METHODVS NOVA ET FACILIS CALCVLVM VARIATIONVM TRACTANDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si detur aequatio quaecunque inter binas variabiles x et y ſeu quod eodem redit, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, tum omnes expreſſiones quomodocunque ex his duabus quantitatibus x et y formatae et compoſitae tamquam functiones vnius variabilis x, ſpectari poterunt, ita vt pro quouis valore determinato ipſius x, determinatos quoque valores ſortiantur.

2. Huiusmodi autem expreſſionum ex quantitatibus x et y formatarum, tria genera conſtitui conuenit; ad quorum primum referimus omnes illas expreſſiones in quibus tantum ipſae quantitates x et y occurrunt et per operationes quaſcunque ſiue algebraicas ſiue etiam tranſcendentes inter ſe ſunt complicatae, cuiusmodi ſunt $\alpha x^3 + \beta x y + \gamma y^2$, item $e^{\alpha x}$ Arc. ſin. y, in qua poſteriore operationes tranſcendentes cernuntur. Secundum autem genus eas complectitur expreſſiones in quibus praeter ipſas

quantitates x et y etiam ratio differentialium occurrit, quam rationem a ico ad differentialia cuiusque gradus extendimus, cuiusmodi expressionum indolem quo clarius perspiciamus, ponatur more solito

$$dy = p\,dx;\; dp = q\,dx;\; dq = r\,dx \text{ etc.}$$

ac tales expressiones erunt functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. Tertium denique genus eiusmodi expressiones continet in quibus praeterea formulae integrales inuoluuntur, quorsum pertinent expressiones illae in calculo variationum imprimis consideratae, quae hac forma sunt repraesentatae $\int V\,dx$, vbi V est functio quaecunque non solum ipsarum x et y; sed etiam quantitatum p, q, r etc., quin etiam ea alias insuper formulas integrales inuoluere potest.

3. His circa terna huiusmodi expressionum genera constitutis, facilius indolem calculi variationum explicare poterimus. Totum enim negotium huc redit, vt si proposita fuerit relatio quaecunque inter x et y eaque aliquantillum varietur, seu eius loco alia quaepiam relatio inter x et y ab illa infinite parum quomodocunque discrepans adhibeatur, inuestigari oporteat, quantam mutationem omnes illae expressiones, tam primi, quam secundi et tertii generis sint subiturae ad quod inueniendum in calculo variationum prouti equidem eum olim tractaui, praeter differentiale dy, quo quantitas y augetur dum x in $x+dx$ abit, ipsi quantitati y aliud incrementum δy tribuitur penitus ab arbitrio nostro pendens neque per x determinatum, cui incremento

varia-

variationis nomen indideram atque methodum exposueram variationes inde in singula expressionum genera redundantes inueniendi.

4. Videbatur igitur calculus variationum omnino singulare calculi genus constituere, verum postquam eius indolem accuratius essem perscrutatus, vniuersum hunc calculum perspexi leui facta immutatione ad secundam partem calculi integralis cuius elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento exposui, reduci posse. Pertractaui autem in ista secunda parte eas integrationes, quae circa functiones duarum variabilium versantur in quo calculi genere etiam nunc vix vltra prima elementa progredi licuit.

5. Illius scilicet incrementi loco, quod variationem appellaui, ipsam quantitatem y non amplius tamquam functionem solius variabilis x considero, sed eam tamquam functionem binarum variabilium x et t in calculum introduco, sic enim dum $dx(\frac{dy}{dx})$ significat verum differentiale ipsius y haec formula $dt(\frac{dy}{dt})$ idem significare poterit, quod antea signo δy indicauimus. Quo haec reddantur clariora concipiamus y vt applicatam cuiuspiam curuae abscissae x respondentem atque in calculo variationum, alia relatio requiritur, quae omnes alias curuas huic saltem proximas complectatur, omnes autem huiusmodi curuas, si X denotet illam functionem cui y aequatur tali aequatione contineri posse: $y = X + tV$ manifestum est; denotante V functionem quamcun-

que ipſius x. Sumta enim t infinite parua haec aequatio omnes omnino lineas curuas propoſitae proximas in ſe comprehendet atque adeo hanc formam multo generaliorem reddere licet, ita vt pro y functio quaecunque binarum variabilium x et t vſurpari poſſit, dummodo ea ita fuerit comparata, vt poſito $t = 0$, prodeat ipſa functio propoſita $y = X$.

7. Pro variatione igitur inuenienda, quantitas x vt conſtans ſpectari ipſius vero y differentiale tantum ex variabilitate ipſius t deſumi debet; vnde ſi expreſſio propoſita fuerit primi generis functio ſcilicet ipſarum x et y tantum, quam littera Z deſignemus; ponamus differentiatione conſueta prodire $M\,dx + N\,dy$ atque nunc pro variatione inuenienda fiat $dx = 0$, at loco dy ſcribatur $dt(\frac{dy}{dt})$, quippe quod eſt incrementum ex ſola variabilitate t oriundum. Quo facto variatio quaeſita huius expreſſionis Z erit $= N\,dt(\frac{dy}{dt})$. Quare ſi ipſa variatio ſimili modo per $dt(\frac{dZ}{dt})$ indicetur, habebimus $(\frac{dZ}{dt}) = N(\frac{dy}{dt})$.

7. Nunc ad expreſſiones ſecundi generis progrediamur, in quibus quum praeter x et y occurrant quantitates p, q, r etc. harum variationes quatenus y etiam a variabili t pendet, per legem generalem his formulis exprimentur

$$dt(\tfrac{dp}{dt});\; dt(\tfrac{dq}{dt});\; dt(\tfrac{dr}{dt}) \text{ etc.}$$

Quum autem pro ſola variabili x, fit

$$p = (\tfrac{dy}{dx});\; q = (\tfrac{dp}{dx}) = (\tfrac{ddy}{dx^2});\text{ et } r = (\tfrac{dq}{dx}) = (\tfrac{ddp}{dx^2}) = (\tfrac{d^3y}{dx^3}) \text{ etc.}$$

erit

erit per regulas generales differentiandi functiones duarum variabilium

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right);\ \left(\frac{dq}{dt}\right)=\left(\frac{d^3 y}{dx^2 dt}\right);\ \left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{d^4 y}{dx^3 dt}\right) \text{ etc.}$$

vbi meminiſſe iuuabit formulam verbi gratia $\left(\frac{d^3 y}{dx^2 . dt}\right)$ prodire, ſi functio y ter differentietur et duabus vicibus ſola x, vna vice autem ſola t variabilis ſumatur tum vero qualibet differentiatione differentialia ſimplicia dx vel dt abiiciantur.

8. His expeditis ſit iam Z functio quaecunque ipſarum x, y, p, q, r etc., hic quidem nullo adhuc reſpectu habito ad variabilem t, quippe quae tantum in ſubſidium variationis introducitur, atque differentiatione more ſolito facta prodeat

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.}$$

nunc igitur pro variatione ſeu $dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)$ inuenienda ſcribi debebit vt ſequitur:

$$dx = 0;\ dy = dt\left(\frac{dy}{dt}\right),\ dp = dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right),$$

$$dq = dt\left(\frac{d^3 y}{dx^2 dt}\right),\ dr = dt\left(\frac{d^4 y}{dx^3 dt}\right) \text{ etc.}$$

atque variatio quaeſita erit

$$dt\left(\frac{dZ}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\,dt\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right) + Q\,dt\left(\frac{d^3 y}{dx^2\,dt}\right) + R\,dt\left(\frac{d^4 y}{dx^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

vnde ſequitur diuiſione per dt facta fore:

$$\left(\frac{dZ}{dt}\right) = N\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3 y}{dx^2\,dt}\right) + R\left(\frac{d^4 y}{dx^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

9. Sit nunc etiam expreſſio quaecunque tertii generis propoſita $\int Z\,dx$, vbi Z ſit functio quaecunque

earumque ipsarum x, y, p, q, r etc. ita vt per differentiationem ordinariam habeatur:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr,$$

vbi quidem hactenus nulla ratio nouae variabilis t est habita atque integratio formulae propositae $\int Z dx$ per solam variabilem x est expedienda, quo obseruato, quaestio huc redit, vt si iam y vt functio binarum variabilium x et t consideretur et vbique quantitas y elemento $dt(\frac{dy}{dt})$ augeatur, augmentum quod ipsa formula integralis $\int Z dx$ inde capiet definiatur, hoc enim augmentum ipsa erit variatio formulae integralis propositae.

10. Quare ad hanc variationem inueniendam in functione illa Z vbique loco y scribatur eius valor auctus $y + dt(\frac{dy}{dt})$, sicque vt ante vidimus, ipsa functio Z augmentum capiet $dt(\frac{dZ}{dt})$ ex quo ipsa formula integralis augmentum capiet hoc: $\int dt(\frac{dZ}{dt})dx$, quod erit ipsa variatio quaesita. Quoniam vero in hac integratione sola x pro variabili habetur, elementum dt ante signum poni poterit ita vt iam variatio futura sit $= dt \int dx (\frac{dZ}{dt})$.

11. Quoniam igitur in § 8 valor ipsius $(\frac{dZ}{dt})$ iam euolutus habetur si ille hic substituatur formulae $\int Z dx$ variatio prodibit ita expressa:

$$dt \int dx (N(\tfrac{dy}{dt}) + P(\tfrac{ddy}{dx\,dt}) + Q(\tfrac{d^3y}{dx^2 dt}) + R(\tfrac{d^4y}{dx^3.dt}) \text{ etc.})$$

quam

quam etiam sequenti modo per partes repraesentasse iuuabit

$$dt\int N\,dx\left(\frac{dy}{dt}\right)+dt\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)+dt\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)+dt\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3dt}\right)\text{ etc.}$$

qua expressione contenti esse possemus, si quaestio circa casum aliquem determinatum institueretur, vbi y non solum functioni cuipiam datae ipsius x aequaretur, sed etiam noua variabilis t modo determinato introduceretur; tum enim omnes istas formulas $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. actu euoluere liceret, ita vt tum elementum dx per solam functionem ipsius x afficeretur, siquidem vti initio innuimus euolutione facta, iterum poni debet $t=0$.

12. At vero tales quaestiones determinatae nunquam occurrere solent; sed potius relatio inter y et x semper incognita esse solet, inde demum determinanda, quod variatio in nihilum abire debeat, quippe in quo Methodus maximorum et minimorum versatur. Huiusmodi quaestiones ergo ita enunciari conuenit, qualis relatio inter quantitates x et y intercedere debeat, vt formulae integralis propositae $\int Z\,dx$ variatio in nihilum abeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum introducatur? Quodsi autem quaestio hac ratione instituatur, perspicuum est formulis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. nullos certos valores tribui posse.

13. Verum hic prorsus singulare artificium in subsidium vocari potest, cuius ope formulas integrales posteriores in § 11 ad formam prioris redu-

duce-

ducere licet, ita vt in omnibus eadem formula $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ occurrat. Quum enim $dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ ſit differentiale formulae $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ſumta ſola x variabili, erit per conſuetam integralium reductionem:

$$\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)=P\left(\frac{dy}{dt}\right)-\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

ſimili modo quia $dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)$ eſt differentiale formulae $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ habebimus ſtatim hanc reductionem

$$\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)=Q\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right),$$

nunc vero per praecedentem reductionem fit

$$\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)-\int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

ſicque omnino habebimus

$$\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)=Q\left(\frac{ddy}{dx.\,dt}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+\int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

atque nunc ſatis perſpicuum eſt, ſequentem formulam integralem ita reductum iri:

$$\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right)=R\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)-\left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)+\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$-\int dx\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

ac ſi inſuper talis formula adeſſet, foret:

$$\int S\,dx\left(\frac{d^5y}{dx^4\,dt}\right)=S\left(\frac{d^4y}{dx^3.\,dt}\right)-\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)+\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$$
$$-\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+\int dx\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

14. Quodſi nunc has formulas reductas ſubſtituamus in expreſſione variationis quaeſitae, formulae $\int Z\,dx$, tum haec variatio non ſolum formulis conſtabit integralibus, ſed etiam continebit partes abſolu-

solutas, quarum aliae formulam $(\frac{dy}{dt})$, aliae hanc $(\frac{ddy}{dxdt})$; aliae vero hanc $(\frac{d^3y}{dx^2dt})$ etc. continebunt; dum contra omnes integrales eandem formulam $(\frac{dy}{dt})$ inuoluunt, quocirca variatio quaesita formula propositae $\int Z\,dx$, sequenti modo habebitur expressa;

$$dt\int dx(\tfrac{dy}{dt})(N-(\tfrac{dP}{dx})+(\tfrac{ddQ}{dx^2})-(\tfrac{d^3R}{dx^3})+(\tfrac{d^4S}{dx^4})\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{dy}{dt})\quad(P-(\tfrac{dQ}{dx})+(\tfrac{ddR}{dx^2})-(\tfrac{d^3S}{dx^3}))$$
$$+dt(\tfrac{ddy}{dxdt})(Q-(\tfrac{dR}{dx})+(\tfrac{ddS}{dx^2})-\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{d^3y}{dx^2dt})(R-(\tfrac{dS}{dx})\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{d^4y}{dx^3dt})(S-\text{ etc.})$$
$$+\text{ etc.}$$

15. Quamquam hic meum institutum non est methodum maximorum et minimorum pertractare, quoniam hoc alibi iam satis copiose est factum; tamen hic praetermittere non possum, quin obseruem, si variatio formulae $\int Z\,dx$ euanescere debeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum ingrediatur; id nullo modo fieri posse, nisi tota pars prima integralis seorsim euanescat, ex quo necesse est, inter x et y hanc aequationem constitui

$$0=N-(\tfrac{dP}{dx})+(\tfrac{ddQ}{dx^2})-(\tfrac{d^3R}{dx^3})+(\tfrac{d^4S}{dx^4})\text{ etc.}$$

et quia nunc variabilis t nulla amplius ratio habetur, sicque tantum vnica adhuc variabilis x superest, clausulis omissis hanc habebimus aequationem:

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}\text{ etc.}$$

 qua

qua desiderata relatio inter x et y exprimitur. Partes autem absolutae, tantum ad terminos extremos referuntur, circa quas ea obseruari debent, quae iam alibi fusius sunt praecepta.

16. Hic etiam non immoror iis casibus quibus quantitas Z ipsa insuper formulas integrales inuoluit, quoniam etiam hoc argumentum alibi satis est pertractatum, verum hic opus multo magis arduum molior, dum eandem hanc methodum ad functiones adeo duarum variabilium extendere conabor, quod equidem in dissertatione illa, quam olim de calculo variationum conscripseram, tunc temporis praestare non potui, multitudine tot quantitatum diuersi generis deterritus.

Applicatio Methodi praecedentis ad functiones duarum variabilium.

17. Si habeatur aequatio quaecunque inter ternas variabiles x, y et z ea naturam cuiuspiam superficiei exprimi censemus, vbi quidem binas coordinatas x et y in plano horizontali constitui intelligamus, tertiam vero z verticalem, sicque haec tertia z, vt functio spectari potest binarum x et y; vnde more solito duplicia incrementa consideranda occurrunt, quatenus scilicet a variabilitate ipsius x, vel ipsius y nascuntur. Illud nempe incrementum ipsius z quod ex variatione ipsius x oritur hac formula:

$$d x \left(\frac{d z}{d x}\right)$$

hoc

hoc vero ex variatione ipſius y oriundum iſta:

$$dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

indicari ſolet.

18. Quodſi iam haec ſuperficies aequatione inter x, y et z expreſſa, cum aliis quibuscunque ſuperficiebus ipſi proximis comparari debeat, id commodiſſime fiet nouam variabilem t introducendo, ita vt iam z ſpectanda ſit vt functio trium variabilium, x, y et t, quae quidem ſumto $t = 0$, in functionem ſuperiorem abeant, at dum ipſi t valores infinite parui tribuuntur, omnes ſuperficies proximas complectatur, quo poſito perſpicuum eſt, quoniam variabiles x et y a noua t, neutiquam pendent earum differentialia dx et dy nullo modo cum dt permiſceri, ſola vero coordinata z triplicis generis incrementa capere poteſt, praeter bina enim iam ante commemorata, quae vel ab x vel ab y profiſiſcuntur, accipere poterit incrementum a variabilitate ipſius t oriundum, quod tali formula $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$ eſt repraeſentandum.

19. Ponamus nunc V eſſe expreſſionem vtcunque ex ipſis coordinatis x, y et z compoſitam, ſiue per meras operationes algebraicas, ſiue etiam tranſcendentes formatas, quae more ſolito differentiata praebeat:

$$dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

atque ſi eiusdem incrementum deſideretur a noua variabili t ſola oriundum manifeſtum eſt, ſtatui debere $dx = 0$ et $dy = 0$, at loco dz ſcribi debere $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ſicque hoc ſignandi modo vſurpato habebimus

$$dt\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dz}{dt}\right) \text{ ideoque } \left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Tales autem expreſſiones vt ante primum genus conſtituunt.

20. Progrediamur ergo ad ſecundum genus, quo expreſſio v praeter ipſas coordinatas x, y, z etiam rationes differentialium earum inuoluat; atque hic quidem ante omnia, formam huiusmodi expresſionum accuratius perpendi oportet. Quoniam autem hic ſtatim quantitas z duplicia incrementa capere poteſt (hic enim nondum ad nouam variabilem t reſpicimus) ponamus breuitatis gratia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \text{ et } \left(\frac{dz}{dy}\right) = p',$$

quae duae litterae differentialia primi gradus comprehendunt, deinde pro differentialibus ſecundi gradus ponamus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = q;\ \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = q';\ \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = q'',$$

vnde ſequentes relationes inter has litteras et praecedentes notaſſe iuuabit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q;\ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) = q';\ \left(\frac{dp'}{dy}\right) = q''$$

ſimili modo differentialia tertii gradus his formulis complectamur:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r;\ \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right) = r';\ \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) = r'';\ \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r'''$$

vbi

vbi hae relationes ſunt notandae:

$r = (\frac{dq}{dx})$; $r' = (\frac{dq}{dy}) = (\frac{dq'}{dx})$; $r'' = (\frac{dq'}{dy}) = (\frac{dq''}{dx})$; $r''' = (\frac{dq''}{dy})$

quarta autem differentialia has formulas praebent:

$s = (\frac{d^4 z}{dx^4})$; $s' = (\frac{d^4 z}{dx^3 dy})$; $s'' = (\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2})$; $s''' = (\frac{d^4 z}{dx\, dy^3})$;
$s'''' = (\frac{d^4 z}{dy^4})$

et ſic vltra quousque libuerit.

21. His explicatis expreſſiones ſecundi generis, praeter ipſas coordinatas x, y et z etiam quantitates p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. vtcunque inuoluere poſſunt, ex quo ſi V denotet quamcunque huiusmodi expreſſionem eius differentiale more ſolito ſumtum ſequenti forma exhibeamus:

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz + P\,dp &+ Q\,dq + R\,dr \\ + P'dp' &+ Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &+ Q''dq'' + R''dr'' \\ &\qquad\quad + R'''dr''' \end{aligned} \quad \text{etc.}$$

quam formam animo imprimi conueniet, ne opus ſit eam ſaepius repetere.

22. Quodſi iam huiusmodi expreſſionum variatio, ſeu id incrementum inueniri debeat, quod reſultat ex variatione nouae variabilis t, quam in valorem coordinatae z introducimus, iam vidimus ſumi debere $dx = 0$ et $dy = 0$, tum vero fieri $dz = dt\,(\frac{dz}{dt})$, ob eandem vero rationem ſequentia differentialia ſimili modo erunt exprimenda, quae cum

cum ſuis transformationibus per ſe ſatis claris ita ſe habebunt:

$$dp = dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right);\quad dp' = dt\left(\frac{dp'}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)$$
$$dq = dt\left(\frac{dq}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right);\quad dq' = dt\left(\frac{dq'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right);$$
$$dq'' = dt\left(\frac{dq''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)$$
$$dr = dt\left(\frac{dr}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^3\,dt}\right);\quad dr' = dt\left(\frac{dr'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)$$
$$dr'' = dt\left(\frac{dr''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right);\quad dr''' = dt\left(\frac{dr'''}{dt}\right)$$
$$= dt\left(\frac{d^4z}{dy^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

23. Totum ergo negotium huc redit, vt in formula illa differentiali pro dV data loco ſingulorum differentialium iſti valores ſubſtituantur, hocque modo prodibit variatio expreſſionis V ex ſola variabilitate ipſius t oriunda, ſeu valor huius formulae $dt\left(\frac{dV}{dt}\right)$, quoniam autem ſingula membra elemento dt erunt affecta, eo omiſſo adipiſcimur ſequentem formam:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right) + P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2.\,dt}\right) + R\left(\frac{d^4z}{dx^3.\,dt}\right)$$
$$+ P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right) + Q'\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right) + R'\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)$$
$$+ Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2.\,dt}\right) + R''\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right)$$
$$+ R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3.\,dt}\right)$$

quae ad variationes quarumcunque expreſſionum ſecundi generis inueniendas ſufficit.

24. Nunc expreſſiones tertii generis adgredi poterimus formulas integrales inuoluentes in quibus potiſſi-

potiſſimum vis huius methodi cernitur. Quando enim quaeſtio circa maxima vel minima quae in ſuperficiebus occurrere poſſunt, verſatur; formula illa, quae maximum vel minimum reddi debet neceſſaro eſt formula integralis atque adeo formula integralis duplicata, cuius indolem hic paucis explicari conuenit. Quemadmodum enim in praecedente parte, formulae integrales ſimplices ſunt conſideratae, quae ad datam abſciſſam x ſunt relatae, ita hic in ſuperficiebus, quaeſtiones ſemper non ad ſolam abſciſſam x, ſed ad totum quoddam ſpatium in plano horizontali tanquam baſem ſunt referendae cui portio ſuperficiei quae maximi minimiue quadam proprietate gaudere debet, immineat. Quare quum talis baſis duplicem habeat dimenſionem alteram ab x, alteram vero ab y pendentem, huiusmodi formulae integrales erunt duplicatae, hoc modo exprimi ſolitae $\int\int V\, dx\, dy$, eae ſcilicet duplicem integrationem poſtulant, atque in priore ſola coordinata x vel ſola y pro variabili habetur, et integratio vsque ad terminos baſis propoſitae extenditur, tum vero demum etiam altera variabilis aſſumitur atque altera integratio abſoluitur. Et quoniam perinde eſt vtra prius pro variabili habeatur, ſine diſcrimine geminam illam integrationem ſigno duplicato $\int\int$ indicamus; neque vero hic loci eſt, omnia quae circa huiusmodi integrationes duplicatas ſunt obſeruanda, fuſius exponere, quippe quod argumentum in Tomo XIV. horum Commentariorum iam ſatis accurate eſt pertractatum.

25. Quodsi ergo huiusmodi formulae integralis $\iint V\,dx\,dy$ variatio quaeri debeat, vbi V denotat expressionem quamcunque vel primi vel secundi generis, ex superioribus satis liquet hanc variationem ita expressum iri:

$$dt \iint \left(\frac{dV}{dt}\right) dx\,dy$$

quae forma iterum est integralis duplicata et prouti vel x vel y priore integratione vt constans spectatur, ea formula vel hoc modo

$$dt \int dx \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dy\,,$$

vel hoc modo

$$dt \int dy \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx$$

exhiberi potest.

26. Sit nunc V talis expressio qualem supra § 19 descripsimus et cuius variationem seu valorem $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ in § 23 euoluimus, tantum opus erit, singula membra ibi exposita heic loco $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ substituere; vnde sequens congeries formularum integralium nascetur, quibus iunctim sumtis variatio quaesita $dt \iint \left(\frac{dV}{dt}\right) dx\,dy$ exprimetur:

$$\begin{aligned} dt\iint N\left(\frac{dz}{dt}\right)dx\,dy &+ dt\iint P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx.\,dy + dt\iint Q\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)dx\,dy + dt\iint R\left(\frac{d^4z}{dx^3\,dt}\right)dx\,dy \\ &+ dt\iint P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)dx\,dy + dt\iint Q'\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)dx\,dy + dt\iint R'\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)dx\,dy \\ &+ dt\iint Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)dx\,dy + dt\iint R''\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right)dx\,dy \\ &+ dt\iint R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3\,dt}\right)dx\,dy \end{aligned}$$

etc.

27.

27. Nunc ſingula haec membra poſt primum peculiares reductiones admittunt, quas probe notaſſe iuuabit. Pro ſecundo membro ſumamus primo x tantum variabile eritque:

$$\int P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx = P\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dx\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

vnde etiam alteram integrationem adiiciendo erit:

$$\iint P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx\,dy = \int P\left(\frac{dz}{dt}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP}{dx}\right)dx\,dy.$$

Pro tertio membro ſumatur primo ſola y variabilis eritque:

$$\int P'\left(\frac{ddz}{dy.\,dt}\right)dy = P'\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

vnde ipſum tertium membrum tranſibit in

$$\iint P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)dx\,dy = \int P'\left(\frac{dz}{dt}\right)dx - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP'}{dy}\right)dx\,dy.$$

28. Pro ſequentibus membris hae ipſae reductiones ſequentes dabunt transformationes, pro quarto ſcilicet habebimus ex ſecundo

$$\iint Q\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)dx = \int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \iint\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dx\,dy$$

at vero hoc membrum poſterius ad ſimilitudinem ſecundi reducitur hoc modo, vbi tantum loco P ſcribi debet $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$:

$$\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy$$

ita vt nunc quartum membrum praebeat hanc formam:

$$\int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy + \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy.$$

 Simili

Simili modo quintum membrum ope secundi reducitur vbi loco P scribitur Q' et loco $\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)$, $\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)$, siue loco $\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)$ scribendo $\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)$ sicque habebitur

$$\iint Q'\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dx\,dy = \int Q'\left(\frac{d\,d\,z}{dy\,dt}\right)dy - \iint\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)d\,x\,dy$$

quod posterius membrum cum tertio conferatur, vbi loco tantum P'' scribi debet $\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)$, quo pacto totum membrum induet hanc formam:

$$\int Q'\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)dx + \iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,dy}\right)dx\,dy,$$

sextum vero membrum bis cum secundo collatum reducitur ad hanc formam:

$$\int Q''\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q''}{d\,y}\right)dx + \iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right)dx\,dy$$

28. Si hoc modo vlterius progrediamur ad sequentia membra, septimum membrum in sequentes partes resoluitur:

$$\int R\left(\frac{d^3\,z}{d\,x^2\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R}{d\,x}\right)dy + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R}{d\,x^2}\right)dy$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R}{d\,x^3}\right)d\,x\,dy$$

deinde octauum membrum

$$\int R'\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R'}{d\,x}\right)dy + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R'}{d\,x\,d\,y}\right)dy$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\,d\,y}\right)dx\,dy$$

tum nonum membrum fiet

$$\int R''\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R''}{d\,y}\right)dx + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R''}{d\,x\,d\,y}\right)dx$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\,d\,y^2}\right)d\,x\,dy$$

et decimum

$$\int R'''\left(\frac{d^3\,z}{d\,y^2\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R'''}{d\,y}\right)dx + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R'''}{d\,y^2}\right)dx$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right)dx\,dy.$$

29.

29. Colligamus nunc omnes iſtas formulas in vnam ſummam, atque variatio quaeſita pluribus conſtabit membris, quarum primum formulas integrales duplicatas, reliqua vero ſimplices complectentur, hoc pacto variatio quaeſita ſequenti modo erit expreſſa:

$$
dt\iint dx\,dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left\{\begin{array}{r}
N-\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\\
-\left(\frac{dP'}{dy}\right)+\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)-\left(\frac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right)\\
+\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)\\
-\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)
\end{array}\right\}\text{etc.}
$$

$$
+dt\left\{\begin{array}{r}
\int\left(\frac{dz}{dt}\right)P\,dy+\int Q\,dy\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)-\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R\,dy\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)\\
\int\left(\frac{dz}{dt}\right)P'dx+\int Q'dy\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R'dy\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\
+\int Q''dx\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R''dx\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\
+\int R'''dx\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-\int dy\left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\\
-\int dy\left(\frac{dR'}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)\\
-\int dx\left(\frac{dR''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right)\\
-\int dx\left(\frac{dR'''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)
\end{array}\right\}\text{etc.}
$$

30. Verum quid haec ſingula membra proprie ſignificent et ad quemnam vſum adhiberi queant, neutiquam adhuc perſpicere licet, unde hoc argumentum cuius prima fundamenta etiamnunc vix iacta ſunt cenſenda omnem Geometrarum attentionem atque multo accuratiorem inueſtigationem poſtulare videtur, quod negotium vix ante ſuſcipere licet, quam

casus nonnulli particulares omni studio et diligentia fuerint euoluti, quin etiam ipsa pars prior, quae tantum circa functiones vnius variabilis versatur neutiquam adhuc satis clare et distincte est enucleata, ita vt perspicue intelligeremus veram indolem atque naturam singularum partium, quibus variationem contineri inuenimus, quem in finem dilucidationes sequentes hic adiungere visum est.

Dilucidationes super Theoria variationum ad functiones saltem vnius variabilis accommodata.

31. Quaestiones quae hic occurrunt ad hoc problema generale reuocare licet:

Explicatio ipsius Problematis.

Si y *fuerit functio quaecunque ipsius* x, *indeque definiatur valor cuiuspiam formulae integralis datae* ſ Z d x, *denotante* Z *expressionem ex ipsis quantitatibus* x *et* y *earumque differentialium rationibus vtcunque compositam*, *quaestio est*, *si loco illius functionis* y *alia quaecunque illi proxima seu infinite parum tantum ab ea discrepans adhibeatur*, *quanto maiorem minoremve valorem*, *tum eadem formula integralis* ſ Z d x *sit consecutura.*

32. At quia hoc modo ista quaestio enunciata nimis videri posset abstracta, eam more soluto ad Geometriam reuocemus. Sit igitur super axe A P, proposita curua quaecunque A M aequatione inter abscissam $AP = x$ et applicatam $PM = y$ expressa, pro qua definiri oporteat valorem formulae

Tab. II. Fig. 1.

cuius-

cuiuspiam integralis $\int Z\,dx$, qui ſit $= W$, quo poſito conſideretur alia curua quaecunque $\alpha\mu$ infinite parum a data diſcrepans, ac ſi pro hac curua itidem definiatur valor formulae $\int Z\,dx$, quaeritur, quantum iſte valor a praecedente ſit diſcrepaturus; euidens enim eſt, hoc diſcrimen praebere ipſam variationem quantitatis W, quam ſupra ope calculi variationum exhibuimus.

33. Quo haec adhuc clariora euadant, exemplum quodpiam proferamus, quo propoſita curua A M eiusque axe A P tamquam verticali conſiderato, quaeritur tempus quo corpus ex puncto A ſuper hac curua AM deſcendens vsque ad punctum M pertingit. Iam quia celeritas corporis in M, eſt vt $\surd AP = \surd x$ et ipſum curuae elementum $= dx\surd(1+pp)$, poſito ſcilicet $dy = p\,dx$ vti in ſolutione generali eſt praeceptum; erit tempus per elementum Mm $= dx\frac{\surd(1+pp)}{\surd x}$ vnde formula integralis $\int Z\,dx$ pro hoc caſu abit in $\int dx\frac{\surd(1+pp)}{\surd x}$, ita vt habeatur $Z = \frac{\surd(1+pp)}{\surd x}$, quare nunc tempus erit definiendum, quo corpus ſuper curua quacunque proxima $\alpha\mu$ deſcendens ab α vsque ad μ perueniet, vbi diſcrimen dabit ipſam variationem formulae $\int dx\frac{\surd(1+pp)}{\surd x}$ huic caſui conuenientem.

34. Quoniam hic formula integralis conſideranda venit, ante omnia diſpiciendum eſt, quomodo eam determinari oporteat. In exemplo quidem allato, manifeſtum eſt formulae $\int\frac{dx\surd(1+pp)}{\surd x}$ integrale

grale ita capi debere, vt euanescat posito $x = o$, vnde etiam in genere intelligitur, semper pro integratione formulae $\int Z\,dx$, certum aliquem terminum veluti punctum A, tamquam principium integrationis statui atque integrale $\int Z\,dx$ euanescere debere posito $x = o$, vel si forte circumstantiae aliter fuerint comparatae, tribuendo ipsi x valorem quempiam datum, deinde vero initio constituto, valor formulae $\int Z\,dx = W$ abscissae $AP = x$ respondebit.

35. His circa formulam integralem $\int Z\,dx$ obseruatis, videamus, quamnam ideam nobis de curuis illis proximis $\alpha\,\mu$ formare debeamus. Ac primo quidem patet, has curuas continuo quodam tractu ductas esse debere, ita vt in iis nusquam anguli aliiue saltus deprehendantur; hoc solo notato, perinde est siue istae curuae lege quapiam continuitatis vel aequatione quapiam contineantur, siue sint adeo discontinuae, quasi libero manus motu ductae.

36. Huiusmodi lineae curuae commodissime sequenti modo formatae menti repraesentari possunt. Ducatur scilicet pro lubitu linea curua quaecunque BN eidem abscissae AP imminens, ac ductis ad singula axis puncta X applicatis XYV singula interualla YV in ratione finiti ad infinite paruum secentur in v, ita vt Yv sit quasi pars infinitesima interualli YV. Hoc enim modo curua $\alpha\,\nu\,\mu$ obtinebitur a curua proposita AM in omnibus punctis infinite parum dissita, qualem ad institutum nostrum requi-

requirimus. Praeterea tamen notandum eſt, in curva illa arbitraria B N nusquam tangentem ad axem A P normalem eſſe debere, quia hoc modo diuiſio illorum interuallorum turbaretur. Atque nunc euidens eſt, non ſolum interualla Y v eſſe infinite parva, ſed etiam tangentes in punctis Y et v infinite parum a parallelismo deficere.

37. His circa ipſam quaeſtionis propoſitionem annotatis, contemplemur nunc accuratius quoque ſolutionem ſupra inuentam, eiusque ſingulas partes, vt quid quaelibet earum innuat et ad quemnam vſum ſit transferenda perſpicue intelligamus; ſolutionem autem in §. 14. datam hic contemplabimur. Statim igitur conſideremus primam variationis ibi inuentae partem, quae hac formula integrali continetur. Explicatio partis primae in variatione.

$$dt \int dx \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.}\right)$$

cuius integratio ita capi debet, vt in ipſo termino initiali A euaneſcat, qua conditione conſtans arbitraria determinatur, quod ſi ergo in ſingulis punctis X Y haec formula applicata intelligatur, aggregatum omnium iſtarum formularum elementarium ab initio A vsque ad terminum M extenſum praebebit primam partem variationis quaeſitae, atque hic quidem in Figura perſpicuum eſt, ſpatiolum Y v exprimere incrementum applicatae y a ſola variabili t oriundum ita vt ſit $Yv = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

38. Haec igitur prima pars variationis inuoluit omnia ſpatiola $Y v$ intra terminos A et M contenta, quae quum in infinitum variari poſſint, atque adeo a poſitiuis ad negatiua tranſire queant, maximae variationes hic locum habere poſſunt. Verum tamen vnicus caſus hinc debet excipi, quo curva A M ita eſt comparata, vt ſit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^3} \text{ etc.}$$

tum enim vtcunque curuae proximae fuerint comparatae, iſta pars prima variationis, ſemper in nihilum abit. Neque deuiatio curuarum proximarum $\alpha\,\mu$ a principali A M intra terminos A et M quicquam ad variationem confert; ex quo haec curua reſpectu formulae integralis $\int Z\,dx$ inprimis eſt memorabilis, quandoquidem in ea haec formula integralis vel maximum vel minimum obtinet valorem.

Explicatio partis ſecundae in variatione.

39. Progrediamur nunc ad ſecundam partem variationis ſupra inuentae, quae eſt

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

circa quam primum obſeruo, quoniam ea ad terminum M refertur per integrationem rite inſtitutam, inſuper adiici debere, ſimilem expreſſionem ad terminum priorem A relatam, at vero ſigno contrario affectam, id quod ideo eſt neceſſarium vt facto $x = o$, etiam haec expreſſio penitus tollatur. Refertur autem iſta pars

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$

vnice

vnice ad vltimum terminum M, vbi $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ipſum ſpatiolum $M\mu$ exprimit, ſimilique modo in alteram partem pro initio A ſpatiolum $A\alpha$ ingredietur. Hinc patet ſi omnes curuae proximae $\alpha\mu$ per ipſos ambos terminos A et M ducantur tum variationem ſecundae partis in nihilum abire.

40. Conſideremus autem caſum, quo curua proxima $\alpha\mu$ per primum quidem terminum A tranſit non vero quoque per alterum M, ſed ſit punctum μ eius terminus, atque variatio ex ſecunda parte nata erit

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} \text{ etc.}\right).$$

Atque hinc etiam definire poterimus variationem ex eodem fonte oriundam, ſi curua proxima $A\mu$, non in ipſo puncto μ ſed alio quocunque ω terminetur, exiſtente ſemper interuallo $\mu\omega$ infinite paruo. Ducta enim applicata $\omega m p$, variatio modo inuenta inſuper augeri debet particula formulae $\int Z\,dx$, quae elemento $Pp = dx$ reſpondet, quae particula quum ſit $= Z.\,Pp$, pro arcu curuae proximae $A\omega$ erit variatio ex ſecunda parte oriunda

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} \text{ etc.}\right) + Z.\,Pp.$$

41. Ducatur recta $M\omega$ et quaeramus angulum $\omega M m$, quem haec recta $M\omega$ cum curua principali conſtituit, ponatur iſte angulus $\omega M m = \omega$ et ducta MO ipſi Pp parallela, quia eſt proxime $m\omega = M\mu$ et anguli $m M o$ tangens $= p$ ideoque

 om

$o\,m = p.\,P\,p$; habebitur $O\,\omega = M\,\mu + p.\,P\,p$ vnde fit:

$$\text{tang. } \omega\, M\, o = \frac{M\,\mu}{P\,p} + p,$$

atque hinc colligitur

$$\omega\, M\, m = \text{tang. } \omega = \frac{M\,\mu}{P\,p\,(1 + p\,p) + M\,\mu.\,p}.$$

Seruemus nunc in calculo hunc ipſum angulum ω, atque hinc habebimus ſpatiolum:

$$M\,\mu = \frac{P\,p\,(1 + p\,p)\,\text{tang. } \omega}{1 - p\,\text{tang. } \omega}$$

quo valore ſubſtituto variatio pro arcu $A\,\omega$ erit:

$$P\,p\,\Big(Z + \frac{(1 + p\,p)\,\text{tang. } \omega}{1 - p\,\text{tang. } \omega}.\,\Big(P - \frac{d\,Q}{d\,x} + \frac{d\,d\,R}{d\,x^2} \text{ etc.}\Big)\Big).$$

42. Nunc operae pretium erit eum angulum ω definire, vt iſta variatio in nihilum abeat, id quod eueniet, ſi capiatur

$$\text{tang. } \omega = \frac{Z}{p\,Z - (1 + p\,p)\,(P - \frac{d\,Q}{d\,x} + \frac{d\,d\,R}{d\,x^2} \text{ etc.})}$$

quare hoc angulo ita conſtituto pro omnibus lineis proximis vbicunque in recta $M\,\omega$ terminatis variatio ex ſecunda parte oriunda euaneſcet. Hic caſus prae caeteris omnino notatu dignus conſiderari meretur, quo recta $M\,\omega$ fit ad curuam principalem in puncto M normalis, quod euenit, ſi fuerit

$$p\,Z - (1 + p\,p)\,(P - \frac{d\,Q}{d\,x} + \frac{d\,d\,R}{d\,x^2} \text{ etc.}) = 0,$$

qua aequatione certa conditio ipſius formulae integralis $\int Z\,d\,x$ ſiue indoles expreſſionis Z definitur.

43.

43. Non igitur pigebit in talem expreſſionem Z inquiſiuiſſe, ac primo quidem patet eam praeter coordinatas x et y etiam quantitatem p inuoluere debere. Sumamus autem praeterea in Z non ingredi litteras q, r etc. ita vt ſit $Q = 0$, $R = 0$, ac noſtra aequatio reſoluenda erit:

$$p Z = (1 + pp) P,$$

vbi notandum eſt eſſe

$$d Z = M\, d x + N\, d y + P\, d p,$$

quare ſi ambae coordinatae x et y tanquam conſtantes tractentur erit

$$d Z = P\, d p \quad \text{ideoque} \quad P = \frac{d Z}{d p},$$

quo valore ibi introducto haec prodibit aequatio

$$\frac{d Z}{Z} = \frac{p\, d p}{1 + pp}$$

quae integrata dat

$$L. Z = L. \surd (1 + pp) + L. C$$

quae conſtans functio quaecunque ipſarum x et y eſſe poteſt, talis functio ſit V atque habebimus

$$Z = V \surd (1 + pp),$$

ideoque formula integralis

$$= \int V\, d x \surd (1 + pp).$$

Huius formulae ſignificatum ſatis eleganter per tempus, quo corpus quodpiam per curuam A M promouetur exprimi poteſt. Si enim celeritas in puncto M, fuerit $= \frac{1}{V}$, hoc eſt ſi celeritas in ſingulis

 punctis

punctis proportionalis fuerit, functioni cuicunque binarum variabilium x et y, tum

$$V\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$$

exprimit elementum temporis ideoque formula

$$\int V\,dx\,\sqrt{(1+pp)},$$

totum tempus quo corpus ab A ad M peruenit.

Explicatio partis tertiae in variatione.

44. Quod ad tertiam partem variationis attinet scilicet

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{ddS}{dx^2}\text{ etc. }\right)$$

ea locum non habet, nisi expressio Z etiam differentialia secundi gradus inuoluat, quod quidem rarissime vsu venire solet. Hic autem obseruandum est, quoniam $M\mu = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ fore pro sequenti elemento

$$m\omega = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)+dt\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$$

vnde colligitur

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)=\frac{m\omega - M\mu}{dx}=\frac{M\omega - M\mu}{Pp},$$

hac autem formula exprimitur declinatio directionis $\mu\omega$ a directione Mm, quae quidem, vt iam ante obseruauimus semper est quam minima.

45. Quodsi ergo Tangens in μ perfecte fuerit parallela tangenti in M, quod euenit, si etiam in curua generatrice B N, tangens ad N huic fuerit parallela, tum variatio ex tertia parte oriunda prorsus euanescit, quod etiam de termino initiali A est intelligendum, si tangentes in A et B inter se fuerint

fuerint parallelae, atque hinc iam perſpicitur, vt variationes ex quarta parte oriundae euaneſcant, neceſſe eſſe, vt praeterea etiam radii oſculi in punctis M et μ fiant aequales.

46. Atque ex his iam ſatis perſpicuum eſt, variationes ex ſecunda parte oriundas euaneſcere, ſi omnes curuae proximae $\alpha\mu$ per vtrumque terminum M et A ducantur. Deinde vero inſuper etiam variationes tertiae partis, ſi omnes curuae proximae ſimul in vtroque termino A et M cum curua principali AM communes habeat tangentes. Praeterea vero quoque variariones quartae partis in nihilum abire, ſi omnes curuae proximae in terminis A et M inſuper ratione curuaturae cum curua principali conveniant. Hic autem probe meminiſſe iuuabit, variationes tertiae partis per ſe euaneſcere, ſi modo quantitas Z non differentialia ſecundi gradus inuoluat; quartae vero partis ſemper euaneſcere niſi differentialia tertii gradus in quantitatem Z ingrediantur, et ita porro. Vnde quum initio oſtenderimus, quomodo variatio primae partis ad nihilum ſit redigenda, nunc euidentiſſime intelligimus ſub quibusnam conditionibus, omnes variationis partes ſimul euaneſcant.

Dilucidationes circa curuas maximi, minimiue proprietate praeditas.

47. Si formula integralis $\int Z\,dx$ in curua quaeſita debeat eſſe vel maximum vel minimum, iam ſupra oſtendimus, poſito

dZ

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

naturam huius curuae, hac exprimi aequatione:

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \text{ etc.}$$

quae aequatio nisi quantitates P, Q, R euanescant, vel sint constantes, semper est differentialis vel secundi, vel quarti, vel sexti, aliusue gradus paris. Hic ergo statim memoratu dignum occurrit quod ista aequatio nunquam vel simpliciter differentialis, vel tertii, vel quinti, aliusue gradus imparis euadat, id quod mox clarius exponemus.

48. Quaestiones ergo huc pertinentes, sponte in varias diuiduntur pro gradu differentialium, ad quem aequationes exsurgunt, quandoquidem ab hoc gradu natura solutionis maxime pendet, propterea quod ea semper totidem constantes arbitrarias inuoluit. Ad primam ergo classem referimus eos casus quibus aequatio pro maximo vel minimo inuenta prorsus est finita. Ad secundam autem classem eos, quibus haec aequatio fit differentialis secundi gradus, ad tertiam eos, quibus aequatio ad quartum gradum ascendit et ita porro; quas singulas classes ordine describamus.

I. Classis. Ad solutionem ergo primae classis formula $\int Z\,dx$ statim perducit quando expressio Z tantum per coordinatas x et y exclusis omnium differentialium rationibus determinatur, quia enim hoc casu, simpliciter fit

$$dZ = M\,dx + N\,dy$$

aequatio pro curua maximi vel minimi erit $N = o$, quae ergo aequatio omnino est determinata, atque adeo

adeo curua satisfaciens vnica in suo genere. Veluti si quaeratur linea in qua valor formulae $\int dx(2xy-yy)$ fiat maximus vel minimus, ob $Z = 2xy - yy$, ideoque $N = 2(x-y)$, aequatio quaesita erit $x-y=0$, seu linea quaesita erit recta ad axem angulo semirecto inclinata, pro qua ergo valor formulae propositae integralis est $\frac{x^3}{3}$, qui vtique minor est, quam si vlla alia linea curua sumeretur pro eadem scilicet abscissa.

49. His autem casibus prima classis nondum exhauritur, sed dantur adhuc alii perinde ad aequationes finitas ducentes, ad quod ostendendum, sit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipsarum x et y atque $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy$, iamque ponatur $Z = \mathfrak{Z}p$ eritque $M = \mathfrak{M}p$; $N = \mathfrak{N}p$; $P = \mathfrak{Z}$, quare vt formula $\int Z\,dx$ fiat maximum vel minimum aequatio reperitur:

$$0 = \mathfrak{N}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{N}p - \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{N}.dy}{dx} = -\mathfrak{M}$$

quae itidem est aequatio finita. Quod quidem etiam statim praeuidere licuisset, quum enim sit $p\,dx = dy$, haec formula integralis $\int \mathfrak{Z}\,dy$ a praecedente $\int Z\,dx$ aliter non differt, nisi quod coordinatae x et y sint permutatae, vnde quod de priore erat affirmatum, etiam de posteriore valet.

Hinc natura primae classis adhuc generalius ita describi potest; vt ea complectatur omnes formulas integrales huiusmodi $\int(Z + \mathfrak{Z}p)\,dx$, vbi litterae Z et $\mathfrak{Z}$ denotant functiones quascunque ipsarum x et y, tum enim aequatio pro curua maximi vel minimi erit:

$$o = N - \mathfrak{M},$$

quae eſt aequatio omnino determinata.

II. Claſſis. 50. Ad claſſem ſecundam referimus eas formulas integrales $\int Z dx$, quae deducunt ad aequationem differentialem ſecundi gradus, huc ergo primo pertinent caſus, quibus Z tantum ex litteris x, y et p componitur, ita vt ſit

$$dZ = M dx + N dy + P dp$$

vnde quidem caſum poſteriorem primae claſſis excipere oportet, quippe quod euenit, ſi P fuerit functio tantum ipſarum x et y, ita vt pro praeſenti caſu quantitas P praeter x et y etiam litteram p complecti debeat. Tum autem aequatio pro curua quaeſita erit $o = N - \frac{dP}{dx}$, vbi quum P inuoluat p, ideoque $d.(\frac{dx}{dy})$ formula $\frac{dP}{dx}$ continebit differentialia ſecundi gradus, haec ergo aequatio neutiquam eſt determinata, quum duas adeo conſtantes arbitrarias recipiat, quibus effici poteſt, vt curua per data duo puncta tranſeat, atque adeo quaeſtiones huius claſſis ita accuratius ſunt definiendae, vt curuae inueſtigentur, quae non inter omnes plane curuas, ſed inter eas tantum, quae per eadem duo puncta ducuntur, praeſcripta maximi minimiue proprietate gaudeant; ſemper autem quaeſtiones huius claſſis ita ſunt comparatae, vt per naturam ſuam hanc reſtrictionem poſtulent.

51.

51. Praeterea vero etiam ad secundam classem referri oportet casus, quibus $Z = \mathfrak{Z} q$ existente $\mathfrak{Z}$ functione quacunque ipsarum x, y et p, si enim fuerit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp$$

habebimus

$$M = \mathfrak{M} q\,;\ N = \mathfrak{N} q\,;\ P = \mathfrak{P} q\,,\ \text{et}\ Q = \mathfrak{Z}$$

quare quum aequatio pro curua sit

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},\ \text{siue}\ 0 = N - \frac{1}{dx} d.\left(P - \frac{dQ}{dx}\right);$$

formula haec $P - \frac{dQ}{dx}$ abit in

$$\mathfrak{P} q - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{P} q - \mathfrak{M} - \mathfrak{N} p - \mathfrak{P} q = -\mathfrak{M} - \mathfrak{N} p$$

vnde aequatio nostra euadet

$$0 = N + \frac{1}{dx} d(\mathfrak{M} + \mathfrak{N} p) = 2\mathfrak{N} q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx},$$

quae manifesto tantum differentialia secundi gradus continet. Generalius ergo adhuc si formula integralis proposita fuerit $\int (Z + \mathfrak{Z} q)dx$, vbi Z et $\mathfrak{Z}$ quomodocunque ex quantitatibus x, y et p sint compositae, aequatio pro curua quaesita erit

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + 2\mathfrak{N} q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$$

siue etiam

$$0 = N\,dx - dP + 2\mathfrak{N}\,dp + d\mathfrak{M} + p\,d\mathfrak{N}$$

quae manifesto tantum est differentialis secundi gradus.

52. At si quantitas Z ita ex litteris x, y, p et q fuerit composita vt posito III. Classis.

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$$

 etiam

etiam quantitas Q inuoluat litteram q, tum huiusmodi casus ad tertiam classem erunt referendi et quum aequatio pro curua quaesita reperiatur

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

euidens est terminum $\frac{ddQ}{dx^2}$ inuoluere differentialia quarti gradus, vnde aequatio finita pro curua implicabit quatuor constantes arbitrarias, quibus ergo effici potest, vt curua desiderata non solum per datos duos terminos transeat, sed etiam eius tangentes in vtroque termino datam obtineant positionem, in qua quadruplici determinatione natura quaestionum ad hanc classem pertinentium continetur et accuratissime perspicitur.

53. Reliquis casibus ad hanc classem pertinentibus non immoror, verum potius illustrationis caussa insigne adferam exemplum, quo curuae elasticae inuestigari solent. Scilicet si littera ϱ denotet radium osculi curuae quaesitae in puncto M, omnes hae curuae hac gaudent proprietate, vt in iis haec formula $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$ fit minimum, ideoque habeatur

Tab. II. Fig. 1.

$Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$, quum vero fit $\varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$

habebimus $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$ vnde fit

$$M = o,\ N = o,\ P = \frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \text{ et } Q = \frac{+2q}{(1+pp)^{5:2}}$$

quare quum ob $N = o$, aequatio pro curuis quaesitis fit:

$$o = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

eius

eius integrale ſtatim praebet

$$P - \frac{dQ}{dx} = A,$$

quae adhuc eſt differentialis tertii gradus.

54. Verum haec aequatio adhuc in genere integrari poteſt, multiplicetur enim per $q\,dx = dp$, vt habeatur haec aequatio

$P\,dp - q\,dQ = A\,dq$, quum vero ſit $dZ = P\,dp + Q\,dq$ erit $P\,dp = dZ - Q\,dq$, quo valore ſubſtituto aequatio reſultat haec: $dZ - Q\,dq - q\,dQ = A\,dp$, cuius integrale manifeſto eſt $Z - Qq = Ap + B$, nunc igitur pro Z et Q valores ſupra dati ſubſtituantur atque nanciſcemur ſequentem aequationem:

$$\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}} = Ap + B$$

mutatis igitur ſignis conſtantium colligemus

$$qq = (Ap + B)(1 + pp)^{5:2} \text{ ideoque}$$

$$q = (1 + pp)^{5:4} \surd(Ap + B) = \frac{dp}{dx},$$

ſicque concludimus

$$dx = \frac{dp}{(1 + pp)^{\frac{5}{4}} \surd(Ap + B)},$$

hincque porro

$$dy = \frac{p\,dp}{(1 + pp)^{\frac{5}{4}} \surd(Ap + B)}$$

quibus duabus aequationibus conſtructio curuae abſoluitur.

55. Cum olim haec Methodus maximorum et minimorum tractari est coepta, non solum eiusmodi curuae sunt inuestigatae in quibus formula quaepiam integralis $\int Z\,dx$ esset vel maximum vel minimum; sed etiam eiusmodi quaestiones proponebantur, vt non inter omnes plane curuas, sed inter eas tantum, quae habeant eandem longitudinem ea quaeratur, in qua illa formula fiat maxima vel minima, ex quo ipso casu nomen Problematis Isoperimetrici est natum hoc autem nomen non impediuit, quo minus eiusmodi quaestiones generaliores proponerentur, vt inter omnes eas curuas quibus valor certae cuiuspiam formulae integralis $\int V\,dx$ aeque conueniat, ea definiatur in qua formula $\int Z\,dx$ maximum minimumve sortiatur valorem; quin etiam conditiones adhuc fuerunt multiplicatae in hunc modum, vt tantum inter omnes eas curuas, quibus non solum formula $\int V\,dx$, sed etiam hae quotcunque $\int V'\,dx$, $\int V''\,dx$ etc. aequaliter competant, ea definiatur in qua $\int Z\,dx$ sit maximum vel minimum, cuiusmodi problemata tum temporis summopere ardua sunt visa. Postquam vero in *tractatu meo de hoc argumento* ostendissem huiusmodi problemata semper reduci posse ad hoc problema simplex, quo inter omnes plane lineas, ea inuestigetur, in qua haec formula integralis

$$\int dx\,(Z + \alpha V + \beta V' + \gamma V'' \text{ etc.})$$

fiat maximum vel minimum, huius generis problemata nullam amplius habent difficultatem.

DE