DE AEQVILIBRIO ET MOTV CORPORVM FLEXVRIS ELASTICIS IVNCTORVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Corpora hic rigida confidero, quorum autem duo pluraue ita inter fe fint coniuncta, vt feparationi quidem refiftant, verumtamen in fingulis iuncturis inflexionem feu motum gyratorium circa quempiam axem admittant. Iuncturas autem ita comparatas affumo, vt ifta inflexio non libere fuccedat, fed vi inflectenti eo magis reluctetur, quo maior inflexio produci debeat. Datur fcilicet in huiusmodi corporibus ftatus naturalis, in quo fine actione cuiusquam vis externae fe quafi fponte conferuent; quo magis autem de hoc ftatu per inflexionem deturbari debeant, vt eo maiori vi fit opus ad eiusmodi effectum producendum. Denique vero his flexuris eiusmodi vim infitam tribuo, vt poftquam corpora de fitu naturali fuerint depulfa, ceffante vi inflectente, ea fponte fe in ftatum naturalem reſtituant, in quo quippe natura elaſticitatis conſiſtit.

2. Ad hanc igitur indolem ſunt referenda omnis generis corpora elaſtica, veluti laminae elaſticae, quae incuruatae vi pollent ſeſe in ſtatum naturalem reſtituendi. Hoc tantum intercedit diſcrimen, quod in huiusmodi corporibus nullum detur punctum, circa quod inflexio fieri nequeat ita vt ea tanquam ex infinitis elementis, ope flexurarum elaſticarum coniuncta ſpectari oporteat. Hic autem quo latius inueſtigationes noſtrae pateant, corpora ex finito partium numero conflata contemplabor, quae partes ſingulae nullius figurae mutationis ſint capaces, ſed in ipſis tantum iuncturis circa ſe inuicem elaſticitatis reſiſtentia ſuperata inflecti patiantur.

3. Quo autem clarius omnia principia, ex quibus huiusmodi corporum determinatio motus eſt petenda, perſpiciatur, inueſtigationes a caſu ſimpliciſſimo, quo duo tantum corpora huiusmodi flexura elaſtica ſunt coniuncta exordiri conueniet, ſic enim omnibus circumſtantiis probe perpenſis multo tutius ac felicius ad maiorem corporum hoc modo inter ſe iunctorum numerum progredi licebit. Ante omnia igitur hic in ipſa iunctura axis ille conſiderandus occurrit circa quem vtrumque corpus moueri poteſt ita vt altero fixo alterum circa iſtum axem de ſitu naturali detorqueri queat, quatenus vis inflectens elaſticitati ſuperandae par eſt. Deinde vero vtrumque

que corpus feorfim eft fpectandum, quae cum fint rigida, mechanica cognitio ad motum definiendum requifita cum centro inertiae tum vero momentis inertiae continetur.

4. Sit igitur recta Mm axis flexurae, qua ambo corpora funt coniuncta et dum ea in ftatu naturali verfantur, fit alterius corporis centrum inertiae in A, alterius vero in B, quae quidem in figura ita exhibentur quafi cum axe Mm effent in eodem plano, verum vtique fieri poffet vt plana MAm et MBm certum quendam angulum inter fe conftituerent, quemadmodum etiam rectae normales Aa et Bb ab vtroque centro inertiae ad axem ductae vel in vnum vel diuerfa puncta incidere poffunt, quae circumftantia fi ad motum fpectemus, probe eft obferuanda. Hinc ergo in quouis ftatu violento inclinatio planorum MAm et MBm, cum naturali fiue fit nulla fiue aliqua, comparari debet quoniam a differentia quantitas vis elafticae, quae tum ad reftitutionem exeritur, pendet. Tab. III. Fig. 1.

5. Ad vim elafticam autem mente faltem concipiendam, ftatuatur axis flexurae plano tabulae in L normalis, et fit ALb ftatus naturalis, ita vt tum ambo centra inertiae in planis quae rectis LA et Lb normaliter infiftunt, reperiantur. Nunc autem confideretur ftatus quicunque violentus ALB, quo alterius corporis centrum inertiae in planum rectae LB normaliter infiftens fit detrufum, ac fta- Fig. 2.

 tus

tus deturbatio ex angulo BLb erit aeſtimanda, cum tendat ad hunc angulum extinguendum; atque in calculo vis elaſtica ſinui huius anguli proportionalis ſtatui ſolet, cuius ratio ita exhiberi poteſt. Vi elaſticae reuera inſitae ſubſtituatur mente filum elaſticum Bb, vi praeditum ſe in ratione longitudinis Bb contrahendi; ponatur $LB = Lb = k$ angulus $BLb = \omega$, vt ſit $Bb = 2k\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega$, ideoque ipſa vis $= E\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega$ quae cum punctum B in directione Bb ſollicitet, erit eius momentum ratione axis $L = E\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega.\, LB\,\text{ſin.}\, LBb = Eb\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}Eb\,\text{ſin.}\,\omega$; vnde patet momentum vis elaſticae, quod hic eſt ſpectandum, non ſine ratione ſinui anguli inflexionis BLb proportionale ſtatui.

6. Si extremitates A et B filo AB conſtringantur, euidens eſt hoc modo corpora in ſtatu violento retineri poſſe, vbi imprimis tenſionem fili ad hoc requiſitam notari conuenit. Sit igitur T iſta fili tenſio reſtitutionem in ſtatum naturalem coercens, cuius momentum ad inflexionem augendam cum ſit $= T.LB.\,\text{ſin.}\,ABL = T.AL.\,\text{ſin.}\,BAL$, ob $AB : \text{ſin.}\,ALB = AL : \text{ſin.}\,ABL$, erit id $= \frac{T.LA.LB}{AB}\,\text{ſin.}\,ALB$, momento elaſticitatis, quod ſit $= E\,\text{ſin.}\,\omega$ aequale ponendum vnde poſitis $LA = a$, $LB = b$, angulo naturali $ALb = \lambda$ vt ſit $ALB = \lambda - \omega$, et $AB = \sqrt{(aa + bb - 2ab\,\text{coſ.}\,(\lambda - \omega))}$ erit tenſio $T = \frac{E\,\text{ſin.}\,\omega.\,\sqrt{(aa + bb - 2ab\,\text{coſ.}\,(\lambda - \omega))}}{ab\,\text{ſin.}\,(\lambda - \omega)}$. Quodſi ergo in ſtatu naturali partes LA et Lb in directum iaceant, vt ſit $\lambda = 180°$ fit $T = \frac{E.AB}{ab}$.

7. Hic

7. Hic casus per se quidem perspicuus eo magis est memorabilis quod ingens paradoxon inuoluere videtur. Si enim duae virgae rigidae AL, LB in L ita elatere sint iunctae, vt sponte in directum sint extensae, eaeque constrictione fili AB in statu inflexo ALB detineantur, mirum videbitur, quomodo tensio fili quantitati $\frac{E.AB}{LA.LB}$ hoc est ipsi fili longitudini AB proportionalis esse queat, quandoquidem hoc modo ad inflexionem minorem maior fili tensio, ad maiorem autem minor requiritur. Scilicet minuta fili tensione, virgae subito in statum naturalem resilient cum tamen tensio minor maiorem inflexionem sustinere posset. Contra autem aucta fili tensione, inflexio adeo augebitur, cum tamen maior inflexio minorem tensionem exigat. Tab. III. Fig. 3.

8. Quo hoc paradoxon dilucidemus, virgam AL vt fixam spectemus, vt altera BL cum a certa vi secundum BA quae sit $= D$, tum ab elatere Bb sollicitata circa punctum seu axem L fixum moueatur. Cum igitur positis LA $= a$ LB $= b$, BL$b = \omega$, vt sit AB $= \sqrt{(aa + bb + 2ab \cos.\omega)}$, sit vis BA momentum $= \frac{Dab \sin.\omega}{\sqrt{(aa + bb + 2ab \cos.\omega)}}$, elateris autem momentum contrarium $= Eb \sin.\omega$, si virgae BL momentum inertiae respectu axis L statuamus $= Bcc$, erit ex motus principiis $\frac{Bccdd\omega}{2gdt^2} = \frac{Dab \sin.\omega}{\sqrt{(aa + bb + 2ab \cos.\omega)}} - Eb \sin.\omega$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, siquidem tempus

pus t in minutis fecundis exprimere velimus. Multiplicemus per $d\omega$ et integrando obtinebimus

$$\frac{Bcc\,d\omega^2}{4g\,dt^2} = C + Eb\,\mathrm{cof.}\,\omega - D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\omega)}$$

fumamus motum a quiete incepiffe, cum erat $\omega = \alpha$, vt conftans C rite determinetur, ac fiet

$$\frac{Bcc\,d\omega^2}{4g\,dt^2} = Eb(\mathrm{cof.}\,\omega - \mathrm{cof.}\,\alpha) + D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\alpha)} - D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\omega)}.$$

9. Nunc igitur oftendendum eft, fi fuerit vis $D = \frac{E\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\alpha)}}{a}$ tum virgam LB in ftatu initiali, vbi erat angulus $BLb = \alpha$ perpetuo quiefcere, fin autem vis $BA = D$ fuerit hac quantitate maior, tum virgam LB angulo BLb continuo crefcente verfus LA rotari, contrarium vero euenire, fi vis illa D fuerit minor, hocque cafu virgam LB ad fitum Lb acceffuram effe. Primum quidem inde patet quod non folum ipfa quantitas, cui quadratum celeritatis angularis $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ aequatur, cafu quo $\omega = \alpha$ euanefcit fed etiam eius differentiale, ideoque et acceleratio, ita vt virga LB tum perpetuo in fitu initiali fit permanfura. Pro reliquis cafibus fit breuitatis gratia $\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\alpha)} = f$ et $\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cof.}\,\omega)} = z$; eritque $\frac{Bccd\omega^2}{4g\,dt^2} = \frac{E(zz - ff)}{2a} - D(z - f) = (z - f)\left(\frac{E(z + f)}{2a} - D\right)$. Ponatur iam $D = \frac{nEf}{a}$, vt fit n modo maius modo minus vnitate fietque $\frac{Bac^2\,d\omega^2}{2Eg\,dt^2} = (z - f)(z + f - 2nf)$; et celeritas angularis erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z - f)(z + f - 2nf)}$.

10. Quod-

10. Quodſi iam ſit $n > 1$, ita vt vis BA elaterem ſuperet, primo quidem angulus ω augebitur, et diſtantia $AB = z$ diminuetur, vnde pro motu ſecuturo erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(f-z)((2n-1)f-z)}$, ex quo euidens eſt ob $2n-1 > 1$, dum angulus BLb creſcit, et z minuitur celeritatem non ſolum nusquam ceſſare, ſed continuo augeri, donec virga LB prorſus in directionem LA reducatur. Sin autem ſit $n < 1$, ſtatim diſtantia $AB = z$ increſcit, vt fiat $z > f$, et $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z-f)(z-(2n-1)f)}$, vbi ob $2n-1 < 1$, euidens eſt creſcente z etiam celeritatem angularem continuo augeri, donec virga in ſitum naturalem Lb reſtituatur, fiatque $z = a+b$. Tum vero hac celeritate, motus angularis in plagam contrariam vertetur, ſiquidem iunctura id permittat qui motus priori omnino erit ſimilis.

11. Tempus autem ipſum huius motus non-niſi per quadraturas ſatis perplexas definiri poteſt, quae difficultas adeo vix minuitur, etiamſi elaſticitas prorſus euaneſcat, et virga LB circa axem L libere ſtatuatur mobilis, a vi conſtante D iugiter ſecundum directionem BA ſollicitata. Poſito enim $E = 0$, habebitur $\frac{Bccd\omega^2}{4Dgdt^2} = f - z$, vnde colligitur

$$dt\sqrt{\frac{4Dg}{Bcc}} = \frac{-2z\,dz}{\sqrt{(f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

exiſtente $ff = aa+bb+2ab\cos.\alpha$, ideoque $f < a+b$, quae formula integranda certe maxime eſt complicata, quod in tali caſu tam facile ad praxin reuo-

 cando,

cando, mirum videtur. Neque elaſticitate admiſſa calculus multo fit intricatior cum poſito $D = \frac{nEf}{a}$ tum habeatur:

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2z\,dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

quae quidem aequatio ſi $b = a$ ſeu $LB = LA$ in hanc ſimpliciorem formam abit

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2\,dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(2a+z)(2a-z)}}.$$

12. Vnicus caſus occurrit, qui faciliorem integrationem admittit; cum ſcilicet ſit $f < 2a$ ob $ff = 2aa(1+\operatorname{cof.}\alpha)$; numerus n ita accipiatur vt fiat $(2n-1)f = 2a$, ſeu $2n-1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\operatorname{cof.}\alpha)}} = \frac{1}{\operatorname{cof.}\frac{1}{2}\alpha}$ et cum ſit $dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2\,dz}{(2a-z)\sqrt{(f-z)(2a+z)}}$ integrale reperitur:

$$t\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{1}{\sqrt{a(2a-f)}}\left(\text{Ang. cof.}\ \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)}\right)$$

quae formula euaneſcit ſumto $z = f$ pro motus initio. In minutis ſecundis ergo habetur:

$$t = \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Eg(2a-f)}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)} = \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(2n-1)Egf}}$$
$$\text{Ang. cof.}\ \frac{(n-2)(2n-1)f+(3n-2)z}{n((2n-1)f-z)}$$

vnde ſequitur tempus quo virga LB in ſitum LA compellitur fore $= \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(n-1)Egf}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{n-2}{n}$ minutis ſecundis. Ita ſi initio motus fuiſſet $\alpha = 90°$, ideoque $2n-1 = \sqrt{2}$ ſeu $n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ erit hoc tempus totum $= \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Egf(\sqrt{2}-1)}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{\sqrt{2}-3}{1+\sqrt{2}}$, qui angulus proxi-

proxime continet 131°, 35′ et in partibus radii 2, 287436.

13. Si virgam LA, quam hic vt fixam spectauimus, etiam mobilem faciamus, vt ambae simul super plano tabulae, ad quod quippe axis inflexionis sumitur perpendicularis, moueantur, nullum est dubium quin problema multo sit difficilius, et profundiorem Mechanicae cognitionem postulet. Multo porro difficilius fiet problema, si hae binae virgae in vacuo vtcunque proiiciantur, vt axis inflexionis non amplius situm sibi parallelum conseruet, eaeque insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitentur. Quodsi praeterea corpus ex pluribus constet partibus, flexura elastica inter se coniunctis, neque adeo axes inflexionis in singulis flexuris fuerint inter se paralleli; nescio an quis solutionem saltem tentare auderet. Equidem hic tantummodo eiusmodi plurium partium compagem sum consideraturus, vbi omnes axes inflexionis in singulis iuncturis inter se sint paralleli, atque motus ita sit comparatus, vt in eodem plano absoluatur, ad quod illi axes sint perpendiculares, et in quo simul singularum partium centra inertiae sint sita, etiamsi methodus, qua sum vsurus, multo latius pateat.

14. Principium autem primarium, cui omnium huiusmodi motuum determinatio innititur, ex Statica seu ea scientia, quae circa aequilibrium virium est occupata, peti oportet. Nisi enim constet, a

quibus viribus corpus quodpiam, cuiuscunque indolis fuerit, in aequilibrio contineatur, determinatio motus, ab aliis quibuscunque viribus variati frustra suscipitur. Euolutio autem accuratior huius principii eo magis est necessaria, quod ipsa motus determinatio, vtcunque is fuerit intricatus, semper leui adhibita consideratione ad statum aequilibrii reuocari potest, dum vires ad motus effectionem requisitae viribus quibus corpus actu impellitur aequiualere, ideoque contrarie applicatae cum his in aequilibrio consistere debent, quod adeo etiam in motu fluidorum locum habet. Quocirca inuestigationes a statu aequilibrii incipiam.

Problema 1.

15. *Si corpus ex quotcunque partibus compositum, quae flexuris elasticis inter se sint coniunctae, a viribus quibuscunque fuerit sollicitatum, definire conditiones, quibus hae vires se mutuo in aequilibrio coerceant.*

Solutio.

Primum omnium obseruandum est cunctas vires perinde in aequilibrio esse debere, ac si corpus prorsus esset rigidum; si enim singulae flexurae subito rigescerent, inde virium aequilibrium neutiquam turbaretur; quocirca primo quidem in eas conditiones est inquirendum, sub quibus vires corpus

pus ſollicitantes ſe inuicem deſtruerent, ſi totum corpus tanquam rigidum ſpectetur. Hunc in finem ſingulae vires corpus ſollicitantes ita euoluantur, vt quaelibet puncto corporis Z applicata ſecundum ternas directiones fixas Zp, Zq, et Zr, quae ternis axibus inter ſe normalibus IA, IB et IC ſint parallelae reſoluantur. Sit igitur vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$, et ponantur ternae coordinatae ſitum puncti Z definientes et iisdem axibus parallelae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ac primo quidem conſtat, ſummas omnium harum ternarum virium ſeorſim nihilo aequales eſſe debere, vnde hae tres conditiones colliguntur, vt ſit: Tab. III. Fig. 4.

$$1^\circ.\ \int p = 0;\quad 2^\circ.\ \int q = 0;\quad 3^\circ.\ \int r = 0$$

quibus obtinetur, vt corporis centrum inertiae in aequilibrio conſeruetur.

Verum hae tres conditiones nondum ſufficiunt, etiamſi corpus totum foret rigidum, oportet enim inſuper, vt corpori circa nullum plane axem motus imprimatur; ex quo momenta omnium harum virium reſpectu axis cuiuscunque ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt. At trium virium p, q, r momentum reſpectu axis IA in plagam BC eſt $= ry - qz$; reſpectu vero axis IB in plagam CA eſt $= pz - rx$; et reſpectu axis IC, in plagam AB eſt $= qx - py$, vnde tres ſequentes conditiones prioribus ſunt adiiciendae:

$$4^\circ.\ \int(ry - qz) = 0;\ 5^\circ.\ \int(pz - rx) = 0;\ 6^\circ.\ \int(qx - py) = 0.$$

Facile autem patet, dummodo hae ſex conditiones locum habeant, momenta virium reſpectu omnium plane axium, vtcunque accipiantur, pariter in nihilum abire.

Nunc ſex iſtae conditiones ſufficerent, ſi totum corpus eſſet perfecte rigidum, ſin autem conſtet ex partibus inuicem flexuris iunctis, neceſſe inſuper eſt, vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusque flexurae, in aequilibrio conſiſtant. Sit igitur in N eiusmodi flexura, cuius axis inflexionis ſit recta tu vtcunque ad ternos axes inclinata, et ex ratione iuncturae et quantitate inflexionis dabitur elaſticitatis momentum, quo reſtitutio in ſtatum naturalem circa axem tu intenditur. Sit Eu hoc elaſticitatis momentum, atque ad aequilibrium requiritur vt virium ſollicitantium momenta reſpectu eiusdem axis tu ſumta, ſint vtrinque momento elaſticitatis Eu aequalia. Cum ſcilicet omnia virium momenta reſpectu axis tu ſumta ſe mutuo deſtruant, totum corpus per flexuram tNu in duas partes diſtributum eſt conſiderandum, quarum altera cis altera trans flexuram porrigitur; atque momenta virium alteri parti applicatarum reſpectu axis tu quorum ſumma ſit Vs, momento elaſticitatis Eu ita aequalia ſunt ponenda, vt reſtitutioni in ſtatum naturalem reluctentur; tum autem ſponte ſumma momentorum ex altera parte ſumtorum, quorum ſumma eſt $= -Vs$, etiam momento elaſticitatis Eu

erit

erit aequalis pariterque restitutioni aduersabitur. Hinc quaelibet flexura peculiarem suppeditat aequationem, quae omnes cum sex ante exhibitis, conditiones aequilibrii quaesitas complectuntur.

Coroll. 1.

16. Si partium iunctura ita est comparata, vt inflexioni prorsus non resistat, qui est casus corporum perfecte flexibilium, tum pro singulis flexuris vis elastica Eu euanescit, et ex vtraque parte virium momenta respectu axis inflexionis nihilo aequalia sunt ponenda.

Coroll. 2.

17. Quo haec clariora reddantur, sint duae virgae aequales AC et BC in C ita iunctae, vt inflexae vi quacunque se in directum extendere conentur: quibus in A et B applicatae sint vires aequales Aa, Bb parallelae et ad vtramque virgam aeque inclinatae, in C vero applicata sit vis duplo maior Cc illis item parallela, quae tres vires proinde erunt in aequilibrio si ambae virgae vt vnum corpus rigidum spectentur. Vt autem ob flexuram in C aequilibrium non turbetur, primum virga BC vt fixa spectetur, et vis Aa momentum exeret ad inflexionem virgae CA augendam, quod ergo vi elasticae flexurae aequale esse debet. Simili modo si virga AC fixa concipiatur, ex vi Bb Tab. III. Fig. 5.

nascenafcetur momentum priori aequale et contrarium quod tamen pariter inflexionem augere conabitur, ideoque vi elafticae flexurae aequabitur. Ex quo patet quomodo virium vtrinque agentium momenta fe mutuo deftruant feorfim vero cum vi elaftica flexurae in aequilibrio confiftant.

Coroll. 3.

18. Vbicunque ergo datur flexura, ibi corpus neceffario in duas partes dirimitur, quarum altera fi fixa concipiatur alteri motus circa axem flexurae imprimi queat. Quae partium diftinctio pro qualibet flexura quo facilius percipiatur, reliquae flexurae omnes tanquam rigefcerent, funt confiderandae. Pro his autem binis partibus virium follicitantium momenta probe a fe inuicem diftingui oportet.

Scholion.

19. Ex hoc principio manifefto fluunt, quae iam olim de aequilibrio corporum tam flexibilium quam elafticorum fum commentatus; dum a viribus quibuscunque follicitantur. Ibi autem omnes flexuras tanquam in eodem plano exiftentes affumferam, cui fimul omnes axes inflexionis effent perpendiculares. Nunc igitur idem principium ad complexum ampliffimum extuli, vt ad omnia flexurae genera latiffime pateret, quo quidem fcientia aequilibrii maxime promota videtur. Verumtamen ipfa huius

huius principii applicatio saepenumero ingentes adhuc difficultates inuoluit, dum virium sollicitantium momenta respectu axis cuiuscunque oblique siti non sine summa molestia definiuntur, et secundum praecepta vulgaria ad calculum reuocantur. Difficultas scilicet tum potissimum offenditur, quando axis flexurae *tu* ratione axium IA, IB et IC, secundum quos singulae vires sollicitantes resoluuntur, situm tenet vtcunque obliquum; tum enim nonnisi calculo perquam prolixo et taedioso, eius, respectu virium Zp, Zq et Zr momenta colliguntur, cum tamen negotium satis facile succederet, si axis *tu* vni principalium IA, IB et IC foret parallelus, similique modo institui posset, quo earundem virium momenta respectu ipsorum axium IA, IB, IC in solutione sunt computata. Egregium igitur subsidium scientiae aequilibrii allatum est censendum sequente propositione, qua ostensurus sum, quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium inuentis, facile definiri possit earundem virium momentum respectu alius cuiusque axis obliqui per idem punctum ducti.

Problema 2.

20. *Si dentur virium quarumcunque momenta respectu ternorum axium* IA, IB, IC *inter se normalium in puncto* I, *inuenire earundem virium momentum respectu axis cuiuscunque obliqui* IO *per idem punctum* I *traiecti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Tota haec inueſtigatio commodiſſime ad trigonometriam ſphaericam reduci videtur. Centro ergo I radio $=r$ ſphaera deſcripta intelligatur, cuius ſuperficies ab illis ternis axibus traiiciatur in punctis A, B, C, ita vt arcus AB, BC, CA ſint quadrantes, in puncto O autem tranſeat axis obliquus IO, ad quod ducantur arcus circulorum maximorum AO, BO, CO. His poſitis ſint virium ſollicitantium momenta reſpectu

axis $IA = Lr$; in plagam BC

axis $IB = Mr$; in plagam CA

axis $IC = Nr$; in plagam AB.

Iam quaecunque ſint iſtae vires, earum loco hic eiusmodi vires determinatae ſubſtituantur, quae eadem momenta gignant, iisque propterea ſint aequivalentes. Quare in puncto B applicata concipiatur vis $BL = L$, cuius directio arcum BC in B tangat, quae cum ſit normalis in radium BI axi IA perpendicularem, momentum dabit reſpectu axis $IA = Lr$ in plagam BC tendens, et quia haec vis cum reliquis axibus IB et IC in eodem plano iacet, eorum reſpectu nulla praebebit momenta. Simili modo in C applicata concipiatur vis $CM = M$ ſecundum tangentem arcus CA cuius momentum reſpectu axis IB erit $= Mr$ in plagam CA tendens, reſpectu reliquorum vero axium nullum producit.

ducit momentum. Denique etiam in A concipiatur vis $AN = N$ secundum directionem AB, vnde nascitur momentum respectu axis $IC = Nr$ in plagam AB. Cum igitur hae tres vires $BL = L$; $CM = M$ et $AN = N$ ipsa momenta proposita respectu ternorum axium IA, IB et IC exhibeant, eas loco virium, quaecunque fuerint, vnde ista momenta sunt nata, substituere licebit, ita vt nunc tota quaestio huc redeat, vt harum trium virium momenta respectu axis obliqui IO definiantur. Pro situ igitur axis IO ponantur anguli

$$AIO = \lambda, \; BIO = \mu \text{ et } CIO = \nu$$

qui a se inuicem ita pendent vt sit $\cos.\lambda^2 + \cos.\mu^2 + \cos.\nu^2 = 1$ et cum ratio trium virium sit eadem, vis $BL = L$ ad arcum BO inclinata angulo OBL resoluatur in duas inter se normales et in superficie sphaerae sitas, quarum altera in BO cadat, quae erit $= L\cos.OBL$, altera vero huic normalis $= L\sin.OBL$, quarum illa respectu axis IO nullum praebet momentum quia eius directio cum hoc axe in eodem plano existit, haec vero cum sit ad planum IBO ideoque etiam ad rectam BS ex B in IO normaliter ductam perpendicularis dabit respectu axis IO momentum $= L.\sin.OBL.BS$ in plagam BC. Est vero $BS = r\sin.BIO = r\sin.BO$, sicque istud momentum fit $= Lr\sin.BO.\sin.OBL$. Producatur arcus AO in P, vt sit AP quadrans et in arcum BC normalis; atque in triangulo sphaerico

 rectan-

rectangulo BOP erit sin. OP = sin. BO sin. OBL hincque momentum illud = Lr sin. OP = Lr cos. AO = Lr cos. λ. Simili modo ex vi CM = M respectu axis IO colligetur momentum = Mr cos. μ, in plagam CA, et ex vi AN = N momentum = Nr cos. ν in plagam AB. Quae plagae cum ratione motus circa axem IO generandi conueniant, ex viribus sollicitantibus, quarum momenta Lr, Mr, Nr respectu axium IA, IB, IC sunt cognita, concluditur fore momentum respectu axis obliqui IO =

$$Lr \cos.\lambda + Mr \cos.\mu + Nr \cos.\nu$$

in plagam ABC, quod ergo ex momentis datis facili negotio obtinetur.

Coroll. 1.

221. Si axis IO in aliquem principalium veluti IA incidat momentum ipsi Lr fiet aequale, quod inde est manifestum, quia arcus AO = λ euanescit, et bini reliqui BO = μ et CO = ν euadunt quadrantes.

Coroll. 2.

222. Fieri potest vt momentum respectu axis IO euanescat, idque infinitis modis. Angulo enim AIO = λ pro lubitu assumto, reliquos μ et ν ita assumere licet vt fiat $L \cos.\lambda + M \cos.\mu + N \cos.\nu = 0$ manente $\cos.\lambda^2 + \cos.\mu^2 + \cos.\nu^2 = 1$. Cum enim inde fit $\cos.\nu = \frac{-L \cos.\lambda - M \cos.\mu}{N}$ fit $NN \sin.\lambda^2 = (MM + NN) \cos.\mu^2 + 2LM \cos.\lambda \cos.\mu + LL \cos.\lambda^2$

hinc-

hincque $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm \sqrt{(NN(MM+NN)\sin.\lambda^2 - LLNN\cos.\lambda^2)}}{MM+NN}$

vel $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm N\sqrt{((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}}{MM+NN}$

quod fieri potest dum sit $\sin.\lambda > \frac{L}{\sqrt{(LL+MM+NN)}}$; eritque tum $\cos.\nu = \frac{-LN\cos.\lambda \mp M\sqrt{((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}}{MM+NN}$

et anguli μ, et ν prodeunt reales.

Coroll. 3.

23. Casus deinde imprimis notatu dignus occurrit, quo virium momentum respectu axis IO sit omnium maximum; euenit hoc si hic axis ita capiatur, vt sit

$$\cos.\lambda = \frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}};\ \cos.\mu = \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}};\ \cos.\nu = \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

tum enim eius respectu erit momentum $= r\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}$.

Coroll. 4.

24. Huius ergo problematis ope momentum virium corpus sollicitantium respectu cuiusque flexurae cuius axis situm tenet vtcunque obliquum definire, ideoque sequens problema resoluere poterimus.

Problema 3.

25. *Si corpus ex partibus quotcunque, quae flexuris elasticis sint coniunctae, compositum a viribus* Tab. III. Fig. 7.

 quibus-

quibuscunque sollicitetur, earum momentum respectu vniuscuiusque flexurae N, *cuius axis* tNu *situm tenet vtcunque obliquum inuestigare.*

Solutio.

Locus flexurae N ternis coordinatis inter se normalibus definiatur quae sint $IL = l$, $LM = m$, et $MN = n$ et in N tres concipiantur axes Nl, Nm Nn istis coordinatis paralleli, ad quos axis flexurae tu ita inclinetur, vt sint anguli $lNu = \lambda$, $mNu = \mu$, $nNu = \nu$ ideoque $\operatorname{cos}.\lambda^2 + \operatorname{cos}.\mu^2 + \operatorname{cos}.\nu^2 = 1$, reliquae vero flexurae rigescere concipiantur. Ita corpus in hac flexura in duas partes dispescitur, quarum vtraque circa axem flexurae, motum recipere potest altera manente immota. Virium ergo quae alteri tantum parti sunt applicatae, momentum respectu axis tu indagari oportet. Huius partis sit Z punctum quodcunque coordinatis $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ definitum, cui vires sint applicatae quaecunque, quae ad ternas directiones Zp, Zq, Zr reducantur, sitque vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$. Iam primo harum virium momenta colligantur respectu axium fictorum Nl, Nm, Nn, ac manifestum est fore earum momenta

respectu axis $Nl = q(n-z) - r(m-y)$ in plagam mn

respectu axis $Nm = r(l-x) - p(n-z)$ in plagam nl

respectu axis $Nn = p(m-y) - q(l-x)$ in plagam lm.

Quibus

Quibus inuentis ex problemate praecedente earundem virium respectu axis flexurae tu momentum concluditur fore in plagam lmn:

$$q(n-z)\operatorname{cos}\lambda - r(m-y)\operatorname{cos}\lambda + r(l-x)\operatorname{cos}\mu - p(n-z)\operatorname{cos}\mu$$
$$+ p(m-y)\operatorname{cos}\nu - q(l-x)\operatorname{cos}\nu.$$

Omnia ergo haec momenta per totam corporis partem colligendo ob quantitates l, m, n et angulos λ, μ, ν constantes impetramus totum momentum quaesitum:

$$(m\operatorname{cos}\nu - n\operatorname{cos}\mu)\int p + (n\operatorname{cos}\lambda - l\operatorname{cos}\nu)\int q + (l\operatorname{cos}\mu - m\operatorname{cos}\lambda)\int r$$
$$+ \operatorname{cos}\lambda \int (ry - qz) + \operatorname{cos}\mu \int (pz - rx) + \operatorname{cos}\nu \int (qx - py).$$

Coroll. 1.

26. In statu ergo aequilibrii hoc momentum vi elasticae qua flexura in N est praedita, aequale poni oportet, siquidem vis elastica hanc corporis partem, ex qua momentum est collectum in plagam contrariam nml flectere conatur.

Coroll. 2.

27. Cum igitur quaelibet flexura huiusmodi aequationem suppeditet, omnes hae aequationes illis sex, quas supra indicauimus adiunctae statum aequilibrii corporis determinabunt.

Scho-

Scholion.

28. En ergo vera principia, ex quibus status aequilibrii corporum flexuris elasticis praeditorum, dum a viribus quibuscunque sollicitantur, definiri debet. Quae cum latissime pateant, omnia ea quae adhuc de aequilibrio corporum flexibilium et elasticorum sunt inuestigata, in se complectuntur. In his autem inuestigationibus omnium flexurarum axes inter se paralleli sunt assumti, quo calculi euolutio magis plana et facilis redderetur; sin autem isti axes inter se non fuerint paralleli, calculus non solum maiorem molestiam inuoluit, sed etiam summopere difficile est pro omnibus inflexionibus, quae huiusmodi corporibus induci possunt, singularum partium situm ad calculum reuocare, vt principia hic stabilita in vsum vocari queant. Quae difficultas quo clarius perspiciatur, casum satis simplicem euoluam, quo corpus ex tribus tantum constat partibus quarum iuncturae axes habeant inter se normales, et quae statu naturali in directum extendantur.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 8. 29. *Si tres virgae* AB, BC, CD *ita sint iunctae, vt in statu naturali in directum porrigantur, iuncturae autem* B *axis* bβ *ad planum tabulae sit normalis; iuncturae* C *vero axis* cγ *in ipsum planum cadat et ad* BC *sit normalis; inuestigare vires extremitatibus*

tatibus A *et* D *applicandas, quae has virgas in statu quocunque inflexo seruare valeant.*

Solutio.

Positis $AB=a$, $BC=b$, et $CD=c$; sint hae virgae per inflexionem redactae in statum ABCD, qui ita repraesentetur, vt virgae AB et BC in plano tabulae iaceant, et BC rectae AG sit parallela, ita vt flexurae B axis Bb ad idem planum sit perpendicularis, flexurae C vero axis Cc in hoc plano ad BC ideoque etiam ad axem AG sit normalis, circa quem tertia virga CD sursum sit flexa, ex cuius termino D in planum demittatur perpendiculum DH, indeque ad AG normalis HG. Sit iam angulus inflexionis in iunctura $B=\zeta$, et elasticitatis momentum $=Ee\,\text{fin.}\,\zeta$, inflexionis autem in iunctura $C=\eta$ et elasticitatis momentum $=Ff\,\text{fin.}\,\eta$; eritque ob BC ipsi AG parallelam angulus $BAG=\zeta$, hinc $AE=a\,\text{cof.}\,\zeta$, et $BE=a\,\text{fin.}\,\zeta$ $=CF=HG$, tum vero $EF=BC=b$. Porro habebitur $CH=c\,\text{cof.}\,\eta$ et $DH=c\,\text{fin.}\,\eta$. Iam vires ad hunc statum conseruandum requisitae sint in A ternae $AP=P$, $AQ=Q$, et $AR=R$ in D vero similiter ternae $Dp=p$, $Dq=q$, et $Dr=r$: vnde si corpus spectetur vt rigidum primo habemus: Tab. IV. Fig. 9.

1°. $P+p=0$; 2°. $Q+q=0$; 3°. $R+r=0$.

Deinde ob $AG=a\,\text{cof.}\,\zeta+b+c\,\text{cof.}\,\eta$; $GH=a\,\text{fin.}\,\zeta$, et $DH=c\,\text{fin.}\,\eta$ erit quoque ex problemate primo:

$4^\circ.\ ar\,\text{fin.}\zeta - cq\,\text{fin.}\eta = 0$; $5^\circ.\ cp\,\text{fin.}\eta - (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)r = 0$

$$6^\circ.\ (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)q - ap\,\text{fin.}\zeta = 0$$

quia pro viribus in A coordinatae x, y, z euanefcunt, vnde hae vires ita debent effe comparatae vt fit

$$p = (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)s;\ q = as\,\text{fin.}\zeta \text{ et } r = cs\,\text{fin.}\eta.$$

et $P = -p$; $Q = -q$; et $R = -r$.

Nunc flexura in B confideretur, et pars BA a viribus fibi applicatis de ftatu naturali detorquetur momento $= P.BE - Q.AE$, quod elafticitati $Ee\,\text{fin.}\zeta$ aequale pofitum dat

$$-ap\,\text{fin.}\zeta + aq\,\text{cof.}\zeta = Ee\,\text{fin.}\zeta$$

feu $-(ab + ac\,\text{cof.}\eta)s = Ee$; hincque $s = \frac{-Ee}{a(b + c\,\text{cof.}\eta)}$.

Denique pro flexura C confideretur pars CD, cuius vires praebent momentum de ftatu naturali detorquens $= r.CH - p.DH$ momento elafticitatis $Ff.\text{fin.}\eta$ aequandum, vnde prodit

$$-c(a\,\text{cof.}\zeta + b)s = Ff \text{ feu } s = \frac{-Ff}{c(a\,\text{cof.}\zeta + b)}.$$

Ex quo patet inter ambas inflexiones certam relationem intercedere debere, vt a duabus tantum viribus in terminis A et D applicatis aequilibrium feruari poffit: oportet fcilicet fit $Eec(a\,\text{cof.}\zeta + b) = Ffa(b + c\,\text{cof.}\eta)$; ac tum vires ante affignatae huic ftatui inflexo conferuando erunt pares.

Coroll.

Coroll. 1.

30. Quia tres vires in A applicatae cum tribus in D applicatis in aequilibrio consistere debent, vna vis illis aequiualens vni his aequiualenti aequalis et contraria esse debet; facile autem intelligitur ambas has vires in rectam AD extremitates iungentem cadere debere.

Coroll. 2.

31. Hoc etiam cum formulis inuentis egregie conuenit, si enim extremitates A et D filo constrictae concipiantur cuius tensio sit $=T$, posita recta $AD=k$, habebimus vires assumtas $P=\frac{a\,\text{cos.}\,\zeta+b+c\,\text{cos.}\,\eta}{k}T$; $Q=\frac{a\,\text{sin.}\,\zeta}{k}T$, et $R=\frac{c\,\text{sin.}\,\eta}{k}T$

ideoque $s=\frac{-T}{k}$.

Coroll. 3.

32. Hinc ergo interuallum $AD=k$ cum tensione T in computum ducendo erit primo $a(b+c\,\text{cos.}\,\eta)=\frac{Eek}{T}$ et $c(a\,\text{cos.}\,\zeta+b)=\frac{Ffk}{T}$: deinde vero est

$$kk=aa+bb+cc+2ab\,\text{cos.}\,\zeta+2bc\,\text{cos.}\,\eta+2ac\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\eta.$$

Cum ergo sit $\text{cos.}\,\zeta=\frac{Ffk}{Tac}-\frac{b}{a}$, et $\text{cos.}\,\eta=\frac{Eek}{Tac}-\frac{b}{c}$, facta hac substitutione prodit:

$$kk=aa-bb+cc+\frac{2EFefkk}{TTac}$$

 vnde

vnde tenſio ad hanc inflexionem continendam fit

$$T = \frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}.$$

quae ergo per longitudinem fili AD et elaſticitates vtriusque iuncturae determinatur.

Coroll. 4.

33. Ex data ergo longitudine fili ſeu interuallo $AD = k$ cum vtraque elaſticitate non ſolum tenſio T ſed etiam inflexio in vtraque iunctura definitur, dummodo eueniat, vt anguli ζ et η prodeant reales; quod fieri nequit niſi eorum coſinus ſint vnitate minores.

Scholion.

34. Solutio autem hic data maxima incommoda atque adeo contradictionem inuoluere videtur. Cum enim nullum ſit dubium, quin pro qualibet longitudine fili ſeu interuallo AD certa tenſio T requiratur ad virgas in ſtatu inflexo continendas tamen ſi pro T valor inuentus ſubſtituatur, omnino euenire poteſt, vt alterutrius angulorum ζ et η coſinus prodeat vnitate maior, ideoque inflexio impoſſibilis. Conſideremus tantum caſum quo altera elaſticitas puta Ee ſit infinita, quod eodem redit, ac ſi iunctura in E rigeſceret, nullamque plane inflexionem admitteret. Hic ergo caſus vnicam flexuram in F habens conuenire deberet cum eo, qui ſupra §. 6. eſt euolutus, et pro cuius qualibet inflexi-

flexione tensio fili T est assignata. Verum si in forma hic inuenta ponatur $Ee = \infty$, tensio T prodit quoque infinita, hincque $\cos.\zeta = -\frac{b}{a}$ et $\cos.\eta = \infty$, quod manifesto est absurdum, praeterquam quod etiam angulus ζ fieret imaginarius si $b > a$. Hic certe aperta contradictio cernitur quae non solum huic casui, quo altera iunctura rigescit est propria, sed etiam vtraque flexura admissa saepenumero locum habere debet. Nullum tamen hic calculi vitium deprehenditur, ex quo maximi erit momenti in caussam huius discrepantiae a veritate diligentius inquirere.

Solutio difficultatis.

35. Analysin autem vniuersam accuratius contemplanti mox patebit solutionem inuentam non esse completam; sed in calculo quasdam solutiones, quae certis casibus solae locum habere possunt, per diuisionem aequationum esse sublatas. Scilicet cum sit $kk = aa + bb + cc + 2ab\cos.\zeta + 2bc\cos.\eta + 2ac\cos.\zeta\cos.\eta$ ob $s = \frac{-T}{k}$, binae reliquae aequationes reuera ita prodierunt expressae:

$$Ta(b + c\cos.\eta)\sin.\zeta = Eek\sin.\zeta \text{ et } Tc(a\cos.\zeta + b)\sin.\eta = Ffk\sin.\eta$$

ita vt illa etiam praebeat $\sin.\zeta = 0$ haec vero $\sin.\eta = 0$, quae quidem ambae solutiones simul consistere nequeunt, nisi sit $k = a + b + c$ hoc est in statu naturali. Verum quoties distantia $AD = k$

 minor

minor eſt quam $a+b+c$, toties euenire poteſt, vt ſit vel $\zeta=0$ vel $\eta=0$, hoc eſt vt altera flexura nullam vim patiatur. Quodſi nimirum ſit $\zeta=0$, et virgae AB et BC maneant in directum extenſae; altera aequatio praebet $Tc(a+b)=Ffk$, ideoque fit tenſio $T=\frac{Ffk}{c(a+b)}$; angulus autem η ex prima aequatione $kk=(a+b)^2+cc+2c(a+b)\cos.\eta$ definitur. Simili modo ſi $\eta=0$, quo caſu in F nulla inflexio oritur, fiet $T=\frac{Eek}{a(b+c)}$ et $kk=(b+c)^2+aa+2a(b+c)\cos.\zeta$, vnde angulus ζ cognoſcitur. Sicque ſemper pro quolibet interuallo $AD=k$ duae ſolutiones locum habent, quarum altera inflexione in E caret, altera in F, atque nunc demum intelligere licet, cur aequilibrium plane non detur, quod duplici inflexione gaudeat. Duplex nempe inflexio locum habere nequit, niſi ſub conditionibus in ſolutione contentis, quae huc redeunt, vt cum ſit $\cos.\zeta \lessgtr 1$ et $\cos.\eta \lessgtr 1$, fiat $Eek \lessgtr Ta(b+c)$ et $Ffk \lessgtr Tc(a+b)$; Quia vero tum eſt vti inuenimus $T=\frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$, hae conditiones dant $\frac{Ee}{Ff} \lessgtr \frac{2a(b+c)^2}{c(kk+bb-aa-cc)}$ et $\frac{Ee}{Ff} > \frac{a(kk+bb-aa-cc)}{2c(a+b)^2}$, quorum quidem limitum ille manifeſto maior eſt hoc, cum ex comparatione inſtituta ſequatur

$$4ac(a+b)^2(b+c)^2 > ac(kk+bb-aa-cc)^2 \text{ ſeu}$$
$$2(a+b)(b+c) > kk+bb-aa-cc \text{ hincque}$$
$$(a+b+c)^2 > kk \text{ vti rei natura poſtulat.}$$

Niſi

Nisi ergo pro sumto interuallo $AD = k$ ratio elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ intra illos limites continеatur, tensione fili AD duplex inflexio produci nequit, vt aequilibrium oriatur.

Coroll. 1.

36. Hae ergo conditiones, ratione elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ vt data spectata, huc redeunt vt sit

$$1°. \; kk < aa + cc - bb + \frac{2a(b+c)^2}{c} \cdot \frac{Ff}{Ee} \text{ et}$$

$$2°. \; kk < aa + cc - bb + \frac{2c(a+b)^2}{a} \cdot \frac{Ee}{Ff}$$

quarum quantitatum minor si adhuc maior fuerit quam $(a+b+c)^2$, pro quouis interuallo $AD = k$, duplex inflexio in aequilibrium ingredi potest, sin autem ea minor fit quam $(a+b+c)^2$, tantum in maiore fili contractione tale aequilibrium obtineri potest.

Coroll. 2.

37. Quodsi tres virgae sint longitudine aequales, seu $b = c = a$ conditiones illae dant.

$$1°. \; kk < aa\left(1 + \frac{8Ff}{Ee}\right); \; 2°. \; kk < aa\left(1 + \frac{8Ee}{Ff}\right).$$

Quare si ambae elasticitates sint pares, vtraque dat $k < 3a$ et pro omni fili contractione tale aequilibrium dabitur, vnde fit tensio $T = \frac{Eek\sqrt{2}}{a\sqrt{2}(kk-aa)}$ ob $Ff = Ee$, et inflexiones $\cos.\zeta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$ et $\cos.\eta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$, vt sit $\eta = \zeta$ seu $\cos.\frac{1}{2}\zeta = \cos.\frac{1}{2}\eta = \sqrt[4]{\frac{kk-aa}{8aa}}$, et $T = \frac{Eek}{aa(1+\cos.\zeta)}$.

Coroll.

Coroll. 3.

38. Quodsi autem eodem casu $b = c = a$, ambae elasticitates sint inaequales puta $Ee = 2Ff$, seu $\frac{Ee}{Ff} = 2$, debet esse

1°. $kk < aa(1 + 4)$ et 2°. $kk < aa(1 + 16)$

vnde tale aequilibrium non datur nisi sit $k < a\sqrt{5}$. Tum autem erit tensio $T = \frac{2Ffk}{a\sqrt{(kk - aa)}}$ et inflexio vtraque

$$\cos.\zeta = \frac{\sqrt{(kk - aa)}}{2a} - 1 \text{ et } \cos.\eta = \frac{\sqrt{(kk - aa)}}{a} - 1.$$

Vnde si $k = a\sqrt{5}$, inflexio in F etiamnunc est nulla et $\zeta = 90°$ ac $T = \frac{Ff\sqrt{5}}{a}$ filo autem magis adstricto vt fiat $k = 2a$, tum prodit

$$\cos.\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \text{ et } \cos.\eta = \sqrt{3} - 1, \text{ atque } T = \frac{4Ff}{a\sqrt{3}}.$$

Coroll. 4.

39. Consideremus etiam casum, quo virgae sunt inaequales sitque $a = c$ et $b = 2a$, eritque

1°. $kk < aa(-2 + \frac{18.Ff}{Ee})$ et $kk < aa(-2 + \frac{18.Ee}{Ff})$.

Quare si fuerit vel $\frac{Ff}{Ee} < \frac{1}{9}$ vel $\frac{Ee}{Ff} < \frac{1}{9}$ nullo plane modo huiusmodi aequilibrium obtineri potest.

Scholion 1.

40. Euolutio huius casus vsu non carebit, cum inde pateat saepenumero pluribus modis aequilibrium existere posse. Quod cum eueniat in corpo-

corporibus gemina flexura praeditis, id multo magis contingere poterit, vbi adhuc plures flexurae admittuntur, quarum axes inter se non sunt paralleli; haecque circumstantia in doctrina aequilibrii sine dubio maximi est momenti. Etsi autem haec praecepta tantum ad aequilibrium pertinere videntur, tamen etiam ad motum definiendum adhiberi possunt, dummodo iis sequens principium ex natura motus petitum adiungatur.

Ex quotcunque partibus corpus fuerit compositum, vnicuique parti generalissime tribuatur motus quicunque, et inuestigentur vires ad eius variationem producendam requisitae: tum istae vires in contrarium vertantur, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debent, ex quo praecepta pro aequilibrio definiendo tradita certum aequationum numerum suppeditabunt. Deinde vero motus vnicuique parti tributos ita temperari oportet, vt non solum singulae partes maneant contiguae, sed etiam axes iuncturarum debitum situm conseruent. Quae conditiones cum illis aequationibus coniunctae verum motum determinabunt.

Scholion 2.

41. Tametsi autem hac regula totum negotium conficitur, tamen in eius applicatione saepe insignes adhuc difficultates obstant, quo minus calculus expediri queat quod potissimum euenit, quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli,

 nec

nec motus, quasi in eodem plano fieret, considerari potest. Tum enim cuique parti motum quemcunque tribuendo, praeter motum progressiuum centri grauitatis in calculum induci debet motus gyratorius circa axem quemcunque per id centrum ductum, eumque adeo variabilem; cuiusmodi autem vires ad huiusmodi motum requirantur, nonnisi pluribus formulis non parum complicatis declarari potest. Deinde etiam in tali motu generalissime considerato non facile definitur, quomodo situs axium vtriusque iuncturae, quibus haec pars cum contiguis cohaeret, varietur, quod certe non sine taedioso calculo fieri potest. Ne igitur his tantis difficultatibus hic impediar, quas forte aliquando superare licebit, inuestigationes meas ad eum tantum casum adstringam, quo omnium iuncturarum axes inter se sunt paralleli, totusque motus ad idem planum reuocari patitur, quippe a quo casu semper est exordiendum, antequam difficiliores aggredi conueniat.

Problema 5.

42. *Si corpus quodcunque in eodem plano moueatur motu quomodocunque variato, inuenire vires ad motus variationem requisitas, earumque momentum respectu aliuscuiusque axis ad idem planum perpendicularis.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 10. Exhibeat tabula id planum, in quo motus fieri concipitur sitque M massa corporis, cuius centrum

trum inertiae iam verſetur in M puncto coordinatis orthogonalibus $IQ = x$ et $QM = y$ determinato; tum vero ſit Mmm momentum inertiae corporis reſpectu axis per ipſum centrum M tranſeuntis et ad planum normalis. Per punctum M ducatur recta EF ad iuncturas, quibus forte hoc corpus cum aliis cohaeret; etiamſi enim fieri poſſet, vt conſtitutis his iuncturis in E et F, recta EF non ſit tranſitura per corporis centrum inertiae, tamen ab hac irregularitate mentem abſtrahamus, quippe cuius ratio facillime in calculum induceretur. Ductis porro per M rectis Mm, $M\mu$ coordinatis x et y parallelis, vocetur angulus $FMm = \mu$. Cum iam quantitates x, y, et μ labente tempore, quod indicetur littera t varientur, quatenus haec variatio non eſt vniformis viribus opus eſt ad hanc motus mutationem in corpore efficiendam. Ac primo quidem pro motu centri inertiae requiruntur vires, altera in directione $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$, altera in directione $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$, ſumto temporis elemento dt conſtante; hic quidem eius quadratum dt^2 ſine coefficiente induco, quia notaſſe ſufficit, ſi tempora in minutis ſecundis exprimere velimus, loco dt^2 ſcribi oportere $2gdt^2$ denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, ſiquidem maſſae et vires ſollicitantes ad pondera reuocentur. Porro autem pro motu gyratorio corporis circa M requiritur virium momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$, in plagam Xx, Yy tendens, quo angulus $FM\mu$ magis

 ape-

aperiatur. Huius ergo momenti loco, si vtrinque capiantur interualla aequalia $MX = MY = m$, iis normaliter substitui possunt vires aequales et contrariae $Xx = Yy = \frac{Mmdd\mu}{2dt^2}$, quippe quae solum motum gyratorium afficiunt, dum in se spectatae se mutuo destruunt.

His viribus inuentis, quae ad motus variationem requiruntur videamus quantum momentum praebeant respectu puncti cuiusque V seu potius axis ad planum motus normalis ibi constituti, qui cum sit axi gyrationis in M considerato parallelus, a viribus Xx et Yy in eum exeretur par momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$ in eandem plagam $T\theta$ tendens. Tum vero si pro hoc puncto V statuamus coordinatas $IT = T$ et $TV = V$; a vi $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$ orietur in eandem plagam $T\theta$ momentum $= \frac{Mddx}{dt^2}(V - y)$, a vi autem $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$ momentum in plagam contrariam $Tt = \frac{Mddy}{dt^2}(T - x)$. Hinc ergo vniuersum momentum respectu axis V in plagam $T\theta$ erit $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx}{dt^2}(V - y) - \frac{Mddy}{dt^2}(T - x) = \frac{M}{dt^2}(mmdd\mu + xddy - yddx + Vddx - Tddy)$.

Coroll. I.

43. Notari hic in genere meretur, quod virium momentum respectu axis M inuentum idem maneat pro omnibus aliis axibus illi parallelis; quod eatenus tantum locum habet, quatenus vires illae

Xx

Xx et Yy ſunt aequales, et in contrarium directae. Quemadmodum enim earum momentum reſpectu axis M eſt $= Xx . MX + Yy . MY = Xx . XY$, ita etiam reſpectu axis F momentum in eandem plagam eſt $Xx . FX - Yy . FY = Xx . XY$, quod idem de omnibus aliis valet.

Coroll. 2.

44. Hactenus nulla ratio eſt habita punctorum E et F, vbi hoc corpus forte cum aliis ope flexurae eſt coniunctum; ita hic EF eſt recta quaecunque per M ducta, vt angulus $FMm = \mu$ in computum duci queat; quo quippe ratio motus gyratorii definitur.

Coroll. 3.

45. Quodſi ergo iuncturae E et F cum centro inertiae M non in directum iaceant, alterum tantum angulum FMm in computum expoſitum introduxiſſe ſufficit, quandoquidem alter EMl ab eo, angulo quodam conſtante differt, ita vt ſi ille fuerit $FMm = \mu$, hic futurus ſit $EMl = \mu \pm$ Conſt. et vtriusque differentiale quod in hunc calculum ingreditur, ſit idem.

Problema 6.

46. Si corpus ex tribus partibus AB, BC, CD in B et C flexura elaſtica iunctis compoſitum Tab. IV. Fig. 11.

 ſuper

ſuper plano vtcunque proiectum moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Vtriusque flexurae in B et C axis ſit ad planum tabulae perpendicularis vt ratio motus exigit; ſumta in plano directrice IR, in eam tum ex iuncturis B et C, tum ex vniuscuiusque partis centro inertiae L, M, N demittantur perpendicula, ac ponantur coordinatae:

$IP = x$; $PL = y$; $IQ = x'$; $QM = y'$; $IR = x''$; $RN = y''$

ſit porro maſſa partis $AB = L$, partis $BC = M$, partis $CD = N$ et momenta inertiae cuiusque partis reſpectu ſui centri inertiae pro parte $AB = Lll$, parte $BC = Mmm$, parte $CD = Nnn$.

Vocentur etiam anguli $BLl = \lambda$, $CMm = \mu$, $DNn = \nu$ vbi quidem aſſumo rectam BC per ipſum centrum inertiae M partis BC tranſire, et ponantur intervalla:

$$AL = a,\ LB = \alpha,\ BM = b,\ MC = \beta,\ CN = c,\ ND = \gamma$$

eritque:

$$x' = x + \alpha\,\text{coſ.}\lambda + b\,\text{coſ.}\mu;\quad x'' = x' + \beta\,\text{coſ.}\mu + c\,\text{coſ.}\nu$$

$$y' = y + \alpha\,\text{ſin.}\lambda + b\,\text{ſin.}\mu;\quad y'' = y' + \beta\,\text{ſin.}\mu + c\,\text{ſin.}\nu.$$

His poſitis cuiusque partis motus progreſſiuus poſtulat vires vt vidimus ſequentes:

$$Ll = \frac{L\,ddx}{dt^2};\quad Mm = \frac{M\,ddx'}{dt^2};\quad Nn = \frac{N\,ddx''}{dt^2}$$
$$L\lambda = \frac{L\,ddy}{dt^2};\quad M\mu = \frac{M\,ddy'}{dt^2};\quad N\nu = \frac{N\,ddy''}{dt^2}.$$

Quoniam igitur corpus a nullis viribus extrinſecus ſollicitari aſſumitur, primo nanciſcimur has duas aequationes

1°. $L\,ddx + M\,ddx' + N\,ddx'' = 0$; ſeu $Lx + Mx' + Nx'' = At + \mathfrak{A}$

2°. $L\,ddy + M\,ddy' + N\,ddy'' = 0$; ſeu $Ly + My' + Ny'' = Bt + \mathfrak{B}$.

Porro neceſſe eſt vt virium requiſitarum omnium momenta reſpectu axis cuiusque, ideoque etiam pro axe I euaneſcant vbi $T = 0$ et $V = 0$; vnde ſequitur haec tertia aequatio:

$$3°.\ Lll\,dd\lambda + Mmm\,dd\mu + Nnn\,dd\nu + L(x\,ddy - y\,ddx) + M(x'\,ddy' - y'\,ddx') + N(x''\,ddy'' - y''\,ddx'') = 0.$$

Praeterea ad flexuram vtramque eſt reſpiciendum; cum igitur in B ſit inflexio facta per angulum $= \mu - \lambda$ in C vero per angulum $\nu - \mu$, ſiquidem in ſtatu naturali puncta A, B, C, D in directum iaceant, ponatur momentum elaſticitatis in $B = Ee\,\text{ſin.}(\mu - \lambda)$ et in $C = Ff\,\text{ſin.}(\nu - \mu)$.

Hinc pro flexura B ex altera totius corporis parte AB naſcitur virium requiſitarum momentum, ob $T = x + a\,\text{coſ.}\lambda$ et $V = y + a\,\text{ſin.}\lambda$ ita expreſſum

$\frac{Lll\,dd\lambda}{dt^2}$

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}.\ \alpha\,\text{fin.}\,\lambda - \frac{Lddy}{dt^2}.\ \alpha\,\text{cof.}\,\lambda$, in plagam tQ tendens quod negatiue fumtum cum vi elaftica iuncturae quae in eandem plagam tendit in aequilibrio effe debet, ex quo obtinetur haec aequatio:

$$4°.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{L\alpha(ddx\,\text{fin.}\,\lambda - ddy\,\text{cof.}\,\lambda)}{dt^2} = Ee\,\text{fin.}(\mu - \lambda).$$

Pro iunctura in C vero confiderandis viribus ex partibus AB et BC ortis nafcitur momentum in plagam cR tendens:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(Cc - y) - \frac{Lddy}{dt^2}Pc$$
$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}.\ Cm - \frac{Mddy'}{dt^2}Qc$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$5°.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(\alpha\,\text{fin.}\,\lambda + (b+\beta)\,\text{fin.}\,\mu) - \frac{Lddy}{dt^2}(\alpha\,\text{cof.}\,\lambda + (b+\beta)\,\text{cof.}\,\mu)$$
$$+ \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}\beta\,\text{fin.}\,\mu - \frac{Mddy'}{dt^2}.\ \beta\,\text{cof.}\,\mu = Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu).$$

Ex his ergo quinque aequationibus ad quoduis tempus t definiri oportet has quinque quantitates x, y, λ, μ, ν, cum reliquae coordinatae x', y', x'', y'' ex his iam determinentur.

Coroll. 1.

42. Tertia aequatio per fe integrabilis praebet hoc integrale:

$$Llld\lambda + Mmmd\mu + Nnnd\nu + L(xdy - ydx) + M(x'dy' - y'dx')$$
$$+ N(x''dy'' - y''dx'') = Cdt$$

prima autem et fecunda geminam integrationem admiferunt vbi notandum eft, fi totius corporis centrum

trum inertiae quiescat, constantes A, B, et 𝔄, 𝔅 euanescere.

Coroll. 2.

48. Si aequatio quinta a tertia auferatur, remanebit:

$$\begin{aligned}&Nnnddv+Lddy(x+\alpha\operatorname{cos}.\lambda+(b+\mathfrak{c})\operatorname{cos}.\mu)+Mddy'(x'+\mathfrak{c}\operatorname{cos}.\mu)\\&-Lddx(y+\alpha\operatorname{fin}.\lambda+(b+\mathfrak{c})\operatorname{fin}.\mu)-Mddx'(y'+\mathfrak{c}\operatorname{fin}.\mu)\\&+Nx''ddy''-Ny''ddx''\\&=-Ffdt^2\operatorname{fin}.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

vbi si loco x, y, x'', y'' valores supra dati substituantur prodit

$$\begin{aligned}&Nnnddv+(Lddy+Mddy'+Nddy'')(x+\mathfrak{c}\operatorname{cos}.\mu)+Ncddy'\operatorname{cos}.\nu\\&-(Lddx+Mddx'+Nddx'')(y+\mathfrak{c}\operatorname{fin}.\mu)-Ncddx'\operatorname{fin}.\nu\\&=-Ffdt^2\operatorname{fin}.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

quae ob aequat. n. 1 et 2 contrahitur in hanc

$$Nnnddv-Nc(ddx''\operatorname{fin}.\nu-ddy''\operatorname{cos}.\nu)=-Ffdt^2\operatorname{fin}.(\nu-\mu)$$

quae eadem prodiisset statim, si elasticitatem flexurae in C cum momento virium ad alteram partem CD pertinentium comparauissem.

Coroll. 3.

49. Subtrahamus quartam aequationem a quinta, et fiet:

$$\begin{aligned}&Mmmdd\mu+Lddx(b+\mathfrak{c})\operatorname{fin}.\mu+Mddx'.\mathfrak{c}\operatorname{fin}.\mu\\&-Lddy(b+\mathfrak{c})\operatorname{cos}.\mu-Mddy'.\mathfrak{c}\operatorname{cos}.\mu\\&=+Ffdt^2\operatorname{fin}.(\nu-\mu)-Eedt^2\operatorname{fin}.(\mu-\lambda)\end{aligned}$$

 sub-

ſubſtituantur hic iſti valores:

$$Mddx' = -Lddx - Nddx'' \text{ et } Mddy' = -Lddy - Nddy''$$

ac reſultabit

$$\begin{aligned} Mmmdd\mu + Lb(ddx \,\text{ſin.}\,\mu - ddy \,\text{coſ.}\,\mu) &= +Ffdt^2 \,\text{ſin.}\,(\nu-\mu) \\ -N\beta(ddx''\,\text{ſin.}\,\mu - ddy''\,\text{coſ.}\,\mu) &\;\; -Eedt^2 \,\text{ſin.}\,(\mu-\lambda). \end{aligned}$$

Coroll. 4.

50. Praeter aequationes ergo iam integratas, vel potius loco aequationum n°. 3. 4 et 5 has euolui conueniet:

$$Llldd\lambda + L\alpha(ddx \,\text{ſin.}\,\lambda - ddy \,\text{coſ.}\,\lambda) = Eedt^2 \,\text{ſin.}\,(\mu-\lambda)$$

$$\begin{aligned} Mmmdd\mu + Lb(ddx \,\text{ſin.}\,\mu - ddy \,\text{coſ.}\,\mu) &= +Ffdt^2 \,\text{ſin.}\,(\nu-\mu) \\ -N\beta(ddx''\,\text{ſin.}\,\mu - ddy''\,\text{coſ.}\,\mu) &\;\; -Eedt^2 \,\text{ſin.}\,(\mu-\lambda) \end{aligned}$$

$$Nnndd\nu - Nc(ddx''\,\text{ſin.}\,\nu - ddy'\,\text{coſ.}\,\nu) = -Ffdt^2 \,\text{ſin.}\,(\nu-\mu)$$

ex quarum contemplatione inſignem analogiam colligere licet.

Scholion.

51. Quodſi ſcilicet ponamus:

$$\frac{Lddx}{dt^2} = p;\; \frac{Lddy}{dt^2} = q;\; \frac{Nddx''}{dt^2} = -p';\; \frac{Nddy''}{dt^2} = -q' \text{ hincque}$$

$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \text{ et } \frac{Mddy'}{dt^2} = q' - q$$

tres poſtremae aequationes has induunt formas:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \alpha(p \,\text{ſin.}\,\lambda - q \,\text{coſ.}\,\lambda) = Ee \,\text{ſin.}\,(\mu-\lambda)$$

$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$

$$\frac{\mathfrak{M}mm\,dd\mu}{dt^2} + \mathfrak{b}(p\,\text{fin.}\,\mu - q\,\text{cof.}\,\mu) = + Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu)$$
$$+ \mathfrak{C}(p'\,\text{fin.}\,\mu - q'\,\text{cof.}\,\mu) - Ee\,\text{fin.}(\mu-\lambda)$$
$$\frac{\mathfrak{N}nn\,dd\nu}{dt^2} + c(p'\,\text{fin.}\,\nu - q'\,\text{cof.}\,\nu) = - Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu).$$

Ac fi in prioribus aequationibus hos valores affumtos fubftituamus, fequentes obtinebimus determinationes:

$$p = \frac{-L(M+N)\alpha\,dd.\,\text{cof.}\,\lambda - L((M+N)b + N\mathfrak{C})\,dd.\,\text{cof.}\,\mu - LNc\,dd.\,\text{cof.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$q = \frac{-L(M+N)\alpha\,dd.\,\text{fin.}\,\lambda - L((M+N)b + N\mathfrak{C})\,dd.\,\text{fin.}\,\mu - LNc\,dd.\,\text{fin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$p' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,\text{cof.}\,\lambda - N(Lb + (L+M)\mathfrak{C})\,dd.\,\text{cof.}\,\mu - N(L+M)c\,dd.\,\text{cof.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$q' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,\text{fin.}\,\lambda - N(Lb + (L+M)\mathfrak{C})\,dd.\,\text{fin.}\,\mu - N(L+M)c\,dd.\,\text{fin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

qui valores fi ibi fubftituantur, ternae tantum erunt variabiles λ, μ, ν quas ad datum tempus t definiri oportet, ad quod tres illae aequationes fufficiunt. Attendenti autem facile patebit quantitates p et q vires defignare quibus partes AB et BC in iuncturа B praeter elafticitatem cohaerent, feu quae eas a fe inuicem diuellere conantur.

Alia Solutio eiusdem Problematis.

52. Statim igitur vires, quibus partes in fe mutuo agunt praeter iuncturae cuiusque elafticitatem, in calculum introducere licet, vnde hoc commodi affequimur, vt motum cuiusque partis feorfim definire queamus neque amplius opus fit, prin-

cipium aequilibrii in subsidium vocari. Factis ergo iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi, perpendendum est, binas partes contiguas ob nexum certis viribus in se mutuo agere, quibus efficitur ne a se inuicem diuellantur. In iunctura igitur B sumamus partem AB ob nexum cum parte sequente BC sollicitari binis viribus $Bb' = p$ et $B\mathfrak{b} = q$, secundum directionem coordinatarum, atque ab iisdem viribus pars BC in plagas contrarias afficietur. Simili modo iunctura C exerat in partem BC vires $Cc' = p'$ et $C\gamma = q'$, quae ergo contrario modo agent in partem CD.

53. Iam singularum partium motum seorsim euoluamus, et cum pars prima AB sollicitetur viribus $Bb' = p$ et $B\mathfrak{b} = q$ praeter vim elasticitatis in iunctura B, quae motum progressiuum non afficit. Quare pro motu progressiuo huius partis habebimus:

$$\frac{L\,ddx}{dt^2} = p \quad \text{et} \quad \frac{L\,ddy}{dt^2} = q$$

vbi notandum est, si haec pars AB insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitaretur, earum rationem etiam in motus huius determinationem introduci oportere. Quod vero ad motum gyratorium huius partis AB circa suum centrum inertiae L attinet, quo angulum $BLl = \lambda$ augeri sumimus, euidens est virium p et q momentum ad hunc motum accelerandum esse $= \alpha q \operatorname{cos}. \lambda - \alpha p \operatorname{sin}. \lambda$. Elasticitatis autem in B momentum $E e \operatorname{sin}. (\mu - \lambda)$ solum

motum

motum gyratorium afficit, huiusque quidem partis accelerando; dum eo sequentis BC motus gyratorius retardabitur, ex quo pro acceleratione motus gyratorii partis AB obtinemus $\frac{Llldd\lambda}{dt^2} = \alpha(q\,\text{cof.}\,\lambda - p\,\text{fin.}\,\lambda) + Ee\,\text{fin.}(\mu - \lambda)$.

54. Secunda iam pars BC follicitatur in B a viribus $Bb' = -p$, $B\beta = -q$, in C vero a viribus $Cc' = p'$, $C\gamma = q'$ vnde pro motus progressiui acceleratione colligimus:

$$\frac{Mddx''}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{Mddy''}{dt^2} = q' - q.$$

Ex iisdem vero viribus nafcitur momentum pro motu gyratorio circa centrum inertiae M accelerando $= \beta q'\,\text{cof.}\,\mu - \beta p'\,\text{fin.}\,\mu + bq\,\text{cof.}\,\mu - bp\,\text{fin.}\,\mu$; praeterea vero etiam a momento elasticitatis in C, quod est $Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu)$ acceleratur, a praecedente autem in B retardatur, vnde colligitur haec aequatio

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} = (\beta q' + bq)\,\text{cof.}\,\mu - (\beta p' + bp)\,\text{fin.}\,\mu + Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu) - Ee\,\text{fin.}(\mu - \lambda).$$

55. Tertia pars, quia est vltima, tantum in C follicitatur a viribus $Cc' = -p'$ et $C\gamma = -q'$, tum vero etiam a momento elasticitatis in $C = Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu)$, quo motus tantum gyratorius retardatur. Pro motu ergo progressiuo habebimus:

$$\frac{Nddx'''}{dt^2} = -p' \quad \text{et} \quad \frac{Nddy'''}{dt^2} = -q'$$

at quia ex his viribus nafcitur momentum ad motum gyratorium circa N accelerandum $= cq' \operatorname{cof.} \nu - cp' \operatorname{fin.} \nu$ ifta elicitur aequatio

$$\frac{Nnndd\nu}{dt^2} = c(q' \operatorname{cof.} \nu - p' \operatorname{fin.} \nu) - Ff \operatorname{fin.} (\nu - \mu).$$

56. Hae formulae egregie conueniunt cum ante inuentis, ex quo haec methodus foluendi eo maiore attentione videtur digna, quod non folum negotium multo commodius conficit, fed etiam ita eft comparata, vt nifi ante eius confenfum cum praecedente perfpexiffemus, vix audacter affeuerare effemus aufi, ab elafticitate iuncturarum motum centri inertiae fingularum partium prorfus non affici. Aequationibus autem ex his quafi nouis principiis erutis adiungi conuenit hafce

$$x' - x = \alpha \operatorname{cof.} \lambda + b \operatorname{cof.} \mu; \quad x'' - x' = \mathfrak{b} \operatorname{cof.} \mu + c \operatorname{cof.} \nu$$
$$y' - y = \alpha \operatorname{fin.} \lambda + b \operatorname{fin.} \mu; \quad y'' - y' = \mathfrak{b} \operatorname{fin.} \mu + c \operatorname{fin.} \nu.$$

Hincque fimul perfpicitur, fi plures tribus partes inter fe per flexuras elafticas effent coniunctae, atque adeo etiam fingulae inter mouendum a viribus quibuscunque follicitarentur, quomodo motus determinatio ad formulas analyticas perduci debeat.

Euolu-

Euolutio analytica formularum inuentarum.

57. Cum fit ex hoc lemmate:

$$\text{fin.}\,\Phi\, dd.\,\text{cof.}\,\omega - \text{cof.}\,\Phi\, dd.\,\text{fin.}\,\omega = -dd\omega\,\text{cof.}(\omega-\Phi) + d\omega^2\,\text{fin.}(\omega-\Phi)$$

fi ad contrahendas formulas fupra §. 51. inuentas ponamus:

$$\frac{L(M+N)}{L+M+N} = P;\quad \frac{LN}{L+M+N} = Q \quad\text{et}\quad \frac{N(L+M)}{L+M+N} = R$$

aequationes illae motum continentes has induunt formas:

$$\text{I. } Llldd\lambda + P\alpha\alpha dd\lambda + (Pb+Q\beta)\alpha dd\mu\,\text{cof.}(\mu-\lambda) - (Pb+Q\beta)\alpha d\mu^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda) + Q\alpha c dd\nu\,\text{cof.}(\nu-\lambda) - Q\alpha c d\nu^2\,\text{fin.}(\nu-\lambda) = Eedt^2\,\text{fin}(\mu-\lambda)$$

$$\text{II. } Mmmdd\mu + (Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)dd\mu + (Pb+Q\beta)\alpha dd\lambda\,\text{cof.}(\mu-\lambda) + (Pb+Q\beta)\alpha d\lambda^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda) + (Qb+R\beta)c dd\nu\,\text{cof.}(\nu-\mu) - (Qb+R\beta)c d\nu^2\,\text{fin.}(\nu-\mu) = Ffdt^2\,\text{fin.}(\nu-\mu) - Eedt^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda)$$

$$\text{III. } Nnndd\nu + Rccdd\nu + Q\alpha c dd\lambda\,\text{cof.}(\nu-\lambda) + Q\alpha c d\lambda^2\,\text{fin.}(\nu-\lambda) + (Qb+R\beta)c dd\mu\,\text{cof.}(\nu-\mu) + (Qb+R\beta)c d\mu^2\,\text{fin.}(\nu-\mu) = -Ffdt^2\,\text{fin.}(\nu-\mu)$$

quae

quae primum additae integrationem admittunt:

$$(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda+(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu+(Nnn+Rcc)\,d\nu$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha(d\lambda+d\mu)\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c\,(d\lambda+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)$$
$$+(Qb+R\beta)c\,(d\mu+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\mu)=C\,dt.$$

Tum ſi prima per $d\lambda$ ſecunda per $d\mu$ et tertia per $d\nu$ multiplicetur ſumma itidem fit integrabilis datque:

$$\tfrac{1}{2}(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda^2+\tfrac{1}{2}(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu^2+\tfrac{1}{2}(Nnn+Rcc)d\nu^2$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha\,d\lambda\,d\mu\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c\,d\lambda\,d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)+(Qb+R\beta)c\,d\mu\,d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\mu)$$
$$=Ee\,dt^2\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Ff\,dt^2\operatorname{cof.}(\nu-\mu)+D\,dt^2.$$

SECTIO