SECTIO TERTIA
DE
MOTV FLVIDORVM
LINEARI POTISSIMVM AQVAE.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.
DE
PRINCIPIIS MOTVS LINEARIS FLVIDORVM.

Definitio.

1.

Fluidum motu lineari ferri dicitur quando eius vena ita secundum lineam quandam DE, quam motus directionem vocare licet, monetur, vt in singulis punctis Z motus fiat secundum directionem eius lineae, et per totam sectionem UV ad directricem normaliter factam celeritas in omnibus punctis sit eadem. Tab. I. Fig. 32.

Coroll. 1.

2. Ad motum ergo linearem duo requiruntur, primo vt motus vbique sequatur directionem certae cuiusdam li-

neae DE, quae eius directrix vocatur, tum vero vt in singulis sectionibus UV ad directricem normalibus omnia fluidi elementa pari celeritate secundum eandem directionem proferantur.

Coroll. 2.

3. Cngnita ergo linea directrice si in quouis eius puncto Z fluidi celeritas fuerit data eadem quoque toti sectioni UV est communis, et quia directio conuenit cum directricis tangente in puncto Z totus motus sectionis UV erit determinatus.

Scholion 1.

Tab. I. Fig. 33. 4. Quando fluidum per tubum angustissimum DE transire cogitur, eius motus recte pro lineari, quem hic descripsimus haberi potest, ob angustiam enim tubi in singulis punctis Z alia motus directio esse nequit, nisi quam tractus tubi permittit, ac si rem accuratius cognoscere velimus, per mediam tubi cauitatem lineam productam DZE concipere licet, quae motus directricem repraesentabit et ex cuius directione in singulis punctis Z ipsa motus directio innotescet. Tum vero quia tubus est angustissimus, in qualibet eius sectione UV ad directricem normali tam fluidi celeritas quam directio vbique erit eadem, non quod omnis inaequalitas absolute excludatur, quum vtique fieri posset, vt per partem ZU celerius vel lentius feratur quam

per

per partem ZV, sed tales motus hic excludimus, dum in motum linearem inquirimus, tantum eos, qui sint definitioni consentanei consideraturi. Quodsi vero talis inaequalitas adsit, perspicuum est tubi amplitudinem continuo magis coarctando, tandem omnem huiusmodi inaequalitatem cessare debere, quocirca si tubos infinite angustos statuamus, huic exceptioni ne locus quidem relinquitur. Atque hoc casu etiam linea directrix non discrepat a ductu ipsius tubi; perindeque erit quodnam tubi latus pro directrice accipiatur; interim tamen non est necesse, vt tubo vbique eadem amplitudo tribuatur, quin potius insignis diuersitas admitti poterit, dummodo nusquam enormis saltus occurrat, veluti eueniret, si uspiam in F tubi continuitas tumore interrumperetur, qui etiamsi esset infinite paruus, tamen motus non amplius legem praescriptam sequi posset, dum fluidum in tumore fere stagnaret, et reliquum perinde praeterflueret, ac si tumor ille abesset. Huiusmodi ergo irregularitates in tubo motus continuitatem perturbantes omnino sunt excludendae.

Scholion 2.

5. Quamquam motus linearis proprie tubos infinite angustos postulat, ne eiusmodi inaequalitates quae huius motus indoli aduersarentur, locum habere queant, tamen etiam in tubis satis amplis fieri potest, vt motus fluidi istam legem

gem sequatur, hocque casu istiusmodi etiam motus, quantumvis tubi fuerint ampli, recte ad motum linearem referuntur. Quin etiam etsi motus ab hac lege parumper recedat, in praxi hoc discrimen vix spectari solet, et conclusiones ex calculo deductae pro veris proxime habentur, experientia non admodum reclamante. Ita effluxus aquae ex vasis etiam amplissimis per foramen factus ex his principiis ita definiri solet, vt vix ullus dissensus ab experientia percipiatur, atque adeo a veritate eo minus aberratur, quo minus fuerit foramen, cum tamen hoc casu tota vasis strata ad directricem normalia certe non communi motu ferantur. Verum hic commode vsu venit, vt vasis figura ex calculo ad finem perducto iterum egrediatur, et effluxus eodem modo fieri deprehendatur, ac si vas reuera haberet figuram ad modum linearem accommodatam. Etsi autem haec motus linearis consideratio amplissimum habet vsum, tamen quia in tubis amplioribus motus aliam legem sequitur, vnde aberrationes, quamuis vix sentiantur, nasci debent, nostras inuestigationes tantum ad tubos angustissimos referri conueniet, quam ob causam etiam motus, quos hic sum consideraturus lineares vocaui.

Scholion 3.

6. Tractatio haec ingentem includit varietatem ex tuborum figura oriundam, primum ergo tubos considerabo rectos, seu

seu potius quorum directrices sint lineae rectae, quibus quidem amplitudines vtcunque variabiles tribuere licet. Deinde fluidi motus sum inuestigaturus per tubos, quorum directrices sunt lineae curuae; quae prout fuerint vel in eodem plano vel secus? in calculo aliquod discrimen pariunt, dum priori casu figura per duas tantum coordinatas, posteriori vero per tres est definienda. Plurimum deinde interest, vtrum fluidum perpetuo in huiusmodi tubis fluat, an alicubi effluat tum vero ipsa fluidi natura, et vires sollicitantes in computum sunt ducendae. Omnino autem motus determinatio ex principiis ante stabilitis peti debet, et quoniam duplici modo haec motus principia sunt euoluta, quouis casu vti conueniet eo qui maxime accommodatus videbitur. Primum quidem tubos in quiete positos spectabo, deinceps seorsim in motum per tubos mobiles inquisiturus.

Problema 42.

7. Motum linearem fluidi per tubum rectilineum ad calculum reuocare; methodum adhibendo supra priori loco expositam.

Solutio.

Sit OIAa tubus propositus eiusque directrix linea recta OA cuius amplitudo sit vtcunque variabilis. Elapso tempore $=t$ consideretur fluidi particula tubi spatiolum XxVv occu- Tab. I. Fig. 34.

pans

pans, atque a termino fixo O ponatur distantia $OX = x$, tubique amplitudo in X seu sectio normaliter facta $XV = \omega$, ita vt ω sit functio data ipsius x. Iam per sectionem XV sit celeritas fluidi secundum directionem $XA = u$, densitas $= q$, et pressio $= p$; eruntque u, q et p functiones duarum variabilium x et t; tum vero ex fluidi natura datur relatio inter p et q, et calorem r si forte eius ratio fuerit habenda. Tribuatur huic particulae crassities $Xx = dx$ eritque eius volumen $= \omega dx$ et massa $= q\omega dx$. Iam tempusculo dt progrediatur haec particula in $X'V'x'v'$; et cum celeritas in X sit $= u$, erit spatiolum $XX' = udt$; in x vero celeritas $= u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ dabit spatiolum $xx' = udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$, ita vt sit $X'x' = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$. Cum autem amplitudo in X' sit $= \omega + udt \cdot \frac{d\omega}{dx}$, erit istius particulae volumen $= \omega dx + \omega dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) = udtdx \cdot \frac{d\omega}{dx}$. At densitas nostrae particulae in X' inde colligi debet, quod cum q sit functio ipsarum x et t, prior x incrementum capiat $XX' = udt$, posterior vero t incrementum dt, ex quo densitas in X' erit $= q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ per quam si volumen modo inuentum multiplicetur, prodit massa nostrae particulae translatae:

$$X'V'x'v' = q\omega dx + dxdt\left(q\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + qu\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right)\right),$$

quae quia aequalis esse debet massae priori $q\omega dx$, haec consideratio pro motu suppeditat hanc priorem aequationem:

$q\omega$

$$q\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + qu \cdot \frac{d\omega}{dx} + \omega u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

seu $qu \cdot \frac{d\omega}{\omega dx} + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$

Cum porro celeritas u post tempusculum dt, abeat in $u + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$, quia non solum tempori t augmentum dt sed etiam distantiae $OX = x$ augmentum $XX' = udt$. tribui debet, erit acceleratio particulae $XVxv = u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$, quae cum viribus acceleratricibus conuenire debet. Ad has inueniendas primo pressio perpendatur, quae cum in facie XV sit $= p$, erit in facie $xv = p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ob $Xx = dx$. Hinc nascitur vis acceleratrix particulam retro vrgens $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, siquidem vis motrix inde nata est $= \omega . dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, quae per massam $q\omega dx$ diuisa illam dat vim acceleratricem. Ex viribus porro fluidi particulas singulas immediate sollicitantibus nascatur vis acceleratrix secundum directionem $XA = P$ ita vt iam secundum eandem directionem tota sit vis acceleratrix $= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, quae per $2g$ multiplicata accelerationi est aequanda, vnde pro motu fluidi altera aequatio ita se habet:

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

seu si tempus t constans accipiatur:

$$\frac{2gdp}{q} = 2gPdx - udx\left(\frac{du}{dx}\right) - dx\left(\frac{du}{dt}\right) = 2gPdx - udu - dx\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Haec ergo aequatio cum ante inuenta:

$$qu \cdot \frac{d\omega}{\omega dx} + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

Ff con-

coniuncta, si relatio inter p et q ex natura fluidi in subsidium vocetur, totum motum determinabit.

Coroll. 1.

8. Multiplicetur etiam prior aequatio per dx, et in eius integratione tempus t constans spectetur; habebiturque

$$\frac{qud\omega}{\omega} + d\,.\,qu + dx\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \quad \text{seu} \quad \omega dx\left(\frac{dq}{dt}\right) + d\,.\,qu\omega = 0,$$

vnde si densitas fluidi fuerit constans $q = b$ colligitur $u\omega =$ const. quae constans tempus t vtcunque inuoluere potest, vnde patet celeritates in diuersis tubi locis quouis tempore eius amplitudinibus reciproce esse proportionales, quae est notissima motus fluidorum per tubos proprietas.

Coroll. 2.

9. Sin autem densitas fluidi q non fuerit constans, sed etiam a pressione p pendeat, necessario ambae aequationes coniungi debent, vt ex iis deinceps pro quouis loco et ad quoduis tempus t tam celeritas u, quam pressio definiatur; quae inuestigatio propterea saepe vehementer difficilis euadit.

Scholion.

10. Cum hic motus sit casus maxime specialis problematis generalissimi, cuius supra duplicem solutionem exhibuimus, hicque methodo priori sim vsus, necesse est vt

so-

solutio hic inuenta in illa generalissima contineatur, quod quidem de altera aequatione pressionem p definiente per se est perspicuum; dum enim hic praeter tempus t vnica variabilis x adest, ii etiam termini, qui differentialia dy et dz complectebantur sunt praetermissi, vbi imprimis notandum est binas celeritates v et w euanescere, propterea quod per totam sectionem XV motus secundum eandem directionem OA fieri concipitur. Altera autem aequatio ob terminum $qu \cdot \frac{d\omega}{\omega dx}$ generali formae penitus aduersari videtur; amplitudine autem tubi vbique eadem existente res egregie conuenit. Verum tamen re bene perpensa et haec aequotio immediate ex forma generali deduci potest. Si enim tubus ab V ad V′ diuergat, motus directio circa V aliquantillum a directione OA deflectere debet. Posita ergo $XV = y$, statuatur celeritas $v = \alpha y$, vt in X nulla sit deflexio, vt tertia autem celeritas w euanescat, sumatur $z =$ const. $= \gamma$, vt sit $\omega = \gamma y$. Quia autem densitas q plane non ab y pendet, erit $(\frac{d \cdot qv}{dy}) = \alpha q$; at quia y est functio ipsius x, erit $X'V' = y + udt \cdot \frac{dy}{dx}$, tum vero ex celeritate v fit etiam $XV' = y + vdt = y + \alpha y dt$, vnde fit

$$\alpha = u \cdot \frac{dy}{ydx} = u \cdot \frac{d\omega}{\omega dx}, \text{ ideoque } (\frac{d \cdot qv}{dy}) = qu \cdot \frac{d\omega}{\omega dx}.$$

Hinc ergo clare intelligitur, quomodo solutio specialis hic data pulcerrime cum aequatione generali cohaereat, atque ex ea nascatur.

Problema 43.

11. Praecedens problema, quo motus fluidi in tubo rectilineo quaeritur, per methodum posteriorem respectu ad statum initialem habito resoluere.

Solutio.

Tab. II. Fig. 35. Fluidi particula, cuius motum inuestigamus, initio $t=0$ occupauerit tubi elementum $XVX'V'$, pro quo ponamus $OX=X$, $XX'=dX$, amplitudinem tubi in $X=\Omega$, vt volumen particulae sit $=\Omega dX$. Sit porro densitas in $X=Q$, pressio $=P$ et celeritas secundum directionem $XA=U$ quae omnibus particulae punctis est communis; vnde eius massa $=Q\Omega dX$. Iam elapso tempore t eadem particula reperiatur in $xvx'v'$ pro qua ponamus $Ox=x$, amplitudinem $xv=\omega$, tum vero densitatem in $x=q$, pressionem $=p$ et celeritatem secundum $xA=u$, eruntque litterae x, q, p, u functiones binarum variabilium X et t, at amplitudo ω est certa functio ipsius x ex tubi figura definienda. Cum iam sectio $X'V'$ eodem tempore t peruenerit in $x'v'$ erit $xx'=dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$; vnde particulae $xvx'v'$ volumen erit $\omega dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$ et massa $=q\omega dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$, quae cum semper maneat eadem habebimus pro motus determinatione hanc primam aequationem:

$$q\,\omega\left(\frac{dx}{dX}\right)=Q\,\Omega.$$

Cum deinde celeritas in x sit $u=\left(\frac{dx}{dt}\right)$, erit particulae $xvx'v'$ acceleratio $=\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Ex viribus solicitantibus nas-

ca-

catur pro hac particula vis acceleratrix secundum directionem $xA = \mathfrak{P}$; tum vero quia in x' pressio est $= p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, hinc oritur vis motrix retro vrgens $= \omega dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, quae, per massam $q\omega dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$ diuisa, dat vim acceleratricem $= \frac{1}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right)$ ab illa $\mathfrak{P}$ subtrahendam, vnde altera aequatio motus determinationem continens colligitur:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g\mathfrak{P} - \frac{2g}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right).$$

quae sumto tempore t constante abit in hanc:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\mathfrak{P}x - dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right).$$

Coroll. 1.

12. Perspicuum est quantitates x, q, p et u eiusmodi functiones esse debere binarum variabilium X et t, vt facto $t = 0$ fiat $x = X$, $q = Q$, $p = P$, et $u = U$; quibus conditionibus per integrationem est satisfaciendum.

Coroll. 2.

13. Amplitudo ω vt functio data spectatur quantitatis $Ox = x$, quae cum ipsa sit functio ipsarum X et t, eatenus amplitudo ω a tempore pendere est censenda.

Scholion.

14. Quia hoc problema continet casum maxime specialem problematis generalissimi 41, etiam solutionem hic da-

datam in illa generalissima contentam esse oportet, quod quidem de aequatione posteriori statim patet, quippe qui ex forma generali nascitur, si termini, qui ibi binas variabiles Y et Z inuoluunt expungantur. Quemadmodum autem aequatio prior cum solutione generali conueniat, minus clare perspicitur. Consensus autem iterum ostendi potest, si modo ad amplitudinis tubi variationem rite respiciatur. Hunc in finem spectentur ternae tubi dimensiones, et si binae Y et Z prae $OX = X$ sunt infinite paruae, ac Z quidem vt constantis per totum tubum magnitudinis consideretur, vt sit $z = Z$ ideoque $(\frac{dz}{dZ}) = 1$, tum vero erit $\Omega = YZ$. Statuatur $y = LY$, existente L functione solius temporis t, fietque $(\frac{dy}{dY}) = L$ et $(\frac{dy}{dX})$ cum reliquis formulis differentialibus euanescit, atque amplitudo in x erit $\omega = LYZ = L\omega$. Nunc ex solutione generali colligitur valor $K = (\frac{dx}{dX})L, 1$, qui ob $L = \frac{\omega}{\Omega}$ abit in $K = \frac{\omega}{\Omega}(\frac{dx}{dx})$: quo inuento manifestum est $Kq = Q$, vt solutio habet generalis; sicque tota haec solutio in generali continetur, ex eaque vt casus specialis deriuari potest.

Problema 44.

Tab II. Fig. 36. 15. Si tubi directrix IYK sit linea curua quaecunque in eodem plano posita, eiusque amplitudo YV per tubi longitudinem vtcunque sit variabilis, per methodum prio-

priorem supra traditam motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo inuestigare.

Solutio.

Elapso tempore $= t$ consideretur fluidi particula in tubo occupans spatiolum $YVyv$, ac pro puncto Y statuantur binae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, quarum relatio mutua cum ex figura directricis tubi detur, erit y functio ipsius x; tubi vero amplitudo in Y minima ponatur $YV = \omega$, quae etiam vt functio ipsius x data est spectanda. Sit porro densitas fluidi in $Y = q$ et pressio $= p$, quae duae quantitates erunt functiones duarum variabilium x et t, perinde ac celeritas fluidi in tubo quae sit $= \mathfrak{v}$, cuius directio cum sit Yy, si hoc elementum breuitatis gratia vocemus $Yy = \surd(dx^2 + dy^2) = ds$, erit celeritas secundum $OX = \frac{\mathfrak{v}dx}{ds} = u$ et sec. $XY = \frac{\mathfrak{v}dy}{ds} = v$. Quia nunc sectio $YV = \omega$ ad directricem est normalis, volumen nostrae particulae $YVyv$ erit $= \omega ds$ et massa $= q\omega ds$. Iam tempusculo dt progrediatur haec particula in $Y'V'y'v'$ ita vt elementum Y peruenerit in Y', eritque spatiolum

$$XX' = udt = \frac{\mathfrak{v}dx}{ds}.dt \text{ et } X'Y' - XY = vdt = \frac{\mathfrak{v}dy}{ds}.dt.$$

Cum autem in y essent celeritates $u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, erit progressu temporis

$$xx' = udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ et } x'y' - xy = vdt + dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

hinc-

hincque

$$X'x' = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ et } x'y' - X'Y' = dy + dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Quamobrem habebimus:

$$Y'y' = ds + \frac{dtdx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dtdxdy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Deinde in Y' est amplitudo $Y'V' = \omega + udt.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ et densitas

$$= q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right);$$

ex quo concluditur particulae $Y'V'y'v'$ volumen

$$= \omega ds + \frac{\omega dtdx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\omega dtdxdy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + udtds.\left(\frac{d\omega}{dx}\right);$$

et massa

$$= q\omega ds + \frac{q\omega dtdx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{q\omega dtdxdy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qudtds.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$+ u\omega dtds\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega dtds\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

quae cum praecedenti $q\omega ds$ aequalis esse debeat, per $\omega dtds$ diuidendo perueniemus ad hanc aequationem:

$$\frac{qdx^2}{ds^2}\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{qdxdy}{ds^2}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qu.\left(\frac{d\omega}{\omega dx}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \frac{dq}{dt} = 0,$$

substituantur autem hic valores $u = \frac{\vartheta dx}{ds}$, $v = \frac{\vartheta dy}{ds}$ et quia ϑ est functio ipsarum t et x, fractiones vero $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ a sola x pendent, peruenietur ad hanc aequationem

$$q\vartheta.\left(\frac{d\omega}{\omega ds}\right) + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d.q\vartheta}{dx}\right) + \frac{dq}{dt} = 0.$$

Deinde cum celeritates in Y' secundum directiones OX et XY sint

$$u + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } v + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right),$$

erunt

erunt accelerationes:

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Ex viribus nunc sollicitantibus ponamus secundum easdem directiones resultare vires acceleratrices P et Q. Postea vero ob pressionem in $y = p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, elementum $YVyv$ in directione yY retro vrgetur vi acceleratrice $= \frac{dx}{q\,ds}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, vnde nascuntur vires secundum directiones OX et XY hae:

$$P - \frac{dx^2}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) \text{ et } Q - \frac{dx\,dy}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right),$$

hincque porro istae aequationes:

$$2gP - \frac{2g\,dx^2}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}{ds}\,d\,.\,\frac{dx}{ds} + \frac{\mathfrak{v}\,dx^2}{ds^2}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right) + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)$$

$$2gQ - \frac{2g\,dx\,dy}{q\,ds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}{ds}\,d\,.\,\frac{dy}{ds} + \frac{\mathfrak{v}\,dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)$$

a quarum prima per dy multiplicata, si subtrahatur altera in dx ducta relinquitur:

$$2g\,(P\,dy - Q\,dx) = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}{ds}\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds}\right) = \mathfrak{v}\mathfrak{v}\,d\,.\,\text{Ang. tang. } \frac{dx}{dy}.$$

Praeterea vero hinc colligitur:

$$2g\,(P\,dx + Q\,dy) - \frac{2g\,dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \mathfrak{v}\,dx\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right) + ds\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right).$$

Prior autem aequatio penitus hinc est excludenda, propterea quod ex pressione solam accelerationem secundum motus directionem computauimus, dum inde alia quoque nasceretur a lateribus tubi excepta et destructa. Vires enim P et Q aliter motum non afficiunt, nisi quatenus secundum directionem motus Yy agunt ex quo sola aequatio posterior in calculo relinquitur, quae si tempus t constans sta-

statuatur, pressionem p ita definit vt sit

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(P\,dx + Q\,dy) - v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Coroll. 1.

16. Patet ergo curuaturam lineae directricis nihil in motu fluidi turbare, dum formularum $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ differentialia, quibus curuatura definitur, penitus ex calculo euanuerunt.

Coroll. 2.

17. Prior quoque aequatio inuenta ad formam commodiorem reduci potest. Cum enim s fit functio ipsius x tantum, perinde est siue v consideretur vt functio ipsarum x et t siue ipsarum s et t: ex quo erit $dx\left(\frac{dv}{dx}\right) = ds\left(\frac{dv}{ds}\right)$ et ob eandem rationem $dx\left(\frac{d.qv}{dx}\right) = ds\left(\frac{d.qv}{ds}\right)$, vnde prior aequatio abit in hanc formam:

$$qv \cdot \frac{d\omega}{\omega\,ds} + \left(\frac{d.qv}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

et porro in hanc: $\left(\frac{d.qv\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$

Scholion 1.

18. Solutionem huius problematis ideo per tantas ambages minus necessarias deduxi, quo clarius appareat, curuaturam lineae directricis nihil plane in motu fluidi turbare; quod principium si statim stabilire voluissem, merito id in dubium vocare licuisset. Nunc autem demum certo agnoscimus, quidquid de viribus ad motum fluidi in-

inflectendum insumitur, id quasi a tubi lateribus absorberi, ita vt eaedem prodeant motus determinationes, ac si tubus esset rectilineus. De viribus tantum sollicitantibus obseruandum est, pro quouis fluidi elemento inde eam solum vim acceleratricem elici debere, quae secundum ipsam motus directionem agat, reliquis viribus plane neglectis, quippe quae totae in latera tubi impenduntur. Hoc notato euidens est solutionem huius problematis plane non discrepare a probl. 42. ex eoque statim deriuari potuisse, tantum loco x et u scribendo s et v, et loco vis P hanc $P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}$. Hoc ergo compendio iam animaduerso multo facilius sequentia problemata resoluemus.

Scholion 2.

19. Ne vlli dubio locus relinquatur, clarius declarandum videtur, cur in aestimatione pressionum quibus particula fluidi $YVyv$ vrgetur, nullam rationem inaequalitatis basium yv et YV habuerim, dum tamen in reliquis inuestigationibus ad eam tam sollicite respici oporteat. Cum enim posita amplitudine $YV = \omega$, amplitudo yv vtique fiat $= \omega + dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, in eamque pressio agat $p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, tota pressio quam basis yv sustentat fit $p\omega + pdx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dum ea, quam basis YV sustinet tantum est $= p\omega$ sicque vis retro pellens maior foret, quam in solutione assumse-

 ram,

ram, quae eadem difficultas etiam praecedentia problemata premere videtur. Verum hoc dubium facile diluitur, si ex iis quae supra de indole pressionum sunt tradita, recordemur omnes pressiones, quae per aequales altitudines repraesentantur se mutuo in aequilibrio tenere etiamsi in bases maxime inaequales agant; hinc illius vis $p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, quam basis xy sustinet, pars p plane est in aequilibrio cum vi p basin YV vrgente, etiamsi basis xy maxime foret inaequalis huic YV, ex quo pressionis illius, qua basin yv impelli vidimus, non sola pars $p\omega$ sed haec $p\omega + pdx\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ a pressione opposita destruitur, ita vt excessus ex sola parte $\omega dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ aestimari debeat, prorsus vti horum problematum solutionibus feci. Deinde, si cui dubium adhuc videatur, quomodo in euolutione aequationum inuentarum differentialia secundi gradus ex calculo euanescant, ita vt sit $\frac{\vartheta\vartheta}{ds} dxd.\frac{dx}{ds} + \frac{\vartheta\vartheta}{ds} dyd.\frac{dy}{ds} = 0$, is has formulas tantum euoluat, ac reperiet:

$\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dxddx}{dt} - \frac{dx^2dds}{ds^2} + \frac{dyddy}{ds} - \frac{dy^2dds}{ds^2}\right)$ quae forma ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et $dxddx + dyddy = dsdds$ abit in $\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dsdds}{ds} - \frac{ds^2dds}{ds^2}\right) = 0.$

Problema 45.

Tab. II. Fig. 37. 29. Si tubi directrix sit IYK linea curua in eodem plano posita cuius amplitudo per longitudinem tubi vtcunque sit variabilis, per methodum posteriorem supra tradiditam respectu ad statum initialem habito, motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo definire.

Solutio.

In statu initiali consideremus fluidi particulam $YVY'V'$ et pro puncto Y positis coordinatis $OX = X$, $XY = Y$, sit ipse arcus $IY = S$ et in Y amplitudo tubi $YV = \Omega$ quae siue vt functio ipsius X spectetur siue ipsius S perinde est. Tum vero sit densitas in $Y = Q$ pressio $= P$, et celeritas secundum tubi directionem $YY' = \Upsilon$, si iam capiatur tubi elementum $YY' = dS$, erit particulae nostrae volumen $= \Omega dS$ et pressio $= Q\Omega dS$. His quae ad statum initialem pertinent positis tempore $= t$ nostra particula transferatur in $yvy'v'$, et pro puncto y vocetur $Ox = x$, $xy = y$ et arcus directricis $Iy = s$, tum vero densitas $= q$, et pressio $= p$, quae quantitates omnes sunt functiones duarum variabilium S et t, eaeque tales vt posito tempore $t = o$ fiat $x = X$, $y = Y$, $s = S$, $q = Q$ et $p = P$, amplitudo vero tubi in y sit $yv = \omega$ functioni ipsius s. Quod si iam ratiocinium instituatur vt in probl. 43., quoniam tubi curuatura nihil turbat in motu fluidi, loco quantitatis X ibi tubi longitudinem denotantis hic litteram S scribi oportet. Ex viribus autem sollicitantibus si eae vires acceleratrices, quae secundum coordinatarum Ox et xy directiones agunt sint $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, ea quae in y secundum tubi bi directionem vrget, erit $\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}dy}{ds}$ atque hinc motus fluidi sequentibus duabus aequationibus exprimetur:

$$q\omega\left(\frac{ds}{dS}\right) = Q\Omega \quad \text{et} \quad \frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy) - ds\left(\frac{dds}{dt^2}\right),$$

in qua posteriori tempus t constans est assumtum.

Coroll. 1.

21. Denotat ergo $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ celeritatem fluidi in tubi puncto y elapso tempore $= t$, quam ergo ita comparatum esse oportet vt facto $t = 0$ fiat $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \Upsilon$ quippe quae celeritas in statu initiali vt cognita est spectanda.

Coroll. 2.

Curuamen ergo tubi tantum in effectu virium sollicitantium variationem parit quoniam pro quauis fluidi particula ex viribus sollicitantibus ea tantum vis acceleratrix colligi debet quae secundum tubi directionem agit.

Scholion.

23. Animaduerti hic conuenit in statu initiali neque celeritatem Υ neque pressionem P pro lubitu fingi posse, cum enim hae quantitates in aequationes pro motu inuentas non ingrediantur eas ita comparatas esse oportet, vt postquam aequationes inuentae fuerint integratae, ex valoribus ipsarum s et p posito tempore $t = 0$ illae quantitates oriantur. Quanquam autem integratio maximam amplitudinem secum importat, tamen effici nequit, vt in statu initiali pro singulis elementis illae ambae quantitates Υ et P datos

datos valores obtineant. Quodsi enim fluidum nullius compressionis sit capax, statim atque in vnica tubi sectione celeritas datur, simul in omnibus reliquis determinatur, tum vero etiam per pressionem in vnico tubi loco pressiones in omnibus reliquis determinantur. Vnde satis intelligitur etiamsi densitas fuerit variabilis quia semper cum celeritate et pressione certo modo cohaeret, tamen non in singulis locis pro statu initiali celeritatem et pressionem pro lubitu fingi posse.

Problema 46.

24. Si tubi directrix IZzK fuerit linea curua quaecunque non in eodem plano sita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis, definire motum fluidi in huiusmodi tubo secundum methodum priorem supra expositam. Tab. II. Fig. 38.

Solutio.

Hac methodo vtentes statim consideramus fluidi statum ad tempus quodcunque indefinitum $= t$ a certo initio elapsum. Definita igitur directrice per ternas coordinatas $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, quae ita a se inuicem pendent, vt pro vnica variabili haberi queant, statuamus praeterea arcum directricis $Iz = s$, et in z sit tubi amplitudo $zv = \omega$, quae etiam vt functio ipsius s est spectanda. In hoc iam loco z ad tempus $= t$, contemplamur fluidi particulam, cuius densitas sit $= q$, pressio $= p$ et celeritas

tas secundum tubi directionem $zK = v$; quae quantitates sunt functiones duarum variabilium ipsius s scilicet et temporis t. Ex viribus denique sollicitantibus oriantur pro puncto z hae tres vires acceleratrices P, Q, R secundum directiones coordinatarum Ox, xy et yz; ex quibus porro vis secundum tubi directionem zK accelerans colligitur $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$. His positis cum tubi curuatura in motu fluidi nihil immutet, motus quaesitus sequentibus duabus aequationibus exprimetur, quarum prior relationem inter densitatem, celeritatem et amplitudinem tubi definit et ita se habet:

$$qv \cdot \frac{d\omega}{\omega ds} + \left(\frac{d.qv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ seu } \left(\frac{d.qv\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

altera vero praeterea pressionem inuoluit, in eaque tempus t vt constans spectatur:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(Pdx + Qdy + Rdz) - v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Problema 47.

Tab. II. Fig. 38. 25. Si tubi directrix IZzK sit linea curua quaecunque non in eodem plano posita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis definire motum fluidi in huiusmodi tubo secundum methodum posteriorem respectu ad statum initialem habito.

Solutio.

Dum singula directrices puncta Z per ternas coordinatas definiuntur $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$, ponatur insuper longitudo arcus $IZ = S$ et tubi amplitudo in $Z = \Omega$. Consideretur iam fluidi particula quaecunque, quae in statu initiali vbi erat tempus $t = o$, erat in Z, eiusque densitas $= Q$ tum vero pressio $= P$ et celeritas secundum tubi directionem $ZK = \Upsilon$; quae ergo quantitates vt datae et functiones vnius variabilis S spectari possunt. Nunc elapso tempore $= t$ eadem particula peruenerit in tubi punctum z, coordinatis $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$ definitum, vbi sit arcus $Iz = s$, et tubi amplitudo $z = \omega$, quae est functio ipsius s, tum vero in z sit fluidi densitas $= q$, pressio $= p$, et celeritas secundum $zK = v$ quam per has denominationes nouimus esse $v = (\frac{ds}{dt})$, haeque quantitates omnes vt functiones duarum variabilium S et t sunt spectandae. Denique ex solutione virium particulam in z sollicitantium deriuentur secundum directiones Ox, xy et yz hae tres vires acceleratrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Quibus positis cum tubi curuatura nihil in nostra inuestigatione perturbet, habebimus vti in Probl. 45., pro motu fluidi in hoc tubo has duas aequationes:

$$q\omega \left(\frac{ds}{dS}\right) = Q\Omega$$

$$\text{et } \frac{2gdp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - ds\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$$

in qua posteriori tempus t constans est assumtum.

Scholion.

26. Omnia haec problemata duplici modo dedimus soluta, dum vtramque methodum in praecedente sectione ex-

positam adhibuimus. Solutiones quidem hae geminae ratione formae plurimum discrepant, verumtamen quin semper egregie inter se conueniant nullo modo dubitari potest. Prout autem quaestiones fuerint comparatae modo magis expediet vti solutione priori modo posteriori; semper autem vtramque adhibendo non solum earum consensus veritatem eo magis confirmabit, sed etiam insignes dilucidationes suppeditabit, vnde veram motus naturam eo accuratius cognoscemus. Huius autem tractationis primariam diuisionem praebet fluidorum diversitas, quatenus eorum densitas vel est constans vel variabilis, quorsum addi potest fluidum mixtum, veluti si fluidi continuitas in tubo bullis aëreis fuerit interrupta. Virium sollicitantium ratio tam parum afficit hanc tractationem, vt vix operae pretium sit alias vires praeter grauitatem considerari, neque hic etiam quicquam impedit, si forte actio virium $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem non admittat, hic enim x, y et z a se inuicem pendent, et vnicam variabilem constituere sunt censendae quamobrem illa difficultas locum habere nequit. At vero amplitudinis tubi variatio tantopere in calculum influit, vt maxime conducat hinc diuisionem petere; ex quo primo tubos eiusdem vbique amplitudinis sum contemplaturus. Denique omnem fluidorum diuersitatem ad duas species aquae et aëris reuocare licet.

CA-