CAPVT V.

DE MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS FIGVRAM CONOIDICAM HYPERBOLICAM HABENTIBVS.

Problema 86.

101. Si tubi figura oriatur ex conuerſione arcus hyperbolae aequilaterae AB circa aſymtotam IL facta, et aer in eo contentus initio quomodocunque de ſtatu aequilibrii fuerit deturbatus, agitationes eius ſequentes ad quoduis tempus inueſtigare. Tab. VII. Fig. 91.

Solutio.

Sit I interſectio aſymtotarum, ſumtoque ſpatio $IS = S$ amplitudo tubi ibi ponatur $\Omega = \frac{c}{SS}$, agitatio autem aeri primum inducta ita ſe habeat, vt in tubi loco S fuerit denſitas $= Q$ et celeritas ſecundum $IB = \Upsilon$. Elapſo iam tempore quocunque t, ex ſolutione ſupra (82 et 84) exhibita, vbi ob $\alpha = 1$, $\beta = 0$, negligamus grauitatis effectum aer ex S per ſpatiolum $Ss = v$ erit translatus vt ſit

$$v = SS\int \frac{dS}{SS}\, l\frac{Q}{B} + S\Gamma:(S+ct) + S\Delta:(S-ct)$$

poſito $\sqrt{\frac{2ga}{b}} = c$, tum vero erit mutata conſtante denſitas

$$q = Q(1 - l\frac{Q}{B} + \Gamma:(S+ct) + \Delta:(S-ct) - S\Gamma':(S+ct) - S\Delta':(S-ct))$$

et celeritas

$$v = c\,S\,(\Gamma': (S + c\,t) - \Delta': (S - c\,t)).$$

Quaestio autem nunc huc redit: vt ad statum initialem natura functionum Γ et Δ accommodetur: posito ergo $t = o$, fieri debet $v = o$, $q = Q$ et $v = \Upsilon$, vnde colligimus has aequationes:

$$\text{I. } S\,S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} + S\,\Gamma : S + S\,\Delta : S = o$$

$$\text{II. } - l\frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S - S\,\Gamma' : S - S\,\Delta' : S = o$$

$$\text{III. } \Upsilon = c\,S\,(\Gamma' : S - \Delta' : S)$$

quarum quidem duae priores inter se conueniunt, vt tam ex rei natura quam differentiatione prioris intelligitur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : S + \Delta : S = x$ et $\Gamma : S - \Delta : S = y$, vt prodeat

$$\text{II. aequatio } - l\frac{Q}{B} + x - \frac{S\,d\,x}{d\,S} = o \text{ et}$$

$$\text{III. aequatio } \Upsilon = \frac{c\,S\,d\,y}{d\,S}, \text{ atque}$$

$$\text{I. } S\,S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} + S\,x = o.$$

quae quidem illam in se complectitur. Hinc ergo est $x = - S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B}$, inde vero $y = \frac{1}{c} \int \frac{\Upsilon\,d\,S}{S}$, ita vt obtineamus:

$$\Gamma : S = - \tfrac{1}{2} S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} + \frac{1}{2\,c} \int \frac{\Upsilon\,d\,S}{S} \text{ et}$$

$$\Delta : S = - \tfrac{1}{2} S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} - \frac{1}{2\,c} \int \frac{\Upsilon\,d\,S}{S}$$

vnde fit

$$\Gamma' : S = - \tfrac{1}{2} \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} - \frac{1}{2\,S}\, l\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{2\,c\,S} \text{ et}$$

$$\Delta' : S = - \tfrac{1}{2} \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\frac{Q}{B} - \frac{1}{2\,S}\, l\frac{Q}{B} - \frac{\Upsilon}{2\,c\,S}.$$

Cum

Cum igitur pro singulis axis punctis S ex statu initiali dentur quantitates $l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ proxime et Υ hinc construantur duae curuae $C\Gamma\sigma$ et $D\Delta d$, vt sint earum applicatae $S\Gamma = \Gamma' : S$ et $S\Delta = \Delta' : S$, quae curuae autem non vltra tubi longitudinem AB extendantur eritque tum per quadraturas harum curuarum:

$$\Gamma : S = ACS\Gamma \text{ et } \Delta : S = ADS\Delta.$$

His curuis constructis elapso tempore $= t$, in axe a puncto S vtrinque capiantur interualla $ST = St = ct$ eritque tum

translatio $Ss = SS\int \frac{dS}{SS} l\frac{Q}{B} + S(ACTM + ADtn)$

densitas $q = Q(1 - l\frac{Q}{B} + ACTM + ADtn - S.TM - S.tn)$

celeritas $v = cS(TM - tn)$

quae determinationes valent quamdiu puncta T et t non extra tubum AB cadunt.

Coroll. 1.

102. Si super axe IL intra tubi extensionem Tab. VII. AB, in cuius loco S posito interuallo $IS = S$, est Fig. 92. amplitudo $\Omega = \frac{ff}{SS}$, aliae duae construantur lineae curuae EQe et $F\Upsilon f$, quarum applicatae sint

$$SQ = \int \frac{dS}{SS} l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S} l\frac{Q}{B} = \int \frac{dQ}{SQ} \text{ et } S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$$

illae functiones hinc ita determinantur, vt sit

$$\Gamma' : S = -\tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}S\Upsilon \text{ et } \Delta' : S = -\tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}S\Upsilon$$

hincque porro

$$\Gamma : S = -\tfrac{1}{2}AESQ + \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon \text{ et } \Delta : S = -\tfrac{1}{2}AESQ - \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon.$$

Coroll. 2.

103 Hinc autem elapso tempore t sumtisque a puncto S interuallis $ST = St = ct$ reperitur aëris qui initio ad S versabatur:

densitas

$$q = Q\left(1 - l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}AETM - \tfrac{1}{2}AEtm + \tfrac{1}{2}AFTN - \tfrac{1}{2}AFtn + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - TN + tn)\right)$$

celeritas

$$\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}cS(-TM + TN + tm + tn) \text{ et}$$

translatio

$$Sv = SS\int\tfrac{dS}{SS}l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}S(AETM - AFTN + AEtm + AFtn)$$

vnde cum posito $t = 0$ fiat $Sv = 0$, patet esse

$$SS\int\tfrac{dS}{SS}l\tfrac{Q}{B} = S.\ AESQ$$

ita vt sit

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(2AESQ - AETM - AEtm + AFTN - AFtn).$$

Scholion 1.

103. Constructio in corollariis data, etsi plures terminos comprehendit quam prior, tamen ad calculum quouis casu oblato euoluendum multo magis est accommodata quoniam in ea agitationes, quae vel ob turbatam initio densitatem vel ob motum impressum oriuntur, seorsim exhibentur. Haec autem distinctio maxime est necessaria si continuationem vtriusque scalae extructae EQe et FYf explorare velimus; quod quidem ad perfectam motus cognitionem omnino est necessarium Commodius autem hae expressiones exhiberi possunt, vt non pendeant

a tubi

a tubi termino A: cum enim ex ipsa constructione pateat esse:

$\int \frac{dS}{SS} l \frac{Q}{B} = \frac{AESQ}{S}$, ex positione

$SQ = \int \frac{dS}{SS} l \frac{Q}{B} + \frac{1}{S} l \frac{Q}{B}$ colligimus

$l \frac{Q}{B} = S . SQ - AESQ$,

quibus valoribus indroductis, obtinebimus has determinationes:

$$\frac{q}{Q} = 1 + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2}S(TN - tn)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}TNtn$$

$$u = \tfrac{1}{2}cS(tm - TM + TN + tn)$$

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}S . TNtn$$

quae formulae ideo ad calculum magis sunt accommodatae quod a neutro tubi termino pendent. Id autem hic imprimis notari conuenit, distantiam cuiusque puncti S ab assymtotae initio I scilicet IS = S in computum venire.

Scholion 2.

105. Antequam autem hic vlterius progredi liceat, accuratius scalas, quibus ad motum definiendum vtor, perpendi conuenit. Vtraque scilicet ex statu qui aeri in tubo contento initio fuerit inductus construi debet, hunc autem statum ita determinari assumo, vt aeris ad S versantis densitas fuerit $= Q$ naturali existente $= B$, celeritas vero secundum directionem $AB = \Upsilon$. His positis constructio scalae $F\Upsilon$ nulla laborat difficultate cum eius sit applicata $S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$, altera vero scala EQe, quae

 for-

formulam integralem inuoluit, quandam dilucidationem ob constantem implexam postulat. Primo igitur cum in singulis punctis S densitas datur Q ita construatur curua CV, vt vocato interuallo CSV = S, sit eius applicata $SV = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, sumta scilicet recta quacunque pro vnitate. Tum vero hac curua descripta scala EQe, qua opus est, ita construi debet, vt capiatur vbique eius applicata $SQ = S.SV + ACSV$, sicque huius scalae singulae applicatae, qua tubus extenditur, ex curua data CV assignari poterunt. Cum deinde etiam area scalae AESQ in nostras formulas ingrediatur, notari conuenit esse $AESQ = S.SQ - SS.SV$ ideoque $AESQ = S.ACSV$.

Tab. VII. Fig. 93.

Scholion 3.

Tab. VIII. Fig. 94.

106. Operae pretium erit hanc curuam CV, quae proprie scala densitatum vocari potest, loco illius scalae EQe ad vsum adhibere. Sit igitur CQc ista scala densitatum, in qua posito interuallo $IS = S$ sit applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$; in scala celeritatum vero $F\Upsilon f$ sit vt ante applicata $S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$. Quod si igitur istam scalam CQc loco praecedentis EQe substituere velimus, in formulis inuentis loco SQ scribi oportet $S.SQ + ACSQ$ et $S.ACSQ$ loco illius areae AESQ. Cum nunc sit $l \frac{Q}{B} = SS.SQ$ ex §. 103 obtinebimus pro tempore quocunque elapso t sumtis interuallis $ST = St = ct$.

densi-

densitatem $q = Q \left\{ \begin{array}{l} 1 - SS.SQ - \frac{1}{2}S.ACTM - \frac{1}{2}S.ACtm \\ + \frac{1}{2}TNtn + \frac{1}{2}SS(TM + tm) - \frac{1}{2}S(TN - tn) \\ + \frac{1}{2}S(ACTM + ACtm) \end{array} \right\}$

quae expressio contrahitur in hanc:

$$q = Q(1 + \tfrac{1}{2}SS(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2}S(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TNtn).$$

Deinde erit celeritas

$$\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}cS(-S.TM + S.tm - ACTM + ACtm + TN + tn)$$

seu

$$\mathfrak{v} = -\tfrac{1}{2}cSS(TM - tm) - \tfrac{1}{2}cS.TMtm + \tfrac{1}{2}cS(TN + tn).$$

Denique vero spatium translationis Sv reperitur:

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(2S.ACSQ - S.ACTM - S.ACtm + TNtn)$$

seu

$$Sv = \tfrac{1}{2}SS(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}S.TNtn.$$

His ergo formulis vtpote ad calculum maxime accommodatis in sequentibus vtar.

Problema 87.

107. Si tubus in A fuerit terminatus ibique siue apertus siue clausus, vtriusque scalae densitatum et celeritatum prouti in scholio praecedente (106) sunt constitutae, continuationem super axe vltra A producto inuestigare.

Solutio.

Sit distantia $IA = a$, ac primo consideremus casum, quo tubus in A est apertns; ibi ergo densitas Tab. VIII. Fig. 95.

ſitas ſemper naturali erit aequalis ideoque $Q = B$; vnde ſcala denſitatum AM per punctum A tranſibit, ſcala vero celeritatum ſit FN. Cum iam perperpetuo eſſe debeat $q = Q = B$, elapſo tempore quocunque t ſumtisque a puncto A vtrinque intervallis $AT = At = ct$ formula, quae tum denſitatem in A exprimere eſt inuenta, praebere debet $q = Q$. Quare illa formula ſumendo punctum indefinitum S in ipſo puncto A huc transferatur: fiet ergo

$$SQ = 0, \; S\Upsilon = AF, \text{ et } S = a;$$

vnde continuationem vtriusque ſcalae ita comparatam eſſe oportet, vt fiat

$$SS(TM + tm) - S(TN - tn) + TN\,tn = 0$$

idque ita vt neutrius continuatio ab altera pendeat. Seorſim ergo eſſe debet $tm = -TM$, ex quo intelligitur ſcalam denſitatum AM ita continuari oportere, vt pars continuata Am ipſi ſcalae AM ſimilis ſit ſed ad axis partem contrariam relata. Pro continuatione vero ſcalae celeritatum inuenienda ſtatuamus

$$AT = At = x, \; TN = y \text{ et } tn = z,$$

et cum eſſe debeat

$$TN\,tn - a(TN - tn) = 0$$

fiet

$$\int y\,dx + \int z\,dx - ay + az = 0;$$

hinc differentiando

$$y\,dx + z\,dx - a\,dy + a\,dz = 0,$$

quae

quae per $e^{\frac{x}{a}}$ multiplicata dat

integrale $e^{\frac{x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{x}{a}}(a\,dy - y\,dx) = e^{\frac{x}{a}}\, ay - 2\int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

ideoque $z = y - \frac{2}{a}\, e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

integrali hoc ita capto vt euanescat posito $x = 0$.

Sit iam tubus in A clausus, ibique celeritas ʋ semper esse debet nulla vnde scala celeritatum A N per punctum A transeat necesse est. Cum igitur elapso tempore t, pro quo sumantur interualla $\mathrm{A\,T} = \mathrm{A}\,t = c\,t = x$, celeritas ʋ quoque nulla prodire debeat, quaecunque fuerit scala densitatum C M primo esse oportet $\mathrm{T\,N} + t\,n = 0$, seu scalae celeritatum A N continuatio A n ipsi est similis in contrariam axis partem disposita: Pro continuatione autem scalae densitatum esse debet Tab. VIII. Fig. 96.

$$-a\,a(\mathrm{T\,M} - t\,m) - a\,\mathrm{T\,M}\,t\,m = 0.$$

Ponamus in hunc finem

$$\mathrm{A\,T} = \mathrm{A}\,t = x,\ \mathrm{T\,M} = y \text{ et } t\,m = z$$

haecque conditio ad istam deducit aequationem:

$$a(y-z) + \int y\,dx + \int z\,dx = 0 \text{ seu } a\,dy - a\,dz + y\,dx + z\,dx = 0$$

cuius integrale est

$$e^{\frac{-x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{-x}{a}}(a\,dy + y\,dx) = e^{\frac{-x}{a}}\, ay + 2\int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx$$

ita vt pro hac continuatione habeamus:

$$z = y + \frac{2}{a}\, e^{\frac{x}{a}} \int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx.$$

Coroll. 1.

108. Casu ergo priori, quo tubus in A est apertus, continuatio scalae celeritatum ita est comparata, vt sit

$$AFTN + AFtn = a(TN - tn)$$

ideoque inuenta applicata tn, habebitur area curuae continuatae

$$AFtn = IA(TN - tn) - AFTN.$$

Coroll. 2.

109. Simili modo pro casu posteriori, quo tubus in A est clausus, continuatio scalae densitatum CM ita est comparata vt sit

$$ACTM + ACtm = a(tm - TM).$$

Quare inuenta eius applicata tm, eius area ita se habebit

$$ACtm = IA(tm - TM) - ACTM.$$

Coroll. 3.

110. Si priori casu aer in tubo nullum habuerit motum initialem, solaque densitas fuerit perturbata; tum quia scala celeritatum in axem incidit, ob $y = 0$, etiam eius continuatio in axem incidet. Posteriori vero casu, si aeris densitas initio per totum tubum fuerit naturalis, tum scala densitatum simulque eius continuatio in axem incidit. His autem casibus exceptis continuationes inuentae

maxime difcrepant a fcalis principalibus; earumque conftructio nonnifi per quadraturas, quantitatem exponentialem infuper in fubfidium vocando perfici poteft.

Problema 88.

111. Si tubus in B fuerit terminatus ibique vel apertus vel claufus, vtriusque fcalae denfitatum et celeritatum fecundum praecepta (106) formatae, continuationem fuper axe vltra B producto definire.

Solutio.

Pofita diftantia $IB = b$, examinemus primo cafum quo tubus in B eft apertus, ideoque denfitas in B tam initio quam femper eadem $= B$, vnde fcala denfitatum mB per ipfum punctum B tranfibit, nf vero fit fcala celeritatum. Capiantur vtrinque a B fpatia aequalia $Bt = BT = x$, exiftente $x = ct$, atque cum poft tempus t futura fit denfitas in B ex §. 106. Tab. VIII. Fig. 97.

$$q = Q(1 + \tfrac{1}{2}bb(TM + tm) - \tfrac{1}{2}b(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TNtn)$$

neceffe eft vt primo fiat $TM + tm = 0$, ideoque fcala denfitatum Bm in formam fimilem BM ad alteram axis partem defcribendam continuetur. Pro fcalae vero celeritatum nf continuatione fN inuenienda vocentur $tn = y$ et $TN = z$ effeque debebit $\int y\,dx + \int z\,dx = b(z - y)$ vnde colligitur:

$$e^{\frac{-x}{b}} bz = \int e^{\frac{-x}{b}}(b\,dy + y\,dx) = e^{\frac{-x}{b}} by + 2\int e^{\frac{-x}{b}} y\,dx$$

$$= -e^{\frac{-x}{b}} by + 2\int e^{\frac{-x}{b}} b\,dy$$

 ideo-

ideoque

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{-\frac{x}{b}} y\,dx = -y + 2 e^{\frac{x}{b}} \int e^{-\frac{x}{b}} dy.$$

Tab. VII. Fig. 98. Sit nunc tubus in B clausus, et altera scala celeritatum n B ita per B transibit, vt semper ibi fiat celeritas $\mathfrak{v} = 0$, ideoque

$$0 = -bb(\mathrm{TM} - tm) - b.\,\mathrm{TM}\,tm + b(\mathrm{TN} + tn).$$

Primo ergo esse oportet $\mathrm{TN} + tn = 0$, et scalae nB continuatio erit BN ipsi aequalis et contrarie sita; pro alterius vero scalae densitatum cm continuatione inuenienda vocatis spatiis $\mathrm{BT} = \mathrm{B}t = x$, applicata cognita $tm = y$ et incognita

$\mathrm{TM} = z$, fieri debet $\int y\,dx + \int z\,dx + b(z - y) = 0$,

vnde reperitur

$$z = y - \frac{2}{b} e^{-\frac{x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} y\,dx = -y + 2 e^{-\frac{x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} dy.$$

Coroll. I.

Fig. 97. 112. Casu quo tubus in B est apertus, postquam ex formula inuenta singulae applicatae TN fuerint definitae, non opus est aream huius continuationis seorsim quaeri, cum ex conditione praescripta sit area

$$\mathrm{B}\int \mathrm{TN} = \mathrm{IB}(\mathrm{TN} - tn) - \mathrm{B}\int tm.$$

Coroll.

Coroll. 2.

113. Simili modo pro casu quo tubus in B est clausus continuationis scalae densitatum c M area hac ratione definitur Tab. VIII. Fig. 98.

$$\mathrm{B}\,c\,\mathrm{T\,M} = \mathrm{I\,B}\,(t\,m - \mathrm{T\,M}) - \mathrm{B}\,c\,t\,m$$

ex quo sufficit eius applicatas T M assignauisse.

Coroll. 3.

114. Si distantia $\mathrm{IB} = b$ prae interuallis $\mathrm{BT} = \mathrm{B}t = x$ fuerit valde magna, vt sit $e^{\frac{\pm x}{b}} = 1$; vel si fractio $\frac{x}{b}$ vt constans spectari possit, erit $2\,e^{\frac{\pm x}{b}} \int e^{\frac{\mp x}{b}}\,dy = 2y$; ex quo pro vtroque casu fit $z = y$, hincque continuatio perinde se habebit, ac si tubus esset cylindricus.

Problema 89.

115. Si tubus hyperbolicus in termino A fuerit apertus, et aer in eo contentus per spatium minimum G H de aequilibrio vtcunque turbetur, huius pulsus propagationem determinare. Tab. VIII. Fig. 99.

Solutio.

Super interuallo G H describatur vtraque scala densitatum G M H et celeritatum G N H, ita vt si in T posita distantia $\mathrm{I\,T} = \mathrm{S}$, initio fuerit densitas $= \mathrm{Q}$ et celeritas in plagam $\mathrm{A\,H} = \Upsilon$ sint applicatae $\mathrm{T\,M} = \frac{1}{\mathrm{S\,S}}\,l\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{T\,N} = \frac{\Upsilon}{c\,\mathrm{S}}$. His scalis constitutis

tutis per praecepta ante tradita continuatio earum vltra A versus I ita institui debet: Primo scilicet quia ambae scalae ab A ad G in ipsum axem A G incidunt, per tantumdem spatium $A g = A G$ vtraque scala pariter in axem $A g$ cadet; tum vero quia tubus ad A est apertus scala densitatum continuabitur in $g m b$ curua simili ipsi $G M H$ ad contrariam axis partem sita. Pro continuatione vero scalae celeritatum sumta abscissa $A t = A T = x$, et vocata applicata $T M = y$, existente interuallo $I A = a$; quantitas $e^{\frac{x}{a}}$, quia x tantum per spatiolum minimum G H variatur, vt constans spectari poterit ita vt sit ex (107) $z = y$ seu $t n = T N$, totaque curva $g n b$ similis scalae $G N H$ et ad eandem axis partem disposita. Hoc modo tota vtriusque scalae continuatio haberetur, si tubus ad alteram partem in infinitum esset extensus; sin autem alicubi in B terminaretur, prout ibi foret apertus vel clausus, nouae repetitiones vtriusque scalae inde orirentur prorsus vt in tubis cylindricis. Hic autem tantum agitationem quae in ipso orificio $A a$ gignetur, perscrutari est propositum, quoniam ea cum aere libero communicatur, in eoque vlterius propagatur; quae autem deinceps adhuc nascerentur repetitiones, eas hic vtpote meras resonantias non persequar, siquidem earum ratio ex superioribus satis est manifesta. In A ergo aer erit tranquillus donec effluxerit tempus $= \frac{AG}{c}$; ac tum simul vterque pulsus eo appellet. Sumamus vtrinque interuallum $AT = At$

$= ct$,

$= ct$, et quia puncti A distantia a centro hyperbolae I est $IA = a$, in formulis §. 106 datis erit $S = a$ et $SQ = o$; vnde tum colligitur pro aere in hoc loco:

densitas $q = B(1 + \frac{1}{2}aa(TM - tm) - \frac{1}{2}a(TN - tn) - \text{area } GTN)$

et quia haec area pro euanescente est habenda fit $q = B$ vti rei natura pro aere aperto postulat. Deinde vero ibidem erit

celeritas $v = -\frac{1}{2}aac(TM + tm) + \frac{1}{2}ac(TN + tn)$

seu $v = -aac.TM + ac.TN = \frac{-aa}{SS}.c.l\frac{Q}{B} + \frac{a}{S}\Upsilon$

spatium vero translationis $= -aa.GTM + a.GTN$, quod quidem erit minimum.

Coroll. 1.

116. Ex ipsa solutione satis liquet in huiusmodi tubis pulsus eadem plane celeritate propagati, atque in tubis cylindricis; ex quo concludere licet, figuram tubi nihil plane conferre ad celeritatem propagationis pulsuum; etiamsi id ex Theoria pro omnibus tubi figuris ostendere non valeamus.

Coroll. 2.

117. Deinde etiam perspicitur, omnia quae supra de pulsuum propagatione in tubis aequaliter amplis, eorumque repetitione demonstrauimus, etiam hic locum habere cum pulsus in interuallo minimo excitati easdem exhibeant vtriusque scalae continuationes, superfluum

ſuum ergo foret, quae ante de eiusdem ſoni reſonantia ſunt dicta hic repetere.

Scholion I.

Tab. VIII. Fig. 100. 118. Problema hoc ideo attuli vt explicationi effectus a tubis ſtentoreis editi inſeruiret, quandoquidem harum tubarum figura parum diſcrepat a conoidica hyperbolica quam hic tractamus. Sit ergo kab hyperbola aequilatera intra aſymtotas IB et IK deſcripta cuius portio ab circa axem AB gyrata generet tubam ſtentoream, in cuius orificio Bb vox quaecunque edatur. Hac voce aeri ad Bb proximo denſitas imprimatur Q maior naturali, ſimulque celeritas ſecundum $BA = \Upsilon$, cuius ergo directio illi, quam in ſolutionem problematis introduximus eſt contraria. Tum vero ponatur diſtantia $IA = a$ et $IB = b$, quae in problemate erat S atque inde patet aeri in orificio ampliori Aa imprimi celeritatem verſus I, quae ſit $= \frac{a}{b} . \Upsilon + \frac{aac}{bb} l \frac{Q}{B}$; quae cum diſtantia $IA = a$ multo ſit minor diſtantia $IB = b$, etiam multo foret minor celeritate Υ in primo pulſu genita, niſi ob denſitatem naturali B maiorem Q haud mediocriter augeretur, propterea quod c denotat diſtantiam quaſi 1000 pedum. Neque tamen huic pulſus in Aa tranſlati celeritati effectum tribuere licet, ſed praecipua cauſa quaerenda eſt in amplitudine orificii Aa, per quod is pulſus pari velocitate praeditus eſt extenſus idemque praeſtat, ac ſi tot voces ibi ſimul ederentur, quoties haec aper-

apertura superat aperturam oris clamantis. Si enim remota tuba vox in liberum aerem ederetur, ea quaquauersus diffusa in distantia B A vehementer dimi-nueretur; nunc autem dum in tuba cohibetur, totumque spatium Aa multo maiore celeritate implet, quam fieret si tubus abesset, mirum non est quod eius effectus tam sit fortis. De cetero facile intelligitur figuram ipsam tubi haud multum ad hunc effectum conferre, dum ab vsitata non admodum abhorreat.

Scholion 2.

119. Hinc etiam ratio petenda videtur eorum sonorum, quos tubae, buccina cornua, aliaque instrumenta similia edunt, quae in hoc a tibiis discrepant, quod in his vti vidimus, totus aer in tubo contentus per noui aeris inflationem simul concitatur hincque motum oscillatorium consequitur, quo sonus producitur. In illis vero instrumentis iam sonus quidam per orificium inflatur, vel ex ore inflantis vel dum in eo termino elastrum quodpiam ad motum vibratorium excitatur. Vtroque autem modo in illo termino tantum eiusmodi pulsus excitatur quales hic sumus contemplati, qui deinceps per totam tubi longitudinem propagantur, et dum a diffusione ad latera coercentur, eo maiorem vim acquirunt, sicque grauitas soni editi potissimum a pulsibus successive in orificio productis pendent, quam ob causam etiam soni horum instrumentorum a sonis tibiarum maxime differunt. Interim tamen etiam in istis in-

ſtrumentis longitudo et figura tubi plurimum ad ſoni grauitatem conferunt, ita vt hic vtraque ſoni cauſa ſimul concurrere videatur, quandoquidem horum inſtrumentorum ope non omnes ſed tantum certi ſoni ratione grauitatis edi poſſunt, qui plerumque rationem numerorum 1, 2, 3, 4, 5 etc. naturali ordine progredientium inter ſe tenent. Quod phaenomenon cum etiam in tibiis obſeruauerimus, hinc potius concludendum videtur ſonorum a tubis, buccinis, cornibus etc. editorum cauſam eſſe mixtam, et partim in ſonitu primum inflato, partim in agitatione totius aeris in his tubis contenti quaeri debere. Verum, quia Theoriam motus aeris vix adhuc libavimus, plurimum adhuc abeſt, quominus perfectam horum ſonorum explicationem ſperare queamus. Quin potius in iis, quae prima huius nouae ſcientiae principia nobis largiuntur, acquieſcere debemus, vberiorem cognitionem tum demum expectaturi, quando eam ſcientiam magis excolere licuerit.

Problema 90.

Tab. IX. Fig. 101. 120 Si in huiusmodi tubo hyperbolico $AaBb$ vtrinque aperto aer ita de ſtatu aequilibrii deturbetur, vt eius ſola denſitas ſine vllo motu varietur, motum oſcillatorium, qui deinceps in tubo generabitur, definire.

Solutio.

Sit I centrum hyperbolae, ex qua tubus eſt formatus, et poſita puncti in tubo vtcunque aſſumti S diſtan-

S distantia $IS = S$, inducta sit ibi aeri initio densitas $= Q$ naturali existente $= B$, capiaturque applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, erit punctum Q in scala densitatum A Q B, quam quia tubus vtrinque est apertus per, ambos terminos A et B transire oportet. Scala autem celeritatum hac hypothesi in axem incidit. Iam per praecepta ante tradita facile haec scala densitatum vtrinque continuatur, eandem alternatim ad contrarias axis partes describendo, vt puncta A, B, A', B', A'', B'' etc. interuallis $= AB$ inter se dissita sint centra arcuum vtrinque alternatim aequalium. Hinc ad quoduis tempus ab initio elapsum $= t$ status aeris qui initio circa S versabatur sequenti modo definietur: a puncto S vtrinque in axe abscindantur spatia $ST = St = ct$, denotante c spatium per quod sonus vno minuto secundo propagatur ex applicatis scalae densitatum in his punctis T et t per §. 106 erit

I. Densitas $q = Q(1 + \frac{1}{2} SS(TM + tm - 2SQ))$

II. Celeritas $\vartheta = -\frac{1}{2} SS(TM - tm) - \frac{1}{2} cS . TMtm$

III. Spatiolum $Ss = \frac{1}{2} SS(SQtm - SQTM)$

Vnde patet sumto $ST = St = 2AB$ seu post tempus $t = \frac{2AB}{c}$, fieri $TM = tm = SQ$, hincque densitatem $q = Q$ celeritatem $\vartheta = 0$, et pariter $Ss = 0$, ob $SQtm = 0$ et $SQTM = 0$.

Coroll. 1.

121 Aer igitur in tubo tempore $t = \frac{2AB}{c}$ duas oscillationes peregisse est censendus; vnde cum

 tem-

tempora singularum oscillationum sint $= \frac{AB}{c}$, singulis minutis secundis edentur $\frac{c}{AB}$ oscillationes, qui numerus simul soni grauitatem exprimit.

Coroll. 2.

122. Tubus igitur hyperbolicus eundem plane edet sonum ac tubus cylindricus eiusdem longitudinis, si quidem vterque vtrinque sit apertus; et in hyperbolico aeri primum nullus motus fuerit impressus.

Scholion.

123. Inuenimus quidem tempore $t = \frac{2AB}{c}$, quo aer perfecte in pristinum statum restituitur, duas oscillationes peragi, ad similitudinem cordarum vibrantium, ita vt si nunc aer in excursione maxima versetur, elapso hoc tempore iterum in eandem reuertatur. Verum hinc non sequitur, elapso tempore dimidio $t = \frac{AB}{c}$ aerem ad alteram excursionem contrariam pertingere: tum enim tantum hoc eueniret si curua AQB duabus constaret partibus similibus, seu diametrum haberet per medium punctum rectae AB normaliter transeuntem. Quod nisi eueniat singulae oscillationes ita se inuicem excipient vt alternatim interualla sint maiora et minora vnde sonum minus purum oriri necesse est, quam si omnia interualla essent aequalia. Atque haec fortasse praecipua est causa, quod tibiae cylindricae puriores sonos edant, quam vel conuergentes vel diuergentes; huc autem accedit,

accedit, quod hic primam aëris agitationem cum nullo motu coniunctam assumsimus, quippe quo accedente continuatio scalae celeritatum pro tubis hyperbolicis longe aliam sequitur legem, ac si tubus vbique esset aequaliter amplus. Quomodocunque autem scala celeritatum fuerit comparata, ex formulis §. 106. datis liquet, agitationes sequentes ita ex vtraque scala determinari, vt componantur ex effectu vtriusque seorsim producto. Cum igitur in hoc problemate effectum ex sola scala densitatum oriundum assignauerimus, nunc scalam celeritatum seorsim examini subiiciamus, vt deinceps vtrumque effectum coniungendo agitationes ex duabus quibuscunque scalis simul oriundae definiri queant.

Problema 91.

124. Si prima aequilibrii perturbatio in solo motu constet, densitate vbique naturali relicta, seu si detur scala celeritatum, ex ea agitationes aeris sequentes in tubo hyperbolico $AaBb$ vtrinque aperto definire. Tab. IX. Fig. 102.

Solutio.

Sit ergo $F\Upsilon G$ scala celeritatum data, cuius applicatae ex celeritatibus initio impressis ita definiuntur, vt si in S cuius distantia a centro hyperbolae sit $IS = S$, celeritas in plagam AB fuerit T fiat $S\Upsilon = \frac{T}{cS}$. Hanc igitur curuam vtrinque continuari oportet secundum praecepta in probl. 87 et 88 tradita. Statuantur in hunc finem distantiae $IA = a$

 et

et $IB = b$, et pro continuatione vltra A inuenienda capiatur $AS' = AS = x$, vt fit $x = S - a$ et ponatur applicata $S\Upsilon = y$, eritque applicata in S' constituenda

$$S'\Upsilon' = z = y - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\, dx$$

integrali hoc ita sumto vt euanescat posito $x = 0$. Ergo ob $x = S - a$ erit

$$S'\Upsilon' = S\Upsilon - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS.\, S\Upsilon$$

et area

$$AFS'\Upsilon' = a(S\Upsilon - S'\Upsilon') - AFS\Upsilon$$

Iam vltra B progrediamur, sumtisque $BS'' = BS = x = b - S$, manente $S\Upsilon = y$, applicata in S'' erigenda ex Pr. 88 reperitur

$$z = y + \tfrac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\, dx \text{ seu}$$

$$S''\Upsilon'' = S\Upsilon - \tfrac{2}{b} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.\, S\Upsilon$$

et area

$$BGS''\Upsilon'' = b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon) - BGS\Upsilon.$$

Nunc ad aperturam A reuertamur et sumto spatio $AS''' = AS'' = x = 2b - a - S$, sit $S''\Upsilon'' = y$ et applicata in S''' erigenda erit

$$z = y - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\, dx \text{ seu}$$

$$S'''\Upsilon''' = S''\Upsilon'' + \tfrac{2}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} d.S.\, S''\Upsilon''$$

quae

quae facta reductione transit in hanc formam:

$$S'''\Upsilon''' = S\Upsilon + \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} dS.\,S\Upsilon + \frac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.\,S\Upsilon$$

Redeamus ad aperturam B b sumamusque

$$BS^{IV} = BS' = x = b - 2a + S,$$

et posito $S'\Upsilon' = y$, applicata in S^{IV} statuenda erit

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\, dx \text{ seu}$$

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S'\Upsilon' + \frac{2}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.\,S'\Upsilon'$$

quae loco $S'\Upsilon'$ supra inuentum valorem substituendo reducitur ad hanc formam:

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S\Upsilon - \frac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS.\,S\Upsilon - \frac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.\,S\Upsilon$$

sicque vlterius progredi licet, quousque libuerit.

Verum hic potissimum videamus, in quo statu futurus sit aer, qui initio erat ad S post tempus $t = \frac{2AB}{c}$, quo casu abscissae vtrinque abscindendae cadent in S^{IV} et S''' ita vt in solutione generali §. 106 fiat

$$TN = S^{IV}\Upsilon^{IV} \text{ et } tn = S'''\Upsilon''',$$

tum igitur colligetur,

densitas $q = Q(1 - \frac{1}{2}S(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'''\Upsilon''') + \frac{1}{2}S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV})$

celeritas $v = \frac{1}{2}cS(S^{IV}\Upsilon^{IV} + S'''\Upsilon''')$

translatio $Ss = \frac{1}{2}S.\,S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$.

Area autem haec $S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$ ita per meras applicaplicatas exprimi poteſt; cum ex continuationis indole ſit

I. $S\Upsilon S'\Upsilon' = a(S\Upsilon - S'\Upsilon')$

II. $S''\Upsilon''S'''\Upsilon''' = a(S''\Upsilon'' - S'''\Upsilon''')$

III. $S\Upsilon S''\Upsilon'' = b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon)$

IV. $S'\Upsilon'S^{IV}\Upsilon^{IV} = b(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'\Upsilon')$

erit combinando:

IV−I. $S\Upsilon S^{IV}S^{IV} = b(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'\Upsilon') - a(S\Upsilon - S'\Upsilon')$

II−III. $S\Upsilon S'''\Upsilon''' = a(S''\Upsilon'' - S'''\Upsilon''') - b(S''\Upsilon'' - S\Upsilon)$

vnde colligimus aream

$$S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV} = (b-a)(S\Upsilon - S'\Upsilon' - S''\Upsilon'') + bS^{IV}\Upsilon^{IV} - aS'''\Upsilon'''.$$

In qua ſi valores pro his applicatis inuentos ſubſtituamus reperitur iſta area ponendo $S\Upsilon = y$

$$\frac{2(b-a)}{a+b}\left(e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

vbi integralia ita capi debent vt ea, quae inuoluunt a euaneſcant poſito $S = a$, altera vero poſito $S = b$. Haec ergo expreſſio pro area inuenta in $\frac{1}{2}S$ ducta praebet ſpatium translationis Ss. Deinde pro reliquis elementis habebimus:

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'''\Upsilon''' = \frac{-2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

et

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} + S'''\Upsilon''' = 2y - \frac{2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

Coroll.

Coroll. 1.

125. Hinc ergo patet ob ſcalam celeritatum poſt tempus $= \frac{2AB}{c}$ ſtatum aeris in tubo multum ab initiali diſcrepare poſſe quod diſcrimen eo minus euadet, quo minor fuerit fractio $\frac{2(b-a)}{a+b}$, et quo propius ſcala principalis F T G ad axem acceſſerit.

Coroll. 2.

126. Quodſi ergo aeri in tubo hyperbolico ſimul motus fuerit impreſſus, poſt tempus $\frac{2AB}{c}$ aer in tubo non duas oſcillationes perfeciſſe cenſebitur; multo minus ad aliud quodpiam tempus oſcillationes reuocari poterunt, ſed potius ſonus inde perceptus valde erit rudis et ad harmoniam ineptus.

Scholion.

127. Tibiae ergo ad figuram hyperbolicam formatae hoc inſigni vitio laborabunt, vt ſonos neutiquam puros atque ad harmoniam idoneos edant, propterea quod motum non in oſcillationes diſtinctas reſoluere licet. Hocque vitium eo erit maius, quo fortius huiusmodi tibia inflatur, quoniam tum multo minus oſcillationes diſtingui poterunt, inflatione autem leniſſima ſonus etiamnunc tolerabilis edetur. Facile autem intelligitur hoc vitium tibiis hyperbolicis non eſſe proprium, ſed ad omnes alias formas eo magis extendi, quo magis ab amplitudine aequabili differant. Ratio igitur hinc perſpicitur, cur

omnis generis tibiae, quae Organis pneumaticis inferi folent, figuram habeant vel cylindricam vel prismaticam, vt amplitudo vbique fit eadem, haecque fola figura ad Muficam accommoda videtur; quod quidem duplici modo fieri licet, dum eae fuperne vel apertae funt, vel clauduntur. At fi tibias hyperbolicas claudere velimus, foni multo rudiores edentur, quia tum neutra fcala feorfim confiderata motum ofcillatorium regularem producere valet; ex quo operae pretium haud erit cafum, quo tubus hyperbolicus in altero termino apertus in altero vero claufus fumeretur, euolui.

CAPVT VI.

DE MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS CONICIS.

Problema 92.

128. Si tubus habuerit figuram conicam, aerque in eo contentus vtcunque de ftatu aequilibrii deturbetur, defcribere ambas fcalas, ex quibus deinceps ftatus aeris ad quoduis tempus definiri queat.

Solutio.