CAPVT II.

DE MOTV AQVAE IN TVBIS AEQVALITER VBIQVE AMPLIS.

Problema 48.

27. Si tubi aequaliter ampli directrix fuerit linea curua quaecunque in quo aqua a sola grauitate animata moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Habeat tubi IiKk directrix IZzK figuram quamcunque curuam aequatione duplici inter ternas coordinatas $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ determinatam, ponaturque directricis arcus $Iz = s$ vt sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, vt quantitates x, y, z vt functiones ipsius s spectari queant. Sit tubi amplitudo $= a$, et densitas aquae littera b designetur vt sit $\omega = a$ et $q = b$. Tum vero elapso tempore $= t$ sit pressio aquae in $z = p$ et celeritas ibidem secundum directionem $zK = v$; vires autem sollicitantes P, Q, R, si applicata yz statuatur verticalis reducuntur ad $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -1$. His positis ex probl. 46., ob $q = b$ et $\omega = a$ motus duabus sequentibus aequationibus determinabitur: Tab. II. Fig. 38.

$$\text{I. } \left(\frac{dv}{ds}\right) = 0; \quad \text{II. } \frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right),$$

in posteriori sumto tempore t constante. Ex priori ergo

 patet

patet celeritatem v functionem esse temporis t tantum, ideoque $v = \Gamma : t$; vnde cum in altera sola s vt variabilis spectetur fiet $dv = 0$, et $(\frac{dv}{dt}) = \Gamma' : t$, hincque habebitur:

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds\,\Gamma' : t \text{ et integrando:}$$

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - z) - s\,\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Quouis ergo temporis instante celeritas aquae in tubo vbique est eadem, diuerso autem tempore vtcunque variabilis esse potest; a qua variabilitate pressio p non solum maxime pendet, sed insuper functionem temporis quamcunque assumit: has autem duas functiones in se arbitrarias ex circumstantiis et viribus extrinsecus aquam vrgentibus determinari debere per se est perspicuum.

Coroll. 1.

28. Circa motum ergo aquae in tubis aeque amplis hic in genere plus non determinatur, quam quod quouis temporis momento aqua vbique pari celeritate secundum tubi tractum moueatur, et quod pressio p certo quodam modo determinetur.

Coroll. 2.

29. Quaecunque igitur functio temporis t pro celeritate v accipitur, semper affirmare licet, eiusmodi motum aquae in tubo aequaliter amplo esse possibilem, dummodo eiusmodi vires externae adhibeantur, quae illi continuae accelerationi seu retardationi producendae sint pares.

Scho-

Scholion 1.

30. In huius problematis solutione vsus sum methodo priore in probl. 46. exposita, vnde conueniet quoque solutionem ex altera methodo probl. 47. elicere. Ponamus ergo fluidi elementum, quod nunc post tempus $= t$ in z considerauimus, initio vbi $t = 0$ fuisse in Z existente $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$ et arcu $IZ = S$, atque ob $q = Q = b$ et $\omega = \Omega = \alpha$ prior aequatio dat $(\frac{ds}{dS}) = 1$ vnde colligitur $s = S.\Gamma : t$, ideoque celeritas aquae in z fit $(\frac{ds}{dt}) = \Gamma' : t$. Altera vero aequatio praebet: $\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds\,.\,\Gamma'' : t$ tempore t sumto constante; quae ergo integrata dat:

$$\frac{2gp}{b} = 2g\,(h - z) - s\Gamma'' : t + \Delta : t,$$

quae cum praecedente prorsus conuenit, nisi quod hic celeritas in z post tempus t exprimatur per $\Gamma' : t$ cum ea ante esset $\Gamma : t$. Id tantum obiici posset; quod cum z et s spectari debeant vt functiones binarum variabilium S et t, in posteriori vero aequatione tempus t constans sit assumtum, differentialia dz et ds non completa sed eae tantum partes accipi debeant, quae ex sola variabilitate ipsius S oriuntur; hincque vicissim integralia non absolute, vti est factum, capi debere. Cui dubio vt occurramus, sit z functio quaecunque binarum variabilium S et t, vnde fiat $dz = M\,dS + N\,dt$; atque certum est in illa aequatione dif-

differentiali loco dz scribi debere MdS. Verum ob eandem rationem, quod hic tempus t sumitur constans, membri MdS integrale iterum est z, cui quidem functio ipsius t adiungi posset, quae autem iam in $\Delta : t$ contineri est censenda; quod idem de integratione differentialis ds est iudicandum.

Scholion 2.

31. Problema igitur propositum vt maxime indeterminatum spectari debet, cum vires quascunque externas, quibus aqua, dum in tubo mouetur, sollicitari potest, in se complectatur, ideoque nunc demum verus eius motus ex his viribus externis penitus determinari debeat. Dum autem aqua in tubo versatur, aliae vires externae in eam agere nequeant, nisi quibus massa aquae in vtroque termino prematur; massa scilicet aquae certa, quae quouis momento in tubo, cuius extensio vt indefinita est statuenda, quae vtrinque ope pistillorum certis viribus sollicitetur; quandoquidem durante motu neque nouam aquae molem accedere, neque vsquam effluxum ex tubo concedere velimus, quippe qui casus peculiarem requirunt euolutionem. Primo ergo statuamus in tubo infinitae longitudinis certam aquae molem continuo moueri, et vtroque termino iugitur certis viribus sollicitari; et quia tubi curuatura non aliter in computum venit, nisi quatenus inde altitudo

z.

z pendet, commoditatis gratia tubum, quasi eius directrix esset linea recta, contemplabor, simul pro quouis puncto eius altitudinem super plano horizontali fixo assignaturus.

Problema 49.

32. Si certa aquae massa in tubo aequaliter amplo continuo moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque vrgeatur, eius motum et pressionem in singulis punctis ad quoduis tempus determinare.

Solutio.

Tubum quomodocunque curuum tanquam in rectum extensum consideremus, id tantum annotantes puncti cuiusque z altitudinem supra certum planum horizontale esse $= z$, quae pro singulis punctis vt data est concipienda. Tab. II. Fig. 39. Iam elapso tempore t aquae massa in tubo occupet spatium MN, quod ergo erit constantis quantitatis $= l$, ponamusque a puncto tubi fixo A distantia $AM = m$, $AN = n$, vt sit $l = n - m$; eleuatio autem super planum horizontale sit puncti $M = \mu$, puncti vero $N = \nu$. At iam haec vena aquea MN in M vrgeatur pressione $= M$, in N vero pressione $= N$, quae sint functiones temporis quaecunque datae, celeritas vero huius massae aqueae sit $= v$ qua versus K promoueatur, et quae est functio temporis quaesita supra posita $v = \Gamma : t$. Si nunc in loco z quouis medio, cuius distantia a termino fixo A sit $Az = s$; pressio statuatur

tuatur $=p$, erit $\frac{2gp}{b} = 2g(h-z) - s\Gamma' : t = \Delta : t$. Transferatur hoc punctum z primo M, tum vero in N et quia in his punctis pressiones illis ipsis, quibus nunc aqua in his terminis vrgeri assumimus, aequales esse debent, hinc duas elicimus aequationes:

$$\frac{2gM}{b} = 2g(h-\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t \text{ et}$$
$$\frac{2gN}{b} = 2g(h-\nu) - n\Gamma' : t + \Delta : t,$$

quarum haec ab illa subtracta relinquit:

$$\frac{2g}{b}(M-N) = 2g(\nu-\mu) + (n-m)\Gamma' : t$$

vnde colligitur $\Gamma' : t = \frac{2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu)}{b(n-m)}$ et

$$\Delta : t = \frac{2g(Mn-Nm)}{b(n-m)} - 2gh + \frac{2g(n\mu - m\nu)}{n-m}.$$

Quia autem terminorum M et N eadem est celeritas $u = \Gamma : t$, iique tempore dt per spatiola dm et dn progrediuntur, erit $\frac{dm}{dt} = u = \Gamma : t = \frac{dn}{dt}$; vnde fit $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$, ita vt ob $n - m = l$ constanti celeritas aquae $MN = \frac{dm}{dt}$ perinde ac distantia $AM = m$ ex hac aequatione elici debeat:

$$bl.\frac{ddm}{dt^2} = 2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu),$$

vbi M et N sunt functiones datae temporis t at μ et ν quantitates variabiles ab m et n pendentes. Resoluta autem hac aequatione, qua ad tempus $=t$ locus termini M determinatur, habebitur primo celeritas aqueae venae $MN = \frac{dm}{dt}$, tum vero pro quocunque puncto medio z vt sit $Az = s$, pressio p ex hac aequatione definitur:

$\frac{2gp}{b}$

$$\frac{2gp}{b} = \frac{2g(Mn - Nm)}{bl} + \frac{2g(n\mu - m\nu)}{l} - 2gz - \frac{2gs(M - N)}{bl} + \frac{2gs(\nu - \mu)}{l},$$

quae ergo praebet:

$$p = \frac{Mn - Nm}{l} + \frac{b(n\mu - m\nu)}{l} - bz - \frac{s(M - N)}{l} + \frac{bs(\nu - \mu)}{l} \text{ seu}$$

$$p = \frac{M(n - s)}{l} + \frac{N(s - m)}{l} + \frac{b\mu(n - s)}{l} + \frac{b\nu(s - m)}{l} - bz.$$

Postquam ergo pro dato tempore t inuentus fuerit locus M in tubo seu $AM = m$, vnde simul celeritas $\frac{dm}{dt}$ innotescit, inde pro quouis elemento aquae in spatio MN contento pressio definitur.

Coroll. 1.

33. Si venam aqueam vtrinque nulla plane vis vrgeat vt sit $M = 0$ et $N = 0$ eius motus ex hac aequatione debet determinari $bl \cdot \frac{ddm}{dt^2} = -2gb(\nu - \mu)$ seu $\frac{ddm}{dt^2} + \frac{2g}{l}(\nu - \mu) = 0$ tum vero pressio erit

$$p = \frac{b\mu(n - s) + b\nu(s - m)}{l} - bz.$$

Coroll. 2.

34. Sin autem binae pressiones M et N inter se fuerint aequales, tum prior quidem aequatio differentio-differentialis manet eadem, altera vero parumper discrepat:

$$p = M + \frac{b\mu(n - s) + br(s - m)}{l} - bz,$$

ita vt haec pressio illam constanter superet quantitate M.

Coroll. 3.

35. Totum negotium ad aequationem differentialem secundi gradus reducitur, quae etiamsi pressiones M et N sint

sint inaequales, ideo tamen non fit solutu difficilior sed tota difficultas residat in altitudinibus μ et ν, quippe quae per m determinantur.

Scholion.

36. Casus coroll. 1. quo pressiones M et N euanescentes fecimus, nonnisi in vacuo locum habere potest, quando enim motus fit in aëre, vena aquea in vtroque termino a pondere atmosphaerae premitur et quidem pari vi, nisi ambo termini ad altitudines maxime differentes pertingant. Quare, si vena in vtroque termino fuerit libera et aperta, in coroll. 2. littera M denotabit pressionem atmosphaerae quae fere aequiualeat columnae aqueae 33 pedes altae; si pro hac altitudine scribamus k erit $M = bk$, et, quia hic perpetuo de aqua est sermo, pressiones etiam per columnas aqueas exprimi conueniet, vnde densitatem aquae b vnitati aequalem statuamus. Quocirca pressionem in aquae vena habebimus:

$$p = k - z + \frac{\mu(n - s) + \nu(s - m)}{l}.$$

Maximi autem momenti est pressionem atmosphaerae k in calculum introducere, etiamsi non sentiatur; ea enim omissa, saepe fieri posset, vt pressio p euaderet negatiua, neque tamen continuitas fluidi soluatur; quod tamen semper euenire debet, vbi pressio reuera fit negatiua. Atmosphaerae autem ratione habita motus inuentus durare potest, quam-

quamdiu pressio p tum non fit negatiua; ea autem negatiua euadente continuitas certe soluitur; nisi forte ob cohaesionem seu potius aetheris pressionem contineatur.

Exemplum 1.

37. *Si tubus fuerit rectus et ad horizontem vtcunque inclinatus, motum venae aqueae* MN *vtrinque apertae in eo definire.* Sit inclinatio tubi AK ad horizontem $= \eta$, et vena aquea in eo sursum moueatur impetu scilicet accepto; sin autem velimus vt descendat, annulum η negatiuum capi oportet. Hinc ergo erunt altitudines super plano horizontali $\mu = m \sin.\eta$, $z = s \sin.\eta$ et $\nu = (l + m) \sin.\eta$, vnde prima aequatio fit $\frac{ddm}{dt^2} + 2g \sin.\eta = 0$, hineque celeritas $\frac{dm}{dt} = 2g(f - t \sin.\eta)$, existente $2gf$ celeritate initiali. At porro prodit $m = g(2ft - tt \sin.\eta)$, siquidem initio vena occupauerit tubi portionem AB. Iam in loco quouis z ob $\mu(n - s) = m(m + l - s) \sin.\eta$ et $\nu(s - m) = (m + l)(s - m) \sin.\eta$ erit pressio $p = k - z + s \sin.\eta = k$ ideoque semper et vbique pressioni atmosphaerae aequalis. Hinc patet venam aqueam in tubo perinde moueri ac corpus solidum siue ascendendo siue descendendo.

Exemplum 2.

38. *Si tubus* ABCD *fuerit recuruatus, vt duo habeat brachia verticalia* AB *et* DC, *medio* BC *existente horizontali, in eoque vena aquea* MBCN *ita moueatur, vt eius ter-* Tab. II. Fig. 40.

 mini

mini M *et* N *in brachiis verticalibus semper haereant, hunc motum determinare.* Elapso tempore $= t$ occupet vena aquea spatium tubi MBCN, vt sit $MB + BC + CN = l$, seu ducta horizantali EF ita vt sit $BE = CF = \frac{1}{2}(BM + CN)$ erit $l = BC + 2BE$. Tum posito $AM = m$ erit $\mu = BM$ et $\nu = CN$, hinc $\nu - \mu = CN - BM = -2ME$. Statuatur $AE = E$ et $ME = x$ erit $m = e - x$, vnde prima aequatio dat $-\frac{ddx}{dt^2} - \frac{4g}{l}x = 0$ seu $ddx + \frac{4g}{l}xdt^2 = 0$ quae per $2dx$ multiplicata praebet integrando $dx^2 + \frac{4g}{l}xxdt^2 = \frac{4g}{l}aadt^2$, hincque

$$2dt\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ et } 2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{Ang. sin.} \frac{x}{a},$$

ita vt iam sit

$$x = e - m = a \sin. 2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

et celeritas in M deorsum tendens $= -\frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}} \cos. 2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}}$. Cum ergo in E peruenit erit eius celeritas $= \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$ si tum fieri ponamus $2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$, vnde cum motus initium vbi lubuerit constitui queat, faciamus $e = a$, sitque

$$m = AM = a(1 - \cos. 2t\sqrt{\frac{g}{l}}) \text{ vt sit } \frac{dm}{dt} = \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}} \sin. 2t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

ita vt motus initio fuerit $m = 0$ seu $EM = EA$ et celeritas $= 0$. Vena aquea motu oscillatorio feretur, cuius excursiones maximae supra et infra horizontalem EF erunt $= a$, et terminus M ab altitudine maxima ad minimam perueniet tempore $t = \frac{\pi\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}$, sicque hic motus conueniet cum oscillationibus penduli simplicis cuius longitudo

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} l = BE + \frac{1}{2} BC$. His inuentis in loco quocunque z vt sit $Az = s$ pressio erit

$$p = k - Bz + \frac{BM(Bz + BC + CN)}{l} + \frac{CN.Mz}{l} \text{ seu}$$

$$p = k + Mz - \frac{2ME.Mz}{l},$$

vbi Mz in priori loco denotat profunditatem puncti z infra M at in posteriori loco distantiam in tubo a termino M. Quare in brachio horizontali erit pressio:

in $z' = k + BN - \frac{2ME(MB + Bz')}{l}$ et

in $z'' = k + BM - Cz'' - \frac{2ME(MB + BC + Cz'')}{l} = k + Nz'' + \frac{2ME.Nz''}{l}$.

Coroll. 1.

39. Cum ergo fluidum inter oscillandum in horizontalem EF pertingit, ob $ME = 0$, pressio in z erit $= k + Ez$, denotante Ez profunditatem puncti z infra lineam EF. Hinc si tubi pars BC non sit recta sed sursum inflexa, eius eleuatio super EF maior esse nequit quam k, quia tum pressio ibi fieret negatiua et fluidi continuitas solueretur.

Coroll. 2.

40. Si ergo tubus habeat figuram $ABOCD$, cuius brachia AB et DC sint verticalia, medium autem BOC sursum supra horizontalem EF inflexum aequaliter vtrinque vt sit $EB + BO = \frac{1}{2} l$, pressio in summo puncto O erit $= k - OP + ME - \frac{2ME(OB + MB)}{l} = k - OP + ME - \frac{ME(MB + BO)}{EB + BO}$ Tab. II. Fig. 41.

$= k$

$= k - OP - \frac{ME . ME}{EB + BO}$. Ne ergo continuitas fluidi soluatur, non sufficit vt sit $OP < k$, sed oportet esse $OP < k - \frac{ME^2}{EB + BO}$.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 42. 41. *Constet tubus aequaliter amplus duobus ramis rectis* AB *et* BC *ad horizontem* EF *utcunque inclinatis, ramus autem* BC *superne in* C *sit clausus et aëre vacuus, in hocque tubo moueatur vena aquae* MBN *datae longitudinis, eius motum definire.*

Sit angulus $ABE = \varepsilon$ et angulus $CBF = \zeta$, longitudo venae $MB + BN = l$, et $AM = m$; in M ergo aqua premitur ab atmosphaera vt sit $M = k$, in N vero nulla est pressio, vt sit $N = 0$, tum vero ex solutione problematis est $\mu = M\mu$ et $\nu = N\nu$, vnde, densitate aquae posita $= 1$, habetur haec aequatio:

$$l . \frac{ddm}{dt^2} = 2gk - 2g(N\nu - M\mu),$$

ac pro tubi loco quocunque z erit pressio:

$$p = \frac{k(l + m - Az)}{l} + \frac{M\mu(l + m - Az)}{l} + \frac{N\nu(Az - m)}{l} - zp \text{ seu}$$

$$p = \frac{k(l - Mz)}{l} + \frac{M\mu(l - Mz)}{l} + \frac{N\nu . Mz}{l} - zp,$$

at pro puncto z' in altero ramo:

$$p = \frac{k(l - BM - Bz')}{l} + \frac{M\mu(l - MB - Bz')}{l} + \frac{N\nu(MB + Bz')}{l} - z'p'.$$

Ad hunc calculum expediendum vocemus $BM = x$ vt sit $BN = l - x$ eritque $M\mu = x \sin.\varepsilon$ et $N\nu = (l - x)\sin.\zeta$; vnde

vnde aequatio differentialis erit:

$$l \cdot \frac{ddx}{dt^2} + 2g\,(k + x \sin.\varepsilon - (l - x)\sin.\zeta) = 0,$$

quae per $2dx$ multiplicata et integrata praebet:

$$l \cdot \frac{dx^2}{dt^2} + 2g\,(2kx + xx \sin.\varepsilon + (l - x)^2 \sin.\zeta) = 2gff.$$

Quare celeritas venae $\frac{dm}{dt} = -\frac{dx}{dt}$; siquidem eam versus C ferri ponamus erit:

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{l}\,(ff - 2kx - xx \sin.\varepsilon - (l-x)^2 \sin.\zeta)\right)} \quad \text{seu}$$

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{l}\,(ff - ll \sin.\zeta - 2kx + 2lx \sin.\zeta - xx\,(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))\right)},$$

vnde intelligimus celeritatem euanescere, cum fuerit:

$$x = \frac{-k + l \sin.\zeta \pm \sqrt{(kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta + ff(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))}}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta},$$

maxima autem fiet vbi $x = \frac{-k + l \sin.\zeta}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}$; haecque celeritas maxima erit $= \sqrt{\left(\frac{2g}{l}\left(ff + \frac{kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}\right)\right)}$. Pro tempore vero habebimus:

$$dt \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{-dx}{\sqrt{(ff - ll \sin.\zeta - 2kx + 2lx \sin.\zeta - xx\,(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))}},$$

vnde integrando colligimus:

$$x = \frac{-k + l \sin.\zeta + \cos.\lambda t \cdot \sqrt{(ff(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta) + kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta)}}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta},$$

existente $\lambda = \sqrt{\left(\frac{2g}{l}\,(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta)\right)}$.

Quodsi iam pro tubi puncto z ponamus Bz $= z$ erit pressio ibidem

$$p = \frac{(k + x \sin.\varepsilon)(l - x + z)}{l} + \frac{(l + x)\sin.\zeta}{l}\,(x - z) - z \sin.\varepsilon.$$

At pro puncto z′ in altero ramo BC ponendo Bz′ $= z'$ erit:

$$p' = \frac{(k + x \sin.\varepsilon)(l - x - z')}{l} + \frac{(l - x)\sin.\zeta}{l}\,(x + z') - z' \sin.\zeta.$$

Illo

Illo casu erit succinctus $p = \frac{(k + x(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))(l - x + z)}{l}$ $- z(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta)$ hoc vero $p' = \frac{(k + x(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))(l - x - z')}{l}$.

Coroll. 1.

Tab. III. Fig. 43. 42. Sit tubi brachium AB horizontale et BC verticale hincque $\varepsilon = 0$ et $\zeta = 90°$. Vnde fit celeritas in $M = \sqrt{(\frac{2g}{l}(ff - ll - 2kx + 2lx - xx))}$. Ponamus initio totam venam tubum horizontalem AB occupasse, ibique quieuisse, vt sit $AB = l$, necesse ergo est, vt posito $BM = x = l$ celeritas euanescat, sumique debeat $ff = 2kl$; vnde, cum vena in situm MBN peruenerit, erit celeritas $= \sqrt{(\frac{2g}{l}(l - x)(2k - l + x))}$; et quando tota vena in tubum verticalem peruenit, quod fit si $x = 0$, eius celeritas qua ascendere perget erit adhuc $= \sqrt{(\frac{2g}{l}(2k - l))}$. Dum ergo longitudo venae minor sit quam $2k$, tota vena in tubum verticalem ascendit, siquidem fuerit altior quam $2k$.

Coroll. 2.

43. Sumto autem $ff = 2kl$ et $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{l}}$, aequatio bis integrata fit: $x = -k + l + k\cos.(\lambda t = \gamma)$. Vnde cum initio fuerit $x = l$, angulus constans γ euanescit, vt sit $x = l - k(1 - \cos.\lambda t)$. Tempus ergo quo tota vena in tubum verticalem intrat, hinc definiri debet $1 - \cos.\lambda t = \frac{l}{k}$ seu $\lambda t = \text{Ang.}\cos.(1 - \frac{l}{k})$. Quare si $l = k$ erit $t = \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi\sqrt{l}}{2\sqrt{2g}}$ sin autem sit $l = 2k$, fit $t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$.

Scho-

Scholion.

44. Nihil impedit quo minus pro aqua mercurium sub- Tab. III.
stituamus, ac tum k erit altitudo mercurii in barometro; Fig. 44.
atque hinc oscillationes mercurii in barometro definire poterimus, si ipsi infra adiunctus sit tubus horizontalis BA eiusdem amplitudinis. Ponamus ergo in statu aequilibrii altitudinem $BK = k$ et $BE = e$, vt sit tota vena mercurialis $l = e + k$. Facta iam quadam agitatione, sit vena in statu MBN existente $BM = x$ et $EM = x - e$ atque celeritas mercurii in tubo ascendentis erit:

$$-\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{l}(ff - ll - 2kx + 2lx + xx)\right)},$$

quam posito $x = a = BA$ euanuisse ponamus, ita vt statui debeat $ff = (l - a)^2 + 2ak$ quo facto erit celeritas

$$= \sqrt{\left(\frac{2g}{l}(a - x)(2k - 2l + a + x)\right)}.$$

Statuamus $EA = c$; $EM = y$, vt sit $a = c + e$; $x = e + y$, et ob $l = e + k$ erit haec celeritas:

$$-\frac{dy}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{e+k}(c - y)(c + y)\right)} = \sqrt{\frac{2g(cc - yy)}{e+k}},$$

vnde colligimus $\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(cc - yy)}}$ et integrando

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \text{Ang. cos.}\frac{y}{c}, \text{ seu } y = c\cos.\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}}.$$

Quare mercurius in barometro circa statum aequilibrii Kk oscillationes peraget, tempore cuiusque existente $= \frac{\pi\sqrt{(e+k)}}{\sqrt{2g}}$, seu eae erunt isochronae pendulo, cuius longitudo est $= e + k$.

Problema 50.

Tab. III. Fig. 45. 45. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moueatur, vt in altero termino effluat, in altero vero continuo succedente prematur a vi quacunque, hunc motum effluxus et pressionem in singulis elementis aquae determinare.

Solutio.

Quamcunque tubus habuerit figuram, is tanquam in directum extensis $AaOo$ consideretur; cui adiungatur scala altitudinum $\alpha\omega$, cuius applicatae $z\pi$ exhibent cuiusque tubi puncti z altitudinem super dato plano horizontali. Iam elapso tempore t aqua effluat per tubi orificium Oo celeritate $= v$, qua simul tota fluidi massa, quae adhuc est in tubo succedat. Occupet autem iam aqua tubi partem MO et in Mm vrgeatur vi exprimenda per altitudinem $= M$. In O autem vbi aqua effluit in aërem alia pressio locum habere nequit, nisi atmosphaerae, quae aequiualens statuatur columnae aqueae, altitudinis $= k$. Pertigerit initio aqua vsque ad A et ponatur longitudo $AO = a$, atque nunc sit $AM = m$, functio temporis t, ex qua definitur celeritas $v = \frac{dm}{dt}$. Iam quoduis aquae elementum in z consideretur, cuius altitudo supra planum horizontale sit $z\pi = z$ et posita densitate aquae $= 1$, et pressione in $z = p$, tum vero distantia $Az = s$, ex probl. 48. hanc nanciscimur aequationem:

$2gp$

$$2gp = 2g(h - z) - s\Gamma' : t + \Delta : t,$$

vbi est $\Gamma : t = s = \frac{dm}{dt}$, ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$; est enim distantia $AM = m$ et celeritas s functio temporis t tantum. Transferamus nunc primo punctum z in M, vbi cum pressio sit data $= M$ ob $s = m$ habebimus:

$$2gM = 2g(h - M\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t,$$

deinde transferamus punctum z in orificium O ponendo $s = a$, vbi cum pressio pariter sit cognita $= k$ erit

$$2gk = 2g(h - O\omega) - a\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Ex his aequationibus colligimus primo:

$$2g(M - k) = 2g(O\omega - M\mu) + (a - m)\Gamma' : t,$$

ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2} = \frac{2g(M - k + M\mu - O\omega)}{a - m}$,

tum vero cum sit:

$$2g(M - p) = 2g(z - M\mu) + (s - m)\Gamma' : t, \text{ erit}$$

$$M - p = z - M\mu + \frac{(s - m)(M - k + M\mu - O\omega)}{a - m},$$

seu $p = \frac{M(a - s) + k(s - m) + M\mu(a - s) + O\omega(s - m)}{a - m} - z$,

vel $p = \frac{(M + M\mu)(a - s) + (K + O\omega)(s - m)}{a - m} - z$,

vel etiam $p = \frac{Oz(M + M\mu) + Mz(k + O\omega)}{MO} - z$.

Totum ergo negotium ab illa aequatione differentio-differentiali pendet.

Coroll. 1.

46. Si pressio in M fuerit vel constans vel a spatio $AM = m$ pendens, quoniam altitudo $M\mu$ ab eodem pendet

Kk 2 et

et $O\omega$ est constans, aequatio differentio - differentialis 1 $2dm$ multiplicata fit integrabilis reddens:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{M - k + M\mu - O\omega}{a - m} dm,$$

qua forma quadratum celeritatis exprimitur.

Coroll. 2.

47. Si effluxus fieret in spatium ab aëre vacuum, perspicuum est in nostris formis scribi debere $k = 0$; ac si in M aqua nullam aliam vim praeter pressionem atmosphaerae sustineat, erit $M = k$. Quare si aqua vtrimque aëri pateat erit $M = k$ et $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{M\mu - O\omega}{a - m} dm$ et pro pressione in z fiet $p = k - z + \frac{Oz \,.\, M\mu + Mz \,.\, O\omega}{MO}$.

Exemplum 1.

Tab. III. Fig. 46. 48. *Sit tubus rectus AO vtcunque inclinatus ad horizontem, qui initio ab O ad A vsque fuerit aqua plenus, indeque per orificium Oo effluat, hunc motum determinare.*

Posito angulo $AOE = \varepsilon$, ob $MO = a - m$ erit altitudo $M\mu = (a - m)\sin.\varepsilon$ et $O\omega = 0$. Quare cum sit $M = k$, fiet $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int dm \sin.\varepsilon = 4gm \sin.\varepsilon$, quia facto $AM = m = 0$ motus a quiete incepisse ponitur. Hinc igitur porro fit $\frac{dm}{\sqrt{m}} = 2dt\sqrt{g}\sin.\varepsilon$, et integrando $\sqrt{m} = t\sqrt{g}\sin.\varepsilon$; vnde concludimus aquam omnem e tubo effluxuram esse tempore $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g\sin.\varepsilon}}$; quod tempus conuenit cum eo, quo corpus graue super plano inclinato AO esset descensurum.

In

In puncto z vero est pressio $p = k - z\pi + \frac{Oz \cdot M\mu}{MO}$, cum autem sit $MO : M\mu = Oz : z\pi$ fit $p = k$, seu per totam venam MO pressio est eadem scilicet atmosphaerae, quae vulgo nulla reputatur.

Exemplum 2.

49. *Si vt ante ex tubo inclinato recto AO aqua non in aërem sed in spatium vacuum effluat, hunc motum determinare.*

Manente angulo $AOE = \varepsilon$, et $AM = m$, $AO = a$, est $M\mu = (a - m)\sin.\varepsilon$ et $O\omega = 0$, tum vero $M = k$ et quod ante est k hic est $= 0$, sicque habebimus:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{k + (a-m)\sin.\varepsilon}{a - m}\,dm = 4gkl\frac{a}{a-m} + 4gm\sin.\varepsilon,$$

vt scilicet posito $m = 0$, motus a quiete inceperit: ex quo sequitur facto $m = a$ extremam guttulam celeritate infinita expulsum iri quod non adeo absurdum est putandum, cum de vltimo quasi strato infinite tenui intelligi debeat, cui statim atque minima crassities tribuitur, celeritas admodum fit modica. Ipsum autem tempus hinc nonnisi appropinquando definiri potest, cum sit:

$$2t\sqrt{g} = \int\frac{dm}{\sqrt{(kl\frac{a}{a+m} + m\sin.\varepsilon)}},$$

neque vllo casu siue inclinatio ε euanescat, siue in angulum rectum abeat. Deinde vero sumto $Az = s$ erit pressio:

$p =$

$$p = \frac{k \cdot Oz}{MO} + \frac{Oz \cdot M\mu}{MO} - z\pi = \frac{k(a-s)}{a-m}.$$

Pro casu autem quo tubus AO situm tenet horizontalem, et $\varepsilon = 0$; si ponamus $l\frac{a}{a-m} = \frac{x}{a}$, fit $m = a(1 - e^{\frac{-x}{a}})$ hincque $\frac{2t\sqrt{gk}}{\sqrt{a}} = \int e^{\frac{-x}{a}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, vnde approximando colligitur:

$$\frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = e^{\frac{-x}{a}}(1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{x}{a} + \tfrac{2}{3} : \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{x^2}{aa} + \tfrac{2}{3} : \tfrac{2}{5} : \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{x^3}{a^3} + \text{etc.}),$$

pro motus ergo initio, vbi x valde paruum et

$$m = x - \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{6aa} - \text{etc.}$$

fit $\frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = (1 - \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} - \text{etc.})(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{a} + \frac{2}{3} : \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{aa} + \text{etc.})$,

seu $t = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{gk}}(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{10} \cdot \frac{xx}{aa} - \text{etc.})$.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 47. 50. *Constet tubus aequaliter amplus ABO duobus brachiis rectis altero horizontali AB, altero verticali BO deorsum verso, qui cum initio fuisset plenus, aqua per orificium Oo effluere coeperit, eius motum determinare, et pressionem in singulis locis.*

Sit longitudo brachii horizontalis $AB = b$, et verticalis $BO = c$ ideoque $a = b + c$. Cum igitur tempore t aqua ex A in M profluxerit existente $AM = m$, ob pressionem in $M = k$, perinde ac in O, erit celeritatis in M quadratum:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{c\,dm}{a-m} = 4gcl\frac{a}{a-m},$$

vnde

vnde fit $2dt\sqrt{gc} = \frac{dm}{\sqrt{k\frac{a}{a-m}}}$, vbi eadem occurrit difficultas integrationis atque in exemplo praecedente.

Pressio autem in puncto quouis z tubi horizontalis erit

$$p = k - c + \frac{(c+Bz)c}{a-m} = k - \frac{c.Mz}{a-m} = k - \frac{BO.Mz}{BM+BO},$$

sicque in angulo B erit pressio $= k - \frac{BM.BO}{BM+BO}$ minima.

At sumto z' in tubo verticali pressio ibi erit

$$p' = k - Oz' + \frac{Oz'.BO}{BM+BO} = k - \frac{Oz'.BM}{BM+BO}.$$

Motus autem initium in A respondet vi acceleratrici $= \frac{c}{a}$ grauitate per vnitatem expressa.

Corollarium.

51. Initio ergo motus, dum ambo tubi erant pleni, pressio in B est omnium minima; atque adeo negatiua fieri potest, si vterque ramus maior quam k; quod si euenerit, continuitas in B rumpitur, et aqua per tubum verticalem celerius descendit, quam reliqua per tubum horizontalem sequi potest.

Exemplum 4.

52. *Sit tubus rectus verticalis supra in* A *hermetice clausus infra apertus, at altior pressione atmosphaerae* k, *qui si initio fuerit plenus, descensum fluidi definire.* Tab. III. Fig. 48.

Tempore t descenderit fluidum per AM$=m$, existente altitudine AO $= a > k$, et quia supra Mm erit vacuum, fiet

fiet $M = o$ vnde celeritatis descensus in M quadratum fit:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{-k+a-m}{a-m}\, dm = 4g\left(m - kl\frac{a}{a-m}\right).$$

Quare cum celeritas initio vbi $m = o$ fuerit nulla, ea maxima fiet, vbi $m = a - k$ seu $OM = k$, quo casu erit $\frac{dm}{dt} = 2\sqrt{(g(a-k-kl\frac{a}{k}))}$ dehinc vero iterum decrescet et euanescet vbi fit $kl\frac{a}{a-m} = m$. Ponamus altitudinem a valde parum excedere k, esseque $a = k + \omega$ et celeritas maxima fiet $= 2\sqrt{(g(\omega - kl(1+\frac{\omega}{k})))} = 2\omega\sqrt{\frac{g}{2k}}$ respondens spatio $AM = \omega$. Iterum autem celeritas euanescet vbi erit $k(\frac{m}{a} + \frac{mm}{2aa}) = m$ seu $m = 2\omega$ propius vero reperitur:

$$m = 2\omega - \frac{2\omega^2}{3k} + \frac{4\omega^3}{9kk} - \frac{44\omega^4}{135k^3} + \text{etc.}$$

Pressio tandem in quouis loco z erit:

$$p = \frac{Oz.MO + Mz.k}{MO} - Oz = \frac{k.Mz}{MO}.$$

Problema 51.

Tab. IV. Fig. 49. 53. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moueatur, vt in altero eius termino Oo effluat, in altero vero Aa continue aliunde affluat data vi propulsa, hunc aquae per tubum propulsae motum definire.

Solutio.

Tubum igitur vtcunque curuatum AO hic considero, in cuius orificium Aa aqua continuo intruditur vi quacunque per altitudinem L expressa quae vel vt constans, vel functio temporis t spectari potest, cuiusmodi con-

continua aquae intrusio et propulsio ope antliarum effici solet, quarum vi ex loco inferiori A in altiorem O eleuatur, ibique effunditur. Quamobrem tubi terminum A in imo loco positum summo, a quo ducta horizontali $A\omega$, singulorum punctorum tubi z altitudines super ea aestimo, ita vt supremi orificii Oo, vbi aqua expellitur, altitudo sit $O\alpha$. Posita ergo pro puncto quouis z longitudine tubi $Az = s$ et altitudine $\pi z = z$, sit elapso tempore $= t$ celeritas aquae in tubo $= v$, qua simul in Oo effluit, et quae est functio temporis t quam in probl. 48. posui $v = \Gamma : t$. tum vero denotante p pressionem in z, quam etiam ad aquam referamus vt sit $b = 1$, hanc inuenimus aequationem:

$$2gp = 2g(h - z) - s\Gamma' : t + \Delta : t,$$

dum scilicet sumimus aquam in tubo a termino A ad terminum O progredi, atque in hac aequatione vniuersa motus ratio continetur. Eam ergo ad casum oblatum accomodari oportet has conditiones implendo, vt et in A sit pressio data $= L$, et in $O = k$, denotante k altitudinem columnae aqueae atmosphaerae aequiponderantis. Punctum z indefinitum primum ad orificium A transferamus quo fit $s = 0$, $z = 0$ et $p = L$, ideoque

$$2gL = 2gh + \Delta : t,$$

Deindem eodem ad orificium O translato, vbi fit $s = AO$, $z =$

$z = O\omega$ et $p = k$, habebimus:

$$2gk = 2g(h - O\omega) - AO \cdot \Gamma' : t + \Delta : t,$$

vnde colligimus:

$$2g(L - k) = 2g \cdot O\omega + AO \cdot \Gamma' : t,$$

ita vt sit:

$$\Gamma' : t = \frac{dv}{dt} = \frac{2g(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Tum vero pro pressione in loco indefinito fiet:

$$2g(L - p) = 2gz + \frac{2gs(L - k - O\omega)}{AO} \text{ seu}$$

$$p = L - z - \frac{s(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Statuamus nunc totam tubi longitudinem $AzO = l$ et orificii Oo altitudinem $O\omega = a$, ac primo pro celeritate v obtinuimus $\frac{dv}{dt} = \frac{2g(L - K - a)}{l}$, sicque integrando $v = \frac{2g}{l}(\int L dt - (a+k)t)$, deinde vero pro pressione in quouis loco tubi z erit:

$$p = L - z - \frac{s(L - k - a)}{l}.$$

Coroll. 1.

54. Quodsi ergo vis propellens L fuerit constans et $= a + k$ acceleratio aquae in tubo euanescit, ideoque eius fluxus per tubum erit vniformis, quanta autem sit futura eius celeritas ex his principiis non definitur, sed ex natura virium impellentium concludi debet.

Coroll. 2.

55. Sin autem vis propellens L perpetuo maior esset quam $a + k$, aquae per tubum propulsae celeritas continuo augeretur, sin autem minor esset continuo diminueretur. Neque

que ergo hinc quicquam certi circa aquae celeritatem dato tempore effusam statui potest.

Scholion 1.

56. Quantumuis hoc paradoxum atque adeo experientiae contrarium videatur, tamen hypothesi qua statuimus, pressionem in A perpetuo eadem vi aquam propulsare, quaecunque fuerit eius celeritas, prorsus est consentanea, ac si tales vires applicare liceret, nullum est dubium, quin etiam hic effectus reuera sit secuturus. Quare cum hoc in praxi minus eueniat, iudicandum est, vires quae ad aquam propulsandam adhiberi solent, neutiquam eius esse indolis, vt eadem pressione agant, quacunque celeritate aqua progrediatur. Satis autem superque constat, omnes vires, quae ab hominibus, animalibus, aquae fluxu et vento peti solent, ita esse comparatas, vt aucta celeritate debilitentur, ac tandem euanescant. Quantacunque enim sit huiusmodi vis obiecto quiescenti applicata, statim atque hoc obiectum mouetur, ea minor euadit, quare tales vires non absolute definire licet, sed earum quantitas pro quouis celeritatis gradu quo agunt, seorsim debet determinari. Ita si ponamus machinae, qua aqua per tubum propellitur, eiusmodi vim esse applicatam quae dum celeritate $= c$ operatur, aequalis sit ponderi aquae cuius volumen sit $= V$: atque machinam ita esse instructam, vt perpetuo hac celeritate $= c$ agat id quod semper ope rotarum fieri potest. Cum iam in nostro casu pres-

sio in A altitudine $= L$ exprimatur, si amplitudinem tubi statuamus $= \omega$, aequabitur ea ponderi voluminis aquae $= L\omega$, quae vt a vi illa V celeritate c mota producatur, illius celeritas hinc determinatur, scilicet si vim $L\omega$ celeritate $\mathfrak{v}$ aquam propellere sumamus, oportet sit $L\omega\mathfrak{v} = Vc$, hincque $\mathfrak{v} = \frac{Vc}{L\omega}$. Vt autem aqua hoc motu vniformiter propellatur, vidimus esse debere $L = a + k$, vbi quidem pressionem atmosphaere k omittere possumus, qui eadem quoque vim in A comitatur, ita vt sufficiat statui $L = a$, ex quo perspicuum est aquam per tubum propulsum iri celeritate $\mathfrak{v} = \frac{Vc}{a\omega}$.

Scholion 2.

57. Cum hic non vis principalis sollicitans sola V, sed in celeritatem c qua agit ducta incomputum ingrediatur, hoc productum Vc, quod in omnium machinarum effectu determinando, maxime debet spectari, peculiarem denominationem meretur, et propterea *actio* a me est vocatum, ita vt *actio* sit productum cuiusque vis per celeritatem qua agit multiplicata, vbi imprimis est obseruandum, dum in machinis vires vel intenduntur, vel minuuntur, celeritatem semper in ratione inuersa mutari, vt *actio* eadem maneat. Sic si per machinam vis principalis V in alium locum translata abeat in V', celeritas qua haec operatur erit $= \frac{Vc}{V'}$, ac si tum celeritas actionis sit $= c'$, vis erit $V' = \frac{Vc}{c'}$. Machinarum scilicet vsus praecipuus in hoc con-

consistit vt seruata eadem *actione* vis sollicitantis, vel vis vel celeritas ad lubitum immutetur. Ita in casu problematis, quo opus erat vi $= a\omega$ ad aquam per tubum AQ propellendam, si vis principalis machinam mouens sit $= V$ cum celeritate $= c$ coniuncta, machinam ita instructam esse oportet, vt in translatione vis ad locum A vbi aqua in tubum intruditur, vis fiat $= a\omega$ et quia tum eius celeritas necessario fit $= \frac{Vc}{a\omega}$, hinc celeritas aquae per tubum propulsae sponte determinatur. Si forte ob machinae structuram vis vrgens in A, quam posuimus $= L\omega$ maior extaret quam $a\omega$, celeritas actionis in eadem ratione imminueretur, verum ob $L > a$ motus aquae accelerateretur: tum ergo vis principalis maiorem obtineret celeritatem, hineque eius quantitas ipsa V diminutionem pateretur ex quo prout eius *actio* increscat vel decrescat, deinceps cum motus ad vniformitatem fuerit perductus celeritas aquae per tubum propulsae definiri debet.

Scholion 3.

58. Omnium autem virium, quae ad machinas agitandas adhiberi solent, ratio ita est comparata, vt dum obiectum quiescens vrgent, celeritateque propterea nulla agunt, maximam vim exerant, quae sit $= F$, tum vero aucta celeritate continuo minorem exerant vim, tandemque plane nullam, cum certa celeritate quae sit $= e$ agere debeant. Quia ergo illo casu celeritas, hoc vero vis euanescit, vtroque *actio* est nulla. Si iam

iam celeritate quacunque minore quam e, quae sit $= u$ eadem vis agat, eius quantitas aestimari potest $= F(1 - \frac{u}{e})^2$ cuius ergo *actio* est $= Fu(1 - \frac{u}{e})^2$, quae vtique tum casu $u = 0$ quam $u = e$ euanescit, maxima ergo euadit, si $u = \frac{1}{3}e$, ac tum erit $= \frac{4}{27} Fe$. Quare semper machinas ita instrui conueniet vt virium, quae adhibentur *actio* reddatur maxima, quae regula nisi obseruetur, machina multo minorem effectum praestabit, quam ab iisdem viribus agitata, si debite instrueretur, obtineri posset. Tali ergo vi adhibita problema praecedens ad solutionem determinatam reuocemus.

Problema 52.

59. Si in casu praecedentis problematis aqua in tubum AO intrudatur a potentia, quae in quiete exerat vim $= F$, mota autem celeritate $= e$ omni vi destituatur, definire quomodo machina ad hanc vim sit accommodanda, vt effectus maximus reddatur seu maxima aquae copia dato tempore eiiciatur.

Solutio.

Ponamus hanc potentiam machinae applicatam celeritate $= u$ operari, vt sit vis quam exerat $= F(1 - \frac{u}{e})^2$, machinam autem ita esse instructam, vt ad aquam per tubum propulsandam ea vis in ratione $1 : n$ multiplicetur, ibi igitur agat celeritate $= \frac{u}{n}$, qua propterea aqua iam per tubum promoueatur, vndecunque ipsi hic motus sit impres-

sus,

sus, quandoquidem hic ad motus continuationem spectamus. Erit ergo nunc $v = \frac{u}{n}$, et posita tubi amplitudine $= \omega$, vis aquam in tubo propellens $nF(1 - \frac{u}{e})^2 = L\omega$, ita vt sit $L = \frac{nF}{\omega}(1 - \frac{u}{e})^2$. Quare cum inuenerimus $\frac{dv}{dt} = \frac{2g(L-a)}{l}$, vbi pressionem atmosphaerae k in orificio Oo omittimus, quia pari pressione ipsa vis propellens adiuuatur. Iam siue sit $L > a$ siue $L < a$, vtroque casu motus mox ita ad vniformitatem perducetur vt fiat $L = a$ ideoque $1 - \frac{u}{e} = \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}$: sicque a potentia ita applicata, vti assumimus, ob $u = e(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$ aqua per tubum propelletur celeritate $v = \frac{e}{n}(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$, ita vt singulis minutis secundis aquae voluman $= v\omega$ per orificum eiiciatur. Hic primo patet, si fuerit $\frac{a\omega}{nF} > 1$, seu $nF < a\omega$ nullum plane motum produci posse. Maximus autem effectus obtinebitur si $u = \frac{1}{3}e$, hincque $\frac{4}{9} = \frac{a\omega}{nF}$, vnde machina ita instrui debet, vt fiat $n = \frac{9a\omega}{4F}$, tum vero $v = \frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a\omega}$, et quantitas aquae vno minuto secundo eiecti $= \frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$, vbi vis F ad pondus reducta per volumen massae aqueae aequilibrantis exprimi debet ita vt F denotet certum volumen.

Coroll. 1.

60. Si ergo tam altitudo a ad quam aqua debet eleuari quam celeritas e seu spatium ea percurrendum vno minuto secundo in pedibus, volumen F vero in pedibus cubicis exprimatur; tum formula $\frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$ dabit volumen aquae

itidem

itidem in pedibus cubicis expressum, quod singulis minutis secundis ad altitudinem a pedum eleuari poterit.

Coroll. 2.

61. A potentia ergo, quae in quiete exerit vim $= F$, celeritate autem motu $= e$ omnem vim amittit, maior aquae copia ad altitudinem a eleuari nequit, quam $\frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$. Neque vero hic effectus obtinebitur nisi machina ita sit instructa vt vis mouens ei applicata in translatione ad aquam propellendam augeatur in ratione $1 : n = 1 : \frac{9a\omega}{4F}$.

Scholion 1.

62. Quo haec clarius perspiciantur, ponamus vi hominis esse vtendum, quae in quiete aestimetur 70 librarum seu vnius pedis cubici aquae vt sit $F = 1$; maximam autem celeritatem, qua nullam amplius vim exerere valeat esse $7\frac{1}{2}$ pedum seu $e = 7\frac{1}{2}$. Hic ergo homo, si eius opera modo maxime lucroso impendatur, singulis minutis secundis ad altitudinem a pedum eleuare poterit volumen aquae $\frac{10}{9a}$ ped. cub. hocque fit si machina ita sit instructa vt operari possit celeritate $= 2\frac{1}{2}$ ped. ac tum eius actio est $= \frac{4}{27} \cdot Fe = \frac{10}{9}$, ita vt semper actio hoc modo expressa, si per altitudinem a diuidatur, praebeat quantitatem aquae singulis minutis secundis eleuandae. In machina autem constructione insuper ad amplitudinem tubi ω est spectandum,

dum, quoniam vis mouens per translationem augeri debet in ratione $1 : \frac{9 a \omega}{4 F}$; quae ratio contra non a celeritate $= e$ pendet. Deinde cum vnius hominis actio maxima sit $= \frac{10}{9}$, si λ homines operi admoueantur, eorum actio erit $= \frac{10}{9}\lambda$, cui semper effectus est proportionalis. Si equis sit vtendum, et in quiete vnius equi vis triplo maior censeatur quam hominis, celeritasque maxima etiam triplo maior, eius actio nouies fiet maior, seu vnus equus tantum praestare valebit quantum nouem homines.

Scholion 2.

63. Si cursu fluminis ad machinam agitandam vti velimus cuius impulsu palmulae rotae ad motum incitentur; determinatio effectus in aqua eleuanda hoc modo institui debet. Sit ff superficies quae aquae impulsum normaliter excipiat, et e denotet celeritatem fluminis, vnde altitudo, ex qua graue eandem celeritatem lapsu acquirit erit $= \frac{ee}{4g}$: vis ergo fluminis in hanc superficiem quietam erit $= \frac{eeff}{4g}$, ponderi scilicet tanti voluminis aquae quam loco litterae F scribi oportet; tum vero quia impulsus euanescit statim ac palmula ipsa fluminis celeritate $= e$ mouetur, haec est illa celeritas, quam ante littera e notauimus. Actio ergo maxima euadet, cum superficies ff celeritate $= \frac{1}{3} e$ mouetur, eritque haec actio $= \frac{e^3 ff}{27 g}$, ideoque cubo celeritatis fluminis proportionalis. Hac itaque actione ad altitudinem

$= a$ singulis minutis secundis eleuabitur aquae quantitas $= \frac{e^3 ff}{27 ga}$, cum ergo ab vno homine eleuetur quantitas $= \frac{12}{9a}$ ped. cub. effectus aquae aequiualebit λ hominibus existente $\lambda = \frac{e^3 ff}{30\, g}$, dum e et f in pedibus exprimuntur, vbi notandum est esse $g = 15\frac{1}{2}$ ped. ideoque $\lambda = \frac{e^3 ff}{465}$. Quodsi $ff = 1$ ped. quadr. et fluuius conficiat spatium $7\frac{3}{4}$ ped. vno minuto secundo, vnus homo eundem effectum producet. Hic quidem assumsimus, tubum AO eiusdem vbique esse amplitudinis, verum res pari modo se habet, etiamsi eius amplitudo fuerit variabilis, quem casum sequenti capite expendamus semper autem tenendum est tubum vt angustissimum considerari.

CAPVT III.

DE MOTV AQVAE IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 53.

64. Si data aquae quantitas in tubo, cuius amplitudo utcunque est variabilis, moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque prematur, eius motum et pressionem in singulis punctis determinare.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 50. Quamcunque directrix tubi habuerit figuram, ea vt

linea