

P R É C I S
D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE
DE LA DIOPTRIQUE.

Par M. EULER.

1. UN nombre quelconque de surfaces réfringentes sphériques étant proposé *PAP, QBQ, RCR, &c.* Fig. 1. dont les centres se trouvent sur le même axe *EI*, je conçois leurs convexités tournées en même sens vers l'objet *Ee*, & je nomme les rayons de leur courbure

de *PAP = p*, de *QBQ = q*, de *RCR = r*, de *SDS = s*, &c.

2. Je considère d'abord les rayons de lumière moyens, & je pose la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour ces surfaces

PAP = n : 1, *QBQ = n' : 1*, *RCR = n'' : 1*, *SDS = n''' : 1*, &c.

or pour les rayons d'une autre espèce quelconque, j'augmente ou diminue ces nombres *n, n', n'', n'''*, &c. de leurs différentielles *dn, dn', dn'', dn'''*, &c. dont les valeurs doivent être tirées de la nature de chaque milieu réfringent, terminé par les surfaces proposées.

3. Que devant ces surfaces soit exposé un objet rayonnant *Ee* dont les rayons moyens, infiniment proches de l'axe, représentent par chaque réfraction les images en *Fζ, Gn, Hθ, Ii, &c.* & nommant les distances

EA = a, *FB = b*, *GC = c*, *HD = d*,
& *AF = α*, *BG = β*, *CH = γ*, *DI = δ*,

les principes de la Dioptrique fournissent ces égalités

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n'-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n'}{\beta}, \quad \frac{n''-1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{n''}{\gamma}, \quad \&c.$$

A a a ij

Rayons
des surfaces
p, q, r, s, &c.

Rayons
de réfraction
n, n', n'', &c.

1.^{re}
CONSIDÉRATIONS

Explication des
distances *a, b,*
c, d, &c. &
α, β, γ, δ, &c.

Demi-diamètre de l'objet $Ee = z$ 4. Ensuite posant le demi-diamètre de l'objet $Ee = z$, celui de chaque image se trouve déterminé de cette sorte :

Images principales $F\zeta, G\eta, H\theta, I\iota, \dots$
 $F\zeta = \frac{\alpha z}{n a}, G\eta = \frac{\alpha \zeta}{n' a b}, H\theta = \frac{\alpha \zeta \gamma \zeta}{n'' n' a b c}, I\iota = \frac{\alpha \zeta \gamma \delta \zeta}{n''' n'' n' a b c d}, \dots$

Explication des lettres A, B, C, D, \dots ou bien si nous posons pour abrégé,

$$a = \frac{r}{A}, \zeta = \frac{b}{B}, \gamma = \frac{c}{C}, \delta = \frac{d}{D}, \dots$$

nous aurons premièrement

$$p = \frac{(n-1)a}{n A + 1}, q = \frac{(n'-1)b}{n' B + 1}, r = \frac{(n''-1)c}{n'' C + 1}, s = \frac{(n'''-1)d}{n''' D + 1}, \dots$$

& ensuite

$$F\zeta = \frac{z}{n A}, G\eta = \frac{z}{n' AB}, H\theta = \frac{z}{n'' n' ABC}, I\iota = \frac{z}{n''' n'' n' ABCD}$$

5. Ces images sont alternativement renversées & debout, selon que le nombre des surfaces est impair ou pair. Soit Z le demi-diamètre de la dernière image qu'un oeil regarde à la distance $= k$, & il le verra sous un angle $= \frac{Z}{k}$; mais si l'oeil voyoit directement le même objet à la distance $= h$, il le verroit sous un angle $= \frac{z}{h}$, d'où l'on pourra juger du grossissement produit par les surfaces réfringentes.

grossissement m .

distance m .

6. Pour nous former une juste idée de ce jugement, je suppose que k soit la distance à laquelle l'oeil voit le plus distinctement les objets; mais h est une distance arbitraire à laquelle on rapporte le grossissement que je nommerai la *distance d'estime*, qu'on prendra ensuite pour les télescopes égale à la distance même de l'objet $EA = a$, mais pour les microscopes égale à 8 pouces: ainsi le grossissement sera $= \frac{hZ}{kz}$.

7. J'indiquerai ce grossissement par le nombre m , qui marque combien de fois le diamètre de l'objet est vu plus

grand à la étant négat nous 8. imag sa ra passé celui nous ou l qual soit je v à la de possi E/ de trav poi de pet senti ferc ma De not

grand par les surfaces réfringentes, qu'à la vue simple étant vu à la distance $= h$. Je remarque de plus que ce nombre m étant positif, indique que l'objet est vu debout, mais s'il est négatif, renversé; ainsi en supposant la dernière image debout,

$$\text{nous aurons } m = \frac{hZ}{h'z}$$

8. Pour mieux développer le demi-diamètre Z de la dernière image, je remarque que posant le produit $n n' n'' n'''$, &c. $= N$, la raison $N : 1$ définit la réfraction des rayons moyens, qui passeroient du milieu où se trouve l'objet immédiatement dans celui où est placé l'œil; & partant ayant $Z = \frac{z}{NABCD, \&c.}$

Explication du nombre N .

$$\text{nous aurons pour le grossissement } m = \pm \frac{h}{Nh.ABCD, \&c.}$$

où le signe $+$ a lieu quand le nombre des surfaces est pair: quand il est impair, il faut prendre le signe $-$.

9. Or pour apercevoir ce grossissement, il faut que l'œil soit placé derrière la dernière image à la distance $= k$, comme je viens de le supposer; cette distance k étant presque appropriée à la nature de l'œil. On juge aussi aisément que la distance de l'œil derrière la dernière surface doit nécessairement être positive.

Distance juste de l'œil k_0

10. Maintenant, je vais considérer la route d'un rayon moyen EP , venant du centre de l'objet E qui entre par l'extrémité de l'ouverture de la première surface, & après les réfractions traverse les autres surfaces en $\mathcal{C}, \gamma, \delta$, &c. & coupe l'axe aux points f, g, h, i , &c. Je pose le demi-diamètre de l'ouverture de la première surface $AP = \chi$, en supposant l'arc AP si petit qu'on le puisse confondre avec son sinus sans erreur sensible.

1.^o CONSIDÉRATION. Fig. 2.

Demi diamètre de l'ouverture de la première surface $AP = \chi$.

11. Je remarque d'abord que les points sur l'axe f, g, h, i , &c. seront différens des lieux des images principales F, G, H, I , &c. mais que les intervalles Ff, Gg, Hh , &c. seront fort petits. De-là je tire les déterminations suivantes, assez exactes pour notre dessein.

Première condition pour l'ouverture des autres surfaces,

$$BC = \frac{h}{a} \chi, C\gamma = \frac{bc}{ac} \chi, D\delta = \frac{bcd}{abc\gamma} \chi, E\epsilon = \frac{bcde}{abc\gamma\delta} \chi, \text{ \&c.}$$

$$\text{ou } BC = AB \cdot \frac{\chi}{a}, C\gamma = ABC \cdot \frac{\chi}{a}, D\delta = ABCD \cdot \frac{\chi}{a}, \text{ \&c.}$$

Il est clair que les ouvertures des autres surfaces ne sauroient être plus petites.

Inclinaison
des
rayons
extrêmes.

12. En second lieu, cette considération me fournit les angles que le rayon fait avec l'axe aux points *f, g, h, i, &c.* que je nomme l'inclinaison des rayons extrêmes,

$$Afp = \frac{\chi}{a}, Bg\epsilon = \frac{b\chi}{ac}, Ch\gamma = \frac{bc\chi}{abc\gamma}, Di\delta = \frac{bcd\chi}{abc\gamma\delta}, \text{ \&c.}$$

$$\text{ou } Afp = A \cdot \frac{\chi}{a}, Bg\epsilon = AB \cdot \frac{\chi}{a}, Ch\gamma = ABC \cdot \frac{\chi}{a}, Di\delta = ABCD \cdot \frac{\chi}{a}, \text{ \&c.}$$

13. Ces angles servent à connoître le cône lumineux, qui est transmis du point *E* de l'objet par les surfaces réfringentes, dont les sommets se trouvent aux points *f, g, h, &c.* De-là on pourra déterminer à chaque lieu l'épaisseur de ce cône lumineux, ce qui est un élément essentiel pour déterminer le degré de clarté.

14. La dernière image étant l'objet immédiat de la vision, cet angle du cône lumineux *y* sera $= ABCD \cdot \frac{\chi}{a}$; donc posant la distance de l'œil derrière cette image $= k$, le demi-diamètre de la largeur du cône à l'entrée dans l'œil sera $= \frac{h\chi}{a} \cdot ABCD$, &c. qui étant comparé avec l'ouverture de la prunelle, montrera le degré de clarté dont l'objet sera vu.

15. Si cette largeur du cône lumineux égaloit ou surpassoit la prunelle, la clarté seroit complète ou la même dont l'objet seroit vu à la vue simple; mais dans les instrumens de Dioptrique cette largeur est ordinairement plus petite, ce qui fournit donc une juste mesure du degré de clarté, que j'indiquerai par la lettre *v*.

16. Ayant donc $v = \frac{h\chi}{a}$. $ABCD$, &c. comparons cette formule avec celle qui a été trouvée pour le grossissement $m = \pm \frac{h}{Nk \cdot ABCD, \&c.}$, & leur produit donne $m v = \frac{h\chi}{Na}$; d'où, si l'on considère le degré de clarté v comme donné, on en tire d'abord l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre doit être $\chi = N \cdot \frac{m a v}{h}$.

Beau rapport entre le degré de clarté, le grossissement & l'ouverture de la première surface.

17. Comme le demi-diamètre de la prunelle est estimé environ de $\frac{1}{12}$ pouce, pourvu que v ne soit plus petit que de $\frac{1}{12}$ pouce, on jouira d'une pleine clarté: or je remarque qu'en ne donnant à v que $\frac{1}{50}$ pouce, la clarté est encore très-suffisante, quoiqu'elle diminue en effet en raison du carré de la quantité v .

18. A présent, je vais considérer les petits écarts des points f, g, h, i , &c. des images principales F, G, H, I , &c. qui contiennent la source de la confusion attribuée à la figure sphérique des surfaces, mais qui dépend principalement de l'ouverture des surfaces; ces écarts Ff, Gg, Hh, Ii , &c. seront nommés les espaces de confusion de chaque image, & je poserai

Recherches sur la confusion causée par l'ouverture des surfaces.

Espaces de confusion $y, y', y'',$

$$Ff = y, Gg = y', Hh = y'', Ii = y''', \&c.$$

19. Or, par les principes de la Dioptrique, on trouve

$$Ff = y = \frac{(a+\alpha)^2 \chi \chi}{2(n-1)^2 a a} \left(\frac{n}{a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{(n+A)(A+1)^2}{2(n-1)^2 A A} \cdot \frac{\chi \chi}{a},$$

& de-là, pour les autres réfractions, les suivans:

$$Gg = y' = \frac{y}{n' B B} + \frac{A A (n' + B) (B + 1)^n}{2 (n' - 1)^2 B B} \cdot \frac{b \chi \chi}{a a}$$

$$Hh = y'' = \frac{y'}{n'' C C} + \frac{A A B B (n'' + C) (C + 1)^2}{2 (n'' - 1)^2 C C} \cdot \frac{c \chi \chi}{a a}$$

$$Ii = y''' = \frac{y''}{n''' D D} + \frac{A A B B C C (n''' + D) (D + 1)^2}{2 (n''' - 1)^2 D D} \cdot \frac{d \chi \chi}{a a}$$

&c.

Espace
de confusion
de la dernière
image.

20. Soit à présent Y l'espace de confusion de la dernière image; & posant, comme ci-dessus, $n n' n'' n'''$, &c. $= N$, on trouvera

$$N.A.ABBCCDD, \&c. Y = \frac{n(n+A)(A+1)}{(n-1)^2} \cdot \frac{\chi\chi}{a} + \frac{n n' A^2 (n' + B) (B + 1)^2}{(n' - 1)^2} + \frac{b\chi\chi}{a n}$$

$$+ \frac{n n' n'' A^2 B^2 (n'' + C) (C + 1)^2}{(n'' - 1)^2} + \frac{c\chi\chi}{a n}$$

$$+ \frac{n n' n'' n''' A^2 B^2 C^2 (n''' + D) (D + 1)^2}{(n''' - 1)^2} + \frac{d\chi\chi}{a n}$$

&c.

Donc s'il étoit possible de réduire à zéro cette valeur de Y , la confusion causée par l'ouverture seroit entièrement détruite, au moins pour le milieu de l'objet qui est dans l'axe.

Confusion
qui en résulte
dans la vision.

Fig. 3.

21. On voit bien que cet espace de confusion est proportionnel au carré $\chi\chi$, mais la confusion qui en résulte dans la vision même, est en raison du cube χ^3 ; car soit Hv la dernière image principale, & $Hn = Y$ son espace de confusion, derrière laquelle l'œil se trouve dans sa juste distance $= k$, de sorte que l'image principale y soit distinctement dépeinte, & il s'agit d'examiner quel effet y produiront les rayons qui viennent de l'extrémité n .

22. Pour cet effet, considérons les rayons qui sortent du point n , lesquels étant inclinés à l'axe d'un angle $= ABCD$, &c. $\frac{\chi}{a}$; posons cet angle $Nno = ABCD$, &c. $\frac{\chi}{a} = O$; de sorte que $No = OY$, & l'œil verra le point n sur l'image principale Nv comme un cercle dont le rayon $= No$, ou bien le centre de l'objet E auquel répondent les points H & n dans l'image, sera vu comme une tache ronde, dont le demi-diamètre est $= No = OY$.

Confusion
sentie
ou l'angle θ .

23. Soit θ l'angle sous lequel le demi-diamètre de cette tache paroîtra à l'œil, & cet angle nous fournira la juste mesure de la confusion sentie, & nous aurons $\theta = \frac{OY}{k}$; puisque

puîs
l'ang
ture
la c
2
l'œi
de
en
rûc
que
terv
sera

$\frac{h+A}{(n-1)}$

&

Y

nc

&

di

af

C

p

f

f

puisque la distance de l'œil est supposée = k . Donc, puisque l'angle O est proportionnel au demi-diamètre de l'ouverture $AP = \chi$ & l'espace de confusion Y à son carré $\chi\chi$, la confusion sentie sera comme son cube χ^3 .

24. Mais cette confusion est diminuée quand on place l'œil en sorte qu'une image mitoyenne $P\pi$ en soit éloignée de la juste distance k ; car puisque l'inclinaison des rayons en n est comme la racine carrée de l'espace Nn , & que cette raison a lieu pour tous les points entre n & N ; on trouve que la confusion sentie sera la plus petite en prenant l'intervalle $nP = \frac{1}{4} Nn$; alors donc la confusion sentie

sera $\theta = \frac{OY}{4k}$.

Explication de la quantité ω

25. Posons maintenant, pour abrégér;

$$\frac{(k+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} a \pm \frac{ndA^2(n+B)(B+1)^2}{(d-1)^2} b \pm \frac{ndn^2A^2B^2(n^2+C)(C+1)^2}{(n^2-1)^2} c \pm \frac{ndn^2n^2(A^2B^2C^2(n^2+D)(D+1)^2)}{(n^2-1)^2} d, \&c.$$

& puisque nous avons trouvé

$$Y = \frac{\omega}{2N.AABBCCDD, \&c.} \cdot \frac{\chi\chi}{aa}, \& O = ABCD, \&c. \frac{\chi}{a}$$

nous en tirerons $\theta = \frac{\omega}{8Nh.ABCD, \&c.} \cdot \frac{\chi^3}{a^3}$.

26. Introduisons-y le grossissement $m = \pm \frac{h}{Nh.ABCD, \&c.}$ Juste mesure de la confusion sentie θ .

& puisque le signe $+$ ou $-$ n'entre pas ici en considération, nous aurons pour la confusion sentie, cette expression assez simple $\theta = \frac{m\omega}{8h} \cdot \frac{\chi^3}{a^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{m\omega}{a} \cdot \frac{\chi^3}{aah}$.

Où il faut remarquer, que pourvu que l'angle θ ne surpasse pas deux secondes, la confusion est encore très-supportable. Il

faut donc faire en sorte que la quantité $\frac{1}{8} \cdot \frac{m\omega}{a} \cdot \frac{\chi}{aah}$ ne

surpasse pas cette fraction $\frac{1}{1000000}$:

Mém, 1765a

Bbbb

III.
CONSIDÉRATION.

Fig. 5.

27. Ces déterminations du degré de clarté & de la confusion sentie, ayant été tirées de la seconde considération, je passe à la troisième considération où il s'agit de la route d'un rayon moyen qui venant de l'extrémité de l'objet ϵ , passe par le milieu A de la première surface, & en traversant les autres surfaces en $b, c, d, \&c.$ coupe l'axe aux points $q, r, s, \&c.$ la première intersection devant être conçue au point même A .

Demi-diamètre
du champ
apparent $= \phi$.

28. En considérant le point ϵ comme le dernier ou le plus éloigné de l'axe dont les rayons soient encore transmis par les surfaces réfringentes, l'angle $EA\epsilon$ nous exprime ce qu'on nomme le demi-diamètre du champ apparent, & je proposerai cet angle $EA\epsilon = \phi$.

Seconde
condition pour
l'ouverture des
surfaces.

29. Il faut donc bien que l'ouverture des surfaces suivantes s'étende au moins jusqu'aux points $b, c, d, \&c.$ pour transmettre les rayons de l'extrémité ϵ qui passent par le milieu A de la première surface, mais puisque ceux qui passent par toute l'ouverture PAP doivent aussi être transmis en y ajoutant la condition du §. 2, nous aurons les demi-diamètres de l'ouverture entière de chaque face,

Se mesure
de
l'ouverture
de
chaque surface.

$$AP = \chi, BQ = Ab \frac{\chi}{a} + Bb, CR = ACc \frac{\chi}{a} + Cc, DS = ABCd \frac{\chi}{a} + Dd, \&c.$$

en prenant toutes ces parties positivement, quand même elles seroient négatives.

30. Sans m'embarasser encore comment ces éléments sont déterminés par les précédens; puisque les espaces $Bb, Cc, Dd, \&c.$ constituent ordinairement la plus grande partie de chaque ouverture, il est très-essentiel d'avertir que le demi-diamètre de chaque ouverture ne sauroit surpasser la quatrième partie de son rayon de courbure afin que chaque ouverture n'embrasse point un cercle au-delà de 30 degrés.

Explication
de
quantités
 $\pi', \pi'', \&c.$

31. Par cette raison, je rapporterai d'abord les espaces $Bb, Cc, Dd, \&c.$ chacun à son rayon de courbure, en introduisant les nouveaux éléments suivans :

$$Bb = \pi' q, Cc = \pi'' r, Dd = \pi''' s, \&c.$$

Ces lettres π' , π'' , π''' , &c. signifient donc des fractions plus petites que $\frac{1}{4}$ ou même $\frac{1}{5}$, qui peuvent être prises tant négatives que positives; on les pourroit nommer les exposans des ouvertures.

32. Ensuite par rapport aux intersections avec l'axe q, r, s , &c. puisque tous les rayons de l'objet entier y concourent, ce n'est que dans ces points qu'un œil placé peut découvrir le champ apparent tout entier; c'est donc une condition très-essentielle, qu'on doit placer l'œil dans celui de ces points qui répond à la dernière surface réfringente; & il est évident que ce point doit tomber derrière la surface.

Condition nécessaire pour le lieu de l'œil,

33. Il est aussi très-important de bien connoître les angles que le rayon eA fait après chaque réfraction avec l'axe, ce qui me fournit encore de nouveaux élémens pour introduire dans le calcul, sans le secours desquels nous tomberions en des calculs extrêmement embrouillés; je nommerai donc ces angles :

Explication des angles $\psi, \psi', \psi'', \&c.$

$$BAb = \psi, Bqb = Cqc = \psi', Crc = Drd = \psi'', Dsd = tsg = \psi''', \&c.$$

34. De-là nous tirons d'abord les déterminations suivantes.

$$\pi'q = AB \cdot \psi = Bq \cdot \psi', \pi''r = Cq \cdot \psi' = Cr \cdot \psi'', \pi'''s = Dr \cdot \psi'' = Ds \cdot \psi''', \&c.$$

Or pour le premier de ces angles $BAb = \psi$, puisqu'il est celui de réfraction, l'angle d'incidence étant $EAe = \phi$ pour la première surface, nous avons d'abord $\phi : \psi = n : 1$ & partant $\phi = n \psi$.

35. Pour les autres, j'observe qu'en concevant en A un point rayonnant, ses images, par les réfractions suivantes, tomberoient précisément dans les points q, r, s , &c. d'où la nature de la réfraction nous fournit ces équations.

$$\frac{n-1}{q} = \frac{n}{BA} + \frac{n'}{Bq}, \frac{n''-1}{r} = \frac{n'}{qC} + \frac{n''}{Cr}, \frac{n'''-1}{s} = \frac{n''}{rD} + \frac{n'''}{Ds}, \&c.$$

Relation entre

& en y substituant les valeurs données ci-dessus, nous aurons :

les quantités $\pi', \pi'', \pi''', \&c.$

$$(n-1)\pi' = \psi + n'\psi', (n''-1)\pi'' = \psi' + n''\psi'', (n'''-1)\pi''' = \psi'' + n'''\psi''', \&c.$$

& $\psi, \psi', \psi'', \&c.$

36. Maintenant il faut chercher les rapports par lesquels ces

B b b b ij

CALE
de la confu-
dération, je
a route d'un
objet e , passe
raversant les
s q, r, s , &c.
nt même A .
dernier ou le
ore transmis
exprime ce
urent, & je

ces suivantes
pour transf-
le milieu A
passent par
en y ajou-
ni-diamètres

$\frac{x}{a} + Dd, \&c.$
même elles

éléments sont
 $Cc, Dd, \&c.$
de chaque
ni-diamètre
ne partie de
n'embrasse

les espaces
urbure, en

$s, \&c.$

1564 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

nouveaux élémens tiennent à ceux que les considérations précédentes nous ont fourni, & d'abord le champ apparent nous donne $z = a\phi$; ensuite considérant que la route du rayon Ae passe les extrémités de toutes les images principales, on en conclut ces déterminations :

$$b = \frac{a\phi(n'B + 1)}{n'A(\psi' - B\psi)} ;$$

$$c = \frac{a\phi(n''C + 1)}{n'n''AB(\psi'' - C\psi')} ;$$

$$d = \frac{a\phi(n'''D + 1)}{n'n''n'''ABC(\psi''' - D\psi'')} ; \text{ \&c.}$$

D'où l'on déduit ensuite aussi les distances ϵ, δ, γ , &c. avec les rayons q, r, s , &c.

Formules
pour le lieu
de l'œil.

37. Ayant vu que l'œil doit être placé au dernier des points q, r, s , &c. il faut se souvenir que l'œil doit se trouver à la distance $= k$ derrière la dernière image; d'où nous tirons pour chaque nombre de surfaces les équations suivantes :

| Nombre des surfaces. | Distance de l'œil. | |
|----------------------|---|--|
| 1 | $Ap = 0 = e + h$ | d'où il s'ensuit |
| 2 | $Bq = \frac{\pi'q}{\psi'} = \epsilon + h$ | $B(n' - 1)\psi'k + (\psi' - B\psi)q = 0$ |
| 3 | $Cr = \frac{\pi''r}{\psi''} = \gamma + h$ | $C(n'' - 1)\psi''k + (\psi'' - C\psi')r = 0$ |
| 4 | $Ds = \frac{\pi'''s}{\psi'''} = \delta + h$ | $D(n''' - 1)\psi'''k + (\psi''' - D\psi'')s = 0$ |
| | &c. | &c. |

38. Ces mêmes relations doivent revenir en considérant le dernier des angles $\psi, \psi', \psi'',$ &c. qui étant celui même sous lequel le demi-diamètre de l'objet sera vu, doit produire le même grossissement m rapporté à la distance d'estime h ; d'où

il est clair que le dernier de ces angles doit être $= \frac{1}{m} \frac{a\phi}{h}$;

le signe + ayant lieu pour les nombres impairs des surfaces,
& le signe - pour les pairs.

39. Développons donc ces angles par les exposans $\pi', \pi'', \&c.$,
& à cause de $\psi = \frac{\phi}{u}$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{(u'-1)\pi'}{u'} - \frac{\phi}{u u'} \text{ à éгалer à } - \frac{m a \phi}{h} \\ \psi'' &= \frac{(u''-1)\pi''}{u''} - \frac{(u'-1)\pi'}{u' u''} + \frac{\phi}{u u' u''} \text{ à } + \frac{m a \phi}{h} \\ \psi''' &= \frac{(u'''-1)\pi'''}{u'''} - \frac{(u''-1)\pi''}{u'' u'''} + \frac{(u'-1)\pi'}{u' u'' u'''} - \frac{\phi}{u u' u'' u'''} \text{ à } - \frac{m a \phi}{h} \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

& partant le dernier nous fournit cette équation:

$$(N. \frac{m a}{h} - 1) \phi = -u (u'-1) \pi' + u u' (u''-1) \pi'' - u u' u'' (u'''-1) \pi''' + \&c.$$

Formule
pour
déterminer
le
champ
apparent.

40. Voilà une formule assez simple qui sert à déterminer le
champ apparent par les seuls exposans d'ouverture $\pi', \pi'', \pi''', \&c.$
le grossissement m étant donné; d'où l'on déduit aisément les
conditions sous lesquelles on peut amplifier le champ apparent.
Je remarque seulement que la valeur de ϕ doit être positive; à
quoi il est aisé de satisfaire, puisque les fractions $\pi', \pi'', \pi''', \&c.$
peuvent être prises tant négatives que positives: on voit aussi
de-là que plus on veut amplifier le champ, & plus on doit
employer de surfaces.

41. Les éclaircissemens que la troisième considération
vient de nous fournir, sont sans doute de la plus grande
importance, en nous ayant mis en état de mieux fixer le
lieu de l'œil & d'assigner à chaque surface sa juste ouverture;
mais principalement la dernière formule pour le champ
apparent est un article très-essentiel pour perfectionner les
instrumens de Dioptrique.

42. Jusqu'ici je n'ai considéré que les phénomènes qui
sont produits par les rayons moyens; il ne reste donc plus

B b b iij

LE
nsidérations
p apparent
route du
principales,

, &c. avec

dernier des
se trouver
nous tirons
antes:

B $\psi' = 0$

C $\psi'' = 0$

D $\psi''' = 0$

nsidérant le
même sous
produire le
ne h ; d'où

$$\pm \frac{m a \phi}{h}$$

I V.^e
 CONSIDÉRATION
 sur
 la différente
 réfraction
 des rayons.

que d'appliquer nos recherches aux rayons de toute autre espèce: comme les variations qui en résultent sont fort petites, on les pourra représenter par les différentielles des nombres $n, n', n'',$ &c. qui expriment la réfraction des rayons moyens sans s'astreindre à aucune hypothèse sur la différente réfrangibilité des rayons.

Fig. 6. 43. Soient donc $f\zeta', g\eta', h\theta', ii',$ &c. les images représentées par les rayons d'une autre espèce quelconque, & à cause de la variation des points $F, G, H, I,$ &c. les distances

Quantités
 variables
 & constantes
 par rapport
 à la différente
 nature
 des rayons,

$AF = a, BF = b, BG = c, GC = c, CH = \gamma, HD = d,$ &c.

doivent être traitées comme variables pendant que les rayons de courbure $p, q, r,$ &c. demeurent constans; mais puisque les intervalles entre les surfaces $AB = a + b, BC = c + c, CD = \gamma + d,$ &c. demeurent aussi invariables; nous aurons d'abord ces rapports différentiels

$$\partial b = -\partial a, \partial c = -\partial c, \partial d = \partial \gamma, \partial e = \partial d, \&c.$$

Déterminations
 des espaces
 de
 diffusion
 $Ff, Gg, Hh,$
 &c.

44. Nous n'avons donc qu'à différentier, selon ces principes, les équations rapportées au §. 3, pour en tirer les déterminations suivantes:

$$Ff = \partial a = \frac{a \partial n}{n} \left(1 - \frac{a}{p}\right) = -\partial b$$

$$Gg = \partial c = \frac{c \partial n}{n} \left(1 - \frac{c}{q}\right) = -\partial c$$

$$Hh = \partial \gamma = \frac{\gamma \partial n}{n} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) = -\partial d$$

$$Ii = \partial d = \frac{d \partial n}{n} \left(1 - \frac{d}{s}\right) = -\partial e$$

&c.

N. B. Les images formées par les rayons de différente nature étant répandus par les intervalles $Ff, Gg, Hh,$ &c. je nommerai ces intervalles les espaces de diffusion.

45. Introduisons les relations rapportées au §. 4, &c. à

cause de $1 = \frac{a}{p} = \frac{A-1}{(n-1)A}$, nous aurons

$$Ff = \partial a = \frac{a(A+1)\partial u}{n(n-1)AA} = \partial b$$

$$Gg = \partial c = \frac{\partial a}{nBB} = \frac{b(B+1)\partial n}{n'(n'-1)BB} = \partial e$$

$$Hh = \partial \gamma = \frac{\partial c}{n''CC} = \frac{c(C+1)\partial n''}{n''(n''-1)CC} = \partial d$$

&c.

46. Posant donc le dernier espace de diffusion = $\partial \omega$, Dernier espace de diffusion $\partial \omega$, en substituant les valeurs précédentes dans les suivantes, à cause de $N = n n' n'' n'''$, &c. nous aurons

$$N.AABBCCDD, \&c. \partial \omega = \frac{a(A+1)\partial n}{n(n-1)} = \frac{n A A b (B+1) \partial n'}{n' - 1}$$

$$= \frac{n n' A A B b c (C+1) \partial n''}{n'' - 1}$$

$$= \frac{n n' n'' A A B B C c d (D+1) \partial n'''}{n''' - 1}$$

&c.

& partant, si on pouvoit réduire à zéro cette expression, la confusion qui en rejailit sur la vision, seroit anéantie.

47. Mais il faut aussi avoir égard au changement qui en résulte dans la grandeur des images qui doit produire une confusion plus sensible, que je nommerai la confusion en latitude, car il seroit inutile d'anéantir l'espace de diffusion, si les images de différentes couleurs différoient en grandeur.

Confusion en latitude.

48. Il faut donc aussi différentier les formules qui ont été assignées ci-dessus, §. 4, pour les demi-diamètres des images $Fz, Gz, Hz, \&c.$ ce qui se fait plus commodément en différentiant leurs logarithmes d'où nous tirons à cause

$$\text{de } \frac{z}{a} = \phi = \text{constante}$$

$$\partial . I F \zeta = - \frac{a \partial n}{n p},$$

$$\partial . I G \eta = \partial . I F \zeta + \frac{(n' - 1) \epsilon \partial a}{n' b q} = \frac{\epsilon \partial n'}{n' q},$$

$$\partial . I H \theta = \partial . I G \eta + \frac{(n'' - 1) \gamma \partial \epsilon}{n'' c r} = \frac{\gamma \partial n''}{n'' r},$$

$$\partial . I I \iota = \partial . I H \theta + \frac{(n''' - 1) \delta \partial \gamma}{n''' d s} = \frac{\delta \partial n'''}{n''' s}.$$

49. Pour rendre l'application de ces formules plus facile, introduisons-y les lettres $A, B, C, D, \&c.$ pour avoir

$$\partial . I F \zeta = - \frac{(n A + 1) \partial n}{n (n - 1) A},$$

$$\partial . I G \eta = \partial . I F \zeta + \frac{(n' B + 1) \partial a}{n' B b} = \frac{(n' B + 1) \partial n'}{n' (n' - 1) B},$$

$$\partial . I H \theta = \partial . I G \eta + \frac{(n'' C + 1) \partial \epsilon}{n'' C c} = \frac{(n'' C + 1) \partial n''}{n'' (n'' - 1) C},$$

$$\partial . I I \iota = \partial . I H \theta + \frac{(n''' D + 1) \partial \gamma}{n''' D d} = \frac{(n''' D + 1) \partial n'''}{n''' (n''' - 1) D}.$$

dont le développement nous précipiteroit en des calculs fort embrouillés.

Nouvelle
condition pour
le lieu de l'œil.

50. Une réflexion de la dernière importance nous servira à lever cette grande difficulté, sans qu'on ait besoin de réunir toutes les images formées par les rayons des différentes couleurs, il est toujours possible de rendre insensible la confusion en latitude, il ne s'agit que de placer l'œil dans un certain endroit, pour que la confusion causée par les différentes couleurs disparoisse entièrement.

Fig. 7.

51. En effet, soit Nv la dernière image principale représentée par les surfaces réfringentes, Nn son espace de diffusion, & nv' l'image d'une autre couleur quelconque. Qu'on tire par les extrémités v' & v , la droite $v'vO$ coupant l'axe en O , il est évident que plaçant l'œil en O , chaque point de l'objet sera dépeint sur le même point de la rétine par tous

570 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
trouvées au §. 52, pour chaque nombre de surfaces, & nous
aurons à résoudre les équations suivantes :

| Nombre des surfaces. | Équations |
|-------------------------|--|
| 1 | $\frac{a\varphi}{nA\psi} = \frac{\partial a}{\partial .IF\zeta} = -k;$ |
| 2 | $\frac{a\varphi}{n'n'AB\psi'} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial .IG\eta} = -k,$ |
| 3 | $\frac{a\varphi}{n'n''ABC\psi''} = \frac{\partial \gamma}{\partial .IH\theta} = -k,$ |
| | &c. |

§6. Mais afin que nous puissions passer successivement à
la dernière, posons

$$\begin{aligned} a\varphi \partial .IF\zeta - nA\psi \partial a & \dots \dots \dots = P \\ a\varphi \partial .IG\eta - n'n'AB\psi' \partial \mathcal{C} & \dots \dots \dots = Q \\ a\varphi \partial .IH\theta - n'n''ABC\psi'' \partial \gamma & \dots \dots \dots = R \\ a\varphi \partial .II\iota - n'n''n''''ABCD\psi''' \partial \delta & \dots \dots \dots = S, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

de sorte que pour une surface on aura $P = 0$, pour deux
 $Q = 0$ pour trois, $R = 0$, &c.

§7. Pour la première formule, à cause

$$\text{de } dIF\zeta = -\frac{(nA+1)dn}{n(n-1)A} \text{ \& } da = -\frac{n(A+1)dn}{n(n-1)AA};$$

on a $P = -\frac{a\varphi dn}{n} = -\varphi \psi dn$; pour les autres

cherchons leurs différences, & d'abord,

$$Q - P = \frac{a\varphi(n'B+1)da}{n'Bb} - \frac{a\varphi(n'B+1)dn'}{n'(n'-1)B} - nA(n'B\psi'd\mathcal{C} - \psi da).$$

Or par le §. 36, nous aurons $a\varphi(n'B+1) = n'n'Ab(\psi - B\psi)$,

$$\text{\& par le §. 45. } n'B\psi'd\mathcal{C} = \frac{\psi da}{B} - \frac{b(B+1)\psi dn'}{(n'-1)B},$$

$$\text{d'où l'on parvient à cette expression } Q - P = \frac{nAb(\psi + \psi)dn'}{n' - 1}$$

laquelle à cause de $\frac{\psi' + \psi}{n' - 1} = \pi' - \psi$ se réduit à celle-ci :
 $Q - P = -nAb(\psi' - \pi') dn'$ ou $Q = P - nAb(\psi' - \pi') dn'$.

58. Par une semblable réduction, on trouve,

$$R = Q - nn' ABc (\psi'' - \pi'') dn'',$$

$$S = R - nn'n'' ABCd (\psi''' - \pi''') dn''', \text{ \&c.}$$

de sorte qu'à présent toutes les difficultés qui nous menaçoient d'abord, sont heureusement surmontées.

59. Maintenant, nous n'avons qu'à égaler à zéro la dernière de ces formules, pour procurer à la vision l'avantage, que les bords des objets soient vus bien terminés sans couleurs, pour cet effet on n'a qu'à satisfaire à cette équation,

Destruction
des
couleurs d'iris
sur
les bords
des objets vus.

$$0 = a\psi dn + nAb(\psi' - \pi') dn' + nn' ABc (\psi'' - \pi'') dn'' + nn'n'' ABCd (\psi''' - \pi''') dn''', \text{ \&c.}$$

60. On conviendra aisément, que par ce moyen on délivrera déjà les instrumens de Dioptrique du plus grand inconvénient, de la part de la différente réfrangibilité des rayons, & ce moyen pourra toujours être mis en usage, quand même il ne seroit pas possible de réunir toutes les images des différentes couleurs; ainsi en ne se servant que de lentilles d'une seule espèce de verre, ce moyen procurera toujours de très-grands avantages.

61. Cependant, à moins qu'on ne puisse réussir à faire évanouir aussi le dernier espace de diffusion, il restera encore une espèce de confusion, mais d'une nature tout-à-fait différente, & qui n'est pas si nuisible à la distinction de la vision, mais on délivrera les instrumens aussi de celle-ci, en satisfaisant à cette équation.

Destruction
entière
des
inconvéniens
de la différente
réfrangibilité
des rayons.

$$0 = \frac{a(A+1)dn}{p-1} + \frac{nA^2b(B+1)dn'}{p'-1} + \frac{nn'A^2B^2c(C+1)d''n''}{n''-1} + \frac{nn'n''A^2B^2C^2d(D+1)d'''n'''}{n'''-1}, \text{ \&c.}$$

C c c c ij

Formule
nommée Ω_2

Appréciation
du degré
de confusion
de cette espèce.

62. Posons cette formule Ω , & pour les cas où il est impossible de la faire évanouir, il convient d'en apprécier le degré de confusion dont la vision sera troublée, ce qui se fera d'une manière semblable à celle dont je me suis servi pour la confusion de l'ouverture.

Fig. 4. 63. Pour ce cas, nous aurons donc l'espace de diffusion des images $Nn = d\Omega = \frac{\Omega}{N \cdot A^2 B^2 C^2 D^2, \&c.}$, & l'angle O dont les rayons sont inclinés à l'axe, sera ici pour tous les points $O = ABCD, \&c. \frac{\chi}{a}$. Or ici la confusion sentie deviendra la plus petite en plaçant le milieu de l'espace Nn à la juste distance de l'œil k , & alors le demi-diamètre apparent de la confusion sentie, ou des taches dont les points de l'objet seront représentés, sera $= \frac{O d \omega}{2 k}$, que je nommerai $= \eta$.

Juste mesure
de la confusion
sentie
par l'angle η .

N. n.
de l'objet
1
2
3
4

64. On aura donc pour la juste mesure de cette confusion,

$$\eta = \frac{\Omega \chi}{2 N a h \cdot A B C D, \&c.}$$

Or par la condition du grossissement ayant $Nk \cdot ABCD, \&c.$

$$= \frac{h}{m}, \text{ cette mesure sera } \eta = \frac{m \Omega \chi}{2 a h}, \text{ ou bien}$$

$$= \frac{m \chi}{a h} \left(\frac{a(A+1)Dn}{n-1} + \frac{nA^2b(B+1)Dn'}{n'-1} + \frac{n'A^2B^2c(C+1)Dn''}{n''-1} + \&c. \right)$$

comparaison
de l'une
& de l'autre
confusion.

65. De-là on voit que cette confusion est proportionnelle au diamètre même de l'ouverture de la première surface, pendant que la première confusion étoit proportionnelle au cube de ce diamètre; on tire de-là aussi une juste comparaison entre ces deux espèces de confusion, puisqu'on n'aura qu'à comparer entre eux les deux angles θ & η ; or on aura

$$\theta : \eta = \frac{\omega \chi \chi}{4 a n} : \Omega.$$

66. Afin donc que cette confusion devienne impercep-

tible, il faudra faire en sorte que l'angle η ne surpasse point 2 secondes, ou que la valeur de η se trouve plus petite que $\frac{1}{100000}$. Il n'y a aucun doute que ce moyen ne puisse être employé avec succès, même dans les cas où il n'est pas possible de réduire cette confusion à zéro.

67. Considérons maintenant plus soigneusement le lieu de l'œil qui doit nécessairement se trouver derrière la dernière surface, ou bien posant la distance de là $= O$, il est nécessaire que cette quantité O devienne positive, sans cette condition il seroit impossible que l'œil découvrit le champ apparent tout entier.

Juste mesure du lieu de l'œil,

Distance de l'œil derrière la dernière surface $= O$.

68. En rassemblant tout ce qui vient d'être rapporté sur le lieu de l'œil, nous aurons pour chaque nombre de surfaces,

| N ^o de surfaces. | Lieu de l'œil. |
|-----------------------------|---|
| 1 | $O = 0 = \frac{a}{A} + h,$ |
| 2 | $O = \frac{\pi'q}{\psi'} = \frac{-h\pi'q}{m\alpha\phi} = \frac{-h(n'-1)\pi'}{NmA(\psi' - B\psi)} = \frac{-B}{h} \cdot \frac{(n'-1)\pi'}{\psi' - B\psi} = \frac{b}{B'} + h_1$ |
| 3 | $O = \frac{\pi''r}{\psi''} = \frac{+h\pi''r}{m\alpha\phi} = \frac{+h(n''-1)\pi''}{NmAB(\psi'' - C\psi')} = \frac{-C}{h} \cdot \frac{(n''-1)\pi''}{\psi'' - C\psi'} = \frac{c}{C} + h_1$ |
| 4 | $O = \frac{\pi'''s}{\psi'''} = \frac{-h\pi'''s}{m\alpha\phi} = \frac{-h(n'''-1)\pi'''}{NmABC(\psi''' - D\psi'')} = \frac{-D}{h} \cdot \frac{(n'''-1)\pi'''}{\psi''' - D\psi''} = \frac{d}{D} + h_1$ |
| | &c. |

où j'ai mis plusieurs formules équivalentes, afin qu'en chaque cas proposé on puisse se servir de celle qu'on jugera la plus commode.

69. Comme c'est une condition absolument nécessaire que la distance O soit positive, il est également nécessaire que les intervalles entre les surfaces $AB, BC, CD, \&c.$ deviennent positives; c'est pourquoi dans la détermination des élémens pour un cas quelconque, il faut bien prendre garde qu'aucune de ces formules ne devienne négative.

Conditions nécessaires à observer,

$$AB = a + b, BC = b + c, CD = \gamma + d, De = \delta + e, \&c.$$

$$\text{ou } AB = \frac{n'q}{\psi}, BC = \frac{n'q + n''r}{\psi'}, CD = \frac{n''r + n'''s}{\psi''}, De = \frac{n'''s + n''''t}{\psi'''}$$

70. Il me semble que les articles que je viens de développer, renferment tout ce à quoi il faut avoir égard dans la Dioptrique ; les formules que j'ai données ici, sont en effet suffisantes pour procurer aux instrumens de Dioptrique toutes les bonnes qualités qu'on peut souhaiter, & même pour les porter au plus haut degré de perfection dont ils sont susceptibles.

71. Peut-être trouvera-t-on quelque difficulté pour appliquer ces formules à des cas particuliers, mais je puis assurer qu'après quelques essais on surmontera aisément toutes les difficultés, de sorte qu'on ne sauroit plus rien désirer dans cette science.

Avertissement
sur
l'application
de ces
formules.

72. Ordinairement dans la construction des instrumens de Dioptrique, on se règle sur les yeux, dont la juste distance k est infinie, & alors nos formules deviennent non-seulement plus simples, mais leur application aussi se fait beaucoup plus aisément, cependant sans s'astreindre à cette condition, où $k = \infty$, on réussira presque aussi bien en introduisant dans le calcul d'abord la distance de l'œil derrière la dernière surface qui est égale à O , & alors il sera bon de commencer les recherches par les formules suivantes.

Deux
surfaces.

Pour le cas des deux surfaces, on a d'abord

$$B = \frac{b}{O - k} \quad \& \quad NmAbk = h(O - k),$$

$$\text{d'où puisque } ma\varphi = -\psi' h, O = \frac{n'q}{\psi'}, \quad \& \quad q = \frac{(n' - 1)b}{n'B + 1},$$

à cause de $(n' - 1)\pi' = n'\psi' + \psi$, on aura

$$b = \frac{h(O - k)}{NmAk} \quad \& \quad \frac{\psi}{\psi'} = \frac{n'kk + O \cdot NmAk}{h(O - k)};$$

Trois
surfaces.

Pour le cas des trois surfaces, on a d'abord

$$C = \frac{c}{O - k}, \quad \& \quad NmABck = h(O - k);$$

Fig. 1.

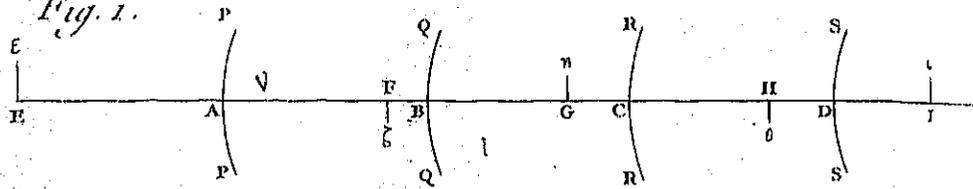


Fig. 2.

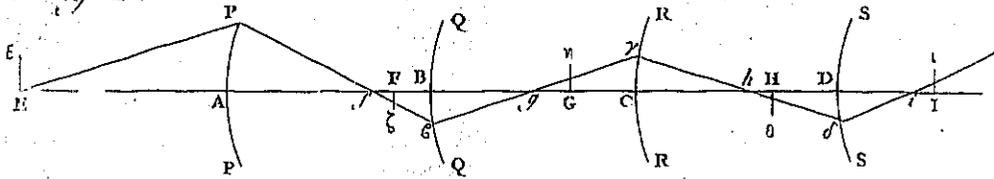


Fig. 3.

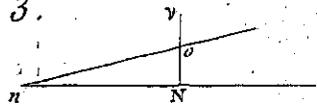


Fig. 4.

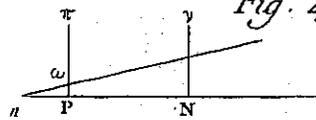


Fig. 5.

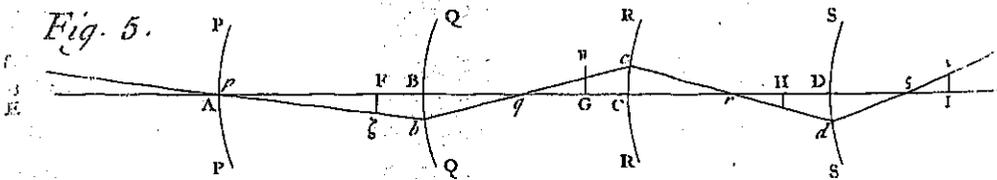


Fig. 6.

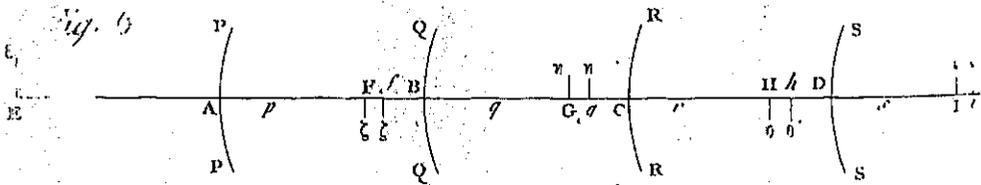
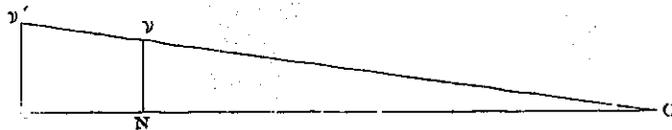


Fig. 7.



d'où pu
à cause
c :
Pou
D
d'où pu
à cause
d =
& ainf