DEMONSTRATIO THEOREMATIS BERNOVLLIANI QVOD EX EVOLVTIONE CVRVAE CVIVSCVNQVE RECTANGVLAE IN INFINITVM CONTINVATA TANDEM CYCLOIDES NASCANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Inter alias insignes proprietates, quibus curua Cyclois cum in Mechanica, tum in Geometria, eminet, ratio euolutionis haud postremum locum tenere censenda est, qua constat, euolutam cycloidis iterum esse cycloidem. Quando ergo series curuarum consideratur, quarum quaelibet praecedentis est euoluta, si vna earum fuerit cyclois, omnes sequentes quoque cycloides sint necesse est; de antecedentibus autem idem iudicium non valet, cum ex eadem curua per euolutionem infinitae curuae diuersae generari queant, quae omnes communi euoluta vtentes sibi parallelae existimari solent.

II.

Huiusmodi autem curuarum seriem Celeb. *Ioh. Bernoulli* inuerso ordine olim est contemplatus, ita vt quaelibet sequentis sit euoluta, atque ex euolutione antecedentis nascatur. De tali iam curuarum serie affirmauerat, si primum locum occupet curua quaecunque rectan-

rectangula ſequentes ita continuo propius ad naturam cycloidis accedere, vt infiniteſimae omnino in cycloides ſint abiturae. Hanc ergo egregiam proprietatem ante accuratius explicari conueniet, quam de eius demonſtratione ſimus ſolliciti.

III.

Cum igitur iſta curuarum ſeries a curua quacumque, modo ſit rectangula, inchoari poſſit, a definitione curuae rectangulae ordiendum videtur. Non autem curuae rectangulae peculiarem curuarum ſpeciem conſtituere ſunt putandae, ſed ex qualibet curua abſcindi poteſt portio, cui haec denominatio competit, quando tangentes, in eius terminis ductae, ſibi ſunt perpendiculares, ſiue etiam quando normales in terminis ductae ſibi ad angulum rectum occurrunt. Hic ſcilicet non qualitas curuae, ſed quantitas portionis aſſumtae, ſpectatur; ac tanta cuiusque curuae portio, cuius normales extremae inter ſe ſunt perpendiculares, curua rectangula vocatur; vnde commodius huiusmodi curuae portio arcus rectangulus vocabitur.

IV.

Planiora haec reddentur ex notione amplitudinis, quae cuilibet curuae portioni conuenire dicitur. Eſt autem amplitudo cuiuslibet arcus curuae angulus, quo normales ad eius extremitates ductae inuicem inclinantur. Tab. II. Fig. 1. Ita ſi AMPB fuerit curua quaecunque, erit portionis eius AM amplitudo aequalis angulo ANM, quem rectae AN et MN ad eius terminos A et M normales conſtituunt; et ducta ad eius quoduis aliud punctum P

normali

normali PQ, praebebit angulus AQP amplitudinem arcus AMP. Hinc arcus AMPB erit rectangulus, si eius normales extremae AC et BC ad se inuicem fuerit perpendiculares.

V.

Consideratur igitur a Celeb. *Bernoullio* arcus cuiuscunque curuae rectangulus AMB, qui filo circumplicato ex altero termino A ita euoluatur, vt oriatur curua ANB′, quae pariter erit rectangula. Hinc porro per euolutionem in termino B′ incipiendo, noua describatur curua B′M′A′; atque ex hac a puncto A′ facto euolutionis initio denuo noua curua A′N′B″; ex hacque vlterius a termino B″ incipiendo curua B″M″A″. Talis euolutio alternatim a punctis A et B incipiendo in infinitum continuata concipiatur, atque hoc modo series curuarum infinita nascetur, quae omnes inter parallelas BE et CF erunt contentae. Tab. II. Fig. 2.

VI.

De hac iam curuarum serie *Bernoullius* affirmauit, a quacunqua curua AMB initium fuerit tractum, curuas inde natas continuo propius ad cycloidis formam perduci, atque cum in infinitum processerimus, omnes huius seriei curuas re ipsa euadere cycloides. Hoc igitur est *Theorema Bernoullianum* ab omni ambiguitate liberatum, cui prima fronte ideo obnoxium videatur, quod ex quauis curua per euolutionem infinitae curuae oriri possunt; haec autem ambiguitas per determinatum cuiusque curuae initium penitus est sublata.

VII.

Si ad ordinem harum curuarum attendamus, manifeſtum eſt, tertiam, quintam, ſeptimam, nonam etc. parem ſitum reſpectu parallelarum BE et CF tenere atque primum AMB, dum ſuperiorem BE tangunt, inferiori vero CF perpendiculariter inſiſtunt. Contra vero ſecunda, quarta, ſexta, octaua, etc. ſitu inuerſo rectam inferiorem CF tangunt, ad ſuperiorem vero BE ſunt perpendiculares. Alternatim ergo hae curuae ſitum tenent erectum et inuerſum.

VIII.

Hinc iam non leue argumentum pro veritate Theorematis aſſequimur. Si enim in hac curuarum ſerie eam, cuius ordo a prima numero n indicatur, ponamus P, ſequentem Q, hancque ſequentem R, indicem n vero infinitum aſſumamus; quoniam curuae P et R ambae a principio infinite diſtant, paremque ſitum inter parallelas ſeruant, ad primam quoque eandem relationem tenere, ideoque inter ſe aequales eſſe debent. Ex quo vtramque cycloidem eſſe debere manifeſto ſequitur, vnde et reliquae interiectae erunt cycloides ſitu inuerſo poſitae.

IX.

Obiici autem non ſine ingenti veri ſpecie poteſt, quod ſi curuae infiniteſimae fuerint cycloides, tum omnes praecedentium pariter cycloides eſſe deberent, neque igitur primum locum curua quaecunque occupare poſſet. Verum ad hanc obiectionem facile reſpondetur, curuas infiniteſimas ita conſiderari oportere, quaſi

infinite

infinite parum a cycloide difcrepent, indeque praecedentes continuo magis recedere, donec tandem in infinitum regrediendo ad curuas maxime a cycloidis natura diffidentes perueniatur.

X.

Aliam dubitandi rationem praebere videntur curvae, quae fuis euolutis ordinis cuiuscunque funt aequales. Si enim AMB fuerit curua fuae euolutae tertiae aequalis, eique ergo aequalis fit curua A′N′B″, feu quarta in noftra ferie, ob eandem rationem ipfi quoque aequales erunt feptima, decima, tertia decima et ita porro; vnde cum prima non fit cyclois, etiam in infinitefimis cyclois non occurret. Verum fi res accuratius perpendatur, mox patebit, talem euolutae, verbi gratia tertiae, conuenientiam cum praeferiptis hic euolutionibus confiftere non poffe.

XI.

Cum autem haec argumenta, etfi in fe plurimum roboris habent, tamen non fatis firma videantur, vt demonftrationis loco admitti queant, quoniam non ex ipfa rei natura funt petita; conueniet hanc continuam euolutionem accuratius expendi, et, in cuius generis curuas tandem defınere debeat, inueftigari. Hinc enim non folum clarius theorematis veritatem perfpiciemus, fed etiam methodus, qua vtar, ad alia praeclara deducere poffe videtur.

XII.

Primum autem obferuo, ex natura euolutionis fecundae curuae ANB′ radium ofculi in A effe nullum, in in B′ vero finitum $=$ BB′ $=$ BMA; tum vero tertiae curuae B′M′A′ radium osculi in A′ esse $=$ AA′, in B′ vero $=$ o. Porro curuae quartae A′N′B″ radium osculi in A′ esse $=$ o, in B″ vero $=$ B′B″; curuae autem quintae B″M″A″ radium osculi in A″ esse $=$ A′A″, in B″ vero $=$ o; haecque conditio in omnibus curuis sequentibus ita cernitur, vt tam in punctis A et B radius osculi alternatim euanescat, et per quantitatem finitam exprimatur, negatiuis enim hic omnis locus praecluditur.

XIII.

*S*umatur porro in curua data AMB punctum quodcunque M, et ducta ibi normali ML huius inclinatio ad rectam AC dabit amplitudinem arcus AM, quae sit $= v$; tum ducta ad M tangens MN erit secundae curuae ANB′ radius osculi in puncto N, ita vt arcus AN eadem futura sit amplitudo $= v$. Simili modo tangens ex N educta NM′ erit radius osculi tertiae curuae in M′, hincque tangens M′N′ radius osculi quartae curuae in N′, indeque porro ducta tangens N′M″ radius osculi quintae curuae in M″, et ita deinceps; omnium autem arcuum AM, AN, A′M′, A′N′, A″M″ etc. eadem erit amplitudo $= v$, vti ex natura euolutionis constat.

XIV.

Ponamus iam pro prima curua data AMB arcum AM $= s$, cuius amplitudo cum sit $= v$, concipiamus dari aequationem inter s et v, quae ita comparata sit necesse est, vt posito $v = o$, euanescat s; posita

posita ergo amplitudine $v =$ angulo recto, cuius nota sit ϱ, seu $v = \varrho$, praebebit s longitudinem totius arcus AMB, quae sit $= a$. Dari ergo ponimus aequationem inter s et v, talem, vt, posito $v = 0$, sit $s = 0$, et posito $v = \varrho$, sit $s = a$.

XV.

Hinc definitur curua secunda ANB′ ex illius euolutione nata; cum enim arcus AN amplitudo sit quoque $= v$, et radius osculi NM $=$ AM $= s$, si ponatur arcus AN $= t$, erit $\frac{dt}{s} = dv$, ideoque $t = \int s\,dv$, quod integrale ita capiatur, vt euanescat, posito $v = 0$. Tum vero, posito $v = \varrho$, exprimet $\int v\,ds$ totum arcum ANB′, qui si vocetur $= b$; posito $v = 0$, erit $t = 0$, posito autem $v = \varrho$, erit $t = b$.

XVI.

Pro tertia porro curua A′M′B′ sit arcus A′M′ $= s'$, cuius amplitudo cum sit $= v$, radius osculi vero M′N $=$ ANB′ $-$ AN $= b - t$, erit $\frac{ds'}{b-t} = dv$, hincque $s' = bv - \int t\,dv$, seu $s' = bv - \int dv \int s\,dv$. Oportet autem, vt hic iterum fiat $s = 0$, si $v = 0$; prodeat vero $s' = a'$, posito $v = \varrho$, ita vt a' denotet totam curuam A′M′B′.

XVII.

Quodsi simili modo pro curua quarta A′N′B″ ponamus arcum A′N′ $= t'$, cuius amplitudo est $= v$, et A′N′B″ $= b'$, erit etiam $\frac{dt'}{s'} = dv$. Pro curua autem quinta A″M″B″, ponendo arcum A″M″ $= s''$, et totum arcum A″M″B″ $= a''$, erit $\frac{ds''}{b' - t'} = dv$. Pro curua sexta respondeat amplitudini v arcus $= t''$, amplitudini vero ϱ arcus $= b''$, eritque $\frac{dt''}{s''} = dv$. Pro septima curua respondeat amplitudini v arcus $= s'''$, at amplitudini ϱ arcus $= a'''$, erit $\frac{ds'''}{b''-t''} = dv$, ficque progredi licet in infinitum.

XVIII.

Regrediamur autem a qualibet curua ad praecedentes; et affumta curua fecunda, feu aequatione inter t et v, erit $s = \frac{dt}{dv}$. Sumta autem tertia curua, feu aequatione inter s' et v, erit $b - t = \frac{ds'}{dv}$, feu $t = b - \frac{ds'}{dv}$, et fumto dv conftante $s = -\frac{dds'}{dv^2}$. Sumto vero pro quarta curua aequatione inter t' et v, erit $s' = \frac{dt'}{dv}$; $t = b - \frac{ddt'}{dv^2}$; et $s = -\frac{d^3 t'}{dv^3}$. At fumta pro quinta curua aequatione inter s'' et v, erit $b' - t' = \frac{ds''}{dv}$, feu $t' = b' - \frac{ds''}{dv}$; et $s' = -\frac{dds''}{dv^2}$; $t = b + \frac{d^3 s''}{dv^3}$; $s = \frac{d^4 s''}{dv^4}$.

XIX.

Cum iam, pofito $v = 0$, fiat $s = 0$, $t = 0$, $s' = 0$, $t' = 0$, $s'' = 0$ etc. pofito autem $v = \varrho$, fit $s = a$, $t = b$, $s' = a'$, $t' = b'$, $s'' = a''$ etc. fequentes proprietates functionum s, t, s', t', s'', t'', etc. erunt perfpicuae; erit

I. $\left.\begin{matrix} \text{fi } v = 0 \\ \text{fi } v = \varrho \end{matrix}\right\} \begin{matrix} s = 0 \\ s = a \end{matrix}$

II. $\left.\begin{matrix} \text{fi } v = 0 \\ \text{fi } v = \varrho \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t = 0; & \frac{dt}{dv} = 0 \\ t = b; & \frac{dt}{dv} = a \end{matrix}$

III. $\left.\begin{matrix} \text{fi } v = 0 \\ \text{fi } v = \varrho \end{matrix}\right\} \begin{matrix} s' = 0; & \frac{ds'}{dv} = b; & \frac{dds'}{dv^2} = 0 \\ s' = a'; & \frac{ds'}{dv} = 0; & \frac{dds'}{dv^2} = -a \end{matrix}$

IV. $\left.\begin{matrix} \text{fi } v = 0 \\ \text{fi } v = \varrho \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t' = 0; & \frac{dt'}{dv} = 0; & \frac{ddt'}{dv^2} = b; & \frac{d^3 t'}{dv^3} = 0 \\ t' = b'; & \frac{dt'}{dv} = a'; & \frac{ddt'}{dv^2} = 0; & \frac{d^3 t'}{dv^3} = -a \end{matrix}$

V. $\left.\begin{matrix} \text{fi } v = 0 \\ \text{fi } v = \varrho \end{matrix}\right\} \begin{matrix} s'' = 0; & \frac{ds''}{dv} = b; & \frac{dds''}{dv^2} = 0; & \frac{d^3 s''}{dv^3} = -b; & \frac{d^4 s''}{dv^4} = 0 \\ s'' = a''; & \frac{ds''}{dv} = 0; & \frac{dds''}{dv^2} = -a'; & \frac{d^3 s''}{dv^3} = 0; & \frac{d^4 s''}{dv^4} = a. \end{matrix}$

XX.

XX.

Hinc ergo patet, cuiusmodi proprietates sit habitura curua infinitesima in isto curuarum ordine, cuius quidem exponens sit impar. Si enim amplitudini v respondeat arcus $= z$, aequatio inter v et z erit ita comparata, vt sit:

$$\begin{matrix}\text{si } v = [illegible] \\ \text{si } v = [illegible]\end{matrix}\Bigg\} ; \; z = \begin{cases} 0 \\ +f \end{cases} ; \; \frac{dz}{dv} = \begin{cases} +g \\ 0 \end{cases} ; \; \frac{ddz}{dv^2} = \begin{cases} 0 \\ -f' \end{cases} ; \; \frac{d^3z}{dv^3} = \begin{cases} -g' \\ 0 \end{cases} ; \; \frac{d^4z}{dv^4} = \begin{cases} 0 \\ +f'' \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{si } v = [illegible] \\ \text{si } v = [illegible]\end{matrix}\Bigg\} ; \; \frac{d^5z}{dv^5} = \begin{cases} +g'' \\ 0 \end{cases} ; \; \frac{d^6z}{dv^6} = \begin{cases} 0 \\ -f''' \end{cases} ; \; \frac{d^7z}{dv^7} = \begin{cases} -g''' \\ 0 \end{cases} \text{ etc.}$$

vbi litterae f, f', f'' etc. g, g', g'' etc. denotant quantitates finitas et positiuas.

XXI.

Quia hae proprietates sunt numero infinitae, eae sufficiunt ad curuam determinandam. Si enim amplitudini $v + x$ respondeat arcus y, dum arcus amplitudini v respondens est z, erit

$$y = z + \frac{x\,dz}{1\,dv} + \frac{x^2\,ddz}{1 \cdot 2\,dv^2} + \frac{x^3\,d^3z}{1 \cdot 2 \cdot 3\,dv^3} + \frac{x^4\,d^4z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,dv^4} + \text{etc.}$$

Ponatur iam $v = 0$, ita vt y sit arcus amplitudini x respondens, erit

$$y = \frac{gx}{1} - \frac{g'x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{g''x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{g'''x^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \text{etc.}$$

ac pro x et y, restitutis prioribus valoribus v et z, erit

$$z = \frac{gv}{1} - \frac{g'v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{g''v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{g'''v^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \text{etc.}$$

XXII.

Tribuantur his constantibus g, g', g'' etc. valores sequentes:

$$
\begin{aligned}
g &= A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}\\
g' &= A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}\\
g'' &= A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}\\
g''' &= A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

nihil enim impedit, quo minus talis positio semper locum habere queat; his autem valoribus substitutis, obtinebitur

$$z = A\,\text{sin.}\,\alpha v + B\,\text{sin.}\,\beta v + C\,\text{sin.}\,\gamma v + D\,\text{sin.}\,\delta v + E\,\text{sin.}\,\varepsilon v + \text{etc.}$$

hacque forma iam satisfit ei conditioni, vt, posito $v = 0$, fiat

$$z = 0;\ \frac{dz}{dv} = +g;\ \frac{ddz}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3z}{dv^3} = -g';\ \frac{d^4z}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5z}{dv^5} = +g''\ \text{etc.}$$

XXIII.

Superest igitur, vt, posito $v = \varrho$, satisfiat his conditionibus

$$z = f;\ \frac{dz}{dv} = 0;\ \frac{ddz}{dv^2} = -f';\ \frac{d^3z}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4z}{dv^4} = +f''\ \text{etc.}$$

hinc vero erit:

$$
\begin{aligned}
f &= A\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}\\
0 &= A\alpha\,\text{cos.}\,\alpha\varrho + B\beta\,\text{cos.}\,\beta\varrho + C\gamma\,\text{cos.}\,\gamma\varrho + D\delta\,\text{cos.}\,\delta\varrho + \text{etc.}\\
f' &= A\alpha^2\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\beta^2\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\gamma^2\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\delta^2\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}\\
0 &= A\alpha^3\,\text{cos.}\,\alpha\varrho + B\beta^3\,\text{cos.}\,\beta\varrho + C\gamma^3\,\text{cos.}\,\gamma\varrho + D\delta^3\,\text{cos.}\,\delta\varrho + \text{etc.}\\
f'' &= A\alpha^4\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\beta^4\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\gamma^4\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\delta^4\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

XXIV.

XXIV.

Oportet ergo pro α, β, γ, δ, etc. eiusmodi numeros assumi, vt fiat

$$\cos.\alpha\varrho = 0;\ \cos.\beta\varrho = 0;\ \cos.\gamma\varrho = 0;\ \cos.\delta\varrho = 0 \text{ etc.}$$

vnde perspicitur, nonnisi numeros impares loco litterarum α, β, γ, δ etc. substitui posse. Erit itaque

$$g = A + 3B + 5C + 7D + 9E + \text{etc.}$$
$$g' = A + 3^3B + 5^3C + 7^3D + 9^3E + \text{etc.}$$
$$g'' = A + 3^5B + 5^5C + 7^5D + 9^5E + \text{etc.}$$
$$g''' = A + 3^7B + 5^7C + 7^7D + 9^7E + \text{etc.}$$

etc.

et pro curua infinitissima habebitur haec aequatio inter z et v:

$$z = A\sin.v + B\sin.3v + C\sin.5v + D\sin.7v + E\sin.9v + \text{etc.}$$

XXV.

Porro vero ob $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 7$ etc. erit $\sin.\alpha\varrho = 1$; $\sin\beta\varrho = -1$; $\sin.\gamma\varrho = +1$; $\sin.\delta\varrho = -1$; $\sin.\varepsilon\varrho = +1$ etc.
vnde pro f, f', f'', f''', etc. sequentes valores prodibunt:

$$f = A - 3B + 5C - 7D + 9E - \text{etc.}$$
$$f' = A - 3^2B + 5^2C - 7^2D + 9^2E - \text{etc.}$$
$$f'' = A - 3^4B + 5^4C - 7^4D + 9^4E - \text{etc.}$$
$$f''' = A - 3^6B + 5^6C - 7^6D + 9^6E - \text{etc.}$$

etc.

XXVI.

Verum natura rei postulat, vt omnium litterarum f, f', f'', f''' etc. item g, g', g'', g''' etc. valores

lores ſint poſitiui et finiti; quorum numerus cum ſit infinitus, erunt infiniteſimarum valores:

$$g^{(\infty)} = A + 3^{\infty}B + 5^{\infty}C + 7^{\infty}D + 9^{\infty}E + \text{etc.}$$
$$f^{(\infty)} = A - 3^{\infty}B + 5^{\infty}C - 7^{\infty}D + 9^{\infty}E - \text{etc.}$$

qui finiti ambo eſſe nequeunt, niſi omnes litterae B, C, D, E etc. euaneſcant; alioquin enim ambo valores certo fiant infiniti.

XXVII.

Hinc igitur conficitur, in ordine curuarum noſtrarum curuam infiniteſimam tali aequatione inter arcum z et amplitudinem v exprimi, vt ſit $z = A\,\text{ſin.}\,v$, quae manifeſto eſt pro cycloide. Cum ergo haec eadem aequatio reſultet, quaecunque curua in locum primae AMB aſſumatur, dummodo eius amplitudo ſit 90°, manifeſtum eſt, infiniteſimas curuarum, quae per continuam euolutionem naſcuntur, ſemper in cycloides abire; ſicque habemus perfectam demonſtrationem theorematis *Bernoulliani*.

Tab. II. Fig. 3.

XXVIII.

Simili modo ſi amplitudo curuae datae AMB maior minor ve fuerit angulo recto, atque euolutio pari modo alternatim inſtituatur, definiri poterit natura curvarum, ad quas poſt euolutiones infinitas peruenietur. Sit enim ANB′ curua ex euolutione prima in A incepta nata; indeque oriatur, euolutionem in B′ inchoando, curua B′MA′, ex hac porro, euolutionem in A′ incipiendo, curua A′N′B″; et ex hac curua B″M″A″, hincque vltra curua A″N″B‴ et ita porro; quaeri-

turque

turque natura curuarum infinitefimarum hoc modo defcriptarum.

XXIX.

Primo autem patet, omnes has curuas eiusdem fore amplitudinis, et tam puncta A, A', A'', etc. quam puncta B, B', B'', etc. in directum fita. Tum etiam manifeftum eft, has rectas CF et BE fore diuergentes, fi amplitudo curuarum angulum rectum fuperet, excellus fcilicet amplitudinis fupra angulum rectum metietur inclinationem. Sin autem amplitudo fuerit minor recto, illae rectae conuergent, et coibunt fub angulo, defectui ab angulo recto aequali. Illo ergo cafu curuae tandem in infinitum expandentur, hoc vero in fpatium euanefcens coarctabuntur.

XXX.

Sit amplitudo primae curuae $AMB = \Phi$, quae fimul omnibus fequentibus conuenit; ac figura 3 repraefentat cafum, quo hic angulus Φ fuperat angulum rectum ϱ, ita vt $\Phi - \varrho$ exhibeat inclinationem rectarum EB et FC. Sumta iam amplitudine quacunque $= v$, fint arcus in ferie curuarum huic amplitudini refpondentes:

$AM = s$; $AN = t$; $A'M' = s'$; $A'N' = t'$; $A''M'' = s''$;
$A''N'' = t''$; $A'''M''' = s'''$ etc.

qui pofito $v = \Phi$ fiant:

$s = a$; $t = b$; $s' = a'$; $t' = b'$; $s'' = a''$; $t'' = b''$;
$s''' = a'''$ etc.

qui valores praefenti cafu $\Phi > \varrho$ continuo crefcunt: fin autem effet $\Phi < \varrho$, continuo decrefcunt, tandemque euanefcunt.

XXXI.

XXXI.

Cum iam ſint radii oſculi

$NM = s$; $M'N = b - t$; $N'M' = s'$; $M''N' = b' - t'$; $N''M'' = s''$ etc.

erit ex natura euolutionis

$$\frac{dt}{s} = dv;\ \frac{ds'}{b-t} = dv;\ \frac{dt'}{s'} = dv;\ \frac{ds''}{b'-t'} = dv;\ \frac{dt''}{s''} = dv \text{ etc.}$$

ſiue

$$s = \frac{dt}{dv};\ b - t = \frac{ds'}{dv};\ s' = \frac{dt'}{dv};\ b' - t' = \frac{ds''}{dv};\ s'' = \frac{dt''}{dv} \text{ etc.}$$

Quodſi ergo conſideretur curua ſeptima, cuius arcus amplitudini v conueniens eſt $= s'''$, et amplitudini toti $\Phi = a'''$, erit

$$b'' - t'' = \frac{ds'''}{dv};\ s'' = -\frac{dds'''}{dv^2};\ b' - t' = -\frac{d^3 s'''}{dv^3};\ s' = \frac{d^4 s'''}{dv^4};$$
$$b - t = \frac{d^5 s'''}{dv^5}.$$

XXXII.

Cum autem, poſito $v = 0$, omnes quantitates s, t, s', t' etc. euaneſcant, apparet, in curua ſeptima caſu $v = 0$ fore

$$s''' = 0;\ \frac{ds'''}{dv} = b'';\ \frac{dds'''}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3 s'''}{dv^3} = -b';\ \frac{d^4 s'''}{dv^4} = 0;$$
$$\frac{d^5 s'''}{dv^5} = b \text{ etc.}$$

Caſu autem $v = \Phi$, cum ſit $s = a$; $t = b$; $s' = a'$; $t' = b'$; $s'' = a''$; $t'' = b''$; $s''' = a'''$ etc. erit quoque pro curua ſeptima, poſito $v = \Phi$,

$$s''' = a''';\ \frac{ds'''}{dv} = 0;\ \frac{dds'''}{dv^2} = -a'';\ \frac{d^3 s'''}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4 s'''}{dv^4} = a';\ \frac{d^5 s'''}{dv^5} = 0.$$

XXXIII.

Pro curua ergo infiniteſima, quae quidem in ordine locum imparem ſortietur, ſi arcus amplitudini v conuoconueniens ſit $=z$, natura eius ita erit comparata, vt poſito $v=0$, ſit

$$z=0;\ \frac{dz}{dv}=+g;\ \frac{ddz}{dv^2}=0;\ \frac{d^3z}{dv^3}=-g';\ \frac{d^4z}{dv^4}=0;\ \frac{d^5z}{dv^5}=+g'';\ \text{etc.}$$

ſin autem ponatur $v=\Phi$, erit

$$z=f;\ \frac{dz}{dv}=0;\ \frac{ddz}{dv^2}=-f';\ \frac{d^3z}{dv^3}=0;\ \frac{d^4z}{dv^4}=+f'';\ \frac{d^5z}{dv^5}=0\ \text{etc.}$$

quantitates autem f et g erunt, vel infinitae, vel infinite paruae, prout fuerit, vel $\Phi>\varrho$, vel $\Phi<\varrho$, earumque deriuatae f', g', f'', g'' etc. continuo, vel decreſcent, vel creſcent, ita vt infiniteſimae fiant finitae.

XXXIIII.

Si iam ratiocinium pari modo, quo ſupra §. XXI. inſtituamus, intelligemus, naturam curuae tali aequatione inter z et v exprimi, vt ſit:

$$z=A\,\text{ſin.}\,\alpha v+B\,\text{ſin.}\,\beta v+C\,\text{ſin.}\,\gamma v+D\,\text{ſin.}\,\delta v+E\,\text{ſin.}\,\varepsilon v\ \text{etc.}$$

ex qua differentiando fiet:

$$\frac{dz}{dv}=A\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha v+B\beta\,\text{coſ.}\,\beta v+C\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma v+D\delta\,\text{coſ.}\,\delta v+E\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon v+\text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dv^2}=-A\alpha^2\,\text{ſin.}\,\alpha v-B\beta^2\,\text{ſin.}\,\beta v-C\gamma^2\,\text{ſin.}\,\gamma v-D\delta^2\,\text{ſin.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^3z}{dv^3}=-A\alpha^3\,\text{coſ.}\,\alpha v-B\beta^3\,\text{coſ.}\,\beta v-C\gamma^3\,\text{coſ.}\,\gamma v-D\delta^3\,\text{coſ.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^4z}{dv^4}=+A\alpha^4\,\text{ſin.}\,\alpha v+B\beta^4\,\text{ſin.}\,\beta v+C\gamma^4\,\text{ſin.}\,\gamma v+D\delta^4\,\text{ſin.}\,\delta v+\text{etc.}$$

$$\frac{d^5z}{dv^5}=+A\alpha^5\,\text{coſ.}\,\alpha v+B\beta^5\,\text{coſ}\,\beta v+C\gamma^5\,\text{coſ}\,\gamma v+D\delta^5\,\text{coſ.}\,\delta v+\text{etc.}$$

etc.

XXXV.

Posito iam $v = o$, in nihilum abeunt valores z, $\frac{ddz}{dv^2}$, $\frac{d^4 z}{dv^4}$ etc. vti oportet. Tum vero obtinebitur:

$$g = A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}$$
$$g' = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$g'' = A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}$$
$$g''' = A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}$$
etc.

valores autem infinitesimos oportet fieri finitos, seu necesse est, sit:

$$A\alpha^\infty + B\beta^\infty + C\gamma^\infty + D\delta^\infty + E\varepsilon^\infty + \text{etc.} = \text{quant. finitae.}$$

XXXVI.

Cum autem, posito $v = \Phi$, valores $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^3 z}{dv^3}$, $\frac{d^5 z}{dv^5}$, etc. euanescere debeant, isti cosinus euanescant necesse est:

$$\text{cos.}\,\alpha\Phi = o, \ \text{cos.}\,\beta\Phi = o, \ \text{cos.}\,\gamma\Phi = o, \ \text{cos.}\,\gamma\Phi = o \ \text{etc.}$$

alii autem non dantur anguli, quorum cosinus euanescant, praeter ϱ, 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ etc. vnde capi oportet

$$\alpha = \frac{\varrho}{\Phi}; \ \beta = \frac{3\varrho}{\Phi}; \ \gamma = \frac{5\varrho}{\Phi}; \ \delta = \frac{7\varrho}{\Phi}; \ \varepsilon = \frac{9\varrho}{\Phi} \ \text{etc.}$$

tum vero eorundem angulorum sinus erunt

$$\text{sin.}\,\alpha\Phi = +1; \ \text{sin.}\,\beta\Phi = -1; \ \text{sin.}\,\gamma\Phi = +1; \ \text{sin.}\,\delta\Phi = -1; \ \text{sin.}\,\varepsilon\Phi = +1 \ \text{etc.}$$

XXXVII.

Posito ergo $v=\Phi$, obtinebuntur sequentes aequationes:

$$\begin{aligned} f &= A - B + C - D + E - \text{etc.} \\ f' &= A\alpha^2 - B\beta^2 + C\gamma^2 - D\delta^2 + E\varepsilon^2 - \text{etc.} \\ f'' &= A\alpha^4 - B\beta^4 + C\gamma^4 - D\delta^4 + E\varepsilon^4 - \text{etc.} \\ f''' &= A\alpha^6 - B\beta^6 + C\gamma^6 - D\delta^6 + E\varepsilon^6 - \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quorum valorum infinitesimi iterum finiti euadere debent, seu esse oportet:

$A\alpha^{\infty} - B\beta^{\infty} + C\gamma^{\infty} - D\delta^{\infty} + E\varepsilon^{\infty} -$ etc. $=$ quant. finitae.

XXXVIII.

Substituamus ergo pro α, β, γ, δ etc. valores, qui ipsis conuenire possunt, ac ponendo ad abbreuiandum $\frac{\varrho}{\Phi}=n$, vt sit

$\alpha=n$; $\beta=3n$; $\gamma=5n$; $\delta=7n$, etc.

atque necesse est, vt sit:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tam } An^{\infty}+3^{\infty}Bn^{\infty}+5^{\infty}Cn^{\infty}+7^{\infty}Dn^{\infty}+\text{etc.}\\ \text{quam } An^{\infty}-3^{\infty}Bn^{\infty}+5^{\infty}Cn^{\infty}-7^{\infty}Dn^{\infty}+\text{etc.}\end{array}\right\}\text{quant. finita}$$

siue requiritur, vt sit

$n^{\infty}(A \pm 3^{\infty}B + 5^{\infty}C \pm 7^{\infty}D +$ etc.) quantitas finita et quidem positiua.

XXXIX.

Quodsi iam An^{∞} sit quantitas finita, perspicuum est, reliquas litteras B, C, D etc. omnes esse debere euanescentes. Ponamus ergo $B=0$, $C=0$, $D=0$ etc. atque $An^{\infty}=a$, vt sit $A=\frac{a}{n^{\infty}}=\frac{a\Phi^{\infty}}{\varrho^{\infty}}$, atque pro curva infinitesima, quae per continuam euolutionem curvae datae AMB, cuius amplitudo est Φ, nascitur, habebimus hanc aequationem: $z = \frac{a\Phi^{\infty}}{\rho^{\infty}}\ \text{sin.}\ \frac{\rho}{\Phi}v$, vel $z = \frac{a}{n^{\infty}}\ \text{sin.}\ nv$, posito $n = \frac{\rho}{\Phi}$. Constat autem, hanc aequationem esse pro epicycloide, vel hypocycloide, quas curuas notum est similes esse suis euolutis. Si enim radius circuli immobilis sit $= h$, et mobilis $= k$, erit $n = \frac{\rho}{\Phi} = \frac{h}{h+2k}$, ideoque $\frac{k}{h} = \frac{\Phi - \rho}{2\rho}$.

XL.

Hinc iam facile perspicitur id, quod iam notauimus, si sit $\Phi > \rho$, seu $n < 1$, curuas infinitesimas in infinitum expandi; fit enim $n^{\infty} = 0$, ideoque $\frac{a}{n^{\infty}} = \infty$, vnde arcus, cuicunque amplitudini respondens, erit infinitus. Altero autem casu, quo $\Phi < \rho$, seu $n > 1$, ob $n^{\infty} = \infty$, erit $\frac{a}{n^{\infty}} = 0$, sicque curua infinitesima in spatium infinite paruum contrahitur. Semper ergo quaecunque curua pro AMB accipiatur post infinitas euolutiones, vel ad epicycloides, si $\Phi > \rho$, vel ad hypocycloides, si $\Phi < \rho$ peruenietur; cyclois vero communis prodit, si $\Phi = \rho$, qui est casus, quem supra euoluimus, quo $n = 1$, ideoque n^{∞} neque in infinitum augetur, neque diminuitur.

XLI.

Tab. II. Fig. 4. Sit AMB curua similis ei, quae per euolutionem infinitesimam nascitur, in qua sumto arcu quocunque

cunque $AM = z$, cuius amplitudo seu angulus ANM sit $= v$, et natura huius curuae hac aequatione $z = c\,\text{sin.}\,nv$ continebitur, vnde patet, curuam illam esse rectificabilem. Praeterea vero euidens est, eam simul esse algebraicam, quoties n est numerus rationalis, solo casu $n = 1$ excepto, quo cyclois vulgaris enascitur.

XLII.

Si enim ponantur coordinatae orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ob angulum $ANM = v$ et elementum curuae $= dz$, erit $\frac{dx}{dz} = \text{sin.}\,v$ et $\frac{dy}{dz} = \text{cos.}\,v$. At est $dz = ncdv\,\text{cos.}\,nv$, vnde fit

$$dx = ncdv\,\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{sin.}(1+n)v + \text{sin.}(1-n)v)$$

$$dy = ncdv\,\text{cos.}\,v\,\text{cos.}\,nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{cos.}(1+n)v + \text{cos.}(1-n)v)$$

quae formulae sunt integrales, excepto casu $n = 1$, quippe quo, ob $\text{cos.}(1-n)v = 1$, applicata y determinaretur per ipsum angulum v, sicque a circuli quadratura penderet. Integratio vero praebet:

$$x = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{1-\text{cos.}(1+n)v}{1+n} + \frac{1-\text{cos.}(1-n)v}{1-n}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{\text{sin.}(1+n)v}{1+n} + \frac{\text{sin.}(1-n)v}{1-n}\right).$$

XLIII.

Hae coordinatae etiam ita possunt exprimi, vt sit

$$x = \frac{nc}{1-nn}(1 - \text{cos.}\,v\,\text{cos.}\,nv - n\,\text{sin.}\,v\,\text{sin.}\,nv)$$

$$y = \frac{nc}{1-nn}(\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,nv - n\,\text{cos.}\,v\,\text{sin.}\,nv).$$

Ac si sumatur $AC = \frac{nc}{1-nn}$, ponaturque $CP = t$, erit

$$t = \frac{nc}{1-nn}(\text{cos.}\,v\,\text{cos.}\,nv + n\,\text{sin.}\,v\,\text{sin.}\,nv)$$

vnde ſit

$$CM = \sqrt{(tt+yy)} = \frac{nc}{1-nn}\sqrt{(\text{coſ}.nv^2 + nn\,\text{ſin}.nv^2)}.$$

Pro altero ergo termino curuae B, vbi ſit amplitudo $v = \Phi$, et $nv = \varrho$, erit $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, ita vt ſit $AC : BC = 1 : n$. Eſt vero C centrum circuli immobilis, CB eius radius, et $AC - BC = \frac{nc}{1+n}$ diameter circuli mobilis pro deſcriptione epicycloidis, vel hypocycloidis.

XLIV.

Cum ſit $AN = x + \frac{y\,dy}{dx} = x + \frac{y\,\text{coſ}.v}{\text{ſin}.v}$, erit

$$AN = \frac{nc}{1-nn}\left(1 - \frac{n\,\text{ſin}.nv}{\text{ſin}.v}\right) \quad \text{et} \quad CN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{ſin}.nv}{\text{ſin}.v}$$

ideoque, ob $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, erit

$$CN : CB = \text{ſin}.nv : \text{ſin}.v.$$

Quare ſi centro C radio CB deſcribatur circulus rectam MN ſecans in L, ducaturque $CL = CB$, ob angulum $ANM = v$ et $CN : CL = \text{ſin}.CLN : \text{ſin}.v$, erit angulus $CLN = nv$, et angulus $ACL = (1-n)v$.

XLV.

Porro eſt $MN = \frac{y\,dz}{dx} = \frac{y}{\text{ſin}.v} = \frac{nc}{1-nn}\left(\text{coſ}.nv - \frac{nc\text{oſ}.v\,\text{ſin}.nv}{\text{ſin}.v}\right)$ tum vero ex triangulo CNL reperitur

$$LN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{ſin}.(1-n)v}{\text{ſin}.v} = \frac{nnc}{1-nn}\left(\text{coſ}.nv - \frac{\text{coſ}.v\,\text{ſin}.nv}{\text{ſin}.v}\right)$$

vnde concluditur $LM = \frac{n(1-n)c}{1-nn}\,\text{coſ}.nv = \frac{nc}{1+n}\,\text{coſ}.nv$. At radius oſculi curuae in M eſt $= \frac{dz}{dv} = nc\,\text{coſ}.nv$, qui cum cadat in rectam ML, erit radius oſculi ad ML vt $1+n$ ad 1, hoc eſt in ratione conſtanti, quae ſunt proprietates epicycloidum et hypocycloidum.

DEMON-