DE MOTV VIBRATORIO TYMPANORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae adhuc a Geometris de motu vibratorio sunt inuestigata, ad corpora tantum vna dimensione praedita, vel quae potius tanquam talia considerare liceat, sunt restricta, cuius modi sunt cordae tensae, et laminae elasticae, quarum vnica tantum dimensio secundum longitudinem extensa in calculum ingreditur, caeteris neglectis. Hinc quomodo superficies, cuiusmodi est linteum vel membrana extensa, ad motum vibratorium sit comparata, a nemine adhuc, quantum mihi quidem constat, est definitum. Pertinet huc imprimis doctrina sonorum, quos tympanum tensum ac pulsum edere solet, cuius doctrinae hic quidem prima quasi fundamenta iacere constitui, quae eo magis omni attentione digna videtur, quod nouum fere calculi genus requirit; cum enim in cordarum vibrationibus infinita varietas locum habeat, in vibrationibus membranarum infinities maiorem varietatem admitti oportere euidens est, quam idcirco calculus exhibere debet.

2. Quo igitur huiusmodi superficiei motum, ac potissimum tensionem, in calculum facilius inducere possimus, ad eius generationem, textura filorum secundum longitudinem et latitudinem expansorum ortam respici conueniet, cum hac ratione lintea reuera efficiantur, in membranis autem filorum numerum quasi infinitum concipere liceat. Primum ergo interualla filorum se mutuo normaliter traiicientium tanquam finita spectemus, quae littera ω indicentur, qua simul latitudo singulorum filorum exponatur, quasi omnia ita essent compressa, vt planitiem vbique aequaliter compleant.

Tab. III. Fig. 2. In figura ergo filorum lateri AB parallelorum numerus est $= \frac{AC}{\omega}$, longitudo $= AB$, et latitudo $= \omega$, vnde summa eorum est $= AC.AB$. Simili modo alterorum filorum ipsi AC parallelorum summa est $= AB.AC$, ita vt planities rectanguli tota sit $= 2AB.AC$, quoniam ob texturam materia eorum vbique duplicatur. Si haec quantitas $2AB.AC$, seu dupla area insuper in crassitiem, quae sit $= k$ ducatur, habebitur volumen lintei $= 2k.AB.AC$, quo simul massam indicemus.

3. Singulis filis peculiarem tensionem tribuere possemus, sed ne calculus nimis fiat molestus, et quia ob eorum mutuam implicationem inaequalitas tensionis vix subsistere potest, ponamus singula fila lateribus AB et CD parallela tendi vi tanta, quae aequetur ponderi voluminis eiusdem materiae $= hk\omega$, vnde omnia simul tendentur vi $= hk.AC$; singula autem fila lateribus AC et BD parallela tendantur vi $= fk\omega$, vt omnium tensio sit $= fk.AB$. Quodsi iam elementum quodcunque in puncto Y collectum concipiamus, vbi scilicet materia vnum quadratulum complens, quae est

$= 2$

$=2k\omega\omega$, sit congregata, perpendendum est, fili portionem pq tendi vi $=bk\omega$, fili autem alterius transversi qr tensionem esse $=fk\omega$. Quare si haec puncta a situ naturali in sublime sint diducta per minima interualla, quae per $\Pi.Y$, Πp, Πq, Πr et Πy indicemus, elementum Y deorsum premetur, ob tensionem fili py,

$$\text{vi}=bk\omega\left(\frac{2\Pi.Y-\Pi p-\Pi y}{\omega}\right)=bk(2\Pi Y-\Pi p-\Pi y)$$

at ob tensionem fili qr

$$\text{vi}=fk\omega\left(\frac{2\Pi Y-\Pi q-\Pi r}{\omega}\right)=fk(2\Pi Y-\Pi q-\Pi r)$$

vnde ex principiis mechanicis oritur

$$2k\omega\omega\left(\frac{dd.\Pi Y}{dt^2}\right)=-2gbk(2\Pi Y-\Pi p-\Pi q)$$
$$-2gfk(2\Pi Y-\Pi q-\Pi r)$$

4. Quodsi iam filorum interualla ω infinite parua statuamus, et pro puncto quocunque Y, quod in statu naturali in plano ABCD versatur, ponamus coordinatas orthogonales $CX=x$, et $XY=y$, tum vero id in statu violento ab hoc plano sursum fuerit diductum per interuallum $=z$, vt sit $\Pi Y=z$, erit z functio quaedam tam binarum variabilium x et y, quam temporis t. Tum vero erit $\Pi Y-\Pi p=\omega\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et

$$\Pi y-2\Pi Y-\Pi p=\omega\omega\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

simili modo ob $\Pi Y-\Pi r=\omega\left(\frac{dz}{dy}\right)$ erit

$$\Pi q-2\Pi Y-\Pi r=\omega\omega\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Quibus substitutis aequatio nostra per $\omega\omega$ diuisa induet hanc formam:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=gb\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+gf\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

vnde etiam crassities membranae k ex calculo excessit. Hic autem g denotat altitudinem lapsus vno minuto secundo, dum tempus t in minutis secundis exprimitur, at quantitas b tensioni filorum abscissae x parallelorum, f vero applicatae y parallelorum, est proportionalis, secundum mensuras supra expositas.

5. Quo rationem harum tensionum clarius perspiciamus, habeat membrana figuram rectangularem ABCD; etsi enim aliam habuerit quamcunque, rationem tensionis ad illum casum reducere licet. Sit, vt ante, k crassities membranae, eiusque pondus $= M$, quatenus scilicet eius figura est ABCD. Hinc quia ante vires per volumina materiae homogeneae, cuiusmodi est ipsa membrana, expressimus, erit $M = 2k\,AB.AC$. Deinde sit vis lateribus oppositis AC et BD applicata, qua omnia fila AB.CD abscissis x parallela distendunturi $= E$; vis autem lateribus AB et CD applicata, qua fila omnia AC.BD applicatis y parallela tenduntur $= F$, erit $E = bk.AC$, et $F = fk.AB$, hincque ob $k = \frac{M}{2AB.AC}$ habebimus

$$b = \frac{2E.AB}{M} \text{ et } f = \frac{2F.AC}{M}$$

ex quo, omnibus ad mensuras determinatas reductis, aequatio nostra motum vibratorium membranae exprimens erit

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{2Eg.AB}{M}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{2Fg.AC}{M}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

in qua autem neutiquam assumitur, membranae figuram esse ABCD, sed quaecunque ea fuerit, ad eam aequationem ipsam accommodari oportet.

6.

6. Quamcunque scilicet membrana tensa, velut tympanum, habuerit figuram, eius terminos, in quibus quasi est fixa, sollicite notari oportet; tum vero superior aequatio ita resolui debet, vt coordinatis x et y ad hos terminos porrectis, quantitas z omni tempore euanescat, seu vt z eiusmodi sit functio ipsarum x, y et t, vt prioribus x et y ad terminos membranae relatis, fiat $z = 0$, quicquid sit t. Tum vero etiam in resolutione nostrae aequationis ad agitationem membranae initio inductam attendi conuenit, vt non solum functio z singulorum punctorum Y deturbationem de statu naturali indicet, sed etiam formula $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ celeritatem cuique impressam exhibeat. Ad aequationem autem nostram succinctius exprimendam, ponamus $\frac{2Eg.AB}{M} = ee$, et $\frac{2Fg.AC}{M} = ff$, vt nostra aequatio fiat:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + ff\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

Plerumque autem poni $ff = ee$ conueniet, vt tensio per totam membranam sit eadem, ac discrimen inter filamenta secundum longitudinem et latitudinem extensa tollatur. Sit ergo $ff = ee$, atque habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + ee\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

7. Ponamus $z = v \sin.(\alpha t + \mathfrak{A})$, sitque v tantum functio ipsarum x et y, atque aequatio nostra ad duas tantum variabiles reducetur, excluso tempore t, fietque

$$0 = \frac{\alpha\alpha v}{ee} + \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dy^2}\right).$$

Ponamus porro $v = u \sin.\left(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B}\right)$, vt etiam variabilem x ex calculo elidamus, fietque u functio solius y ex hac aequatione determinanda:

$$0 = \frac{\alpha\alpha u}{ee} - \frac{\beta\beta u}{aa} + \frac{ddu}{dy^2},$$

vnde

vnde, si ponamus $u = \sin.(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C})$, erit

$$\frac{\alpha\alpha}{ee} = \frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb}.$$

Quare sumto $\alpha = e\sqrt{(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb})}$ habebimus huiusmodi aequationem finitam:

$$z = A \sin.(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin.(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B}) \sin.(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C})$$

vbi A denotat lineolam quandam minimam, quandoquidem particula z semper debet esse minima. Cum autem hic numeri β, γ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pro lubitu accipi queant, infinitae huiusmodi formulae exhiberi possunt, quae non solum singulae, sed etiam iunctim sumtae, problemati satisfaciunt.

8. Incipiamus a casu simplicissimo, quo est

$$z = A \cos.\alpha t. \sin.\frac{\beta x}{a}. \sin.\frac{\gamma y}{b}$$

vbi est $\alpha = e\sqrt{(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb})}$; ita vt posito $t = 0$ aequatio $z = A \sin.\frac{\beta x}{a} \sin.\frac{\gamma y}{b}$ statum tympano initio impressum denotet, quo momento cum in genere sit cuiusque puncti celeritas:

$$(\frac{dz}{dt}) = -A\alpha \sin.\alpha t \sin.\frac{\beta x}{a} \sin.\frac{\gamma y}{b}$$

euidens est, in hoc statu violento tympanum fuisse in quiete. Inuestigemus nunc terminos tympani, qui perpetuo maneant immoti, ac primo quidem manifestum est, fore $z = 0$, tam si $x = 0$, quam si $y = 0$, quare tam linea recta AC, quam CD, constituet tympani terminos. Tum vero fit etiam $z = 0$, si sit $x = \frac{2\pi a}{\beta}$, et $y = \frac{2\pi b}{\gamma}$, vnde sumta $CD = \frac{2\pi a}{\beta}$ et $CA = \frac{2\pi b}{\gamma}$, reli-

reliqui termini erunt in rectis AB et BD, ita vt tympani figura prodeat *rectangulum* ABCD.

Tab. III. Fig. 3.

9. Sit ergo parallelogrammum rectangulum ABCD figura tympani in perimetro fixi, et vndequaque tensi vi per litteram e relata. Ponamus latera AB $=$ CD $= a$, et AC $=$ BD $= b$, erit $\beta = \gamma = 2\pi$, ac pro motu vibratorio huius tympani habebimus:

$$z = A \cos. \alpha t \sin. \frac{2\pi x}{a} \sin. \frac{2\pi y}{b}$$

existente $\alpha = 2\pi e \sqrt{\left(\frac{1}{aa} + \frac{1}{bb}\right)} = \frac{2\pi e}{ab}\sqrt{(aa+bb)}$. Tempus ergo vnius vibrationis prodibit posito $\alpha t = \pi$, vnde id fit $t = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{ab}{2e\sqrt{(aa+bb)}}$ min. secund. ideque hoc tympanum singulis minutis secundis tot edet vibrationes, quot vnitates continentur in formula $\frac{2e\sqrt{(aa+bb)}}{ab}$. Quodsi iam pondus membranae ABCD sit $= M$, erit vis, qua latera AC et BD distrahuntur, $E = \frac{Mee}{2ga}$, et qua latera AB et CD distrahuntur, $F = \frac{Mee}{2gb}$. At ducta alterutra diagonali BC, si in eam ex altero reliquorum angulorum A demittatur perpendiculum AE, erit $AE = \frac{ab}{\sqrt{(aa+bb)}}$, vnde numerus vibrationum vno minuto secundo editarum erit $= \frac{2e}{AE}$, vbi e est in ratione subduplicata tensionis.

10. Verum idem tympanum rectangulare praeter hunc sonum, qui est principalis, infinitos alios simplices edere potest, qui scilicet ex pluribus aliis non sint permixti. Sumtis enim pro m et n numeris quibusuis integris, haec aequatio

$$z = A \cos. \alpha t \sin. \frac{2m\pi x}{a} \sin. \frac{2n\pi y}{b}$$

in eſſe comparata, vt, poſitis tam $x = 0$ et $y = 0$, quam $x = a$ et $y = b$, fiat $z = 0$. Tum autem ob $\alpha = 2\pi\sqrt{\left(\frac{mm}{aa} + \frac{nn}{bb}\right)}$ tempus vnius vibrationis erit $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{ab}{\pi\sqrt{(mmaa + mmbb)}}$ min. ſecund. ac tempore vnius minuti ſecundi vibrationum editarum numerus eſt $= \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\sqrt{(mmaa + mmbb)}}{ab}$, cui ipſe ſonus cenſetur proportionalis. Ponamus, tympanum eſſe quadratum, ſeu $b = a$ et omnes ſoni, quos hoc tympanum reddere valet, in hac formula $\frac{2c}{a}\sqrt{2(mm + nn)}$ continentur, vbi pro m et n numeros integros quoscunque capere licet. Neglecto ergo factore communi $\frac{2c}{a}\sqrt{2}$, hi ſoni ſunt inter ſe vt numeri

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$. 5, $\sqrt{26}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$ etc.

qui ſi infimus nota muſica C indicetur, erunt

C; G$\flat$; c; d; e^*; g^b; g; $g\flat$; b; b^*; b^*; c

vbi ſtellula * notat, ſonum eſſe aliquantillum acutiorem, littera b vero grauiorem quam in ſyſtemate muſico.

11. Cum quantitas z pluribus eiusmodi formulis ſimul ſumtis aequari poſſit, tympanum hoc quadratum plures ſonos ſimul edere poteſt, prout impulſio initio facta fuerit comparata; vix vnquam enim eueniet, vt ſonus inde ſimplex oriatur, quin potius plerumque omnes iſti ſoni coniunctim producentur. Qui cum inter ſe maxime ſint diſſoni, ac tanta multitudine cumulentur, ſonitus ex iis mixtus ab harmonia muſica multum abhorrebit. Prae reliquis autem ſonus princi-

palis

palis et grauissimus dominabitur, qui singulis minutis secundis $\frac{2e\sqrt{2}}{a}$ vibrationes edet. Est autem $e = \sqrt{\frac{2Eg}{M}}$, vbi M est pondus membranae quadratae ABCD, et E pondus, quo singula latera distenduntur, existente g altitudine $15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Vnde numerus vibrationum singulis minutis secundis editarum est $= 4\sqrt{\frac{E}{Ma}}$. Ponamus latus quadrati a esse vnius pedis, eritque hic numerus $= 4\sqrt{\frac{125}{8}\cdot\frac{E}{M}} = 5\sqrt{\frac{10E}{M}}$. Quare si E sit $= 100$ M, singulis minutis secundis edentur 160 vibrationes, qui sonus conueniet propemodum cum claue F, tribuendo claui C quasi 120 vibrationes.

12. Ita se habent soni a tympanis quadratis ac rectangularibus editi, sin autem tympanum aliam quamcunque habeat figuram, difficillimum est, aequationem nostram ad eam accommodare. In genere autem pro quauis figura tenendum est, ex ea primo innumerabiles sonos simplices elici posse, tum vero eandem plures eorum coniunctim edere valere; perpetuo enim quod instrumentum plures sonos simplices seorsim edere potest, idem ad eosdem sonos coniunctim reddendos erit aptum. Soni autem simplices oriuntur, si nostra formula vnicum terminum tempus inuoluentem contineat; veluti cos. αt, vt sit

$$z = A \cos.\alpha t \sin.(\mu x + \mathfrak{M}) \sin.(\nu y + \mathfrak{N})$$

existente $\mu\mu + \nu\nu = \frac{\alpha\alpha}{ee}$. Cum enim pro eodem numero α, binae litterae μ et ν in infinitum variari queant, idem factor cos. αt cum infinitis huiusmodi binorum sinuum productis coniungi poterit, ex quibus

omnibus ejusque vibrationis tempus prodit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. Talis autem formula generalis ita repraesentari potest:

$$z = \cos \alpha t \left\{ \begin{array}{l} + A \sin \mu x \sin \nu y + B \sin \mu x \cos \nu y + C \cos \mu x \sin \nu y \\ \qquad\qquad + D \cos \mu x \cos \nu y \\ + A' \sin \mu' x \sin \nu' y + B' \sin \mu' x \cos \nu' y + C' \cos \mu' x \sin \nu' y \\ \qquad\qquad + D' \cos \mu' x \cos \nu' y \\ + A'' \sin \mu'' x \sin \nu'' y + B'' \sin \mu'' x \cos \nu'' y + C'' \cos \mu'' x \sin \nu'' y \\ \qquad\qquad + D'' \cos \mu'' x \cos \nu'' y \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

dummodo litterae μ; ν; μ'; ν'; μ''; ν''; etc. ita capiantur, vt sit $\frac{\alpha\alpha}{cc} = \mu\mu + \nu\nu = \mu'\mu' + \nu'\nu' = \mu''\mu'' + \nu''\nu''$ etc. coefficientes vero A, B etc. penitus arbitrio nostro relinquuntur, si modo sint minimi.

13. Hinc autem minime patet, quomodo tympano figura quaepiam data veluti circularis conciliari possit, vt scilicet in perimetro figurae vbique fiat $z = 0$. In hunc finem aequationem nostram differentialem

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Tab. III. Fig. 4. in aliam formam transfundi conueniet, introducendo loco x et y binas alias variabiles. Scilicet cum sit $CX = x$ et $XY = y$, ponatur recta $CY = r$, et angulus $ACY = \Phi$; quae binae quantitates r et Φ loco x et y introducantur, vt iam z existat functio quantitatum r et Φ, insuperque temporis t. Primum igitur terminus $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ non mutabitur; pro reliquorum vero transformatione notetur, ob $x = r \cos \Phi$ et $y = r \sin \Phi$, esse

dx

$dx = dr \cos.\Phi - r\,d\Phi \sin.\Phi$ et $dy = dr \sin.\Phi + r\,d\Phi \cos.\Phi$ hincque $dr = dx \cos.\Phi + dy \sin.\Phi$ et $d\Phi = \frac{dy \cos.\Phi - dx \sin.\Phi}{r}$. Quaeritur ergo, quomodo hinc in formulis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$ loco differentialium dx et dy, ad quae referuntur, ratio nouorum differentialium dr et $d\Phi$ introduci debeant, et cuiusmodi hinc formulae loco earum sint prodituraе.

14. Consideretur in genere functio quaecunque ipsarum x et y, quae sit v, et quae eadem erit quoque functio ipsarum r et Φ. Cum igitur sit

$$dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = dr\left(\frac{dv}{dr}\right) + d\Phi\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)$$

erit pro dr et $d\Phi$, substitutis valoribus per dx et dy expressis,

$$dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = (dx \cos.\Phi + dy \sin.\Phi)\left(\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{dy \cos.\Phi - dx \sin.\Phi}{r}\right)\left(\frac{dv}{d\Phi}\right),$$

vbi terminos tam per dx, quam per dy affectos seorsim aequari oportet, sicque erit

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \cos.\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \sin.\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right).$$

Sit breuitatis gratia $\left(\frac{dv}{dr}\right) = p$ et $\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) = q$, erit

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) = -p \sin.\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \cos.\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right) - \frac{q \cos.\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{q \sin.\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dx}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = p \cos.\Phi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \sin.\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right) - \frac{q \sin.\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - \frac{q \cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dy}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right).$$

Erit vero ex formulis supra propositis:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = -\frac{\sin.\Phi}{r};\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \frac{\cos.\Phi}{r};\ \left(\frac{dr}{dx}\right) = \cos.\Phi;\ \left(\frac{dr}{dy}\right) = \sin.\Phi;$$

 vnde

vnde conficitur:

$$\left(\frac{ddp}{dx^2}\right) = \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{dp}{dr}\right) + \cos.\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right) + \frac{2q\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr} - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddp}{dy^2}\right) = \frac{p\cos.\Phi^2}{rr} + \sin.\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right) - \frac{2q\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr} + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right).$$

15. Nunc vero, cum quantitatum p et q eadem sit ratio ac supra ipsius v, erit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \cos.\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right) = \cos.\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)$$

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \cos.\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{d\Phi}\right) = \cos.\Phi\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right) - \frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \sin.\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right) = \sin.\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)$$

$$\left(\frac{dq}{dy}\right) = \sin.\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right) = \sin.\Phi\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right) + \frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$

hincque colligimus:

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) = \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{dv}{dr}\right) - \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) + \cos.\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$- \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right) + \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$

$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = \frac{\cos.\Phi^2}{rr}\left(\frac{dv}{dr}\right) - \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) + \sin.\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$+ \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right) + \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Scribamus iam z pro v, quoniam tempus t hic nihil turbat, et habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{dz}{dr}\right) + \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right) + \cos.\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$- \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{drd\Phi}\right) + \frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{\cos.\Phi^2}{rr}\left(\frac{dz}{dr}\right) - \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right) + \sin.\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$+ \frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{drd\Phi}\right) + \frac{\cos.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

quibus collectis nostra aequatio induet hanc formam:

$$\frac{1}{rr}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right) + \left(\frac{ddz}{dr^2}\right) + \frac{1}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

Modus autem, quo hanc aequationem elicuimus, nouam quandam algorithmi speciem constituit, quae omni attentione digna videtur.

16. Ponamus hic iterum ad tempus elidendum $z = v \sin.(\alpha t + \mathfrak{A})$, vt iam v tantum sit functio ipsarum r et Φ, eritque

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} v + \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{ddv}{dr^2}\right) + \frac{1}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Statuatur porro ad anguli Φ rationem tollendam $v = u \sin.(\beta\Phi + \mathfrak{B})$, vt u sit functio solius r, eritque

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} u - \frac{\beta\beta}{rr} u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2},$$

vnde iam valor ipsius u per r definiri debet; cum autem β pro lubitu assumi possit, innumerabiles valores pro v exhibere licet, qui omnes iunctim sumti cum $\sin.(\alpha t + \mathfrak{A})$ combinari possunt, sicque pro quouis numero α, vnde tempus vnius vibrationis fit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. expressio maxime generalis valorem z exhibens obtinebitur. Aequatio autem inuenta, posito $lu = \int p\,dr$, abit in

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} - \frac{\beta\beta}{rr} + \frac{p}{r} + \frac{dp}{dr} + pp,$$ quae posito $p = \frac{q}{r}$ fit

$$dq + \frac{qqdr}{r} + \frac{\alpha\alpha}{ee} r\,dr - \beta\beta.\frac{dr}{r} = 0$$

quae ad eiusmodi casus aequationis Riccatianae reducitur, qui integrationem admittunt, quoties β fuerit numerus huius formae $i - \frac{1}{2}$, denotante i numerum integrum quemcunque.

17. Confugiamus ergo ad series, ac primo quidem in aequatione

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} u - \frac{\beta\beta}{rr} u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2}$$

ponamus

Ponamus $u = r^{\beta} s$, vt nanciscamur hanc aequationem:

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} s + \frac{(2\beta+1)\,ds}{r\,dr} + \frac{d\,ds}{dr^2}.$$

Sit breuitatis gratia $2\beta + 1 = n$, seu $\beta = \frac{n-1}{2}$, vt fit $u = r^{\frac{n-1}{2}} s$

et ponamus $s = Ar^2 - Br^4 + Cr^6 - Dr^8 + Er^{10} -$ etc. factaque substitutione fit:

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} Ar^2 - \frac{\alpha\alpha}{ee} Br^4 + \frac{\alpha\alpha}{ee} Cr^6 - \frac{\alpha\alpha}{ee} Dr^8 + \frac{\alpha\alpha}{ee} Er^{10}$$
$$- 2nB + 4nC - 6nD + 8nE - 10nF$$
$$- 2B + 12C - 30D + 56E - 90F$$

hincque

$$B = \frac{\alpha\alpha A}{2(n+1)ee}; \quad C = \frac{\alpha\alpha B}{4(n+3)ee}; \quad D = \frac{\alpha\alpha C}{6(n+5)ee}; \quad E = \frac{\alpha\alpha D}{8(n+7)ee} \text{ etc.}$$

vnde obtinemus

$$u = Ar^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)ee} + \frac{\alpha^4 r^4}{2.4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

existente $n = 2\beta + 1$, eritque $z = u \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin(\beta\Phi + \mathfrak{B})$.

Quodsi iam, posito $r = a$, fiat $u = 0$, habebitur tympanum circulare, cuius radius $CA = a$. At posito $r = a$, pro quouis numero β vel n, scribendo $\frac{\alpha a}{e} = l$ aequatio

$$1 - \frac{l^2}{2(n+1)} + \frac{l^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{l^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \text{etc.} = 0$$

infinitos exhibet valores pro l, ideoque etiam pro α, ex quo infiniti soni simplices resultabunt. Cum autem angulis Φ, $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$ etc. idem valor ipsius z respondere debeat, euidens est, pro β alios numeros accipi non posse nisi integros; vnde pro n omnes numeros

meros impares sumere licet, ex quorum singulis infiniti valores pro α, ideoque infiniti soni, exsurgunt.

18. Verum haec series tantum integrale particulare nostrae aequationis differentio-differentialis exhibet, cum vnicam constantem arbitrariam inuoluat; series autem duas constantes ab arbitrio nostro pendentes reperietur, si ponatur $s = p \sin.\frac{\alpha r}{e} + q \cos.\frac{\alpha r}{e}$, ac tum aequationis resultantis partes tam per $\sin.\frac{\alpha r}{e}$ quam $\cos.\frac{\alpha r}{e}$ affectas seorsim nihilo aequentur, indeque quantitates p et q per series definiantur. Calculo hoc subducto, si breuitatis gratia ponamus $\frac{\alpha r}{e} = \theta$, vt sit $r = \frac{\theta}{\alpha} e$, maneatque $n = 2\beta + 1$, erit

$$u = + r^\beta \sin.\theta \left(A + \mathfrak{A}\theta - \frac{(n+2)A\theta\theta}{2(n+1)} - \frac{(n+2)(n+4)\mathfrak{A}\theta^3}{2.3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)A\theta^4}{2.3.4(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.} \right)$$
$$+ r^\beta \cos.\theta \left(\mathfrak{A} - A\theta - \frac{(n+2)\mathfrak{A}\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)A\theta^3}{2.3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\mathfrak{A}\theta^4}{2.3.4(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.} \right)$$

vbi, vt ante, obseruandum est, loco β nonnisi numeros integros accipi posse; tum autem erit $z = u \sin.(\alpha t + \gamma) \sin.(\beta\Phi + \delta)$ at A et $\mathfrak{A}$ sunt binae constantes arbitrariae per duplicem integrationem introductae. Quodsi ergo breuitatis gratia ponamus:

$$1 - \frac{(n+2)\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\theta^4}{2.3.4(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)\theta^6}{2.3.4.5.6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \text{etc.} = P$$
$$\theta - \frac{(n+2)(n+4)\theta^3}{2.3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)\theta^5}{2.3.4.5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \text{etc.} = Q$$

habebimus:

$$u = r^\beta (A P \sin.\theta + \mathfrak{A} Q \sin.\theta + \mathfrak{A} P \cos.\theta - A Q \cos.\theta).$$

Si ergo ponamus $P = R \cos \eta$ et $Q = R \sin \eta$, erit

$$z = \mathfrak{A} r^{\beta} (A R \sin(\theta - \eta) + \mathfrak{A} R \cos(\theta - \eta)) = C R r^{\beta} \sin(\theta - \eta + \varepsilon)$$

vbi est $R = \sqrt{(PP + QQ)}$ et $\tang \eta = \frac{Q}{P}$.

19. Cum hic duae habeantur constantes arbitrariae A et $\mathfrak{A}$, eae semper ita definiri possunt, vt, posito $r = 2b$, fiat $z = 0$, quicunque etiam numeri pro α et β accipiantur; vnde idem tympanum ad omnes omnimo sonos edendos aptum videtur. Verum quemadmodum vidimus, pro β alios numeros nisi integros assumi non posse, quia alioquin pro eodem puncto plures valores ipsius z orirentur, quod esset absurdum, ita ob eandem rationem alia insuper circumstantia est spectanda. Necesse enim est, expressionem pro z ita esse comparatam, vt manente angulo Φ, sumta autem distantia r negatiua, idem prodeat valor, ac si angulus Φ duobus rectis seu π augeatur, distantia autem r maneat positiua, vtrinque enim ad idem punctum pervenitur. Hinc intelligitur, cum $r^m \sin(\beta\Phi + \delta)$ sit forma cuiusque partis, si β sit numerus impar, exponentem m quoque imparem esse debere, sin autem β sit par, etiam m parem esse oportere. Vtroque ergo casu necesse est, vt sit $m = \beta + \text{numero pari}$, seu vt $\frac{m}{\beta}$ nonnisi potestates pares ipsius r inuoluat. Hanc ob rem fiat necesse est $A = 0$, sicque habebimus:

$$z = \mathfrak{A} r^{\beta} (Q \sin \theta + P \cos \theta),$$

quae expressio cum supra inuenta (§. 17.) perfecte congruit.

20. Haec formula non solum ad tympana circularia est accommodata, sed etiam ad alias figuras patet.

Si

Si enim tantum in vibrationibus regularibus subsistere velimus, vt valor numeri α maneat idem, pro β autem successiue quicunque numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, etc. sumantur, vnde capiatur $n = 2\beta + 1$, denoter formula $\Sigma(r, \beta)$ valorem huius seriei infinitae

$$r^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)e^2} + \frac{\alpha^4 r^4}{2.4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

atque pro motu vibratorio regulari habebimus

$$z = \sin.(\alpha t + \mathfrak{A})(A\Sigma(r, 0) + B\Sigma(r, 1)\sin.(\Phi + \mathfrak{B}) + C\Sigma(r, 2)\sin.(2\Phi + \mathfrak{C}) + \text{etc.})$$

Haec expressio si nihilo aequetur, dabit terminos tympani fixos, qui determinantur aequatione quadam inter distantiam r et angulum Φ. Verum methodus non patet coefficientes A, B, C cum angulis $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ita definiendi, vt pro terminis data aequatio resultet. Aeque parum autem constat, quomodo pro eadem tympani figura plures valores numeri α reperiri queant, ex quibus omnes sonos simplices, quos id reddere valeat, cognoscere liceat.

21. Imprimis autem haec formula apta est ad sonos a tympano circulari editos definiendos; posito enim radio tympani $= a$, et $\frac{a}{e} = m$, considerentur sequentes aequationes infinitae:

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2.2} + \frac{m^4\alpha^4}{2.4.2.4} - \frac{m^6\alpha^6}{2.4.6.2.4.6} + \frac{m^8\alpha^8}{2.4.6.8.2.4.6.8} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2.6} + \frac{m^4\alpha^4}{2.4.4.6} - \frac{m^6\alpha^6}{2.4.6.4.6.8} + \frac{m^8\alpha^8}{2.4.6.8.4.6.8.10} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2.8} + \frac{m^4\alpha^4}{2.4.6.8} - \frac{m^6\alpha^6}{2.4.6.8.6.8.10} + \frac{m^8\alpha^8}{2.4.6.8.6.8.10.12} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2.8} + \frac{m^4\alpha^4}{2.4.8.10} - \frac{m^6\alpha^6}{2.4.6.8.10.12} + \frac{m^8\alpha^8}{2.4.6.8.10.12.14} - \text{etc.} = 0$$

etc.

 quarum

quarum vnaquaeque infinitos valores pro α praebet, ita vt infinities infiniti valores ipsius α obtineantur, quorum quilibet peculiarem denotat sonum, cuiusque vibrationis tempore existente $=\frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. Tum vero notandum est, quos sonos simplices hoc tympanum seorsim reddere valet, eosdem quoque coniunctim vtcunque mixtos edere posse. Verum ipsa harum aequationum resolutio aliter nisi per approximationem institui non posse videtur, neque etiam postquam radices vnius inuenerimus, nullum auxilium inde ad reliquas soluendas peti potest.

22. Specie quidem amplior resolutio aequationis nostrae

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}\right)=\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x^2}\right)+\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y^2}\right)$$

exhiberi potest, vnde autem parum vtilitatis ad casus particulares expediendos redundat. Satisfacit scilicet huic aequationi ista expressio:

$$z=\Phi(\alpha x+\beta y+\gamma t) \text{ si sit } \alpha\alpha+\beta\beta=\frac{\gamma\gamma}{ee},$$

et cum huiusmodi formulae infinitis modis formari possint, aggregatum ex earum quotcunque valorem idoneum pro z praebet sicque habebitur:

$$z=\Phi(\alpha x+\beta y+\gamma t)+\Psi(\alpha' x+\beta' y+\gamma' t)$$
$$+\Omega(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' t) \text{ etc.}$$

existente

$$\alpha\alpha+\beta\beta=\frac{\gamma\gamma}{ee};\ \alpha'\alpha'+\beta'\beta'=\frac{\gamma'\gamma'}{ee};\ \alpha''\alpha''+\beta''\beta''=\frac{\gamma''\gamma''}{ee} \text{ etc.}$$

neque vero patet, quomodo huiusmodi expressio ad datam tympani figuram, neque quomodo ad datam impulsionem initio factam accommodari queat. Interim tamen perspectum est, hanc solutionem latissime patere, cum characteres Φ, Ψ, Ω functiones quascunque denotent, vnde maxime desideratur methodus huiusmodi formulas ad vsum applicandi.

TENTA-