aqua per tubum propellitur, etiam aquam continuo in tubum suppeditare debet, quatenus hic duplex effectus ab eadem causa producitur, in vsum practicum accuratius est inuestigandum. Cum igitur antliarum ope aqua tam in tubum attrahi, quam per eum propelli soleat, huic inuestigationi, quae in praxi amplissimum habet vsum, caput peculiare destinamus.

CAPVT IV.

DE ELEVATIONE AQVAE ANTLIARVM OPE.

Problema 57.

101. Si tubus cylindricus $BbCc$ inferius ad Aa vehementer ampliatus aquae stagnanti Ee sit immersus, in eoque embolus POo data vi sursum trahatur, vt ob pressionem atmosphaerae aqua continuo succedat, hunc aquae motum ascensus definire. Tab. V. Fig. 57.

Solutio.

Elapso tempore t embolus cum aqua iam eleuatus sit ad altitudinem $CO = x$; sitque amplitudo tubi $Oo = ff$, et celeritas tam emboli quam aquae ascendentis $= v$. Vis autem embolum sursum tollens sit $= ffu$, et cum embolus ab ab atmosphaera deprimatur pressione $= k$, foret pressio in $Oo = k - u$ si nullus adesset motus, cum autem motus mutationem afferat, ponatur ea $= \pi$, donec ex sequentibus determinetur. Sectio porro Aa amplissima ponatur $= cc$, eiusque profunditas infra superficiem aqua $C\alpha = \alpha$, eritque pressio in $Aa = k + \alpha$. His positis solutio problematis 55. huc accommodabitur, si ponamus $L = k + \alpha$, $\mathfrak{a} = -\alpha$, $\mathfrak{v} = x$, et quia cc est valde magnum loco $\mathfrak{D} = \int \frac{ds}{\omega}$ habebimus $\frac{x}{ff}$, quod autem ibi erat k hic nobis est π; vnde fit $L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{v} = k - \pi - x$. Sicque hanc adipiscimur aequationem:

$$4g(k - \pi - x)\,dt - vvdt = 2xdv,$$

eleuatio autem elementaris dat $dt = \frac{dx}{v}$, eritque

$$2xvdv + vvdx = 4g(k - \pi - x)\,dx,$$

et integrando

$$vvx = 4g\int (k - \pi - x)\,dx,$$

hinc ergo fiet

$$vvx = 4g\,(kx - \tfrac{1}{2}xx - \int \pi\,dx),$$

et nunc tantum restat vt pressionem adhuc incognitam π inuestigemus; cuius valorem ex motu emboli repeti oportet. Ponamus ergo totius emboli massam aequari massae aqueae cuius volumen est $= ffh$, quo simul eius pondus exprimitur, et quia frictio emboli maxime motui obstat, ponatur ea $= \delta ffh$. Iam ob pressionem inter embolum et aquam

aquam $=\pi$ ab ea embolus sursum vrgetur vi motrice $=\pi ff$, cui addatur vis actu sursum tollens ffu; a summa vero subtrahatur pressio atmosphaerae ffk, ita vt vis sursum pellens sit $= ff(\pi + u - k)$, a qua porro auferri debet resistentia tam a pondere emboli quam a frictione nata, quae est $= (1 + \delta) ffh$, vnde, ob massam mouendam $= ffh$, vis acceleratrix prodit $= \frac{\pi + u - k - (1+\delta) h}{h}$. Quia nunc celeritas emboli sursum directa est v, qua tempusculo dt per spatiolum dx eleuatur erit acceleratio $= \frac{dv}{dt} = \frac{v\,dv}{dx}$, vnde nascitur haec aequatio $\frac{v\,dv}{dx} = \frac{2g}{h}(\pi + u - k - (1 + \delta) h)$, quae in $2hdx$ ducta et integrata praebet:

$$hvv = 4g\,(\int \pi dx + \int u dx - kx - (1 + \delta)\,hx),$$

ante vero inuenimus

$$xvv = 4g\,(kx - \tfrac{1}{2}xx - \int \pi dx);$$

quarum aequationum additione formula incognita $\int \pi dx$ eliditur, oriturque

$$(h + x)\,vv = 4g\,(\int u dx - (1 + \delta)\,hx - \tfrac{1}{2}xx),$$

qua aequatione celeritas in quauis altitudine $CO = x$ determinatur. Sin autem ex illis duabus aequationibus vv eliminemus, peruenimus ad hanc aequationem:

$$(h + x)\int \pi dx - k\,(h + x)\,x + x\int u dx - (\tfrac{1}{2} + \delta)\,hxx = 0 \text{ seu}$$

$$\int \pi dx = kx + \frac{(\frac{1}{2} + \delta)\,hxx}{h + x} - \frac{x\int u dx}{h + x},$$

quae differentiata monstrat pressionem illam incognitam:

$\pi =$

$$\pi = h + \frac{(\frac{1}{2}+\delta) h (2hx + xx)}{(h+x)^2} - \frac{h \int u\, dx}{(h+x)^2} - \frac{ux}{h+x},$$

quam ideo tantum nosse oportet, vt quando ea fit negatiua agnoscamus aquam non amplius embolum sequi, sed inter eum et aquam spatium vacuum relinqui, continuitate, cui calculus innititur, e medio sublata.

Coroll. 1.

102. Cum igitur inuenerimus esse:

$$vv = \frac{4g\,(\int u\,dx - (1+\delta) hx - \frac{1}{2}xx)}{h+x},$$

nisi haec quantitas sit positiua, nullus motus producetur; iam igitur primo motus initio vbi $x = 0$ esse debet $u > (1+\delta) h$. Post motum vero crescente x continuo maiori opus est vi.

Coroll. 2.

103. Si vis atollens u sit constans, fiet:

$$vv = \frac{4gx\,(u - (1+\delta) h - \frac{1}{2}x)}{h+x},$$

vnde patet celeritatem v quae ab initio creuerat, iterum decrescere et tandem euanescere cum euaserit $x = 2u - 2(1+\delta) h$ tum autem prodit pressio:

$$\pi = h + (\tfrac{1}{2}+\delta) h - u + \frac{hh}{4(u - (\frac{1}{2}+\delta) h)},$$

quae dum ne sit negatiua, aqua eo vsque embolum sequetur.

Co-

Coroll. 3.

104. Vt igitur cognoscamus, ad quantam altitudinem aquam eleuare liceat, faciamus illam pressionem euanescentem, et posito breuitatis gratia $u-(\frac{1}{2}+\delta)h=r$ erit:

$$4kr-4rr+hh=0,\ \text{hincque}\ r=\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}\sqrt{(hh+kk)}\ \text{et}$$

$$u=(\tfrac{1}{2}+\delta)h+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}\sqrt{(hh+kk)}.$$

Atque ab hac vi aqua attolletur ad altitudinem:

$$x=k+\sqrt{(hh+kk)}-h,$$

vnde patet, quo minor sit emboli massa, eo maiorem fore hanc altitudinem, quae adeo vsque ad $2k$ increscere posset, si esset $h=0$. Ad hoc autem frictionem nihil conferre, notari meretur.

Scholion 1.

105. Tubo $BbCc$ ideo infra partem ampliatam $CcAa$ anneximus ne opus esset aquae in tubum intranti subito celeritatem finitam tribuere cum ante quieuisset, cum autem eius ratio prorsus ex calculo excesserit, intelligimus aquae eleuationem eandem fore, etiamsi tubus totus cylindricus adhibeatur, eiusque inferius orificium Cc aquae stagnanti immergatur. Neque vero putandum est tum aquam per Cc intrantem subito celeritatem finitam accipere, sed potius in aqua externa circa orificium Cc eiusmodi motus generabitur quasi talis pars amplata $CcAa$ esset annexa. Deinde imprimis necesse erat cum motus ge-

neratione etiam emboli motum coniungere eiusque tam inertiae quam frictionis rationem habere quoniam in his obstaculis superandis notabilis virium sollicitantium pars insumitur, quod potissimum in ipso motus initio maximum affert momentum. Si enim quod fieri nequit emboli tam inertia quam frictio euanesceret, vt vis attollens cum nulla plane massa mouenda esset coniuncta ob $h = 0$, foret $vv = \frac{4g(\int u dx - \frac{\mu}{2} xx)}{x}$, ideoque si vis u esset finita posito $x = 0$ statim ab initio celeritas adeo orietur infinita in aqua, mox quidem imminuenda verum hoc calculi incommodum etiam nunquam in mundo locum habere potest, quia nullae dantur vires quae non propriam quandam massam mouendam sibi habeant adiunctam.

Scholion 2.

106. Huiusmodi cylindrus embolo instructus antlia vocatur, cuius ope, dum embolus sursum attollitur, orificio inferiori Cc aquae stagnanti immerso, aqua simul in cylindrum eleuatur, vel potius a pressione atmosphaerae intruditur. Etsi enim in formula pro celeritate v inuenta pressio atmosphaerae k non reperitur, in ea tamen conditione manifesto inuoluitur, quod aqua embolum in tubo ascendentem non sequatur, nisi pressio π inter embolum et aquam sit positiua, si enim atmosphaerae pressio k esset nulla, statim ab initio posito $x = 0$, foret pressio π nulla, neque

neque propterea aqua embolum sequeretur simulque totus calculus pro sequenti motu sublata continuitate per se corrueret. Ex quo patet solam atmosphaerae pressionem k in causa esse cur aqua in his antliis eleuetur. Hic autem contra vulgarem opinionem calculus noster declarat fieri posse, vt aqua longe vltra altitudinem k, quae 32 pedum aestimatur, atque adeo fere duplo maiorem eleuetur si modo inertia emboli h satis sit parua et vis elevans satis magna. Ex coroll. 3. autem ad hoc necesse est vt sit vis embolum attollens:

$$u = (\tfrac{1}{2} + \delta)\, h + \tfrac{1}{2} k + \tfrac{1}{2} \sqrt{(hh + kk)},$$

quo aqua ad altitudinem $k + \sqrt{(hh + kk)} - h$ eleuari queat, tum vero in quauis altitudine minore x pro motus celeritate v erit:

$$v\,v = \frac{2gx\,(k + \sqrt{(hh + kk)} - h - x)}{h + x};$$

quae celeritas fit maxima vbi:

$$x = -h + \sqrt{(hk + h\sqrt{(hh + kk)})},$$

ipsaque celeritas maxima erit:

$$= (\sqrt{(hk + h\sqrt{(hh + kk)})} - h)\sqrt{\tfrac{2g}{h}}.$$

Si exempli gratia esset $h = \frac{3}{4} k$, aqua ad altitudinem $= \frac{3}{2} k$ eleuari posset a vi $u = \frac{3}{2} k + \frac{3}{4} \delta k$, et maxima celeritas foret $= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \sqrt{2gk}$, qua vno minuto secundo spatium $19\frac{1}{2}$ pedum percurritur.

 Scho-

Scholion 3.

Tab V. Fig. 58. 107. In vsu autem huiusmodi antliarum quo aqua, postquam modo exposito in cylindrum fuerit eleuata, depressione emboli ad altitudinem multo maiorem propelli solet, plerumque altitudo antliae satis parua esse solet, ita vt ille casus tantae altitudinis neutiquam locum habeat, neque multo minus sit verendum, vt aqua embolum sequatur. Tales antliae in sectione Cc diaphragma habent foramine pertusum quod valvula m ita operitur, vt dum embolus aquam attrahit, valuula haec aperiatur, aquae inferiori viam ascendendi patefaciens. Tum vero plerumque haec sectio Cc non in superficie aquae stagnantis Ee sed ad quandam altitudinem AC, supra eam statuitur, prout circumstantiae exigere videntur, ita vt inferior haec tubi pars CA semper aqua maneat plena indeque in superiorem cauitatem sit haurienda. Ob hunc autem tubum annexum, si eius altitudinem super aqua stagnante ponamus $AC=\alpha$ manente in superiori spatio $CO=x$, praecedens determinatio aliquam mutationem postulat, qua fit

$$v\,v=\frac{4g(\int u\,dx-\alpha x-(1+\delta)\,b\,x-\frac{1}{2}xx)}{b+\alpha+x},$$

siquidem inferior tubus CA sit aeque amplus ac superior BC, sin autem esset amplior in denominatore quantitas α minor accipi deberet, contra vero maior, quandoquidem haec pars ex quantitate $\mathfrak{O}=\int\frac{ds}{\omega}$ nascitur; in numeratore vero semper α ipsam altitudinem AC denotat. Quando vero embolus Oo ad certam al-

altitudinem fuerit eleuatus tum iterum deprimetur, simulque valuula m clauditur, antliae autem infra insertus est alius $DdVv$, cuius orificium Dd hactenus ope valuulae n erat clausum nunc vero embolo depresso aperitur, vt aqua ante hausta per tubum $DdVv$ propelli queat, qui motus quomodo eueniat, in sequenti problemate inuestigabimus.

Problema 58.

108. Cum antlia $BbCc$ fuerit vsque ad Bb aqua repleta, tum vero embolus data vi detrudatur, et aqua per tubum quemcunque $DdZz$ expellatur quem tubum iam ab initio aqua plenum fuisse assumimus, hunc motum quo aqua per orificium Zz eiicietur, inuestigare. Tab. V. Fig. 59.

Solutio.

Sit vt ante amplitudo antliae $= ff$, altitudo $BC = b$, et elapso tempore t embolus iam ad Oo sit detrusus, vbi celeritas emboli deorsim sit $= v$ et altitudo $CO = x$. Vis porro embolum detrudens sit $= ffu$, a qua in superficie Oo nascatur pressio $= \pi$, deinceps ex comparatione motus emboli definienda. Iam in tubo annexo Dz, sit orificii Zz amplitudo $Zz = ee$ et altitudo $TZ = a$, eritque celeritas effluxus per hoc orificium $= \frac{ffv}{ee}$. Tum in loco quovis medio Ss sit longitudo tubi $DS = s$, amplitudo $Ss = \omega$, et altitudo $VS = z$, pressio autem in $Ss = p$, quibus positis, cum in Ss sit celeritas $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{\omega}$, principia motus supepeditant hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f4vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

vbi $\int\frac{ds}{\omega}$ ab Oo vsque ad Ss extendi debet. Huius autem valor in tubo OC est $= \frac{x}{ff}$, per totum vero tubum annexum DZ vocetur valor inde oriundus $=$ D. Hinc quia pressio in Oo est $= \pi$ erit:

$$2g\pi = \Delta : t - 2gx - \tfrac{1}{2}vv,$$

et ob pressionem in Zz aequalem pressioni atmosphaerae $= k$ erit ibi:

$$2gk = \Delta : t - 2ga - \frac{f4vv}{2e4} - \frac{ffdv}{ds}\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right),$$

quarum aequationum haec ab illa subtracta dat:

$$2g(\pi - k) = 2g(a - x) + \tfrac{1}{2}vv\left(\frac{f4}{e4} - 1\right) + \frac{ffdv}{dt}\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right).$$

Quoniam vero tempusculo dt altitudo x minuitur elemento dx celeritate v erit $dt = \frac{-dx}{v}$, fiet:

$$4g(\pi - k - a + x)\,dx = \left(\frac{f4}{e4} - 1\right)vvdx - 2ffvdv\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right).$$

Ponamus $\mathrm{D} = \frac{m}{ff}$ et $\frac{f4}{e4} - 1 = \lambda$ vt sit

$$4g(\pi - k - a + x)\,dx = \lambda vvdx - 2(m + x)\,vdv,$$

quae diuisa per $(m + x)^\lambda$ et integrata praebet:

$$4g\int\frac{\pi - k - a + x}{(m + x)^\lambda}\,dx = \mathrm{Const.} - \frac{vv}{(m + x)^\lambda},$$

vbi constantem ita definiri oportet, vt posito $x = b$ celeritas v euanescat.

Iam pro motu emboli posito eius pondere $= ffh$, frictione $= \delta ffh$, is deorsum vrgetur vi $= ff(k + u + h - \pi - \delta h)$, vnde eius motus erit:

vv

$$vv = \text{Const.} - \frac{4g(kx + (1-\delta)bx + \int u dx - \int \pi dx)}{b},$$

verum pro eliminatione pressionis π potius vtamur aequationibus differentialibus:

$$4g(\pi - k - a + x)\,dx = \lambda vv dx - 2(m+x)\,v dv$$

et $4g(k + u + h - \delta h - \pi)\,dx = -2hv dv$,

ex quarum summa colligitur:

$$4g\int\frac{(u - a + (1-\delta)b + x)\,dx}{(b+m+x)^{\lambda-1}} = \text{Const.} - \frac{vv}{(b+m+x)^{\lambda}},$$

vbi constanti tribuendus est valor formulae integralis, quem recipit facto $x = b$, siquidem ea ita integretur, vt euanescat posito $x = 0$.

Coroll. 1.

109. Si ponatur interuallum BO $= y$, ob $x = b - y$, aequatio motum definiens erit:

$$\frac{vv}{(b+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int\frac{u - a + (1-\delta)b + b - y}{(b+m+b-y)^{\lambda+1}}\,dy,$$

integrali ita sumto vt euanescat posito $y = 0$.

Coroll. 2.

110. Vt ergo embolus aquae saltem motum imprimere possit, necesse est sit vis sollicitans $u > a + \delta h - h - b$; tum vero ab initio motus accelerabitur, maximusque euadet, cum fiet $y = u - a + (1-\delta)h + b$. Si igitur fuerit $u < a + \delta h - h$, ideoque intra limites $a - (1-\delta)h$ et $a - (1-\delta)h - b$ contineatur, motus postquam maximam celeritatem fuerit consecutus, iterum retardabitur.

Co-

Coroll. 3.

111. Si altitudo $TZ = a$ ad quam aqua eleuari debet, fuerit valde magna prae altitudine antliae $BC = b$; etiam quantitas $m = Dff = ff\int\frac{ds}{\omega}$ valde erit magna, cum si tubi amplitudo vbique fuerit $= ff$, fiat $m = DSZ$. Hoc ergo casu ob $h + m + b - y$ constans, habebitur

$$(h + m + b)\, vv = 4g\int (u - a + b + (1 - \delta)\, h)\, dy$$

seu $(h + m + b)\, vv = 4g\,(\int udy - (a - b - (1 - \delta)\, h) y)$: neque hic amplitudo supremi orificii $Zz = ee$ in computum ingreditur.

Scholion.

112. Tempus quo embolus per totam antliae altitudinem BC deprimitur, et aquae in ea contentae volumen $= bff$ per orificium Zz eiicitur hic non definio, quia vis embolum sollicitans ffu seu quantitas u nondum est cognita; neque enim eam pro arbitrio fingere licet, quia ex natura virium naturalium cuiuis celeritati peculiaris conuenit efficacia. Sin autem ope ponderis cuiusdam embolo impositi hic effectus obtineri debeat, peculiari inuestigatione non est opus, quoniam istud pondus coniunctim cum pondere emboli per ffh exhiberi potest; tum vero quia frictio solum embolum afficit numerus δ tanto minor euadet, vt δffh quantitatem frictionis praebeat. Cum igitur hoc

hoc pacto quantitas u in h inuoluatur, erit:

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int\frac{(1-\delta)h-a+b-y}{(h+m+b-y)^{\lambda+1}}\,dy$$
$$= \frac{4g(h+m+b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b-y)^{-\lambda}$$
$$- \frac{4g(h+m+b)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b)^{-\lambda}$$

et facta euolutione

$$vv = \frac{4g}{\lambda(1-\lambda)}(\lambda(h+b-y)+m+(1-\lambda)(a+\delta h))$$
$$- \frac{4g(h+m+b-y)^{\lambda}}{\lambda(1-\lambda)(h+m+b)^{\lambda}}(\lambda(h+b)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)).$$

Vnde primo quidem patet esse debere $h > a-b+\delta h$, quia alioquin ne motus quidem inciperet, deinde si y est valde paruum respectu $h+m+b$ erit proxime:

$$vv = \frac{2g}{h+m+b}\left(2(h-a-\delta h+b)y + \frac{(1-\lambda)(h-a-\delta h+b)}{h+m+b}yy - yy\right).$$

Sed quia non conuenit solam vim, qua aqua iam hausta propellitur, considerari, sed ei priorem vim, qua aqua in antliam hauriebatur, adiungi oportet, ambo praecedentia problemata iam coniunctim pertractemus binas antlias alteram haurientem alteram propellentem simul contemplaturi.

Problema 59.

113. Si binae antliae similes $BbCc$ et $B'b'C'c'$, quarum illa aquam hauriat, haec vero per foramen D' ad altitudinem $= a$ propellat, vti in praec. probl. statuimus; Tab V. Fig. 60.

a data vi simul agitentur, definire motum in vtraque antlia.

Solutio.

Sit vt ante vtriusque antliae altitudo $BC = b$, et amplitudo $= ff$, emboli vtriusque massa $= ffh$ et frictio $= \delta ffh$. Eodem tempore inceperit embolus ascendens a basi Cc attolli, et descendens a summitate $B'b'$ deprimi, pistilla autem bina superne iuncta sint vecti PQ circa eius medium V mobili, ita vt quouis tempore quantum embolus Oo est eleuatus, tantum alter $O'o'$ infra $B'b'$ sit depressus; et vtriusque motus pari celeritate peragatur. Ponamus nunc vectum in Q deprimi a vi $= Vff$, quam vt cognitam spectamus, ex eaque nascatur vis embolum Oo attollens $= Pff$, ex altera vero parte vis embolum $O'o'$ deprimens $= Qff$, ita vt sit $P + Q = V$. Vocetur porro spatium $CO = B'O' = x$, et celeritas vtriusque emboli $= v$. Ac pro priori ex §. 107. ob $u = P$ habebimus:

$$vv = \frac{4g.(\int P dx - \alpha x - (1+\delta)bx - \frac{1}{2}xx)}{b + \alpha + x},$$

pro motu posteriori vero ex §. 109. quia hic fit $u = Q$ et $y = x$ erit:

$$\frac{vv}{(b + m + b - y)^{\lambda}} = 4g \int \frac{Q - a + (1-\delta)b + b - x}{(b + m + b - x)^{\lambda + 1}} dx.$$

Considerentur autem potius harum aequationum differentialia, quae sunt:

$2vdv$

$$2vdv(h+a+x)+vv\,dx = 4gdx\,(P-\alpha-(1+\delta)\,h-x),$$
$$2vdv\,(h+m+b-x)+\lambda vvdx = 4gdx\,(Q-a+(1-\delta)\,h+b-x),$$

quae inuicem additae ob $P+Q=V$ praebent pro vtroque motu:

$$2vdv\,(2h+m+b+\alpha)+(\lambda+1)\,vvdx = 4gdx\,(V-\alpha-a-2\delta h+b-2x).$$

Posito ergo breuitatis gratia $\frac{\lambda+1}{2h+m+b+\alpha}=\mu$ erit integrando:

$$vv = \frac{4g\,e^{-\mu x}}{2h+m+b+\alpha}\int e^{\mu x}\,dx\,(V-\alpha-a-2\delta h+b-2x),$$

integrali ita sumto vt euanescat posito $x=0$, vbi litterae α et m idem significant quod in praecedentibus problematibus, et denotante ee amplitudinem orificii supremi Zz erat $\lambda=\frac{f^4}{e^4}-1$.

Coroll. 1.

114. Qualibet ergo vectis PVQ agitatione, qua brachium VP eleuatur, alterum vero VQ deprimitur, antlia BC aqua repletur, antlia vero B′C′ euacuatur, dum aqua in ea contenta ad altitudinem a eleuatur; vtriusque autem aquae massa est $=bff$.

Coroll. 2.

115. Finita hac agitatione, si sequente brachium VQ simili modo eleuatur alterumque VP deprimitur, antlia B′C′ iterum aqua repletur, ex altera vero BC aqua, qua fuerat repleta eiicitur, idque ad eandem altitudinem, si

si modo tubi vtrique antliae in D et D' inserti in tubo aquam sursum euehente vniantur.

Coroll. 3.

116. Tali ergo vectis PVQ agitatione reciproca aqua continuo sursum eleuatur, et singulis agitationibus volumen aquae $= bff$ per tubi euehentis superius orificium Zz eiicitur; hicque effectus producitur a vi illa vectem agitante, quae aequatur ponderi aquae, cuius volumen $= Vff$.

Scholion.

117. Ex formula pro celeritate inuenta, intelligitur, quomodo vim illam Vff, qua vectem agitari assumimus, comparatam esse oporteat, vt huic effectui producendo par sit. Euidens scilicet statim a cuiusque agitationis initio esse debere $V > \alpha + a' + 2\delta h - b$, vbi α est profunditas aquae stagnantis, vnde aqua hauritur, infra antliae vtriusque fundum Cc et a altitudo supra eundem, ad quam aqua eleuatur, ita vt $\alpha + a$ exhibeat totam altitudinem eleuationis, quae quo fuerit maior vtique eo maiorem vim postulat. Deinde vero $2\delta h$ exprimit frictionem, quam vterque embolus in motu suo offendit, quae pariter a vi sollicitante superari debet. Denique a summa $\alpha + a + 2\delta h$ subtrahitur altitudo antliae b, quia aqua in ea

ea contenta etiam pondere suo motum iuuat. Porro vero ad motus ipsius determinationem concurrunt quantitates $2h$ et m, quarum illa $2h$ inertiam vtriusque emboli continet quacum etiam inertiam tam vectis PVQ quam eam, quae vi sollicitanti est propria, coniungi oportet, quantitas vero m cum ex longitudine tubi deuehentis, tum ex eius amplitudine ita definitur vt sit $m = \int \frac{ffds}{\omega}$ denotante s longitudinem huius tubi indefinitam Ds (fig. 59.) et ω eius amplitudinem Ss in hoc loco. Denique etiam orificium tubi euehentis superius Zz $= ee$ in computum ingreditur et in numero $\lambda = \frac{f^4}{e^4} - 1$ continetur; ex quo intelligitur determinationem motus maxime esse difficilem cum hinc in genere formula temporis $dt = \frac{dx}{v}$ tractari nequeat. His autem difficultatibus occurremus, si actionem cuiuspiam machinae modo magis determinato ad hunc motum producendum accommodemus.

Problema 60.

118. Si vectis PVQ, quo in praecedente problemate Tab. V. Fig. 61.
ad binas antlias agitandas vsi sumus, ope manubrii vel axis incuruati MFN vniformiter in gyrum acti alternatim deprimatur et attollatur, definire vires, quibus hunc axem incuruatum quouis tempore agitari oportet, vt effectus ante descriptus producatur.

So-

Solutio.

Eiusmodi vectis PVQ alternus motus, qualem descrip-
simus effici solet ope axis horizontalis MN ad F inflexi,
qui in F gerit virgam rigidam FQ cum vectis extremitate
altera Q ita connexam, vt dum ille axis in gyrum agi-
tur, primo terminus ille Q ope virgae FQ deprimatur per
spatium $= 2FG$, tum vero per tantum spatium iterum at-
tollatur; sicque qualibet axis MFN reuolutione vtriusque
antliae embolus deprimatur et attollatur. Quare vt vter-
Tab. V. Fig. 62. que embolus per totam antliae altitudinem $BC = b$ agite-
tur, oportet sit $FG = \frac{1}{2}b$, et virgae FQ superior terminus
per peripheriam circuli verticalis FSH mouebitur, quem
motum, quo deinceps commodius ad machinam referre li-
ceat, vniformem assumo. Primo virga rigida supremum
tenuerit situm in F, quo vectis extremitas Q fuerit in I,
ponamusque virgae longitudinem $FI = l$; motusque, quo
eius terminus F per peripheriam circuli circumfertur, cele-
ritas sit $= c$. Iam elapso tempore t peruenerit virgae ter-
minus superior in S, sitque angulus $FGS = \Phi$; erit arcus
$FS = \frac{1}{2}b\Phi$, et elementum temporis $dt = \frac{bd\Phi}{2c}$; virga vero
nunc tenebit situm SQ, vt sit $SQ = l$ et spatium $IQ = x$,
quoniam embolum vtrumque iam per spatium x protrusum
ponimus. Cum ergo sit $GI = l - \frac{1}{2}b$ erit:

$$GQ = l - \tfrac{1}{2}b + x; \quad \text{et } \cos.\Phi = \frac{bl - \frac{1}{2}bb - (2l - b)x - xx}{bl - \frac{1}{2}bb + bx},$$

at

at ex angulo Φ interuallum x ita definitur vt sit:

$$x = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)} - l + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}b\cos.\Phi,$$

hinc fit differentiando:

$$dx = \frac{-\tfrac{1}{4}bbd\Phi\,\sin.\Phi\cos.\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)}} + \tfrac{1}{2}bd\Phi\,\sin.\Phi.$$

At est $dt = \frac{dx}{v} = \frac{b\,d\Phi}{2c}$, ideoque $v = \frac{2c}{b}\cdot\frac{dx}{d\Phi}$ seu

$$v = c\,\sin.\Phi - \frac{\tfrac{1}{2}bc\,\sin.\Phi\cos.\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)}}.$$

Ponamus nunc ad virgae terminum S in circulo promouendum opus esse vi $= Sff$, cuius directio cum sit ad radium GS normalis, dabit pro directione SQ vim $\frac{Sff}{\sin.GSQ}$ qua virga secundum suam directionem pellitur, ea ergo punctum Q deprimitur vi $= \frac{Sff\cos.GQS}{\sin GSQ}$, quae est illa ipsa vis quam in praecedente problemate vocaui Vff vt sit $V = \frac{S\cos.GQS}{\sin.GSQ}$. Est vero $\sin.GSQ = \frac{GQ\sin.\Phi}{l}$ et $\cos.GQS = \frac{GQ + \tfrac{1}{2}b\cos.\Phi}{l}$, ideoque $V = \frac{S(GQ + \tfrac{1}{2}b\cos.\Phi)}{GQ\,\sin.\Phi}$: et ob

$$GQ = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\cos.\Phi, \quad \text{fiet}$$

$$V = \frac{S\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)}}{\sin.\Phi\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\sin.\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\sin.\Phi\cos\Phi}.$$

His definitis consideremus aequationem differentialem qua praecedentis problematis solutio continetur:

$$2vdv\,(2h + m + b + a) + (\lambda + 1)\,vvdx$$
$$= 4gdx\,(V - a - \alpha - 2\delta h + b - 2x).$$

Con-

Consideremus virgae longitudinem l vt praemagnam prae radio circuli $\frac{1}{2}b$, eritque

$$x = \tfrac{1}{2}b\,(1 - \cos.\Phi);\quad \frac{dx}{d\Phi} = \tfrac{1}{2}b\sin.\Phi;\quad vv = cc\sin.\Phi^2;$$
$$\frac{2v\,dv}{d\Phi} = 2cc\sin.\Phi\cos.\Phi \quad \text{et}$$
$$V = \frac{Sl}{l\sin\Phi - \frac{1}{2}b\sin\Phi\cos.\Phi} = \frac{S}{\sin.\Phi};$$

vnde facta substitutione, erit:

$$(2h+m+b+\alpha)\,2cc\sin.\Phi\cos.\Phi + (\lambda+1)\,cc\sin\Phi^2.\tfrac{1}{2}b\sin.\Phi$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta h-b)\sin.\Phi - 2gb\sin.\Phi.b\,(1-\cos.\Phi))$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta h-b\cos.\Phi)\sin.\Phi),$$

hincque elicimus vim ad motum axis vniformem requisitam:

$$S = (\alpha + a + 2\delta h - b\cos.\Phi)\sin.\Phi$$
$$+ \frac{cc}{gb}(2h+m+b+\alpha)\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\sin.\Phi^3.$$

Qua vi efficietur vt dum axis semireuolutionem peragit hoc est tempore $= \frac{\pi b}{2c}$ sec.: aquae massa $= bff$ per tubum euehentem DZ supra eiiciatur. Cum autem curuatura axis in imum locum H fuerit perducta, tum gyratione continuata vectis terminus Q′ attolletur, similique modo vbi peruenerit in S′ existente iam angulo HGS′ $= \Phi$, pro vi, qua axis gyrari debet reperitur vt ante:

$$S = (\alpha + a + 2\delta h - b\cos.\Phi)\sin.\Phi$$
$$+ \frac{cc}{gb}(2h+m+b+\alpha)\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\sin.\Phi^3,$$

ita vt siue axis cubitus sit in S siue e regione in S′ eadem vis ad eius conuersionem requiratur.

Co-

Coroll. 1.

119. Dum igitur axis cubitus versatur siue in loco summo F siue in imo H, fit $S = 0$, seu nulla plane opus est vi ad motum gyratorium vniformem conseruandum. In locis autem hinc 90° distantibus, pro vi hac erit:

$$S = \alpha + a + 2\delta h + \frac{(\lambda + 1)cc}{4g}.$$

Coroll. 2.

120. Si angulus $FGS = \Phi$ fuerit 45° vel 225° ob $\sin.\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos.\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erit:

$$S = \frac{\alpha + a + 2\delta b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2} + \frac{cc}{2gb}(2h + m + b + a) + \frac{(\lambda + 1)cc}{8g\sqrt{2}},$$

in alteris vero octantibus vbi $\Phi = 135^\circ$ vel $\Phi = 315^\circ$ ob $\sin.\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos.\Phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ fit:

$$S = \frac{\alpha + a + 2\delta b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{cc}{2gb}(2h + m + b + a) + \frac{(\lambda + 1)cc}{8g\sqrt{2}},$$

Coroll. 3.

121. Quodsi ergo axis MN duos huiusmodi habeat cubitos, inter se perpendiculares quibus quaternae similes antliae agitentur, vt tempore $\frac{\pi b}{2c}$ sec. superne effundatur aquae volumen $= 2bff$; tum dum alter cubitus in summo loco F vel imo H versatur vi opus est:

$$S = \alpha + a + 2\delta h + \frac{(\lambda + 1)cc}{4g},$$

dum autem vterque a verticali FH declinat angulo 45° erit:

$$S = (\alpha + a + 2\delta h)\sqrt{2} + \frac{(\lambda + 1)cc}{4g\sqrt{2}},$$

quae duae vires erunt inter se aequales si fuerit:

$$a + a + 2\delta h = \frac{(\lambda + 1)cc}{4g\sqrt{2}}.$$

Scholion 1.

122. In omni machinarum actione plurimum interest, vt earum motus sit, quantum fieri potest, vniformis, et vt perpetuo aequali vi agitentur, ex quo manifestum minime conuenire, vt modo descripto duae tantum antliae ad machinam applicentur, quoniam ad hoc vis maxime inaequabilis requireretur; sin autem duo antliarum paria ita applicentur, vt cubiti axis sint inter se normales, vires ad machinam circumagendam requisitae multo magis ad aequalitatem accedent; minime tamen conuenit ad maiorem aequabilitatem obtinendam formulae $\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$ tantum valorem conciliari quantum inuenimus. Quin potius semper consultum est hanc formulam tam exiguam reddi quam circumstantiae permittunt, quandoquidem hoc modo vis ad effectum producendum requisita diminuitur. Cum igitur posita orificii supremi Zz amplitudine $= ee$ sit $\lambda + 1 = \frac{f^4}{e^4}$ vtique conueniet hoc orificium quam amplissimum effici, circa celeritatem autem nihil arbitrio nostro relinquitur quia enim tempore $\frac{\pi b}{2\sqrt{c}}$ sec. quantitas aquae $= 2bff$ superne eiicitur, quantitas vno minuto secundo eiecta est $= \frac{4}{\pi} cff$, quam cum actione vis sollicitantis comparemus. Cum igitur inter binos valores ipsius S medium capiendo sit quasi

si $S = \frac{5}{4}(\alpha + a + \delta h) + \frac{5}{6} \cdot \frac{(\lambda+1)cc}{4g}$, quia vis ipsa est $= Sff$ et celeritate $= c$ agit, erit eius actio $= cff(\frac{5}{4}(\alpha + a + \delta h) + \frac{5}{6} \cdot \frac{(\lambda+1)cc}{4g})$. Quod si ergo vis principalis, machinam totam agitans sit $= V$ eaque celeritate $= u$ operetur, eius actio erit $= Vu$, cui illa aequalis posita praebet quantitatem aquae singulis minutis secundis ad altitudinem $\alpha + a$ eleuatae:

$$\frac{\frac{16}{5\pi} Vu}{\alpha + a + \delta h + \frac{(\lambda+1)cc}{5g}}$$

vbi coëfficiens $\frac{16}{5\pi}$ fere aequatur vnitati.

Scholion 2.

123. Si autem vt modo sumsimus, duo tantum antliarum paria ad machinam applicentur etiamsi cubiti eas agitantes ad angulum rectum sint dispositi, tamen notabilis adhuc inaequalitas in viribus ad hoc requisitis deprehenditur; quam autem multo magis diminuere licet, si quatuor antliarum paria applicentur, et cubiti axis quatuor ea agitantes ad angulos semirectos sint inter se dispositi, tum enim fere perpetuo erit:

$$S = \frac{5}{2}(\alpha + a + \delta h) + \frac{17}{10} \cdot \frac{(\lambda+1)cc}{4g},$$

sicque singulis minutis secundis aquae quantitas $\frac{8}{\pi} cff$ eleuatur. Quare si vt ante vim machinam mouentem principalem vocemus V et celeritatem qua operatur u ab ea, quantitas aquae singulis minutis secundis eleuata erit

 $\frac{16}{5\pi} Vu$

$$\frac{\frac{16}{5\pi}\,\mathrm{V}u}{\alpha + a + \delta h + \frac{17}{100}\cdot\frac{(\lambda+1)cc}{g}},$$

quae a praecedente vix differt. Hinc intelligitur semper expedire celeritatem c quam minimam statui quod iam pro lubitu fieri potest, inde enim amplitudo antliarum ita definitur, vt sit

$$ff = \frac{\frac{2}{5c}\,\mathrm{V}u}{\alpha + a + \delta h + \frac{(\lambda+1)cc}{6g}}:$$

quare semper conducit ipsas antlias amplissimas confici vt inde celeritas c eo minor euadat: tum vero altitudo antliarum b per elongationem cubitorum ab axe determinatur, cum sit $b = 2\mathrm{FG}$, id quod arbitrio nostro permittitur.

CAPVT V.

DE MOTV AQVAE PER TVBOS DIVERSO CALORIS GRADV INFECTOS.

Problema 61.

124. Dato caloris gradu in singulis tubi locis quem statim cum aqua ibi contenta communicari assumimus definire motum, quem aqua in huiusmodi tubo recipere poterit.

So-