheriam circuli, seu angulum 180° .
Quare si T aliam quamvis functionem $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$ designet, atque abscissa x , ita exprimatur, vt sit $x = \alpha t \Phi + T$, pro eodem valore t habebuntur istae infinitae abscissae:
 $\alpha t \Phi + T; \alpha t(2\pi + \Phi) + T; \alpha t(4\pi + \Phi) + T;$
 $\alpha t(6\pi + \Phi) + T$ etc.

quae arithmeticam progressionem constituunt differentia existente $2\alpha\pi t$, quae cum esse debeat $\equiv t$, erit $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ atque expressio idonea pro abscissa $x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$, si quidem t et T sint functiones binarum quantitatum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, vt eosdem valores retineant, etiamque pro Φ scribatur successive $2\pi + \Phi, 4\pi + \Phi, 6\pi + \Phi$ etc.

12. Inuenta iam idonea expressione pro abscissa $x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$, sit y applicata ei conueniens, et quia subnor-

subnormalis esse debet $= t$, habebimus $\frac{y dy}{dx} = t$, ideoque $yy = 2 \int t dx$. Cum igitur sit

$$dx = \frac{t d\Phi}{2\pi} + \frac{\Phi dt}{2\pi} + dT$$

$$\text{erit } tdx = \frac{t^2 d\Phi}{2\pi} + \frac{\Phi t dt}{2\pi} + t dT$$

$$\text{siue } tdx = \frac{t^2 d\Phi}{2\pi} + \frac{\Phi^2 dt}{4\pi} + t dT, \text{ unde fit}$$

$$\int t dx = \frac{t^2 \Phi}{4\pi} + \int \frac{t^2 d\Phi}{4\pi} + \int t dT, \text{ ita vt fit}$$

$$yy = \frac{t^2}{2\pi} tt\Phi + \frac{t^2}{4\pi} \int t^2 d\Phi + 2 \int t dT.$$

Hoc igitur modo si pro t et T sumantur functiones quaecunque binarum quantitatum sin Φ et cos. Φ , nasci sumus idoneos valores pro coordinatis curuae x et y , qui sunt

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T \text{ et}$$

$$yy = \frac{t^2}{2\pi} tt\Phi + \frac{t^2}{4\pi} \int t^2 d\Phi + 2 \int t dT.$$

13. Hoc quidem modo id sumus adepti, vt ea- dem subnormalis t conueniat infinitis curuae punctis I, K, L, M etc. verum hac proprietate nondum tota problematis natura exhauditur; siquidem aequalitas subnormalium non necessario aequalitatem cuiusque applicatae et normalis praecedentis includit. Vt igitur et hanc proprietatem complectamur, quia est $PQ = t$, et

$$PI^2 = yy = \frac{t^2}{2\pi} tt\Phi + \frac{t^2}{4\pi} \int t^2 d\Phi + 2 \int t dT$$

erit quadratum normalis QI, ideoque et applicatae sequentis QK,

$$QK^2 = tt + \frac{t^2}{2\pi} tt\Phi + \frac{t^2}{4\pi} \int t^2 d\Phi + 2 \int t dT$$

qui idem valor resultare debet, si in expressione ipsius PI² loco Φ scribatur $2\pi + \Phi$. At hoc reuera euenit, dum-

DE METHODO

dummodo formulae integrales $\frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi + 2 \int t dt$
 nullam mutationem subeant, si loco Φ scribatur $2\pi + \Phi$.
 Quare necesse est, ut formula $\frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi + 2 \int t dt$ sit
 functio quantitatum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, et quidem uniformis,
 ne eidem abscissae plures applicatae respondeant.

14. Cum autem T et t sint huiusmodi functiones ipsorum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, erit et Tt huiusmodi;
 vnde cum sit

$$\frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi + 2 \int t dt = 2Tt + \frac{1}{2\pi} \int tt\Phi - 2 \int T dt$$

denotet V quoque functionem $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, ac ponatur

$$\frac{1}{2\pi} \int tt d\Phi - 2 \int T dt = 2V$$

fietque $T = \frac{tt + d\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{dt}$.
 Quare si t et V sint functiones quaecunque uniformes
 formularum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, problemati proposito
 satisfiet perfecte per sequentes coordinatarum expres-
 siones:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{tt + d\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{dt}$$

$$y = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi}{4\pi dt} + \frac{2t dV}{dt} + 2V$$

quae solutionem generalissimam continent. Hinc autem patet, nullas lineas algebraicas exhiberi posse, quae problemati satisfiant, circulo scilicet excepto, quem modo prorsus singulari problema soluere vidimus.

15. Ut exemplum talis curvae in medium affe-
 ramus, ponamus

$$t = a(1 - n \cos \Phi), \text{ erit } dt = nad\Phi \sin \Phi, \text{ et } \frac{dt}{dt} = \frac{a(1 - n \cos \Phi)^2}{n d\Phi \sin \Phi},$$

vnde

Vnde $\frac{t \frac{d\Phi}{dt}}{\pi} = \frac{a(1-n\cos\Phi)^2}{4n\sin\Phi}$. Statuatur iam $V = \frac{aa}{4\pi}$
 $(\alpha + \beta\sin\Phi + \gamma\sin\Phi\cos\Phi)$, erit $dV = \frac{aa d\Phi}{4\pi}(\beta\cos\Phi + 2\gamma\cos\Phi^2 - \gamma)$, atque
 $\frac{t \frac{d\Phi}{dt} - \frac{dV}{dt}}{\pi} = \frac{a}{4n\sin\Phi}(1 - 2n\cos\Phi + nn\cos\Phi^2 + \gamma - \beta\cos\Phi - 2\gamma\cos\Phi^2)$.

Quo nunc $\sin\Phi$ hinc ex denominatore abeat, quia
 alioquin casu $\Phi=0$ et $\Phi=\pi$ expressio fieret infinita,
 ponamus $\beta=-2n$, et $\alpha+\gamma=+2\gamma-nn$, seu
 $\gamma=nn+\alpha$, obtinebimusque

$$\frac{t \frac{d\Phi}{dt} - \frac{dV}{dt}}{\pi} = \frac{(nn+2)a\sin\Phi}{4n\pi} \text{ et } x = \frac{a\Phi(1-n\cos\Phi)}{2\pi} + \frac{(nn+2)a\sin\Phi}{4n\pi}$$

$$16. \text{ Porro vero erit } \frac{t \frac{d\Phi}{dt}}{2\pi} = \frac{aa\Phi(1-n\cos\Phi)^2}{2\pi}, \text{ et}$$

$$\frac{t \frac{d\Phi}{dt} - \frac{2t \frac{dV}{dt}}{dt}}{2\pi} = \frac{(nn+2)a\sin\Phi(1-n\cos\Phi)}{2n\pi}, \text{ vnde fit}$$

$$yy = \frac{aa\Phi(1-n\cos\Phi)^2}{2\pi} + \frac{(nn+2)a^2\sin\Phi(1-n\cos\Phi)}{2n\pi} \\ + \frac{aa}{2\pi}(\alpha - 2n\sin\Phi + (nn+\alpha)\sin\Phi\cos\Phi),$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$yy = \frac{aa\Phi(1-n\cos\Phi)^2}{2\pi} + \frac{aa\alpha}{2\pi} + \frac{aa\sin\Phi}{2n\pi}(2-nn-n\cos\Phi).$$

Pro exemplo magis speciali ponamus $n=1$, et pro
 coordinatis habebimus, facto $\alpha=0$,

$$x = \frac{a\Phi(1-\cos\Phi)}{2\pi} + \frac{3a\sin\Phi}{2\pi} + \frac{a}{2\pi}(\Phi(1-\cos\Phi) + \frac{3}{2}\sin\Phi) \\ yy = \frac{aa\Phi(1-\cos\Phi)^2}{2\pi} + \frac{aa}{2\pi}\sin\Phi(1-\cos\Phi) = \frac{aa}{2\pi}(1-\cos\Phi) \\ (\Phi(1-\cos\Phi) + \sin\Phi)$$

sicutque subnormalis $\frac{y \frac{dy}{dx}}{dx} = t = a(1-\cos\Phi)$

vnde figura curuae iam quodammodo colligi, ac per
 cognitas subnormales construi poterit.

17. Curva autem adhuc simplicior obtinetur, si ponamus $t = \frac{z a \sin. \frac{1}{2} \Phi}{1 + \cos. \frac{1}{2} \Phi}$, seu $t = 2 a \tan. \frac{1}{2} \Phi$, tum enim fit $dt = \frac{a d\Phi}{\cos. \frac{1}{2} \Phi^2}$ et $\frac{t t d\Phi}{dt} = 4 a \sin. \frac{1}{2} \Phi^2$, ideoque $\frac{t t d\Phi}{4 \pi dt} = \frac{a}{\pi} \sin. \frac{1}{2} \Phi^2$; unde erit

$$x = \frac{a}{\pi} \Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi + \frac{a}{\pi} \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{dV \cos. \frac{1}{2} \Phi^2}{ad\Phi}$$

$$yy = \frac{z a a}{\pi} \Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{z a a}{\pi} \tan. \frac{1}{2} \Phi \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{\frac{1}{2} dV}{a \Phi} \sin. \frac{1}{2} \Phi \cos. \frac{1}{2} \Phi + 2 V$$

statuatur $V = 2 a b \tan. \frac{1}{2} \Phi$, vt sit $dV = \frac{ab d\Phi}{\cos. \frac{1}{2} \Phi}$

hincque

$$x = \frac{a}{\pi} \Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi + \frac{a}{\pi} \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 - b$$

$$yy = \frac{z a a}{\pi} \Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{z a a}{\pi} \tan. \frac{1}{2} \Phi \sin. \frac{1}{2} \Phi^2$$

vbi patet sine detimento amplitudinis poni posse $b=0$, ita vt sit

$$x = \frac{a}{\pi} (\Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi + \sin. \frac{1}{2} \Phi^2)$$

$$yy = \frac{z a a}{\pi} \tan. \frac{1}{2} \Phi (\Phi \tan. \frac{1}{2} \Phi + 2 \sin. \frac{1}{2} \Phi^2)$$

unde erit $yy - 2 a x \tan. \frac{1}{2} \Phi = \frac{z a a}{\pi} \tan. \frac{1}{2} \Phi \sin. \frac{1}{2} \Phi^2$. Quare cum sit $\tan. \frac{1}{2} \Phi = \frac{t}{z a} = \frac{y dy}{z a dx}$ et $\sin. \frac{1}{2} \Phi = \frac{y dy}{\sqrt{(z a dx)^2 + yy dy^2}}$, hinc aequatio differentialis inter ipsas coordinatas x et y solicietur, quae est

$$\frac{z}{a} (y dx - x dy) = \frac{yy dy^2}{(z a dx)^2 + yy dy^2}$$

18. Hoc autem problemate soluto per easdem formulas quoque sequens problema latius patens solvi poterit:

Problema

Problema 2.

Super axe AV eiusmodi construere lineam curuam EO, Tab. I.
ut ducta ad quodvis punctum I normali IQ, applicatae ex punto Q educatae QK quadratum superet
quadratum ipsius normalis QI dato spatio cc., seu
ut sit $QK^2 = QI^2 + cc.$

Cum etiam hoc casu omnes subnormales successivae PQ, QR, RS etc. sint inter se aequales, vni ex praecedente demonstratione facile intelligitur; quandoquidem subnormalis $\frac{y \cdot dy}{dx} = t$ eadem prodit, etiam si quadratum applicatae $y \cdot y$, quantitate constante sive augatur sive minuatur: in superiori solutione omnia manebunt invariata usque ad finem §. 12. Quare sumitis pro t et T functionibus uniformibus formularum sin. Φ et cos. Φ , pro determinatione coordinatarum AP=x, PI=y habebimus:

$$x = \frac{t \cdot \Phi}{2\pi} + T$$

$$y \cdot y = \frac{1}{2\pi} tt \Phi + \frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi + 2Tt - 2 \int T dt.$$

19. Cum iam pro primo problemate formulas integrales $\frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi - 2 \int T dt$ aequauerimus functioni uniformi ipsarum sin. Φ et cos. Φ , hic rem generalius expediri oportet. Quoniam vero t et T sunt functiones uniformes ipsarum sin. Φ et cos. Φ , huiusmodi integralia praeter tales functiones insuper ipsum angulum Φ complecti possunt, ita ut haec positio latissime pateat:

$$\frac{1}{2\pi} \int t t d\Phi - 2 \int T dt = \frac{c\Phi + v}{2\pi}$$

unde fit $T = \frac{tt d\Phi - c d\Phi - dv}{4\pi dt}$.

T 2

deno-

denotante V functionem quamcunque uniformem ipsa-
rum sin. Φ et cof. Φ . Hoc modo pro omnibus curuis,
in quibus subnormales successuae PQ, QR, RS etc.
sunt inter se aequales, prodibunt sequentes coordinata-
rum determinationes:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{tt d\Phi - C d\Phi - dv}{4\pi dt}$$

$$yy = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi - C t d\Phi - t dv}{2\pi dt} + \frac{C\Phi + v}{2\pi}$$

vnde differentia inter quadrata cuiusque normalis et ap-
plicatae sequentis existit constans.

20. Posita igitur abscissa AP = x, cum sit
 $P I^2 = \frac{tt\Phi + C\Phi + v}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi - C t d\Phi - t dv}{2\pi dt}$, erit, ob $PQ = t$,

$$Q I^2 = \frac{2\pi tt + tt\Phi + C\Phi + v}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi - C t d\Phi - t dv}{2\pi dt}$$

Posito autem $\frac{2\pi}{2\pi} + \Phi$ loco Φ valor, ipsis $P I^2$ abit
in $Q K^2$, vnde fit

$$Q K^2 = \frac{2\pi tt + 2\pi C + tt\Phi + C\Phi + v}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi - C t d\Phi - t dv}{2\pi dt}$$

ideoque $Q K^2 - Q I^2 = C$. Cum igitur debeat esse
 $Q K^2 = Q I^2 + cc$, capiendum est $C = cc$, vnde solutio
ad problema propositum accommodata erit:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{(tt - cc)d\Phi - dv}{4\pi dt}$$

$$yy = \frac{(tt + cc)\Phi + v}{2\pi} + \frac{t(tt - cc)d\Phi - t dv}{2\pi dt}$$

vbi pro t et V functiones quaecunque uniformes qua-
titatum sin. Φ et cof. Φ assumi possunt.

21. Si ex his aequationibus ipse angulus Φ eli-
minetur, obtinebitur haec aequatio:

$$tyy - (tt + cc)x = \frac{tv}{2\pi} + \frac{(tt - cc)d\Phi - (tt - cc)dv}{4\pi dt}$$

ex qua si quantitates sin. Φ et cof. Φ hincque ipse an-
gulus Φ definiatur, eorumque valores in altera priorum
aequa-

m ipsius equationum substituantur, reperietur aequatio inter co-
is curva R S et ordinatas x et y , quae autem ob angulum Φ erit
transcendens. Unicus vero datur casus, quo curva pro-
ordinata algebraica, qui locum habet, si post eliminationem
anguli Φ simul quantitates $a \sin. \Phi$ et $\cos. \Phi$ pendentes
ex calculo abeant, quod vsu venit, si fuerit $t = c$ et
 $V = 0$, seu $V = \text{Constanti}$; tum enim postrema aequa-
tio statim praebet inter x et y hanc aequationem:

$$yy - 2cx = C, \text{ seu } yy = 2cx + C$$

Satim autem perspicitur, parabolam huic problemati sa-
tisfacere, cum eius subnormalis sit constans. At reli-
quiae curvae omnes problemati satisfacientes sunt tran-
scendentes.

22. Ut etiam curvae transcendentis exemplum addamus, et quidem tale, quod casum parabolae in se complectatur, ponamus

$$y = c - a \cos. \Phi \text{ et } V = -2ac \sin. \Phi + aa \sin. \Phi \cos. \Phi,$$

unde fit

$$dt = ad\Phi \sin. \Phi \text{ et } dV = -2acd\Phi \cos. \Phi + 2aad\Phi \cos. \Phi^2 - aad\Phi$$

quibus valoribus substitutis adipiscemur:

$$x = \frac{(c - a \cos. \Phi) \Phi}{2\pi} + \frac{a \sin. \Phi}{4\pi}$$

$$yy = \frac{(2c - 2ac \cos. \Phi + aa \cos. \Phi^2) \Phi}{2\pi} - \frac{ac \sin. \Phi}{2\pi}$$

unde si capiatur $a = 0$, fit

$$x = \frac{c \Phi}{2\pi} \text{ et } yy = \frac{2cc \Phi}{2\pi}, \text{ ideoque } yy = 2cx.$$

In genere autem erit

$$yy - 2cx = \frac{aa \Phi}{2\pi} \cos. \Phi^2 - \frac{ac \sin. \Phi}{\pi} \text{ et}$$

$$yy + 2cx = \frac{(2c - a \cos. \Phi)^2 \Phi}{2\pi}$$

equationum substituantur, reperietur aequatio inter coordinatas x et y , quae autem ob angulum Φ erit transcendens. Unicus vero datur casus, quo curua prodicit algebraica, qui locum habet, si post eliminationem anguli Φ simul quantitates a $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$ pendentes ex calculo abeant, quod vsu venit, si fuerit $t=c$ et $V=0$, seu $V=\text{Constanti}$; tum enim postrema aequatio statim praebet inter x et y hanc aequationem:

$$yy - 2cx = C, \text{ seu } yy = 2cx + C$$

statim autem perspicitur, parabolam huic problemati satisfacere, cum eius subnormalis sit constans. At reliquae curuae omnes problemati satisfacientes sunt transcendentes.

22. Ut etiam curuae transcendentis exemplum addamus, et quidem tale, quod casum parabolae in se complectatur, ponamus

$$t=c - a\cos.\Phi \text{ et } V=-2ac\sin.\Phi + aa\sin.\Phi\cos.\Phi,$$

vnde fit

$$dt = ad\Phi\sin.\Phi \text{ et } dV = -2acd\Phi\cos.\Phi + 2aad\Phi\cos.\Phi^2 - aad\Phi$$

quibus valoribus substitutis adipiscemur:

$$x = \frac{(c - a\cos.\Phi)\Phi}{2\pi} + \frac{a\sin.\Phi}{4\pi}$$

$$yy = \frac{(2cc - 2ac\cos.\Phi + aa\cos.\Phi^2)\Phi}{2\pi} - \frac{ac\sin.\Phi}{2\pi}$$

vnde si capiatur $a=0$, fit

$$x = \frac{c\Phi}{2\pi} \text{ et } yy = \frac{2cc\Phi}{2\pi}, \text{ ideoque } yy = 2cx.$$

In genere autem erit

$$yy - 2cx = \frac{aa\Phi}{2\pi}\cos.\Phi^2 - \frac{ac\sin.\Phi}{\pi} \text{ et}$$

$$yy + 2cx = \frac{(2c - a\cos.\Phi)^2\Phi}{2\pi}$$

vbi notandum est, quo minor valor ipsi α tribuatur eo propius curuam ad figuram parabolae esse accerat.

23. Duo haec problemata in hoc uno comprehendendi potuissent, ut curuae quaererentur, in quibus subnormales successivae PQ , QR , RS , ST etc. essent inter se aequales. Similiter enim atque haec proportiones in quapiam curua locum habet, quadratum cuiusque applicatae a quadrato normalis praecedentis quantitate constante differt, quae ergo siue sit evanescens in problemate primo, siue data, vti in secundo, determinationem minus essentialiem involuit; problema esseret impossibile, si ista differentia, neque evanescens que constans, esse deberet. Verum inter has subnormales successivas PQ , QR , RS etc. aliae leges gressionis constitui possunt, unde problemata non parum curiosa nascentur. Hinc autem binas gressionis leges sum contemplatur, alteram arithmeticam, alteram geometricam, quoniam hinc methodia huiusmodi problemata soluendi facile colligi pos-

Problema 3.

Tab. I.

Fig. 2.

24. Si ad terminum cuiusque subnormalis catalogata constituatur, ut ex quois curuae puncto I infinita huiusmodi subnormalium successuarum PQ , RS etc. oriatur, inuenire eas lineas curuas, in quibus subnormales successivae progressionem arithmeticam constituant,

Pro variabili principali assumatur angulus Φ spondens curuae puncto I, qui si crescendo abea-

$2\pi + \phi$, $4\pi + \phi$, $6\pi + \phi$ etc. respondeat punctis curuae sequentibus K, L, M etc. Horum autem singulorum angulorum, tam sinus, quam cosinus, esse eosdem, euidens est. Quare si litterae P, Q, R, S etc. denotent functiones quascunque quantitatum $\sin \phi$ et $\cos \phi$, eae communes erunt omnibus curuae punctis I, K, L, M etc. ac pro omnibus eosdem valores retinebunt. Quod si ergo subnormalis prima PQ statuitur $= P\phi + Q$, erit secunda QR $= 2\pi P + P\phi + Q$, tertia RS $= 4\pi P + P\phi + Q$, quarta ST $= 6\pi P + P\phi + Q$ etc. sicque istae subnormales successivae progressionem arithmeticam constituent, cuius differentia est $= 2\pi P$, vti problema postulat. Vnde si in cunctis his subnormalium progressionibus eadem esse debeat differentia, functionem P constantem esse oportet.

25. Quoniam autem ipsae hae subnormales differentias praebent abscissarum successuarum AP, AQ, AR, AS etc. statuatur abscissa prima

$$AP = x = L\phi^2 + M\phi + N$$

existentibus L, M, N functionibus ipsarum $\sin \phi$ et $\cos \phi$, eritque abscissa secunda

$$AQ = L\phi^4 + M\phi^2 + N + 4\pi L\phi + 4\pi\pi L + 2\pi M$$

vnde fit differentia

$$PQ = 4\pi L\phi + 4\pi\pi L + 2\pi M$$

quae cum aequalis esse debeat primae subnormali PQ

$$= P\phi + Q, \text{ erit}$$

$$P = 4\pi L \text{ et } Q = 4\pi\pi L + 2\pi M$$

hocque

hocque modo simul sequentes subnormales sunt differentiae abscissarum sequentium. Hinc igitur sumta prima abscissa expressione

$$AP = x = L\Phi^3 + M\Phi + N, \text{ subnormalis erit}$$

$$PQ = 4\pi L\Phi + 4\pi\pi L + 2M = t$$

et sequentes secundum differentiam $8\pi\pi L$ progre-
diuntur.

26. Ponamus nunc applicatam curuae PI =
et quia ex subnormali $PQ = t$ habetur $\frac{y dy}{dx} = t$, et
 $yy = 2st dx$, ideoque

$$yy = 4\pi \int (2L\Phi + 2\pi L + M) (\Phi\Phi dL + 2\Phi L dM + \Phi dM + M d\Phi + dN)$$

quae formula euoluta praebet :

$$\left. \begin{aligned} yy &= 4\pi \int \{ 2L\Phi^3 dL + 4LL\Phi^2 d\Phi + 2LM\Phi d\Phi + 2\pi LM d\Phi \\ &\quad + 2L\Phi^2 dM + 2L\Phi dN + 2\pi LdN \\ &\quad + 2\pi L\Phi^2 dL + 4\pi LL\Phi d\Phi + MM d\Phi \\ &\quad + M\Phi^2 dL + 2\pi L d\Phi M + MD d\Phi \\ &\quad + 2LM\Phi d\Phi \\ &\quad + M\Phi dM \} \end{aligned} \right\}$$

quae siue integrari potest, siue secus, semper valo-
idoneum pro applicata y praebet. Veluti si pon-
 $M = 0$, et $N = 0$, at L statuatur constans,
 $x = L\Phi^2$, erit

$$yy = 4\pi \int (4LL\Phi^2 d\Phi + 4\pi LL\Phi d\Phi), \text{ seu}$$

$$yy = \frac{16}{3}\pi LL\Phi^3 + 8\pi\pi LL\Phi^2 + \text{Const.}$$

Cum ergo sit $\Phi = \sqrt{\frac{x}{L}}$, erit $yy = \frac{16}{3}\pi x\sqrt{Lx} + 8\pi\pi Lx + C$

Sit $8\pi\pi L = a$; fiet $yy = \frac{4}{3}x\sqrt{2ax} + ax + ab$,
curua algebraica ordinis quarti.

Problema 4.

27. Si ad terminum cuiusque subnormalis applicata constituantur, vt a quois curuae puncto t incipiendo series infinita subnormalium successuarum PQ, QR, RS etc. proueniat, inuenire eos casus, quibus istae subnormales constituant progressionem geometricam, cuius exponentis sit datus =n.

Posita ergo prima subnormali $PQ = t$, requiritur, vt sit secunda $QR = nt$, tertia $RS = n^2 t$, quarta $ST = n^3 t$, et ita porro, sumatur iterum angulus Φ pro variabili puncto I respondente, ita vt punctis sequentibus K, L, M etc. respondeant anguli $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$, $6\pi + \Phi$ etc. quorum omnium idem est sinus $= \sin \Phi$, demque cosinus $= \cos \Phi$; atque functiones quaecunque uniformes ipsarum $\sin \Phi$ et $\cos \Phi$ illis curuae punctis infinitis I, K, L, M etc. aequae conuenient, cuiusmodi functiones litteris maiusculis P, Q, R etc. indicemus.

Problemati ergo satisfiet, si ponamus $t = n^{2\pi} P$, tum enim posito $\Phi + 2\pi$ loco Φ , subnormalis secunda erit $= n^{2\pi} P = nt$, similique modo sequentes praescritam progressionem geometricam constituent.

28. Pro abscissa igitur $AP = x$ assumi debet huiusmodi expressio $x = \frac{t}{n^{2\pi}} \cdot n^{2\pi} P + Q$, vt posito $\Phi + 2\pi$ pro Φ , abscissa AP abeat in $AP + PQ$; vnde si vocemus applicatam $PI = y$, ob $\frac{dy}{dx} = t$, habebimus $dy = 2st dx$, ideoque :

$$yy = \frac{t}{n^{2\pi}} \cdot n^{2\pi} PP + 2 \int n^{2\pi} P dQ.$$

Tom. X. Nou. Comm.

V

Quare

Quare pro curuis problemati satisfacientibus assecuti
mus has formulas generales :

$$x = \frac{1}{n-1} n^{\frac{1}{2}\pi} P + Q$$

$$yy = \frac{1}{n-1} n^{\frac{1}{2}\pi} PP + 2 \int n^{\frac{1}{2}\pi} P dQ$$

vnde si sit $Q=0$, et pro $2 \int n^{\frac{1}{2}\pi} P dQ$ scribatur +
obtinetur statim curua algebraica hac aequatione c-
tenta :

$$yy + aa = (n-1)xx$$

quae praebet hyperbolam, ac, si fuerit $a=0$, lin-
rectam $y=x\sqrt{n-1}$.

29. Euoluamus etiam exemplum curuae tran-
dentis sitque $P=a$ et $Q=b \sin \Phi$, vt sit

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{1}{2}\pi} + b \sin \Phi, \text{ et } yy = \frac{a^2}{n-1} n^{\frac{1}{2}\pi} + 2ab \int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi$$

Cum autem sit

$$\int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \cos \Phi = n^{\frac{1}{2}\pi} \sin \Phi - \frac{1}{2\pi} \int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \sin \Phi$$

$$\int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \sin \Phi = -n^{\frac{1}{2}\pi} \cos \Phi + \frac{1}{2\pi} \int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \cos \Phi$$

$$\int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \cos \Phi = n^{\frac{1}{2}\pi} \sin \Phi + \frac{1}{2\pi} n^{\frac{1}{2}\pi} \cos \Phi - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi$$

Quoniam igitur haec integratio ad se ipsam redu-
si breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{2\pi} = \lambda$, adipiscimur

$$\int n^{\frac{1}{2}\pi} d\Phi \cos \Phi = \frac{n^{\frac{1}{2}\pi} (\sin \Phi + \lambda \cos \Phi)}{1 + \lambda^2}$$

hincque curua quaesita his formulis determinabitur:

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} + b \sin. \Phi$$

$$yy = \frac{aa}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{ab}{1+\lambda\lambda} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} (\sin. \Phi + \lambda \cos. \Phi) + cc$$

vnde, eliminanda quantitate exponentiali, fit

$$yy + cc = \frac{(n-1)(x - b \sin. \Phi)}{1+\lambda\lambda} ((1 + \lambda\lambda)x + (1 - \lambda\lambda)b \sin. \Phi + 2\lambda b \cos. \Phi).$$

30. Solutione autem horum quatuor problematum methodum aperuisse videor, cuius ope alia quoque huius generis problemata resolvi queant, in quibus scilicet simul ad infinita lineae curuae inuestigandae puncta est respiciendum. Methodus vero ista in hoc consistit, quod loco primariae variabilis accipi debeat angulus Φ , qui, dum continuo quaternis rectis augetur, successiue conueniat singulis illis punctis; quoniam enim hi anguli omnes $\Phi, 2\pi + \Phi, 4\pi + \Phi, 6\pi + \Phi$, etc. eundem habent sinum $= \sin. \Phi$, eundemque cosinum $= \cos. \Phi$, functiones quaecunque uniformes harum duarum quantitatum omnibus illis punctis correlatis aequi conuenient. Per compositionem autem idoneam talium functionum, vna cum ipso angulo Φ , huiusmodi problematum solutiones sunt suscipienda, eo modo, quo in his quatuor problematibus sum usus.