SECTIO QVARTA DE MOTV AERIS IN TVBIS.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE AERIS AGITATIONIBVS MINIMIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS.

Problema 67.

I.

Dum aer in tubo aequaliter amplo horizontaliter positio siue sit rectus siue curuus vtcunque agitatur, aequationes inuenire, quibus eius motus determinatur. Tab. IV. Fig. 70.

Solutio.

Sit A B tubus propositus, qui siue sit rectus siue curuus, tanquam rectus in figura repraesentatur,

tur, quoniam vidimus ab eius curuamine motum non perturbari. Sit ergo eius amplitudo constans $= ff$. Ad hoc autem problema resoluendum vti conueniet methodo posteriori, qua status aeris in tubo quicunque cum statu initiali comparatur. Solutionem ergo ex problemate 45 petamus quem in finem consideremus aëris particulam, quae initio, vbi erat tempus $t = 0$, fuerit in S, ac ponamus spatium $AS = S$, eius particulae vero densitatem $= Q$; at amplitudo tubi, quae ibi posita erat $= \Omega$ hic nobis est $= ff$. Iam elapso tempore $= t$ eadem particula peruenerit in s, statuaturque spatium $As = s$, eius densitas $= q$, pressio $= p$, et celeritas secundum directionem $sB = u = (\frac{ds}{dt})$ amplitudine tubi existente $\omega = ff$. His positis prima aequatio ibi inuenta praebet $q(\frac{ds}{dS}) = Q$; deinde quia ob tubum horizontaliter positum grauitas motum non afficit, altera aequatio ibi inuenta hanc induet formam $\frac{2g\,dp}{q} = -ds(\frac{dds}{dt^2})$, quae cum tempus hic vt constans spectetur, ita repraesentari potest

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0;$$

vbi meminisse iuuabit quantitates p, q, s functiones esse duarum variabilium S et t quantitatem Q vero tantum functionem ipsius S. Aëris autem natura hic praeterea introducatur, qua nouimus pressionem p perpetuo densitati q esse proportionalem; vnde si densitati datae b conueniat pressio $= a$, erit $p = \frac{aq}{b}$, ex quo posterior aequatio fit

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0,$$

prima

prima existente $q\left(\frac{ds}{dS}\right) = Q$. Hinc igitur densitatem q elidere licet cum sit

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{ds\left(\frac{ds}{dS}\right)} - \frac{Q\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2} \text{ ob } q = \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$$

ideoque

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{QdS} - \frac{\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}.$$

Quocirca habebimus hanc aequationem, qua motus determinatio continetur

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$$

quam aequationem ita resolui oportet, vt posito $t = 0$ fiat $s = S$, tum autem fiet $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, ideoque $q = Q$ vt rei natura postulat.

Coroll. 1.

2. Si ergo hanc aequationem ita resoluere liceret, vt qualis futura sit functio quantitas s binarum variabilium S et t assignari posset, tum omnes motus, qui quidem in aërem tubo contentum cadere queant, definiri possent. Sicque totum negotium ad resolutionem huius aequationis est perductum.

Coroll 2.

3. Cum illa aequatio differentialia secundi gradus inuoluat, eius integrale completum duas

 functio-

functiones indefinitas continere debet, quas deinceps ex ftatu initiali determinari oportet, et quoniam non folum cuiusque particulae locus initio fumitur datus fed etiam motus, ad hoc efficiendum vtique binis functionibus indeterminatis opus eft.

Scholion I.

4. Determinatio ergo motus aëris opus eft longe difficilimum cum cafus fimpliciffimus quo aerem eodem caloris gradu praeditum in tubo aequaliter amplo, et grauitatis effectu remoto moueri ponimus, ad eiusmodi aequationem fit perductus, cuius refolutio nullo adhuc artificio cognito expediri poteft: quod eo minus eft mirandum quod ea Analyfis infinitorum pars, quorfum haec aequatio eft referenda nuper demum excoli eft coepta, neque in ea vltra prima elementa vix quicquam adhuc eft praeftitum. Maxime ergo arduae funt iudicandae omnes quaeftiones, qua circa motum aëris inftituuntur, etiamfi forte primo intuitu facillimae videantur veluti fi aër in tubo ope emboli vel condenfetur vel rarefiat, cuius certe motus determinatio fruftra fufciperetur. Quando enim ex vi aëris condenfati vulgo motus globuli in fclopeto pneumatico definiri folet, nullo modo ad motum ipfius aëris refpicitur fed is potius quouis momento, quafi effet in quiete fpectatur, ex quo neglectu etiamfi in motu globuli vix vllus error gigni videatur, minime tamen hoc exemplum proferre licet, in quo circa motum aëris quic-

quicquam fuerit definitum: quin potius confiteri cogimur, nos circa hanc Theoriae motus fluidorum partem etiamnunc in maxima ignoratione versari.

Scholion 2.

5. Quoniam solutionem problematis methodo posteriori supra exposita sum aggressus, ne quis suspicetur methodum priorem feliciori successu forte adhiberi, solutionem inde petitam hic apponam. Secundum problema 14 igitur sine respectu ad statum initialem habito ad tempus $= t$ consideremus aëris particulam in s versantem vocato spatio $As = s$ sitque ibi densitas $= q$, pressio $= p$ et celeritas $= v$ in directione sB: et quoniam amplitudo tubi est constans seu $\omega = ff$ et nullae admittuntur vires sollicitantes, habebuntur hae duae aequationes:

$$\left(\frac{d.qv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2g\,dp}{q} = -v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

Cum autem ex natura aëris sit $p = \frac{aq}{b}$ posterior aequatio fiet

$$\frac{2ga\,dq}{bq} + v\,dv + ds\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0.$$

quae cum tempus t ponatur constans reducitur ad hanc formam:

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{ds}\right) + v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

Quia igitur prior euoluta praebet.

$$v\left(\frac{dq}{ds}\right) + q\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ponamus $q = e^y$ inde fiet:

$$u\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{du}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

ex altera vero

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right) + u\left(\frac{du}{ds}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) = 0$$

Hinc elicitur

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{bu}{2ga}\left(\frac{du}{ds}\right) - \frac{b}{2ga}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

ex illa vero

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{du}{ds}\right) + \frac{buu}{2ga}\left(\frac{du}{ds}\right) + \frac{bu}{2ga}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

Quare cum fit $\left(\frac{ddy}{ds\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,ds}\right)$ concludimus.

$$\left(uu - \frac{2ga}{b}\right)\left(\frac{ddu}{ds^2}\right) + 2u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + 2u\left(\frac{ddu}{dt\,ds}\right) + \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0$$

vnde nunc inueſtigari oportet qualis ſit u functio binarum variabilium t et s. Haec autem aequatio ea, quam in ſolutione problematis dedimus, non ſolum non eſt tractatu facilior, ſed illa etiam hoc commodo eſt praedita, vt felici ſucceſſu ad aëris agitationes minimas accommodari poſſit quemadmodum in ſequente problemate docebimus.

Problema 68.

6. In caſu praecedentis problematis ſi motum aëris ita comparatum eſſe nouerimus vt ſingulae particulae non niſi quam minime a loco initiali recedant, iſtas aëris agitationes minimas determinare.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 70. Praecedentis problematis ſolutio ad hunc caſum accommodabitur ſi ſpatium S s, quo aëris particulam

Iam s a ſitu ſuo initiali S remotam ponimus, in calculo tanquam minimum tractemus. In hunc finem ponamus $s = S + z$ ita vt z ſpectanda ſit vt quantitas minima, atque aequatio, motum determinans hanc induet formam:

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right)-\frac{2ga}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right)+\left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right)^2\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=0$$

quae cum formula $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ prae vnitate quaſi euaneſcat contrahitur in hanc:

$$\frac{2gadQ}{bQdS}-\frac{2ga}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=0$$

cuius ſi modo primus terminus abeſſet, integrale ex iis, quae iam in hoc nouo calculi genere ſunt comperta, dari poſſet; foret enim

$$z = \Gamma : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

Cum autem primus terminus ſolam variabilem S contineat cuius Q eſt functio data, integratio eo non turbatur, eritque aequationis noſtrae integrale completum:

$$z = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \Gamma : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

quo inuento vt reliquae motus conditiones eliciantur, ob $s = S + z$ erit

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + l\tfrac{Q}{B} + \Gamma' : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta' : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : \left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

ex quarum formarum illa colligitur denſitas aëris in s elapſo tempore t quae eſt $q = \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; hincque porro ro pressio $p = \frac{aq}{b}$, ex hac vero celeritas in eodem loco $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$, sicque ad quoduis tempus status in quo aer versabitur, perfecte assignari poterit, si modo binae functiones indefinitae Γ et Δ ex statu initiali dato debite determinentur: id quod sequenti modo fieri debet. Status initialis duabus conditionibus continetur quarum altera pro singulis locis S datur aëris densitas Q, altera vero motus ei in initio impressus, ponamus ergo tum particulae in S existentis celeritatem in plagam SB fuisse $= \Upsilon$, ita vt Q et Υ sint functiones ipsius S datae. Hinc in formulis generalibus inuentis ponendo tempus $t = 0$, primo fieri necesse est $s = S$ seu $z = 0$, vnde habetur

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S$$

hocque modo simul illi conditioni satisfit, qua posito $t = 0$ prodire debet $q = Q$. Nam generatim si z eiusmodi fuerit functio ipsorum S et t, vt posito $t = 0$ fiat $z = 0$ tum etiam fieri $\left(\frac{dz}{dS}\right) = 0$, ideoque $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ necesse est. Deinde pro motu, qui aëri ab initio fuerit impressus, haec obtinebitur aequatio

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$

ex quibus duabus ergo conditionibus indoles vtriusque functionis Γ et Δ determinatur. Quo facto deinceps ad quoduis tempus status motusque aëris in tubo definiri poterit.

Coroll.

Coroll 1.

7. Quoniam per hypothesin quantitas z minima esse debet, vt status initialis ad hunc casum sit accommodatus densitas aëris Q vbique quam minime a densitate ad aequilibrium requisita, quam posui B discrepare debet; si enim densitas nimium alteraretur, quantitas z inde tantum valorem accipere posset, qui hypothesi aduersaretur.

Coroll. 2.

8. Deinde ne functiones Γ et Δ ipsi z nimis magnum valorem inducant, eas per fractionem quandam minimam α multiplicari conuenit, vt statuatur
$$z = s - S = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) + \alpha\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}})$$
hoc modo nil impedit quo minus ipsae functiones valores quantumuis magnos adipiscantur.

Coroll. 3.

9. Hoc multiplicatore minimo introducto pro statu initiali his duabus aequationibus satisfieri oportebit:
$$o = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$
$$\Upsilon = \tfrac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \tfrac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$
vnde patet etiam in statu initiali non nisi celeritates minimas admitti posse.

Coroll. 4.

10. Quod ſi tum ad quoduis tempus t ſtatus aeris definiri debeat, primo pro denſitate $q = \frac{Q}{(\frac{ds}{dS})}$, habebitur:

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{B} + \alpha\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \alpha\Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

tum vero pro celeritate $\upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ erit

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) - \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

vnde et haec celeritas ſemper erit minima.

Scholion 1.

11. Si rem accuratius perpendamus pro motus determinatione non abſolute neceſſarium eſt, vt ipſa quantitas z poſito $s = S + z$ ſit minima, dummodo ea ita ſit comparata, vt formula inde orta $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ fiat valde parua, id quod euenit ſi ad valorem ipſius z ante datum inſuper adiiciamus terminum $\mathfrak{C}t$, exiſtente $\mathfrak{C}$ quantitate quantumuis magna. Quoniam enim hinc neque formulae $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ neque huius $\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$ valor immutatur, aequationi propoſitae perinde ſatisfit. Inde autem tantum celeritates Υ et υ quantitate conſtante $\mathfrak{C}$ augebuntur, totumque negotium eo redibit, ac ſi totus tubus cum aëre incluſo motu vniformi deferretur vel ſi toti maſſae aereae in tubo motus quidam vniformis ab initio eſſet impreſſus, qui deinceps perpetuo conſeruaretur. Cum autem phaenomena hinc oriunda

oriunda per se sint perspicua, operae non est pretium huiusmodi casus seorsim pertractare.

Scholion 2.

12 Quod si ratio functionum Γ et Δ pro lubitu assumatur, inde status initialis facile definietur difficilius autem erit vicissim ex statu initiali dato indolem earum functionum elicere. Quoniam autem satisfieri oportet huic conditioni

$$o = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\,\Gamma : S + \alpha\,\Delta : S$$

statim atque altera functio $\Gamma : S$ fuerit assumta hinc simul altera definitur, id quod ex illa ratione qua functiones per applicatas curuarum repraesentari solent clarissime hoc modo ostenditur. Referat recta AB tubi longitudinem in qua capiatur abscissa $AS = S$, super ea construatur linea curua DQE, cuius sit applicata $SQ = \int dS\, l\frac{Q}{B}$, tum vero pro lubitu alia curua $F\Gamma G$, cuius applicata sit $S\Gamma = \alpha\,\Gamma : S$. Iam infra axem AB construatur noua curua $H\Delta I$ hac lege vt vbique sit eius applicata $S\Delta = SQ + S\Gamma$, eritque $S\Delta = -\alpha\,\Delta : S$; sicque hoc modo ex binis prioribus curuis haec tertia functionem $\Delta : S$ referens construetur. Hinc autem porro celeritas aëris in statu initiali pro quouis loco S facile innotescet ex hac aequatione: Tab. IV. Fig. 71.

$$\Upsilon \surd \tfrac{b}{2ga} = \alpha\,\Gamma' : S - \alpha\,\Delta' : S$$

quandoquidem est

$$\alpha\,\Gamma' : S = \tfrac{d.\,S\Gamma}{d.\,AS} \text{ et } \alpha\,\Delta' : S = \tfrac{-d.\,S\Delta}{d.\,AS}$$

 ita

ita vt fit

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{d.(S\Gamma + S\Delta)}{d.\Delta S} = \frac{d.\Gamma\Delta}{d.\Delta S},$$

ficque tangentibus ducendis facile affignatur. Quando autem viciffim celeritas Υ in fingulis locis S pro ftatu initiali datur, quomodo inde viciffim ambas curuas $F\Gamma G$ et $H\Delta I$ definiri oporteat, in fequente problemate inueftigabimus.

Problema 69.

13. Datis in ftatu initiali pro quouis tubi loco S tam aëris denfitate Q quam celeritate Υ in plagam SB directa, elapfo inde tempore t definire ftatum et motum aëris in tubo, fiquidem ftatus initialis valde parum a ftatu aequilibrii fuerit diuerfus.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 72. Totum negotium iam eo eft perductum, vt indoles functionum Γ et Δ ex his duabus aequationibus determinetur:

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha\Gamma' : S - \alpha\Delta' : S$$

Iam prior differentiata praebet

$$-l\frac{Q}{B} = \alpha\Gamma' : S + \alpha\Delta' : S$$

ex qua cum altera combinata deducimus:

$$\alpha\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} l\frac{Q}{B} \text{ et}$$

$$\alpha\Delta' : S = -\tfrac{1}{2}\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} l\frac{Q}{B}.$$

quos

quos valores sequenti modo construere licebit. Ex data in puncto S densitate Q valde parum a densitate B quae in aequilibrio subsistit, discrepante, colligatur $l\frac{Q}{B}$, pro quo sumsisse sufficiet $\frac{Q-B}{B}$ hincque describatur super axe A B linea curua C Q D, et cuique abscissae $AS = S$ conueniat applicata $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$. Deinde cum etiam detur celeritas in S, qua vno minuto secundo conficiatur spatium $= \Upsilon$, constituatur in S applicata $S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ sicque describatur curua E Υ F. His iam duabus lineis constructis C Q D et E Υ F super eodem axe A B duae nouae lineae formentur primo scilicet linea G Γ H supra axem A B sumendo applicatas $S\Gamma = \frac{1}{2}S\Upsilon - \frac{1}{2}SQ$, tum vero linea I Δ K infra axem sumendo applicatas $S\Delta = \frac{1}{2}S\Upsilon + \frac{1}{2}SQ$; quo facto erit $\alpha\Gamma'{:}S = S\Gamma$ et $\alpha\Delta'{:}S = -S\Delta$, hinque integralia per areas exhibendo: Tab. IV. Fig. 71.

$$\alpha\Gamma{:}S = AGS\Gamma \text{ et } \alpha\Delta{:}S = -AIS\Delta$$

Per binas autem solas superiores curuas (fig. 72) habebimus:

$$\alpha\Gamma'{:}S = \tfrac{1}{2}(S\Upsilon - SQ);\ \alpha\Delta'{:}S = -\tfrac{1}{2}(S\Upsilon + SQ)$$

$$\alpha\Gamma{:}S = \tfrac{1}{2}(AES\Upsilon - ACSQ);\ \alpha\Delta{:}S = -\tfrac{1}{2}(AES\Upsilon + ACSQ)$$

Iam elapso tempore quocunque t minutorum secundorum in axe A B vtrinque a puncto S capiatur spatium $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vt sit $AT = S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ et $At = S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ hincque euidens est fore Tab. IV. Fig. 72.

$$\alpha\Gamma' : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(TN - TM)$$
$$\alpha\Delta' : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(tn + tm)$$
$$\alpha\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(AETN - ACTM)$$
$$\alpha\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(AEtn + ACtm)$$

His inuentis poſt hoc tempus $= t$ particula aëris, quae initio erat in S nunc erit translata in tubi locum s vt ſit

$$Ss = ACSQ + \tfrac{1}{2}AETN - \tfrac{1}{2}ACTM - \tfrac{1}{2}AEtn - \tfrac{1}{2}ACtm$$

quae ſpatia rediguntur ad hanc formam:

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm$$

Deinde aëris particulae, quae nunc in s verſatur denſitas inuenta $q = \frac{Q}{(\frac{ds}{dS})}$, formulis autem ſupra erutis ad figuram relatis fit

$$(\tfrac{ds}{dS}) = 1 + SQ + \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm$$

cuius expreſſionis membra poſteriora cum prae vnitate ſint minima erit proxime

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm).$$

Denique pro motu quo haec particula iam agitabitur, eius celeritas ſecundum directionem sB erit

$$u = \tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}.$$

Coroll 1.

14. Data ergo agitatione, qua aër in tubo contentus ab initio de ſtatu aequilibrii fuerit perturbatus,

batus, et quae per binas lineas CQD et EΥF repraeſentatur, deinceps ad quoduis tempus translatio, denſitas et motus cuiusque aëris particulae in tubo aſſignari poterit

Coroll. 2.

15. Si initio aëris aequilibrium prorſus non fuerit turbatum, vt vbique fuerit $Q = B$ et motus nullus ſeu $\Upsilon = 0$, tum binae lineae CQD et EΥF fient rectae et in ipſum axem AB incident. Cum igitur tam omnes areae quam applicatae euaneſcant nulla mutatio neque in loco neque denſitate ſingularum particularum orietur, ideoque aequilibrium perſeuerabit.

Coroll 3.

16. Si initio denſitati naturali tantum mutatio quaedam ſine vllo motu fuerit inducta, linea EΥF in rectam AB incidet, indeque fiet:

$$Ss = -\tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm; \text{ tum vero}$$

$$q = Q(1 - SQ + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tm) \text{ et } \upsilon = \tfrac{1}{2}(tm - TM)\sqrt{\tfrac{2gq}{b}}.$$

Coroll. 4.

17. Si initio aëri in tubo motus quicunque fuerit impreſſus neque ſimul denſitas primo ſaltem inſtanti vllam mutationem fuerit paſſa, linea CQD cum axe congruet, et pro agitatione ſequente ad quoduis tempus t habebitur:

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn; \; q = Q(1 - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}tn) \text{ et } \upsilon = \tfrac{1}{2}(TN + tn)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}.$$

Scho-

Scholion. I.

18. Obſeruari hic oportet binarum noſtrarum curuarum CQD et EΥF applicatas non quantitatibus linearibus ſed numeris abſolutis exponi, ex quo earum conſtructio poſtulat, vt linea quaedam recta ad libitum aſſumta pro vnitate accipiatur; ex qua deinceps quantitas ſingularum applicatarum debite determinetur; eam ergo rectam tantam ſtatui conueniet, vt mutationes etiam minimae aëri inductae ſatis ſenſibiliter in figura referantur. Hinc meminiſſe iuuabit, quaenam literae in calculum introductae numeros abſolutos, et quaenam quantitates lineares ſignificent. Primum autem tempus t vtpote in minutis ſecundis exprimendum numerum denotat abſolutum tum vero etiam litterae b, B, Q et q, quibus denſitates indicamus, quoniam referuntur ad certam quandam denſitatem vnitate ſignatam, qua in preſſionibus definiendis vtor, ſunt numeri abſoluti. Reliquae litterae in calculum ingredientes ſunt quantitates lineares; primo namque littera g denotat altitudinem qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur, quae aeſtimatur 15,625 ped. Rhen. litterae vero Υ et v pro celeritatibus vſurpatae ſpatia denotant linearia, quae his celeritatibus vno minuto ſecundo percurrerentur: litterae denique pro preſſionibus introductae a et p altitudines ſicque etiam quantitates lineares ſignificant. Iis enim denotatur altitudo columnae materia vniformi, cuius denſitas ponitur $= 1$, conſtantis, cuius pondus aequale eſt preſ-

pressioni parem basin vrgenti. Cum igitur nostrarum curuarum, quarum alteram CQD scalam densitatum, alteram EϒF scalam celeritatum appellare licet, applicatae sint numeri absoluti, abscissae vero quantitates lineares, areae iis comprehensae quoque erunt quantitates lineares. His animaduersis perspicuum est formulam ex tempore formatam $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ esse quantitatem linearem, vt abscissae $AS = S$ addi ab eaque subtrahi possit; tum vero expressionem pro translatione Ss inuentam esse quantitatem linearem perinde atque eam, quae pro celeritate v est exhibita; rationem denique densitatum q et Q numero absoluto exprimi vti rei natura postulat. Postremo probe teneatur vtramque scalam ita construi debere vt si initio ad s fuerit densitas $= Q$ et celeritas $= \Upsilon$ pro scala densitatum capi debeat applicata

$$SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q - B}{B}$$

pro scala celeritatum vero applicata

$$S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}.$$

Scholion 2.

19. Commodissime hic vsu venisse mirandum est, quod ex datis binis scalis densitatum et celeritatum ad statum initialem relatis tam expedite ad quoduis tempus elapsum aëris agitatio inde orta assignari possit, cum tamen quaestio haec primo intuitu vires analyseos superare sit visa, atque etiam

certo ſuperaret, niſi agitationes quam minimae eſſent aſſumtae; praeterea vero etiam hypotheſis, qua tubo vbique eandem amplitudinem tribuimus, plurimum ad hanc commodam ſolutionem contuliſſe eſt cenſenda, quandoquidem pro tubis inaequaliter amplis grauiſſima adhuc obſtacula occurrunt. Quanquam autem haec ſolutio ad motus ſpeciem maxime ſpecialem reſtringitur, in inueſtigationibus tamen phyſicis ampliſſimum praeſtat vſum, indeque iam feliciſſimo ſucceſſu duo phaenomena, quae adhuc maxime fuerunt abſcondita fruſtraque a naturae ſcrutatoribus tractata, ſi ſolum Geometram acutiſſimum Taurinenſem *Ludouicum la Grange* excipiamus, explicari poſſunt. Alterum phaenomenon conſiſtit in propagatione ſoni, vbi explicari oportet quomodo, dum aëri vno in loco quaedam agitatio minima inducitur, inde ſimiles agitationes ſucceſſiue ad maximas diſtantias proferantur. Alterum vero phaenomenon, in quo multo adhuc minus ab auctoribus eſt praeſtitum verſatur in explicatione ſoni, quem tibiae edunt inflatae, cuius quidem olim pulcra a me ſimilitudo cum cordis vibrantibus eſt obſeruata; nullo autem modo ipſam aëris agitationem, qua hi ſoni producuntur, definire licuit. Vtrumque igitur phaenomenon, quatenus in tubis aequaliter amplis producitur, deinceps omni cura ſum perſecuturus.

Scholion 3.

20. Antequam autem hoc opus aggrediar circa ambas ſcalas denſitatum et celeritatum, earumque

que continuationem, quaedam circumſtantiae maximi momenti ſunt euoluendae. Primo quidem obſeruo ſi tubus vtrinque in infinitum extendatur, ſolutionis noſtrae applicationem nulli difficultati eſſe ſubiectam; quia enim tum pro ſtatu initiali ambae ſcalae per ſe vtrinque in infinitum continuantur; elapſo quantumuis magno tempore t, ſi a quouis axis puncto S vtrinque abſcindantur interualla $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, his punctis T et t in vtraque ſcala determinatae ſemper reſpondebunt applicatae, ex quibus ſtatus aëris vbique in tubo ad hoc tempus definiri poterit. Sin autem tubus vel vtrinque vel ex altera ſaltem parte fuerit terminatus, ibique ſiue clauſus ſiue apertus, ibidem quoque ambae ſcalae ad ſtatum aëris initialem extractae terminentur neceſſe eſt; hinc neceſſario eueniet vt tempore labente interualla ST et St vel alterum ſaltem vltra ſcalarum terminum cadat, ita vt tum ipſae ſcalae nullas plane ſuppeditent applicatas, ex quibus aëris ſtatus ad haec tempora definiri queat. Cum igitur ſolutionis datae natura ſemper poſtulet, vt ſcalae vtrinque in infinitum ſint continuatae, etiamſi tubus finitam habeat longitudinem maximum ſolutionis momentum in eo verſatur, vt definiamus, qua lege his caſibus vtramque ſcalam continuari oporteat, vt inde vera ſolutio eliciatur. Atque idem quoque praeſtari debebit, quando tubus habet figuram in ſe redeuntem; quanquam enim hic tubi directricem vt lineam rectam repraeſento, tamen iam ſatis eſt oſtenſum curuaturam ideo non excludi, quoniam hinc motus non alteratur.

Problema 70.

21. Si tubus aequaliter amplus in puncto B terminetur, ibique ſit apertus, vtramque ſcalam tum denſitatum quam celeritatum quae ex ſtatu initiali ſuper eo fuerit extructa, vltra punctum B ſuper axe A B producto continuare.

Solutio.

Quia tubus in B eſt apertus ideoque aër in tubo contentus cum aëre externo communicatur, in ipſa tubi extremitate B preſſio aëris interni a preſſione externi diuerſa eſſe nequit, quamobrem etiam denſitas aëris interni in hoc loco conuenire debet cum denſitate externi, quae ſi vocetur $= B$, erit non ſolum initio ſed etiam perpetuo pro hac tubi extremitate B tam denſitas initialis $Q = B$ quam elapſo tempore quocunque $q = B$. Pro ſcala ergo denſitatum C Q D ex ſtatu initiali formata in extremitate B, ob $Q = B$ ſit applicata $BD = 0$. Sit igitur A B tubus propoſitus in B terminatus et apertus vltra A autem vtcunque extenſus, atque ex ſtatu initiali formata ſit ſcala denſitatum $C m B$ in B cum axe A B concurrens; ſcala autem celeritatum ſit $E n F$. Quia iam elapſo tempore quocunque $= t$ denſitas aëris ad B perpetuo debet eſſe eadem $= B$, primum obſeruo hanc conditionem perinde locum habere

Tab. V. Fig. 74.

habere debere, quaecunque fuerit fcala celeritatum; hoc eft fiue aëri in tubo impreffus fuerit initio quispiam motus, fiue tota agitatio tantum in perturbatione celeritatis fubftiterit. Quanquam autem haec proprietas illi aëris elemento, quod quouis tempore in orificio B B verfatur, conuenit, tamen quia translatio fingulorum elementorum eft quam minima, etiam illi elemento, quod initio orificium B B occupauerat, conftanter tribui poteft. Effluxerit ergo tempus quodcunque $= t$ at a puncto B fumto vtrinque interuallo $B t = B T = t \sqrt{\frac{2ag}{b}}$, continuatio fcalarum ita effe debet comparata, vt fiat $q = Q = B$, quare ob $S Q = o$ hoc cafu fieri oportet

$$-\tfrac{1}{2} T N + \tfrac{1}{2} T M + \tfrac{1}{2} t n + \tfrac{1}{2} t m = o$$

feu $T M + t m - T N + t n = o$,

quod cum euenire neceffe fit quaecunque fuerit fcala celeritatum feorfim debet effe

$$\text{et } T M + t m = o \text{ et } T N - t n = o.$$

Ex priori conditione patet fcalam denfitatum $C m B$ ita vltra B continuari debere vt curua $B M c$ fimilis fiat et aequalis curuae $B m C$, fed ad partem axis contrariam difponatur. Deinde pro fcala celeritatum continuatio $F N e$ pariter fimilis et aequalis ftatuatur curuae $F n E$ fimulque ad eandem axis partem pofita, hacque lege vtramque fcalam denfitatum et celeritatum vltra terminum B continuari conuenit.

 Coroll.

Coroll. 1.

22. Si tubus ex parte A in infinitum extendatur, hac constructione vtraque scala B in infinitum continuabitur. At si tubus in A quoque sit terminatus, tum hoc modo scalas non vltra terminum a existente $B a = A B$ continuari licebit. Quia vero similis continuatio vltra A institui debet hac ratione vtrinque in infinitum progredi poterimus.

Coroll. 2.

23. In hac ergo scalarum continuatione neutiquam earum indoles interna spectatur, neque si eae fuerint curuae algebraicae vel aequatione quadam comprehensae continuatio ex hac aequatione est petenda, sed sola figura externa eiusue ductus continuationem, qua hic opus est suppeditat. Atque regula hic data perinde est obseruanda, siue scalae illae sint in se lineae continuae, siue irregulares cuiusmodi libero manus ductu describuntur.

Scholion.

24. Haec circumstantia eo maiore est attentione digna, quod vulgo in analysi nullae aliae lineae curuae, nisi quae certa quadam aequatione earum naturam exprimente contineantur, admitti, lineaeque discontinuae nulla huiusmodi lege comprehensae inde penitus excludi solent. Analysis enim tam finitorum, quam ea pars infinitorum quae adhuc potissimum est exculta, vtique ad nullas alias

lineas

lineas curuas, nisi quae certa continuitatis lege sint complexae, applicari potest, quandoquidem his casibus aequatio earum naturam exprimens semper in calculum introduci debet; neque ante lineis discontinuis, nulla certa lege ductis locus in Analysi concedi potuit, quam sublimior Analyseos infinitorum pars, quae circa functiones duarum pluriumue variabilium versatur excoli est coepta, cuius equidem naturam primus ita comparatam esse obseruaui, vt huiusmodi lineae discontinuae ad eam aeque referri debeant, atque lineae curuae regulares certa quadam aequatione expressae, neque adeo his posterioribus vlla praerogatiua sit tribuenda; cum hic earum quasi interna natura neutiquam spectetur. Quare si forte linea C *m* B fuerit arcus circuli in nostro instituto ad circuli naturam plane non respicitur, sed in continuatione illi alius arcus aequalis B M *c* inuerso situ adiungitur, prorsus vti fieri deberet, si linea C *m* B nulla certa ratione esset ducta, quod etiam de altera scala E *n* F est tenendum, cuius continuatio F N *e* illi semper similis et aequalis statui debet, etiamsi forte illius natura longe aliam continuationem inuoluat. Quoniam haec linearum curvarum consideratio prorsus est noua, iisque qui huic calculi generi nondum sunt assueti, a receptis Analyseos principiis maxime abhorrere videri solet, hanc circumstantiam saepius inculcasse minime superfluum est iudicandum.

Pro-

Problema 71.

Tab. V. Fig. 75. 25. Si tubus aequaliter amplus in B terminetur, ibique fit clausus, vtramque scalam tam densitatum quam celeritatum ad statum initialem constructum, vltra terminum B super axe AB producto continuare.

Solutio.

Quia tubus AB in B est clausus in hac ipsa extremitate aëri in tubo contento nullus plane motus inesse potest, aërisque vltimum stratum operculo BB adiacens perpetuo in quiete perseuerare debet, ex quo non solum in initio sed etiam omni tempore celeritas aëris in puncto B nihilo debet esse aequalis. Hinc scalae celeritatum EYF (fig. 72.) extremum punctum F in axis punctum B incidat, necesse est; habeatque propterea haec scala figuram EnB scala vero densitatum sit CmD. Cum nunc elapso tempore quocunque t formula pro celeritate supra inuenta, si ad punctum B applicetur, semper euanescere debeat; idque pro omni scala densitatum, continuationem vtriusque scalae ad hoc requisitum accommodari oportet. Super axe ergo vtrinque a termino B capiantur interualla aequalia $Bt = BT = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, et quia celeritas in puncto B supra ita exprimi est inuenta, vt esset:

$$v = \tfrac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}$$

hinc

hinc duplicem aequationem elicimus, alteram pro ſcala celeritatum $TN + tn = o$ alteram pro ſcala denſitatum $TM = tm$; vnde diſcimus ſcalam celeritatum EnB ita continuari debere vt ſit $TN = -tn$, ideoque partem continuatam BNe ſimilem fore et aequalem ſcalae BnE, ad contrariam autem axis partem diſpoſitam. Cum autem pro ſcala denſitatum ſit $TM = tm$, eius continuatio DMc omnino ſimilis et aequalis erit lineae DmC, ad easdem axis partes diſpoſita. Vtraque ſcilicet ſimilitudo refertur ad punctum B ita vt inde ſumtis vtrinque abſciſſis aequalibus $BT = Bt$, in vtraque ſcala etiam applicatae fiant aequales $TN = tn$ et $TM = tm$, illa quidem ad contrariam, haec vero eandem axis partem ſita.

Coroll. I.

26. Prout ergo tubus in B fuerit vel apertus vel clauſus vtriusque ſcalae continuatio diuerſo quidem ratione axis ſed pari modo reſpectu ipſarum applicatarum inſtitui debet. Illo ſcilicet caſu ſcalae denſitatum, hoc vero ſcalae celeritatum continuatio ad contrariam axis partem eſt diſponenda.

Coroll. 2.

27. Quoniam caſu quo tubus in BB eſt clauſus, aeris ad B ſiti celeritas ſemper eſt nulla, hinc ſponte ſequitur eum nunquam de loco ſuo recedere: vnde translationis ſpatium Ss ſupra in genere defini-

 tum

tum hic quoque euanefcere debet. Puncto autem S in B translato fit vtique.

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}BDTM + \tfrac{1}{2}BDtm + = \tfrac{1}{2}TNtn = 0$$

quia eft $TNtn = Btn - BTN = 0$, area enim BTN in contrariam axis partem cadens negatiue capi debet.

Problema 72.

28. Si tubus aequaliter amplus fuerit in fe rediens, quamcunque habuerit figuram, vtramque fcalam denfitatum et celeritatum ad ftatum initialem extructam vtrinque in infinitum continuare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 76. Longitudo tubi in directum extenfa in tabula repraefentetur linea recta ASA', ita vt punctum A' tota perimetro percurfa in punctum A recidere fit concipiendum. Exftructa ergo fuper hac linea ASA' tam fcala denfitatum CQC' quam fcala celeritatum $E\Upsilon E'$ ita vt fi in S initio fuerit denfitas $= Q$ et celeritas fecundum directionem $SA' = \Upsilon$ fint applicatae $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, euidens eft in puncto A' effe debere $A'C' = AC$ et $A'E' = AE$ quandoquidem punctum A' cum puncto A conuenit. Simili modo tubum pluries percurrendo pro fingulis reuolutionibus repetitis in axe capiantur interualla $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A''''$ etc. tubi longitudini AA' aequalia, et quia fingula puncta A, A', A'', A''', A'''' etc. reuera idem tubi punctum

A re-

A repraesentant, continuatio ambarum scalarum ita debet esse comparata, vt applicatae in omnibus his punctis sint eaedem. Idem quoque tenendum est de omnibus punctis $S, S^{I}, S^{II}, S^{III}$ etc. sumtis interuallis $AS = A^{I}S^{I} = A^{II}S^{II} = A^{III}S^{III}$ etc. quae omnia cum vnicum tubi punctum exhibere sint censenda, in omnibus quoque ambae applicatae congruere debent. Quare quaecunque fuerint ambae curuae CQC^{I} et $E\Upsilon E^{I}$ eaedem continuo super axe prolongato repetitae repraesententur, quod pariter super altera axis prolongatione in infinitum fieri est concipiendum. Cum autem hoc modo ambae scalae vtrinque in infinitum fuerint continuatae, manifestum est si pro quouis tempore elapso aëris elementi, quod initio fuerat in S secundum praecepta supra data tam translatio Ss quam eius densitas et celeritas Υ definiatur eosdem prodituros esse valores, ac si eadem inuestigatio pro punctis S^{I}, S^{II}, S^{III} etc. institueretur.

Coroll. 1.

29. Neque ergo hoc casu ad naturalem vtriusque scalae CQC^{I} et $E\Upsilon E^{I}$ continuationem, quam ex sua propria indole essent habiturae, est respiciendum, sed vtraque continuo eadem super axe AA^{I} vtrinque producto construi debet.

Coroll. 2.

30. Haec autem vtriusque scalae continuatio vtrinque in infinitum facta tam hoc casu quam prae-

 ceden-

cedentibus ideo eſt neceſſaria vt elapſo tempore quantumuis magno t a quouis puncto S vtrinque tanta ſpatia $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ abſcindi queant, in iisque punctis applicatae reſpondentes reperiantur.

CAPVT II.

DE PROPAGATIONE PVLSVVM AERIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS AD SONI GENERATIONEM ET PROPAGATIONEM ILLVSTRANDAM.

Problema 73.

31. In tubo vtrinque in infinitum extenſo ſi alicubi in ſpatio minimo excitetur pulſus, quo aër vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, huius agitationis propagationem ad quoduis tempus definire.

Solutio.

Tab. V. Fig. 77. Sit A B tubi directrix in directum extenſa et in ſpatiolo $GH = b$ aëri in tubo contento eiusmodi agitatio inducta ſit, vt linea $GM'mH$ exhibeat ſcalam denſitatum, linea vero $GN'nH$ ſcalam celeritatum, cuius applicatae tn, quatenus in figura ſupra axem A B cadunt motum verſus B indicent illius