$= a$ singulis minutis secundis eleuabitur aquae quantitas $= \frac{e^3 ff}{27 ga}$, cum ergo ab vno homine eleuetur quantitas $= \frac{10}{9a}$ ped. cub. effectus aquae aequiualebit λ hominibus existente $\lambda = \frac{e^3 ff}{30\ g}$, dum e et f in pedibus exprimuntur, vbi notandum est esse $g = 15\frac{1}{2}$ ped. ideoque $\lambda = \frac{e^3 ff}{465}$. Quodsi $ff = 1$ ped. quadr. et fluvius conficiat spatium $7\frac{3}{4}$ ped. vno minuto secundo, vnus homo eundem effectum producet. Hic quidem assumsimus, tubum AO eiusdem vbique esse amplitudinis, verum res pari modo se habet, etiamsi eius amplitudo fuerit variabilis, quem casum sequenti capite expendamus semper autem tenendum est tubum vt angustissimum considerari.

CAPVT III.

DE

MOTV AQVAE IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 53.

64. Si data aquae quantitas in tubo, cuius amplitudo utcunque est variabilis, moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque prematur, eius motum et pressionem in singulis punctis determinare.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 50. Quamcunque directrix tubi habuerit figuram, ea vt linea

linea recta AO consideretur, cui autem adiungatur linea curva $\alpha\omega$ cuius applicatae $z\pi$ singulorum punctorum z altitudines super plano horizontali fixo denotent. Iam elapso tempore t consideretur aquae particula quaecunque, quae versetur circa tubi punctum z, existente directricis longitudine $Az = s$ a puncto fixo A computata, ibique sit tubi amplitudo $zv = \omega$, et altitudo $z\pi = z$ quae per s datae assumuntur. Densitas aquae vnitate exprimatur vt sit $q = 1$, in z vero vocetur pressio $= p$ pariter ad aquam relata, et celeritas huius particulae in tubo versus O sit $= \mathfrak{v}$ quae sunt functiones duarum variabilium s et t. Quibus positis probl. 46. primo nobis suppeditat hanc aequationem $(\frac{d\mathfrak{v}\omega}{ds}) = 0$ vnde $\mathfrak{v}\omega$ functioni solius temporis aequetur necesse est, cum ergo hoc tempore vbique celeritas sit reciproce vt amplitudo, concipiamus alicubi amplitudinem datam $= ff$, in qua sit celeritas $= v$, functio ipsius tempore t; eritque $\mathfrak{v}\omega = ffv$ et $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{\omega}$; ita vt si definita fuerit celeritas v amplitudini datae ff conueniens pro hoc tempore, ex ea celeritas in quacunque alia amplitudine ω innotescat ad idem tempus; hacque formula $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{\omega}$ iam prima determinatio contineatur, vbi probe notetur celeritatem v esse functionem solius temporis t amplitudinem vero ω spatii s tantum. Nunc ad alteram aequationem progrediamur, qua pressio p definitur, et quia aquam a sola grauitate animari ponimus erit $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -1$ tum vero quia in hac aequatione tempus t constans accipitur,

 erit

erit $ds = \frac{-ffv\,d\omega}{\omega\,\omega}$ et $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{ff\,dv}{\omega\,dt}$, sicque aequatio posterior abit in hanc formam:

$$2gdp = -2gdz + \frac{f^4 vv\,d\omega}{\omega^3} - \frac{ff\,ds}{\omega} \cdot \frac{dv}{dt},$$

quae quia v et $\frac{dv}{dt}$ vt constantes spectantur per integrationem dat:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\,\omega\omega} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

vbi cum ω sit functio solius s integrale $\int\frac{ds}{\omega}$ vt quantitas cognita spectari potest.

Nunc ad ambos terminos nostrae massae aqueae respiciamus qui sint in M et N existente $AM = m$, $AN = n$, amplitudine in $M = \mu$, in $N = \nu$, altitudine $M\mu = \mathfrak{m}$, $N\nu = \mathfrak{n}$, integralis $\int\frac{ds}{\omega}$ valore in $M = \mathfrak{M}$, in $N = \mathfrak{N}$; tum vero pressione in $M = M$ et in $N = N$. Cum igitur celeritas in M sit $= \frac{ffv}{\mu}$, in $N = \frac{ffv}{\nu}$, tempusculo dt ambo termini M et N promouebuntur in M', N' vt sit

$$M'M = \frac{ffv\,dt}{\mu} \text{ et } NN' = \frac{ffv\,dt}{\nu},$$

vnde quia m et n sunt functiones solius temporis t erit

$$dm = \frac{ffv\,dt}{\mu},\; dn = \frac{ffv\,dt}{\nu} \text{ hincque } \mu dm = \nu dn.$$

Ex cognitis autem pressionibus in M et N has duas obtinemus aequationes:

$$2gM = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\,\mu\mu} - \frac{ff\,dv}{dt} \cdot \mathfrak{M},$$

$$2gN = \Delta : t - 2g\mathfrak{n} - \frac{f^4 vv}{2\,\nu\nu} - \frac{ff\,dv}{dt} \cdot \mathfrak{N},$$

vnde colligimus:

$$2g(M - N) = 2g(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}) + \frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\nu\nu} - \frac{1}{\mu\mu}\right) + \frac{ff\,dv}{dt}(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}),$$

quae

quae aequatio tantum functiones ipsius temporis t inuoluit, indeque propterea celeritas v definiri poterit. Tum vero pro pressione inuenitur:

$$2g(\mathrm{M}-p) = 2g(z-\mathfrak{m}) + \frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\omega\omega}-\frac{1}{\mu\mu}\right) + \frac{ffdv}{dt}\left(\int\frac{ds}{\omega}-\mathfrak{M}\right)$$

quae elisa formula $\frac{ffdv}{dt}$ praebet hanc aequationem:

$$\left(2g(p+z)+\frac{f^4vv}{2\omega\omega}\right)(\mathfrak{N}-\mathfrak{M}) = \begin{array}{l} +\left(2g(\mathrm{M}+\mathfrak{m})+\frac{f^4vv}{2\mu\mu}\right)\left(\mathfrak{N}-\int\frac{ds}{\omega}\right) \\ +\left(2g(\mathrm{N}+\mathfrak{n})+\frac{f^4vv}{2\nu\nu}\right)\left(\int\frac{dt}{\omega}-\mathfrak{M}\right). \end{array}$$

Coroll. 1.

65. Cum detur massa fluidi in tubo contenta, ex dato spatio $\mathrm{AM}=m$, quo simul quantitates μ, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}=\int\frac{dm}{\mu}$ determinantur definitur spatium $\mathrm{AN}=n$, cum $\int\nu dn-\int\mu dm$ praebeat illam massam sicque etiam n cum ν, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{N}=\int\frac{dn}{\nu}$ vt functiones solius quantitatis m spectari poterunt.

Coroll. 2.

66. Quoniam totum negotium a resolutione aequationis differentialis inuentae pendet, et est $dt=\frac{\mu dm}{ffv}$, si ea aequatio per $\mu dm = ffvdt$ multiplicetur, habebitur:

$$2g(\mathrm{M}-\mathrm{N}+\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\mu dm = \tfrac{1}{2}f^4vv\mu dm\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+f^4vdv(\mathfrak{N}-\mathfrak{M}),$$

quae posito $f^4vv=\mathrm{V}$ abit in hanc:

$$4g(\mathrm{M}-\mathrm{N}+\mathfrak{m}-n)\cdot\frac{\mu dn}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}} = d\mathrm{V}+\frac{\mathrm{V}\mu dm}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right),$$

ex quo quantitatem V elici oportet, qua inuenta primo reperietur celeritas $v=\frac{\sqrt{\mathrm{V}}}{ff}$, indeque porro tempus $t=\int\frac{\mu dm}{\sqrt{\mathrm{V}}}$.

Co-

Coroll. 3.

67. Si enim pressiones M et N vel sint constantes, vel a spatiis m et n pendeant, quia n per m determinatur aequatio illa duas tantum variabiles m et V continere est censenda, et integrabilis redditur si multiplicetur per e^{Q} existente $Q = \int \frac{\mu dm}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}} \left(\frac{1}{\nu\nu} - \frac{1}{\mu\mu}\right)$. Quia vero est $\mu dm = \nu dn$ et $\frac{dn}{\nu} = d\mathfrak{N}$ item $\frac{dm}{\mu} = d\mathfrak{M}$, fit $Q = \int \frac{d\mathfrak{N} - d\mathfrak{M}}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}}$ hincque multiplicator $e^{Q} = \mathfrak{N} - \mathfrak{M}$.

Coroll. 4.

68. Quamobrem illius aequationis integrale est:

$$(\mathfrak{N} - \mathfrak{M})V = f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g\int \mu dm\,(\mathrm{M} - \mathrm{N} + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}),$$

vbi notandum est cum sit celeritas aquae in $\mathrm{M} = \frac{ffv}{\mu}$ et in $\mathrm{N} = \frac{ffv}{\nu}$, expressionem $f^4 vv(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = \int \frac{f^4 vv}{\nu\nu} . \nu dn - \int \frac{f^4 vv}{\mu\mu} . \mu dm$ designare vim viuam massae aquae $\mathrm{M}m\mathrm{N}n$ quandoquidam νdn est eius elementum $\mathrm{N}n\mathrm{N}'n'$, idque in celeritatis quadratum ducitur.

Scholion.

69. Omni attentione dignum est; quod aequatio differentialis inuenta tam commode integrari potuerit, eiusque integrale ad vim viuam aquae in tubo contentae sit perductum, vnde summus vsus principii conseruationis virium viuarum, quo iam olim celeb. *Bernoulli* in Hydrodynamica feli-

felicissimo successu est vsus, clarissime perspicitur. Hinc scilicet intelligimus, si vires vtrinque prementes M et N fuerint aequales, et tubi directrix horizontalis, vt nullae adsint vires motum fluidi vel accelerantes vel retardantes, tum fluidi massam eandem perpetuo vim viuam esse conseruaturam, posito enim $M = N$ et $\mathfrak{m} = 0$ et $\mathfrak{n} = 0$ seu in genere $z = 0$, prodit vis viua $f^4 vv (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) =$ Const. sin autem altitudines $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ non euanescant, aequatio inventa ob $\mu dm = \nu dn$ ita repraesentari potest:

$$f^4 vv (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g \int (M + \mathfrak{m}) \mu dm - 4g \int (N + \mathfrak{n}) \nu dn,$$

vnde manifestum est, quantum incrementum vis viua capiat a vi accelerante; quandoquidem pressio M motum accelerat, pressio vero N retardat, ac praeterea ex altitudinibus $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ singulorum elementorum vel ascensus vel descensus definitur. Ceterum hic imprimis notari meretur, quod aequatio differentialis inuenta, sola multiplicatione per $2 \mu\, d m = 2 \nu\, d n = 2 f f v\, d t$, statim integrabilis reddatur, dum prodit:

$$4g (M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}) \mu dm = f^4 vv \left(\frac{dn}{\nu} - \frac{dm}{\mu}\right) + 2 f^4 v dv (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}),$$

cuius integrabilitas ob $\frac{dn}{\nu} = d\mathfrak{N}$ et $\frac{dm}{\mu} = d\mathfrak{M}$ statim in oculos incurrit; ita vt iam totum negotium ad integrationem primae partis reducatur. Ad maiorem ergo dilucidationem sufficit, vt nonnulla exempla proferamus.

Exem-

Exemplum 1.

Tab. IV. Fig. 51. 70. *Si tubus sit conicus eiusque directrix AO verticalis, in quo massa aquea ACc libere descendat, eius motum definire.*

Sit $AC = c$ et amplitudo tubi in C nempe $Cc = \alpha cc$, vt fiat tota massa aquae $ACc = \frac{1}{3}\alpha c$, quae post tempus t occupet tubi spatium $MmNn$, vnde ob $AM = m$ et $AN = n$ erit $n^3 = c^3 + m^3$. Tum vero posita altitudine fixa $AO = a$, erunt primo amplitudines $Mm = \mu = \alpha mm$; $Nn = \nu = \alpha nn$ et $zv = \omega = \alpha ss$, posito $Az = s$, deinde altitudines $OM = \mathfrak{m} = a - m$; $ON = \mathfrak{n} = a - n$ et $Oz = \mathfrak{z} = a - s$. Porro ob $\int \frac{ds}{\omega} = -\frac{1}{\alpha s}$, fit $\mathfrak{M} = -\frac{1}{\alpha m}$ et $\mathfrak{N} = -\frac{1}{\alpha n}$. Quare si pressiones in M et N aequentur soli pressioni atmosphaerae k, quod euenit si tubus in apice A apertus concipiatur, erit $M = N = k$. Quodsi iam amplitudini ff conueniat celeritas $= v$ deorsum tendens, aequatio nostra integralis pro hoc casu colligitur:

$$f^4 vv\left(\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right) = 4g\int \alpha mmdm(n-m) = 4\alpha g\left(\tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{4}m^4\right) + \text{Const.},$$

ob $mmdm = nndn$. Cum autem descensus ex quiete incipiat facto $m = 0$ et $n = c$ celeritas euanescere debeat, vnde habebitur:

$$f^4 vv\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = \alpha\alpha g\left(n^4 - m^4 - c^4\right),$$

hincque $ffv = \alpha\sqrt{\frac{gmn(n^4 - m^4 - c^4)}{n-m}}$,

sicque colligitur tempus:

$$t = \int \frac{\mu dm}{ffv} = \frac{mdm\sqrt{m(n-m)}}{\sqrt{gn(n^4 - m^4 - c^4)}}.$$

cuius

cuius formulae ob $n^3 = c^3 + m^3$ integrale est capiendum, ut ad datum tempus t spatium $AM = m$ definiri possit. Denique pro pressione in z, quae est p, inuenienda, habetur haec aequatio superiorem per z multiplicando

$$\left(4g(p+a-s)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha s^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}\right)=\begin{array}{l}+\left(4g(k+a-m)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha m^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha s}-\frac{1}{\alpha n}\right)\\+\left(4g(k+a-n)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha n^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha s}\right)\end{array},$$

quae ob $\frac{f^4vv}{\alpha\alpha}=\frac{gmn(n^4-m^4-c^4)}{n-m}$ abit in hanc.

$$\frac{4(p+a-s)(n-m)}{mn}=\frac{4(k+a-m)(n-s)}{ns}+\frac{4(k+a-n)(s-m)}{ms}$$
$$+\frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(m^2+mn+nn)ss)}{m^3n^3s^4},$$

vnde deducimus:

$$p=k+\frac{mn}{s}-m-n+s+\frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(mm+mn+nn)ss)}{4mmnn(n-m)s^4}.$$

Exemplum 2.

71. *In casu praecedentis exempli si tubus sit in A clausus vt superior superficies* Mm *nullam pressionem sustineat, motum aquae determinare.*

Cum omnia maneant vt in praecedente exemplo nisi quod hic sit $M=0$, et $N=k$, aequatio prior abit in hanc formam:

$$f^4vv\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}\right)=4g\int\alpha mm\,dm\,(n-m-k) \text{ seu}$$
$$f^4vv\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=\alpha\alpha g\left(n^4-m^4-c^4-\tfrac{4}{3}km^3\right).$$

Hic autem primum obseruo initio vbi $m=0$ et $n=c$ motum incipere non potuisse nisi fuerit $c>k$, si enim sit $c<k$ vel etiam $c=k$ aqua perpetuo in summitate tubi haerebit, nullusque motus sequetur. Sin autem $c>k$ motus

tus primo quidem accelerabitur, donec fiat

$$n = \sqrt[3]{(c^3 + m^3)} = m + k \text{ hoc est}$$

$$c^3 = 3kmm + 3kkm + k^3 \text{ seu } m = \sqrt{\left(\frac{c^3}{3k} - \frac{1}{12}kk\right)} - \frac{1}{2}k.$$

Inde vero celeritas decrescet, atque adeo euanescet, quando fiet

$$n^4 = (c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}} = c^4 + m^4 + \frac{4}{3}km^3,$$

quae euoluta dat

$$\begin{aligned} 4km^8 + \tfrac{16}{3}kkm^7 + \tfrac{64}{27}k^3m^6 + 3c^4m^5 + 8kc^4m^4 + \tfrac{16}{3}k^2c^4m^3 + 3c^8m + 4kc^8 = 0. \\ -4c^3m^6 \qquad\qquad\qquad\qquad -6c^6m^3 \qquad\qquad -4c^9 \end{aligned}$$

Quo hinc aliquid facilius concludere queamus, ponamus c valde parum excedere k statuamusque $c = (1 + \delta)k$ denotante δ fractionem minimam et quia m quoque erit spatium valde paruum fiet $n = c + \frac{m3}{3cc}$ hincque

$$f^4 vv \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{c} + \frac{m3}{3c4}\right) = \alpha\alpha g \left(\frac{4\delta c m3}{3(1+\delta)} - m^4 + \frac{2m^6}{3cc}\right),$$

ac celeritas maxima respondebit loco $m = \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{m3}{3cc} = \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{\delta 3 c}{3(1+\delta)^3}$, rursusque euanescet vbi $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)} + \frac{2m3}{3cc}$ seu satis exacte $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)}$. Deinde vero colligitur

$$ffv = \alpha mm\sqrt{g}\left(\frac{4\delta c}{3(1+\delta)} - m\right) = \alpha mm\sqrt{g}\left(\tfrac{4}{3}\delta k - m\right),$$

hincque tempus:

$$t = \int \frac{dm}{\sqrt{g(\frac{4}{3}\delta k - m)}} = 2\sqrt{\frac{4\delta k}{3g}} - 2\sqrt{\frac{4\delta k - 3m}{3g}}$$

et tempus totius descensus $= 4\sqrt{\frac{\delta k}{3g}}$.

Exemplum 3.

Tab. IV. Fig. 52. 72. *Si tubus habeat duo brachia verticaliter erecta AB et CO iuncta ramo horizontali BC et quaelibet pars sit aequa-*

qualiter ampla sed a reliquis diuersa definire motum oscillatorium aquae in hoc tubo.

Tubi AB, in quo alter venae terminus Mm reperitur, amplitudo sit vbique $=\mu$, tubi vero OC $=\nu$, horizontalis vero BC $=\lambda$. Cum aqua vtrinque est in aequilibrio, pertingat ad horizontalem EF, ponaturque BE $=$ CF $=a$, et BC $=b$ vt totum aquae volumen sit $=a\mu+b\lambda+a\nu$. Iam in statu motus ad tempus $=t$ vocetur EM $=\nu x$ eritque FN $=\mu x$, et iam quantitates μ et ν sunt constantes. Statuatur AE $=e$, erit $m=e-\nu x$, $\mathfrak{m}=a+\nu x$, $\mathfrak{M}=\frac{e-\nu x}{\mu}$, porro $n=e+2a+b-\mu x$, $\mathfrak{n}=a-\mu x$ et $\mathfrak{N}=\frac{e+a}{\mu}+\frac{b}{\lambda}+\frac{a-\mu x}{\nu}$, vnde $\mathfrak{N}-\mathfrak{M}=\frac{b}{\lambda}+\frac{a+\nu x}{\mu}+\frac{a-\mu x}{\nu}$. Deinde ob M $=$ N $=k$ pressioni atmosphaerae, et $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=(\mu+\nu)\,x$ erit:

$$f^4 vv\left(\frac{b}{\lambda}+\frac{a+\nu x}{\mu}+\frac{a-\mu x}{\nu}\right)=-4g\int\mu\nu dx\,(\mu+\nu)\,x$$
$$=-2g\mu\nu\,(\mu+\nu)\,xx+C.$$

Ponamus facto $x=0$ celeritatem amplitudini ff conuenientem fieri $v=2\sqrt{gc}$, vt hinc constans ita determinetur:

$$4gcf^4\left(\frac{b}{\lambda}+\frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right)=C,\ \text{atque habebitur:}$$

$$ffv\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda}+\frac{a+\nu x}{\mu}+\frac{a-\mu x}{\nu}\right)}=\sqrt{\left(2g\mu\nu(\mu+\nu)\left(\frac{2cf4}{\mu\nu(\mu+\nu)}\left(\frac{b}{\lambda}+\frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right)-xx\right)\right)},$$

pro excursionibus maximis ergo erit:

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{2cf4}{\mu\nu(\mu+\nu)}\left(\frac{b}{\lambda}+\frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right)\right)}.$$

Pro tempore autem hanc aequationem integrari oportet:

$$t=-\mu\nu\int\frac{dx}{ffv},$$

 quae

quae formula autem nimis est perplexa, quam vt eius euolutio suscipi queat, nisi casu quo c ac proinde etiam x est quantitas quam minima. In genere enim tempus tali forma definitur $t = \int \frac{dx\sqrt{(A+Bx)}}{\sqrt{(bb-xx)}}$, cuius integratio reiecto termino Bx est manifesta. Admisso autem termino Bx totae quidem oscillationes erunt isochronae sed tempora, quibus terminus Mm supra libellam EF vel ascendit vel descendit non erunt aequalia temporibus, quibus infra libellam versatur.

Problema 54.

Tab. IV. Fig. 50. 73. Si aqua ex tubo vtcunque inaequaliter amplo et cuius directrix est linea curua quaecunque per orificium Oo effluat, vt eius quantitas in tubo continuo minuatur eius motum determinare.

Solutio.

Maneant omnia vti in solutione problematis, praecedentis nisi quod amplitudo illa constans ff iam ipsi orificio Oo tribuatur per quod nunc aqua elapso tempore $= t$ effluat celeritate $= v$ alter vero aquae terminus haereat in Mm, vbi amplitudo sit $= \mu$, altitudo supra horizontem $M\mu = \mathfrak{m}$, et pressio $= \mathfrak{M}$ quae quidem si aëri pateat, erit aequalis pressioni atmosphaerae k perinde ac in ipso orificio Oo. A loco autem tubi dato A secundum eius directrirectricem sit distantia $AM = m$ et tota longitudo $AO = a$ tum vero celeritas qua aquae suprema superficies Mm per tubum promouetur erit $= \frac{ffvdt}{\mu}$. Statuamus nunc pro loco tubi quocunque z, longitudinem $Az = s$, amplitudinem $zv = \omega$, altitudinem $z\pi = z$ et pressionem $= p$, ac principia motus hanc nobis suppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{dt}{\omega},$$

quam primo ad extremitatem Mm tum vero ad orificium Oo transferri oportet, quandoquidem in his duobus locis pressio est data. Pro illa autem Mm fit $p = M$; $z = \mathfrak{m}$, $\omega = \mu$, integralis vero $\int\frac{ds}{\omega}$ valor hic fiat $= \mathfrak{M}$, vnde fit:

$$2gM = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} - \frac{ff\,dv}{dt}\mathfrak{M}.$$

Pro orificio vero Oo siquidem aqua in aërem effluat, habetur pressio $p = k$, amplitudo $\omega = ff$, altitudo vero $O\omega$ sit nulla, quoniam planum horizontale per ipsum orificium Oo ducere licet valor autem formulae integralis $\int\frac{ds}{\omega}$ ad hunc locum translatus fiat $= \mathfrak{A}$, quippe qui erit constans ex quo nostra aequatio fiet:

$$2gk = \Delta : t - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ff\,dv}{dt}\cdot\mathfrak{A},$$

quae ab illa subtracta relinquit:

$$2g(M-k) = -2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} + \tfrac{1}{2}vv + \frac{ff\,dv}{dt}(\mathfrak{A} - \mathfrak{M}),$$

quam aequationem, in qua solum tempus t variabile inest, integrari oportet, hanc formulam $dm = \frac{ffv\,dt}{\mu}$ in subsidium

vo-

vocando: vnde ob $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ habetur
$2g(M-k)\mu dm = -2g\mathfrak{m}\mu dm + \frac{1}{2}vv\mu dm(1-\frac{f^4}{\mu\mu}) + f^4 vdv(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})$,
vbi est $\mathfrak{M} = \int \frac{dm}{\mu}$, ex quo valore nascitur quantitas $\mathfrak{A}$ si fiat $m = a$. Sunt autem μ et $\mathfrak{m}$ functiones datae ipsius m, vnde haec aequatio duas tantum variabiles m et v involuit, ex qua valorem ipsius vv facile elicere licet, quo invento ope formulae $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ ad quoduis tempus t cum longitudo $AM = m$ tum celeritas v, qua aqua per orificium Oo effluit assignari poterit. Deinde vero etiam pro pressione p in loco quocunque z, habebitur:

$$2g(p-k) = -2gz + \frac{1}{2}vv(1-\frac{f^4}{\omega\omega}) + \frac{ffdv}{dt}(\mathfrak{A} - \int \frac{ds}{\omega}),$$

quare si terminus $\frac{ffdv}{dt}$ elidatur colligitur:

$$2g(M-k)(\mathfrak{A} - \int \frac{ds}{\omega}) + 2g(k-p)(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})$$
$$= 2gz(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}) - 2g\mathfrak{m}(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}) + \frac{1}{2}vv(\mathfrak{M}-\int\frac{ds}{\omega}) - \frac{f^4vv}{2\mu\mu}(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega})$$
$$+ \frac{f^4vv}{2\omega\omega}(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}).$$

Coroll. 1.

74. Sumamus tubi terminum fixum A in ipso orificio O vt sit $a = 0$, et vocemus $OM = m$, atque $Oz = s$, ita vt iam in formulis inuentis hae duae quantitates m et s negatiue capi debeant; tum vero erit $\mathfrak{A} = 0$, et loco $\mathfrak{M}$ et $\int\frac{ds}{\omega}$ sribi oportebit $-\int\frac{dm}{\mu}$ et $-\int\frac{ds}{\omega}$, vnde pro pressione habebimus:

$$2g(M-k)\int\frac{ds}{\omega} + 2g(k-p)\int\frac{dm}{\mu}$$
$$= 2gz\int\frac{dm}{\mu} - \frac{1}{2}vv(1-\frac{f^4}{\omega\omega})\int\frac{dm}{\mu} + \frac{1}{2}vv(1-\frac{f^4}{\mu\mu})\int\frac{ds}{\omega} - 2g\mathfrak{m}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Co-

Coroll. 2.

75. Manentibus autem $OM = m$ et $Oz = s$, primum pro tempore habebitur $dt = -\frac{\mu dm}{ffv}$, quoniam labente tempore t interuallum $OM = m$ minuitur celeritas autem effluxus v ex hac aequatione debet definiri:

$$2g(M - k + \mathfrak{m})\mu dm = \tfrac{1}{2}vv\mu dm\left(1 - \frac{f^4}{\mu\mu}\right) - f^4 vdv\int\frac{dm}{\mu},$$

quae commodius ita repraesentatur:

$$2f^4 vdv\int\frac{dm}{\mu} + \frac{f^4 vvdm}{\mu} - vv\mu dm + 4g(M - k + \mathfrak{m})\mu dm = 0.$$

Coroll. 3.

76. Ponatur hic $f^4 vv\int\frac{dm}{\mu} = u$, vt habeatur:

$$du - \frac{\mu u dm}{f^4\int\frac{dm}{\mu}} + 4g(M - k + \mathfrak{m})\mu dm = 0,$$

quae vt integrabilis reddatur multiplicari debet per e^O existente $O = -\frac{1}{f^4}\int\frac{\mu dm}{\int\frac{dm}{\mu}}$ eritque tum

$$e^O + 4g\int e^O(M - k + \mathfrak{m})\mu dm = \text{Const.}$$

Scholion.

77. In hac solutione omnia continentur, quae vulgo le effluxu aquae ex vasis cuiuscunque figurae tradi solent, quae autem eatenus tantum admitti possunt, quatenus ea vasa vel sunt angustissima, vel motus per ea ita fiat, vt singula strata ad directricem normaliter sumta communi motu ferantur, nisi enim haec conditio locum habeat, celeritas

leritas effluxus hic definita a veritate recedet, etsi saepenumero discrimen experimentis instituendis vix percipitur. Quodsi in formulis inuentis statuatur $M = k$, habebitur casus, quo suprema aquae superficies est aperta, et effluxus fit in aërem, sin autem aqua in spatium aëre vacuum efflueret, sumi deberet $k = 0$, at si tubi orificium Oo aquae stagnanti esset immersum, littera k pressionem huius aquae in orificium exprimere deberet. Totum autem negotium semper reducitur ad aequationem differentialem inuentam, ex cuius integratione pro quouis loco vbi superficies aquae suprema haeret celeritas effluxus cognoscetur, tum vero formulam $dt = -\frac{\mu\, dm}{ffv}$ (75) in subsidium vocando tempus innotescet, quo aqua in tubo ad datum locum Mm subsidit; ac denique cum elapso tempore $= t$ aqua per orificium Oo, cuius amplitudo est $= ff$ celeritate $= v$ effluat, omnis aqua quae tempore t effluxerit, erit $= ff \int v\, dt = -\int \mu\, dm$. Quod quo clarius appareat, aliquot casus euoluamus.

Exemplum 1.

Tab. IV. Fig. 53. 78. *Si tubi directrix* AO *sit recta verticalis, at tubus initio ad* Aa *fuerit aqua plenus, quae tum per orificium* $Oo = ff$ *effluere inceperit, ad datum quoduis tempus celeritatem effluxus et pressionem in quauis sectione* zv *determinare.*

Po-

Posito ergo interuallo $OM = m$ et amplitudine $Mm = \mu$, quem in locum aquam ex Aa elapso tempore $= t$ subsedisse assumimus erit etiam altitudo $OM = \mathfrak{m} = m$, et pressio $M = k$. Posita nunc celeritate effluxus per orificium $= v$, eam ex aequatione definiri oportet:

$$2f^4 v dv \int \frac{dm}{\mu} + \frac{f^4 vv\, dm}{\mu} - vv\mu dm + 4 g\mu m dm = 0,$$

quae posito $f^4 vv \int \frac{dm}{\mu} = u$ abit in hanc formam:

$$du - \frac{u\, \mu\, dm}{f^4 \int \frac{dm}{\mu}} + 4 g \mu m dm = 0.$$

Deinde pro pressione in sectione quacunque zv sit $Oz = s$ et amplitudo $zv = \omega$, erit quoque altitudo $z = s$, ideoque

$$2g(k - p)\int \frac{dm}{\mu} = 2gs \int \frac{dm}{\mu} - 2gm \int \frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2} vv \left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right) \int \frac{dm}{\mu}$$
$$+ \tfrac{1}{2} vv \left(1 - \frac{f^4}{\mu\mu}\right) \int \frac{ds}{\omega}.$$

Aequatio autem illa differentialis ita integrari debet, vt facta altitudine $OM = m = OA = a$ celeritas v euanescat, tum vero inuenta celeritate v calculus ad tempus accommodabitur ope huius formulae $t = -\int \frac{\mu\, dm}{ffv}$, quae posito $m = a$ euanescere debet. Quod si deinceps ponatur $m = 0$, tempus totius effluxus innotescet.

Praeterea vero durante effluxu, quoniam ab initio celeritas v continuo crescit, celeritas maxima vbi $dv = 0$, ita definitur vt sit $vv = \frac{4gm\mu\mu}{\mu\mu - f^4}$, ideoque $v = \frac{2\mu\sqrt{gm}}{\sqrt{(\mu\mu - f^4)}}$.

 Cum

Cum ergo sit $v > 2\sqrt{gm}$, celeritas maxima maior erit ea, quam graue delabens ex altitudine m acquirit.

Coroll. 1.

Tab. IV. Fig. 54. 79. Si vas vbique sit aeque amplum seu $\mu = \omega = cc$, cuius fundum OC foramine $Oo = ff$ est pertusum, habebimus:

$$du - \frac{c^4}{f^4}\cdot\frac{u\,dm}{m} + 4gccmdm = 0.$$

Sit $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$, erit $m^{-\lambda}u + \frac{4gcc}{2-\lambda}m^{2-\lambda} = C$ hincque

$$u = Cm^{\lambda} + \frac{4gcc}{\lambda-2}mm = \frac{f^4 mvv}{cc},$$

et constante rite definita:

$$f^4 vv = \frac{4gc^4 m}{\lambda-2}\left(1 - a^{2-\lambda}m^{\lambda-2}\right),$$

seu $v = \sqrt{\frac{4\lambda gm}{\lambda-2}\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)}$, vnde colligitur pressio $p = k + \frac{\lambda-1}{\lambda-2}(m-s)\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)$ pro sectione zv ad altitudinem $Oz = s$, denique pro tempore erit

$$t = -\int\frac{dm\sqrt{(\lambda-2)}}{2\sqrt{gm(1-a^{2-\lambda}m^{\lambda-2})}},$$

celeritas autem maxima fit $= \frac{2cc\sqrt{gm}}{\sqrt{(c^4-f^4)}} = \frac{2\sqrt{\lambda gm}}{\sqrt{(\lambda-1)}}$, quae convenit altitudini m hinc definiendae $\frac{\lambda-2}{\lambda-1} = 1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}$, ita vt sit $m = \frac{a}{\sqrt[\lambda-2]{(\lambda-1)}}$.

Coroll. 2.

80. Casus quo $\lambda = 2$ seu $c^4 = 2f^4$ singularem postulat euolutionem; quia aequatio

$du -$

$$du - \frac{2u\,dm}{m} + 4gccm\,dm = 0$$

integrata dat $u = 4gccmm\,l\frac{a}{m} = \frac{ccmvv}{2}$, hinc $v = \sqrt{8gm\,l\frac{a}{m}}$ et $t = -\int\frac{dm}{\sqrt{4gm\,l\frac{a}{m}}}$, pro pressione vero $p = k + (m-s)\,l\frac{a}{m}$.

Coroll. 3.

81. Sit tubus conus ad orificium truncatus, et $\mu = (f+\alpha m)^2$, atque $\omega = (f+\alpha s)^2$, hinc fit $\int\frac{dm}{\mu} = \frac{1}{\alpha f} - \frac{1}{\alpha(f+\alpha m)} = \frac{m}{f(f+\alpha m)}$, similique modo $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{s}{f(f+\alpha s)}$. Pro motu ergo habetur:

$$du - \frac{u\,dm}{m}\left(1+\frac{\alpha m}{f}\right)^3 + 4gm\,dm\,(f+\alpha m)^2 = 0,$$

vnde inuento u erit $f^4 vv = \frac{f(f+\alpha m)u}{m}$.

Coroll. 4.

82. Expandatur tubus superne in infinitum secundum hanc aequationem $\omega\omega = \frac{af^4}{a-s}$, ita vt initio suprema superficies Aa fuerit infinita; eaque etiamnunc nihil subsederit, vt sit elapso tempore t altitudo $m = a$ et $\mu\mu = \frac{af^4}{a-m} = \infty$. Quum ob causam aequatio differentialis statim praebet $vv = 4gm = 4ga$, ita vt aqua constanter eadem celeritate effluat. Quia autem hic motus effluxus est vniformis ob $\frac{dv}{dt} = 0$, pressio ad zv ex aequatione primum inuenta ita definitur:

$$2g(p-k) = -2gs + 2ga\left(1-\frac{a+s}{a}\right) = 0,$$

 vbi-

vbique scilicet pressio aequalis erit pressioni atmosphaerae seu latera tubi extrinsecus aequaliter pressa nullam vim sustinent, iisque adeo remotis fluxus perinde fieret.

Exemplum 2.

Tab. IV. Fig. 55. 83. *Sit superior tubi pars* AaBb *verticalis et aequaliter ampla inferior vero pars* BbOo *vtcunque curua et inaequaliter ampla, definire aquae ex eo effluentis motum, quamdiu suprema aqae superficies* Mm *in parte superiori versatur.*

Sit amplitudo partis superioris $Mm = \mu = cc$, longitudo tubi inferioris $BzO = a$; altitudo $BC = b$ et $BM = x$; erit ergo $m = a + x$; et $\mathfrak{m} = a + x$. Tum sumta longitudine $Oz = s$, cui respondeat amplitudo $zv = \omega$ et altitudo $Pz = z$, sit valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totam partem inferiorem extensi $= B$ quandoquidem hic valor erit constans; tum igitur idem integrale ad superficiem supremam Mm extensum erit $= B + \frac{x}{cc} = \int \frac{dm}{\mu}$: vnde hanc habebimus aequationem ob $M = h$:

$$2gcc(b + x)dx = \tfrac{1}{2}ccvvdx\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) - f^4 vdv\left(B + \frac{x}{cc}\right),$$

quae posito $f^4 vv\left(B + \frac{x}{cc}\right) = u$ abit in hanc:

$$du - \frac{c^4 u\, dx}{f^4(Bcc + x)} + 4gcc(b + x)dx = 0.$$

Ponatur $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ et multiplicando per $(Bcc + x)^{-\lambda}$ erit integrale:

$vv =$

$$vv = C(Bcc+x)^{\lambda-1} - \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)}((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x).$$

Si iam descensum ex Aa incepisse assumamus existente:

$$AB = e, \text{ fiet } C = \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \cdot \frac{(2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)e}{(Bcc+e)^{\lambda-1}},$$

ideoque

$$vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)e)}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}$$
$$- \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x)}{(1-\lambda)(2-\lambda)},$$

vel $$vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}\left(\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - 1\right)$$
$$+ \frac{4\lambda g}{2-\lambda}\left(e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - x\right),$$

seu $$vv = \frac{4\lambda g(Bcc+(\lambda-2)b)}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\left(1 - \left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right)$$
$$+ \frac{4\lambda g}{\lambda-2}\left(x - e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right).$$

Ac si tempore $= t$ aqua ab Aa ad Mm subsederit erit $dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$: cum autem aqua maxima celeritate effluit, fiet:

$$vv = \frac{4\lambda g(b+x)}{\lambda-1},$$

quod ergo euenit vbi erit:

$$x = -Bcc + \frac{(Bcc+e)^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}}{(Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e)^{\frac{1}{\lambda-2}}}.$$

Denique pro pressione p qua tubi pars inferior in sectione zv vrgetur, aequatio supra inuenta hanc induet formam:

$$2g(k-p)\left(B+\frac{x}{cc}\right) = \left(2gz - \tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\omega\omega}\right)\right)\left(B+\frac{x}{cc}\right)$$
$$- \left(2g(b+x) - \tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right)\int\frac{ds}{\omega},$$

vnde

vnde fit

$$p = k + \frac{cc\left(b + x - \frac{(\lambda - 1)vv}{4\lambda g}\right)\int\frac{ds}{\omega}}{Bcc + x} - z + \frac{vv}{4g}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right).$$

Casus his imprimis notari meretur quo $\lambda = \frac{c^4}{f^4}$ est numerus valde magnus, quo casu ex aequatione differentiali

$$4\lambda g(b + x)\,dx = (\lambda - 1)\,vv\,dx - 2\,(Bcc + x)\,v\,dv$$

statim colligitur $vv = 4g(b + x)$, scilicet quia orificium Oo est minimum, quasi a primo statim initio celeritas fit maxima, et pressio in sectione zv prodit:

$$p = k - z + (b + x)\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega} + \frac{cc}{\lambda}\int\frac{ds}{\omega}\right),$$

et quia vltimum terminum per λ diuisum omittere licet erit $p = k - z + (b + x)\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)$.

Coroll. 1.

84. Casus iste quo $\lambda = \frac{c^4}{f^4}$ est numerus valde magnus imprimis notari meretur, quia experimenta facillime ad eum accommodantur; quibus etiam euincitur celeriatem effluxus vix discrepare a valore inuento.

Coroll. 2.

85. Circa pressiones autem in tubi parte inferiori BO, hoc casu potissimum obseruari conuenit, eas non solum vltra k diminui, sed etiam negatiuas fieri posse. Si enim

enim sectio $zv = \omega$ aequalis sit orificio ff, erit $p = k - z = k - zP$, at si haec sectio minor est foramine ff pressio multo magis diminuitur.

Coroll. 3.

86. Quando autem pressio p reuera fit negatiua fluidi continuitas tollitur, et quia latera tubi deserendo se in arctius spatium contrahit, neque amplius legem stabilitam sequitur. Quamdiu autem pressio est positiua quidem sed minor quam k, tum quia pressio externa superat internam si tubus ibi foraminulo perforetur, aër aliudve fluidum extra positum intrudetur, ita vt tubus ibi vi attractrice praeditus videatur.

Scholion 1.

87. Huc fere redeunt quae de effluxu aquae ex tubis vel vasis cuiuscunque formae tradi solent, quae quia iam copiose ac diligenter sunt pertractata, hic fusius euoluere nolo: idque adeo ob hanc potissimum rationem, quod in plerisque casibus, ad quos haec Theoria applicari solet, calculus non mediocriter a veritate aberrare deprehendatur. Statim enim ac vas, vti fig. 54. notabilem prae foramine Oo habet amplitudinem, manifestum est tota strata zv non aequaliter subsidere, sed partes foramini imminentes

tes magis ad descensum impelli. Tum vero vbi tubus subito in foramen coarctatur, ibi certe neutiquam aquae motus ita est comparatus, vti in hac sectione assumimus. Tantopere potius verus motus ab hac hypothesi discrepabit vt mirandum sit experimenta non multo magis a calculo discrepare. Interim tamen dissensus insignis se prodit, quando fundus vasis OC tenuissimo foramine Oo est pertusus, quo casu in vena effluente ingens contractio animaduertitur inde oriunda quod aqua a lateribus erumpens oblique effluit; quo fit vt per foramen minor aquae copia quam pro eius amplitudine eiiciatur. Cui incommodo ii, qui experimenta calculo consentanea reddere volunt ita medentur, vt foramini tubulum cylindricum inserere soleant, vt hoc modo obliquitas motus euitetur.

Scholion 2.

88. Casus, quo $\lambda = \frac{e4}{f4}$ est numerus vehementer magnus, euolutionem singularem postulat, qua dilucide explicetur, quomodo aqua, dum eius motus a quiete incipit subito maximam celeritatem adipiscatur. Hunc in finem formula $\left(\frac{Bcc + x}{Bcc + e}\right)^{\lambda - 1}$ rite euolui oportet, vt motum ab initio genitum exhibeat. Statim ergo ac motus incipit altitudo x fit minor quam e, ponamus igitur $\frac{Bcc + x}{Bcc + e} = 1 - \frac{y}{\lambda - 1}$, vt sit $x = e - \frac{y(Bcc + e)}{\lambda - 1}$, ac denotante ε numerum, cuius logarith-

rithmus hyperbolicus est vnitas, erit proxime $(1-\frac{y}{\lambda-1})^{\lambda-1}=\varepsilon^{-y}$. Habebimus ergo:

$vv=\frac{4\lambda g(Bcc+\lambda b)}{\lambda\lambda}(1-\varepsilon^{-y})+\frac{4\lambda g}{\lambda}(x-e\varepsilon^{-y})$ seu

$vv=4gb(1-\varepsilon^{-y})+4g(x-e\varepsilon^{-y})=4g(b+x)-4g(b+e)\varepsilon^{-y}$,

vnde patet in ipso initio, vbi $x=e$ et $y=0$, ob $\varepsilon^{-y}=1$ reuera fieri $v=0$, statim autem, atque aqua subsederit per interuallum minimum $\frac{y(Bcc+e)}{\lambda-1}$, quoniam y valorem notabilem sortitur, quantitatem ε^{-y} euanescere, ideoque fieri $vv=4g(b+x)$. Deinde vero ex aequatione pro tempore $dt=\frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$, quoniam in valore ipsius vv loco x scribere licet e, vt sit $vv=4g(b+e)(1-\varepsilon^{-y})$ erit

$$dt=\frac{-dx\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{g(b+e)(1-\varepsilon^{-y})}}=\frac{dy(Bcc+e)}{2\sqrt{\lambda g(b+e)(1-\varepsilon^{-y})}},$$

vnde colligitur integrando

$$t=\frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\, l\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}{1-\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}.$$

Simul igitur atque ε^{-y} fit fractio quam minima, ob

$$l\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}{1-\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}=l(4\varepsilon^{y}-1)=l4\varepsilon^{y}=y+l4 \text{ erit}$$

$$t=\frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}(y+l4)=\frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\left(\frac{\lambda(e-x)}{Bcc+e}+l4\right).$$

Cum porro celeritas euadat maxima vbi

$$x=-Bcc+(Bcc+e)\left(\frac{Bcc+e}{Bcc+\lambda(b+e)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}=e-\frac{(Bcc+e)l\lambda}{\lambda},$$

eueniet hoc vbi $y=l\lambda$, ideoque postquam ab initio effluxerit tempus $t=\frac{(Bcc+e)l4\lambda}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}$, quod cum $\frac{l\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ euanescat si

 $\lambda=$

$\lambda = \infty$, erit quam minimum ita vt aqua primo quasi instanti maximam celeritatem adipiscatur. Interim hinc intelligitur quo longior simulque angustior fuerit tubi pars inferior BO, eo tardius ad celeritatem maximam peruentum iri.

Scholion 3.

89. Euoluto casu quo $\lambda = \frac{e4}{f4}$ est quasi numerus infinitus, etiam is quo λ est numerus mediocriter magnus accuratiori euolutione dignus videtur. Cum igitur inuenerimus:

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g} = (Bcc + (\lambda-2)b + (\lambda-1)x - (Bcc + (\lambda-2)b + (\lambda-1)e)\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1},$$

ponamus vt ante $\frac{Bcc+x}{Bcc+e} = 1 - \frac{y}{\lambda-1}$, vt sit $y = \frac{(\lambda-1)(e-x)}{Bcc+e}$; et quia totum negotium ad commodam euolutionem formulae $\left(1-\frac{y}{\lambda-1}\right)^{\lambda-1}$ reducitur posita ea $= Y$ fit

$$lY = (\lambda-1)\, l\left(1-\frac{y}{\lambda-1}\right),$$

ac quia semper est $y < \lambda - 1$, ob $\frac{y}{\lambda-1} = \frac{e-x}{Bcc+e}$ erit

$$lY = -y - \frac{yy}{2(\lambda-1)} - \frac{y^3}{3(\lambda-1)^2} - \frac{y^4}{4(\lambda-1)^3} - \text{etc.}$$

quae series vtique valde conuergit. Hinc ergo inuento valore Y erit:

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g} = (Bcc + (\lambda-2)b + (\lambda-1)e)(1-Y) - (Bcc+e)y,$$

vbi

vbi est $y = (\lambda - 2)(1 - Y^{\frac{1}{\lambda - 1}})$ et $x = (Bcc + e) Y^{\frac{1}{\lambda - 1}} - Bcc$.

Cum iam celeritas maxima sit:

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2) vv}{4 \lambda g} = (\lambda - 2) b + x),$$

hic locus definitur hac aequatione:

$$Y^{\frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}} = \frac{Bcc + e}{Bcc + (\lambda - 2) b - (\lambda - 1) e},$$

et posito

$$\frac{Bcc + (\lambda - 2) b + (\lambda - 1) e}{Bcc + e} = E, \text{ fit}$$

$$Y^{\frac{1}{\lambda - 1}} = E^{-\frac{1}{\lambda - 1}} = \varepsilon^{-\frac{1}{\lambda - 1} lE} = 1 - \frac{lE}{\lambda - 1} + \frac{(lE)^2}{2(\lambda - 1)^2} - \frac{(lE)^3}{6(\lambda - 1)^3} + \text{etc.}$$

vnde celeritas erit maxima vbi

$$x = e - (Bcc + e)\left(\frac{lE}{\lambda - 1} - \frac{(lE)^2}{2(\lambda - 1)^2} + \frac{(lE)^3}{6(\lambda - 1)^3} - \text{etc.}\right).$$

Cum nunc porro sit

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2) vv}{4 \lambda g} = (Bcc + e)(E(1 - Y) - y),$$

erit pro tempore

$$dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v} = \frac{-Y^{\frac{2 - \lambda}{\lambda - 1}} dY \sqrt{\lambda - 2)(Bcc + e)}}{2\sqrt{(\lambda - 1) g (E(1 - Y) - (\lambda - 1)(1 - Y^{\frac{1}{\lambda - 1}})}},$$

et facto $Y = u^{\lambda - 1}$, fit

$$dt = \frac{-du\sqrt{(\lambda - 1)(\lambda - 2)(Bcc + e)}}{2\sqrt{g(E - \lambda + 1 + (\lambda - 1) u - E u^{\lambda - 1})}}.$$

Verum calculus commodius instituetur solam quantitatem y retinendo et ponendo:

$$Y = \varepsilon^{-y} \left(1 - \frac{yy}{2(\lambda - 1)} - \frac{y^3}{3(\lambda - 1)^2} + \frac{y^4}{5(\lambda - 1)^2}\right),$$

vnde solutio §. praeced. propius ad veritatem perducetur, dum etiam termini per λ diuisi introducuntur. Sed quia haec mere sunt analytica, ea hic vberius non petracto.

Problema 55.

Tab. V. Fig. 56. 90. Si tubus, dum aqua per orificium Oo effluit in altero termino Aa continuo nouum aquae supplementum accipiat vt perpetuo ad Aa vsque plenus conseruetur, ibique aqua a vi quacunque iugiter protrudatur, eius motum definire.

Solutio.

Posita amplitudine orificii $Oo = ff$ sit v celeritas, qua iam elapso tempore $= t$, aqua ibi effluit in alio vero loco quocunque z, cuius distantia ab initio A sit $Az = s$, tubique amplitudo $zv = \omega$, et altitudo super plano horizontali fixo $z\pi = \mathfrak{z}$, siquidem curuae $\alpha\pi\omega$ applicatae singulorum tubi punctorum altitudines super eodem plano exhibere assumuntur. His positis si in sectione zv statuatur pressio $= p$, principia motus hanc suppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\mathfrak{z} - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt} \int \frac{ds}{\omega}.$$

Sit nunc pressio in $Aa = L$ amplitudo $Aa = cc$ et altitudo $Aa = \mathfrak{a}$, et quia hic $s = 0$, simulque integrale $\int \frac{ds}{\omega}$ euanesnescit, ob $p = L$, $z = \mathfrak{a}$, et $\omega = cc$, erit:

$$2gL = \Delta : t - 2g\mathfrak{a} - \frac{f^4 vv}{2c^4}.$$

Deinde pro orificio Oo, sit ibi pressio $= k$, pondus atmosphaerae referens, et valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totum tubum AO extensi fiat $= \mathfrak{O}$, altitudo vero $O\omega = \mathfrak{o}$. Quocirca ob $p = k$, $z = \mathfrak{o}$ et $\omega = ff$ habebitur;

$$2gk = \Delta : t - 2g\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ffdv}{dt}.\mathfrak{O}.$$

Nunc haec aequatio ab illa subtracta relinquit:

$$2g(L - k) = 2g(\mathfrak{o} - \mathfrak{a}) + \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{ffdv}{dt}.\mathfrak{O} \text{ seu}$$

$$4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})dt - vvdt\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 2\mathfrak{O}ffdv,$$

vnde cum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{O}$ sint quantitates constantes, pressio vero L functionem temporis denotare possit, siquidem ea cum tempore varietur, celeritas v ad quoduis tempus definiri debet. Posita autem pressione L constante, huiusmodi aequatio erit resoluenda:

$$dt = \frac{A\,dv}{B \pm Cvv},$$

existente

$$A = 2\mathfrak{O}ff;\ B = 4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o}) \text{ et } \pm C = \frac{f^4}{c^4} - 1,$$

tres ergo casus sunt euoluendi.

I. Si $cc = ff$ seu amplitudo Aa orificio $Oo = ff$ aequalis, erit $C = 0$ et $t = \frac{Av}{B}$ seu $v = \frac{B}{A}t + \text{Const.}$, vnde si $B > 0$ celeritas continuo crescere posset.

II. Si $cc > ff$ seu amplitudo Aa orificium Oo superet,

po-

posito $C = 1 - \frac{f^4}{c^4}$, aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B - Cvv}$ integrata dat $t = \frac{A}{2\sqrt{BC}}\, l \frac{\sqrt{B} + v\sqrt{C}}{\sqrt{B} - v\sqrt{C}} + \text{Const.}$ quae constans, si motus a quiete inceperit euanescit; hocque casu celeritas quidem crescit, sed elapso etiam tempore infinito non vltra $v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}}$ augetur.

III. Si $cc < ff$ seu amplitudo $A\mathfrak{a}$ minor sit orificio Oo, posito $C = \frac{f^4}{c^4} - 1$, aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B + Cvv}$ integrata dat:

$$t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \text{ Ang. tang. } \frac{v\sqrt{C}}{\sqrt{B}}, \text{ seu } v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}} \text{ tang. } \frac{t\sqrt{BC}}{A},$$

vbi hoc memoratu dignum euenit, vt elapso tempore $t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \cdot \frac{\pi}{2}$ celeritas iam infinita euadat.

Inuenta celeritate effluxus v ad quoduis tempus t, in quouis loco medio zv pressio p ita exprimitur:

$$2g(p - k) = 2g(\mathfrak{o} - z) + \tfrac{1}{2} vv \left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right) + \frac{ff\,dv}{dt}\left(\mathfrak{D} - \int \frac{ds}{\omega}\right),$$

quae elisa formula differentiali $\frac{ff\,dv}{dt}$ praebet:

$$4g(p - L + z - \mathfrak{a})\,\mathfrak{D} = vv\left(\frac{f^4}{c^4} - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\mathfrak{D} + vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)\int \frac{ds}{\omega}$$
$$- 4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})\int \frac{ds}{\omega},$$

sicque omnia quae ad motum pertinent sunt determinata.

Coroll. 1.

91. Si motus ad vniformitatem peruenerit, ita vt iam aqua constanter eadem celeritate per orificium Oo expellatur, ob $dv = 0$, habebitur haec aequatio:

$$4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o}) = vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right),$$

vnde si amplitudo in $A\mathfrak{a}$ aequalis sit orificio Oo vti in ca-

capite praecedente pressio in Aa debet esse $L = k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, neque hinc celeritas v ipsa determinatur.

Coroll. 2.

92. At si amplitudo $Aa = cc$ maior fuerit quam orificium $Oo = ff$, pro motus vniformitate celeritas effluxus v ita definitur vt sit:

$$vv = \frac{4gc^4(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})}{c^4 - f^4}.$$

Hoc ergo casu necesse est vt sit $L > k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, atque ex hoc excessu celeritas effluxus determinatur.

Coroll. 3.

93. Sin autem amplitudo $Aa = cc$ minor sit orificio $Oo = ff$, motus vniformitas hanc praebet aequationem:

$$vv = \frac{4gc^4(k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a} - L)}{f^4 - c^4}:$$

vnde patet motum aequabilem obtineri non posse nisi sit $L < k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$; atque ex hoc defectu celeritas effluxus determinatur.

Scholion 1.

94. Omnia haec certe sunt maxime paradoxa, cum ex eadem pressione L, qua aqua in sectione Aa vrgetur, celeritas quantumuis magna oriri posse sit inuenta; atque hoc imprimis videbitur absurdum, quod in casu tertio a vi finita L tempore finito aquae celeritas adeo infinita imprimi

primi possit. Haec autem absurditas statim euanescet, si modo hypothesin, cui totum problema innititur, attentius perpendamus; assumimus enim dum aqua per sectionem Aa propellitur, continuo aliunde nouam aquae copiam eadem celeritate ea influere, neque hic curamus, vnde haec aqua adueniat, et a quanam vi ipsi hic motus inducatur; longe diuersa scilicet haec vis est a vi L quae nihil aliud agit, nisi vt aquam iam illa celeritate intrusam vlterius per tubum propellat. Dum ergo haec vis L valeat aquae per Aa ingressae motum accelerare celeritas effluxus increscet, ideoque per hypothesin aqua noua etiam continuo maiori celeritate ab illa vi peregrina ingeri assumitur. Quando igitur calculus ostendit, celeritatem mox fieri adeo infinitam, hic effectus minime vi nostrae finitae L, aquam per tubum propellenti, sed manifesto vi illi peregrinae, quae hoc casu vtique fit infinita tribui debet; quippe quae aquam nouam celeritate infinita in tubum compellit. Atque eidem causae est etiam illud paradoxon adscribendum quod celeritas effluxus ipsa in problemate non determinetur; quo celerius enim et copiosius aqua noua a vi illa peregrina, quaecunque ea sit, subministratur, eo celerius etiam eadem pressio L in Aa eam per tubum propellere valebit; quoniam igitur illius vis peregrinae nulla ratio in nostro calculo habetur, mirum non est, quod calculus tam im-

immania paradoxa in se implicet, quae autem re bene expensa sponte diluuntur.

Scholion 2.

95. Introductio autem eiusmodi potentiae L, quae iugiter pari vi premat siue aqua per tubum celerius promoueatur siue tardius, a natura virium, quae ad aquam propellendam vsurpantur, maxime abhorret, cum omnes istae vires ita sint comparatae, vt quo celerius iam aqua per tubum promouetur, eo magis debilitentur. Quamobrem si hoc problema ad casus reales, quibus aqua ad certam altitudinem eleuari debet, accommodare velimus, naturam earum virium, quibus ad hunc finem est vtendum, probe considerari oportet. Quam indolem cum iam in praecedente capite dilucide exposuerim inde ad praesens institutum id tantum repeto, ad opus peragendum adhiberi certam vim F quae certa velocitate e agat; ita vt iam tota quaestio eo redeat; quomodo machinam instrui conueniat, vt ab ista vi hac celeritate agente aqua vniformiter per tubum propelli possit.

Problema 56.

96. Si aqua per tubum vtcunque inaequaliter amplum $Aa Oo$ ad altitudinem datam $O\omega = a$ motu vniformi eleuari debeat a data vi $= F$, quae data celeritate $= e$ ope- Tab. IV. Fig. 49.

operetur, machinam inuenire cuius ope hic effectus obtineri queat, simulque copiam aquae dato tempore eleuandae definire.

Solutio.

Quia omnis machinae indoles in hoc consistit, vt vim qua agitatur, in alium locum transferat, eamque simul in data ratione vel augeat vel minuat, ponamus machinam quaesitam id praestare, vt vis aquam per orificium inferius Aa propellens fiat $= nF$; atque ex natura machinarum ista vis hic aget celeritate $= \frac{e}{n}$, ita vt machinae constructio a solo numero n pendeat, quem ergo definiri oportet. Nunc praecedens problema in subsidium vocando, quia amplitudo Aa posita est $= cc$, in quam vis nF agit, pressio ibi exerta erit $= \frac{nF}{cc}$, quae cum pressione atmosphaerae k adiuvetur, habebimus pressionem ibi positam $L = \frac{nF}{cc} + k$; atque aqua per orificium inferius Aa propelletur celeritate $= \frac{e}{n}$. Quare cum superioris orificii Oo amplitudo sit posita $= ff$, aqua ibi expelletur celeritate $= \frac{cce}{nff}$, ita vt sit $v = \frac{cce}{nff}$: et $dv = 0$. Nunc porro altitudo orificii Oo ante posita $= \mathfrak{o}$ hic est $O\omega = a$, inferioris vero Aa nulla seu $\mathfrak{a} = 0$, ex quo aequatio pro motu ibi inuenta induet hanc formam:

$$4g\left(\frac{nF}{cc} - a\right) - \frac{c^4 ee}{nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 0 \text{ seu}$$

$$4gnn\left(\frac{nF}{cc} - a\right) = ee\left(\frac{c^4}{f^4} - 1\right),$$

vnde

vnde numerum n ideoque machinam definire licet. Tum autem necesse est vt aqua aliunde iugitur celeritate $= \frac{e}{n}$ in orificium Aa aduehatur; singulisque minutis secundis aquae aduectae volumen sit $= \frac{cce}{n}$, tantum autem singulis minutis secundis per orificium superius Oo exonerabitur.

Deinde si in loco tubi quouis z ponatur amplitudo $zv = \omega$, altitudo $z\pi = z$, et longitudo $Az = s$, pressio vero ibidem $= p$, erit ex problemate praecedente:

$$2g(p - k) = 2g(a - z) + \frac{c^4 ee}{2nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right).$$

vnde, si per praecedentem aequationem $\frac{c^4 ee}{nnf^4}$ eliminemus, fit:

$$p = k - z + \left(a\left(\frac{f^4}{\omega\omega} - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{nF}{cc}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\right) : \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right).$$

Coroll. 1.

97. Si ambo orificia Aa et Oo sunt aequalia, seu $cc = ff$ fit $\frac{nF}{cc} - a = 0$, ideoque $n = \frac{acc}{F}$; pro machina instructione tum singulis minutis secundis eiicitur aquae volumen $= \frac{Fe}{a}$; tanta vero copia interea continuo celeritate $= \frac{Fe}{acc}$ in orificium Aa suppeditari debet; ad quod peculiari opus est vi, ad quam hic non respicimus.

Coroll. 2.

68. Si sit $cc > ff$, ideoque $\frac{c^4}{f^4} - 1 > 0$, fit $\frac{n}{cc} > \frac{a}{F}$, hinc aquae volumen vno minuto secundo eiectum erit $< \frac{Fe}{a}$ ac tantumdem aquae in orificium Aa aduehi debet

 ce-

celeritate minore quam $\frac{Fe}{a\,cc}$, ad quod minori vi peculiari opus est quam casu praecedente.

Coroll. 3.

99. Sin autem orificium superius ff minus sit quam inferius cc, prodit $\frac{n}{ac} < \frac{a}{F}$, et volumen aquae vno minuto secundo eiectae fit $> \frac{Fe}{a}$, ita vt hoc modo plus aquae eleuetur quam casu primo $ff = cc$; verum etiam tanto plus aquae a vi illa peregrina in orificium Aa, idque maiori celeritate quam $\frac{Fe}{a\,cc}$ aduehi debet.

Scholion.

100. Mirum igitur non debet videri, quod ab eadem vi machinam mouente modo maior modo minor aquae copia ad eandem altitudinem eleuetur, prout superius orificium Oo fuerit maius vel minus inferiori Aa. Si enim integrum effectum perpendere velimus, etiam integra causa est spectanda, quae habetur, si ad eam vim, qua machinam agitari assumimus, insuper adiungatur illa vis, quae ad aquam continuo in orificium Aa ingerendam requiritur; hae autem ambae vires iunctim sumtae eo casu quo minor aquae copia eleuatur vtique minorem praebent summam quam altero casu, quo maior copia eleuatur, ita vt hic nihil occurrat, quod aequalitati inter causam et effectum aduersetur. Quoniam vero in praxi eadem vis qua

aqua

aqua per tubum propellitur, etiam aquam continuo in tubum suppeditare debet, quatenus hic duplex effectus ab eadem causa producitur, in vsum practicum accuratius est inuestigandum. Cum igitur antliarum ope aqua tam in tubum attrahi, quam per eum propelli soleat, huic inuestigationi, quae in praxi amplissimum habet vsum, caput peculiare destinamus.

CAPVT IV.

DE ELEVATIONE AQVAE ANTLIARVM OPE.

Problema 57.

101. Si tubus cylindricus $BbCc$ inferius ad Aa vehementer ampliatus aquae stagnanti Ee sit immersus, in eoque embolus POo data vi sursum trahatur, vt ob pressionem atmosphaerae aqua continuo succedat, hunc aquae motum ascensus definire. Tab. V. Fig. 57.

Solutio.

Elapso tempore t embolus cum aqua iam eleuatus sit ad altitudinem $CO = x$; sitque amplitudo tubi $Oo = ff$, et celeritas tam emboli quam aquae ascendentis $= v$. Vis autem embolum sursum tollens sit $= ffu$, et cum embolus

ab