

DE
 VARIIS INTEGRABILITATIS
 GENERIBVS.

Auctore

L. EULER O.

I.

Si quantitas variabilis p absolute spectetur et quaeratur, quomodo quantitatem V comparatam esse oporteat, vt formula $V dp$ fiat integrabilis; tunc nullum est dubium, quin ista quantitas V debeat esse functio quaequam ipsius p . Vocabulum enim integrabilitatis ita hic sensu latissimo accipio, vt quaecunque functio ipsius p fuerit V , formulam $V dp$, semper integrabilem esse dicam, nihilque interfit, siue eius integrale algebraice, siue per logarithmos, siue per arcus circulares, siue per quascunque altiores quantitates transcendentis, exprimat, quandoquidem formulam integram $\int V dp$, semper per quadraturam cuiuspiam curuae exhibere licet.

2. Longe aliter autem se res habet, quando quantitas p certa quadam ratione ad alias quantitates variabiles refertur, tum enim praeter functiones ipsius p quantitati illi V , etiam alios valores tribuere licet, quibus formula $V dp$ integrabilis redditur. Veluti si p ita ad binas coordinatas x et y refe-

VARIA GENERA INTEGRABILITATIS. 71

referatur, ut fit $dy = p dx$ siue $p = \frac{dy}{dx}$, tum loco V etiam sumi poterit x , quoniam formula $x dp$ reuera est integrabilis, quum enim fit

$$\int x dp = px - \int p dx, \text{ ob } \int p dx = y$$

erit utique

$$\int x dp = px - y.$$

3. Quin etiam idem locum habet in ipsis differentialibus primitiuis dx et dy ; ut enim formula $V dx$ fit integrabilis, hoc non solum usu venit, si fuerit V functio quaecunque ipsius x ; sed etiam casu, quo $V = p$, quum fit $\int p dx = y$, simili modo, ut formula $\int V dy$ fiat integrabilis, loco V non solum functio quaecunque ipsius y accipi poterit, sed etiam casu $V = \frac{1}{p}$, fit $\int \frac{dy}{p} = x$.

4. Quo haec generalius prosequamur, vocemus quantitatem V multiplicatorem, per quem quaequam formula differentialis reddatur integrabilis, unde ex praemissis patet, si formula differentialis fuerit vel dp vel dx vel dy , tum multiplicatorem esse vel $V = x$, vel $V = p$, vel $V = \frac{1}{p}$.

5. Quantumuis haec facilia et obuia videantur; tamen saepenumero inuestigatio huiusmodi multiplicatorum maxime ardua deprehenditur, et quod eius usum maxime commendat, saepius hoc modo aequationes differentiales, tam secundi, quam altiorum graduum, satis commode resolvere licet, ad quas absque his subsidiis vix alius aditus patere videatur. Saepius enim iam notavi, praecipuum nego-

negotium in aequationibus differentialibus integrandis ad inuentionem idoneorum multiplicatorum reduci, ex quo inuestigatio huiusmodi multiplicatorum sine dubio maximi momenti censeri debet.

6. Haec accuratius perscrutandi occasionem mihi dedit haec quaestio, qua linea curua inter binas coordinatas x et y contenta quaeritur, cuius radius osculi aequalis fit futurus lineae rectae,

$$\sqrt{xx + yy},$$

quum enim posito $dy = p dx$ fit radius osculi

$$= \frac{dx}{dp} (1 + pp)^{\frac{3}{2}}$$

haec habetur aequatio resoluenda

$$\frac{dx}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\sqrt{xx + yy}},$$

cuius vtrumque membrum non sine admiratione integrabile fieri deprehendi, ope multiplicatoris $x + py$, tum enim, pro posteriori membro fit

$$\frac{dx(x + py)}{\sqrt{xx + yy}} = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{xx + yy}}$$

cuius integrale est

$$\sqrt{xx + yy}$$

pro priori vero membro, res non adeo est manifesta, posito autem

$$y = px + v,$$

vt fiat

$$dy = p dx = p dx + x dp + dv, \text{ ideoque } dv = -x dp$$

habebimus

$$dp(x + py) = x dp + y p dp = x(1 + pp) dp + v p dp = -dv(1 + pp) + v p dp$$

ita

ita vt prius membrum fiat

$$\frac{d v (1 + p p) + v p d p}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}$$

cuius integrale manifesto est

$$= -\frac{v}{\sqrt{1 + p p}} = \frac{p x - y}{\sqrt{1 + p p}}$$

ficque tota aequatio integralis erit

$$\sqrt{x x + y y} + C = \frac{p x - y}{\sqrt{1 + p p}}$$

7. Haec igitur perpendens, non amplius dubitauit, quin omnes huiusmodi formulae differentiales duplicem admittant multiplicatorem, ita vt, si talis formula iam per se fit integrabilis, quae in genere fit $d v$, praeter multiplicatores naturales, qui sunt functiones ipsius v , etiam dentur multiplicatores alius indolis, qui non sint functiones ipsius v , quemadmodum in exemplis allatis fieri vidimus.

8. Statim autem ac vnus quispiam multiplicator fuerit cognitus, ex eo mox infinitos alios multiplicatores concludere licet, ita quum formulae $d x$ multiplicator sit p , et $\int p d x = y$, tum functio quaecunque ipsius y , quae fit Y , per p multiplicata, dabit etiam multiplicatorem idoneum, nam $d x$ multiplicatum in $Y p$ dat $Y d y$, quod manifesto est integrabile. Deinde si X denotet functionem quamcunque ipsius x , formula $d y$ multiplicatorem habebit $\frac{x p}{p}$, tum enim prodit $\frac{x d y}{p} = X d x$. Simili modo quum fit

$$\int x d p = p x - y,$$

Tom. XVII. Nou. Comm.

K

¶

si V denotet functionem quamcunque formulae $px - y$; tum Vx erit multiplicator ipsius dp , si quidem erit

$$Vx dp = V \cdot d(px - y),$$

huiusmodi autem multiplicatores, qui hoc modo ex vno quodam multiplicatore cognito concluduntur, omnes eiusdem generis sunt censendi, unde simplicissimum eorum in quouis genere primitivum appellabo, quippe quo cognito, reliqui omnes innotescunt.

9. Ita si in genere proposita sit huiusmodi formula differentialis,

$$P dp + Q dx + R dy$$

vbi P, Q, R sint functiones quaecunque ipsarum x, y et p , quae integrabilis reddatur ope multiplicatoris M , sequenti modo omnes reliqui multiplicatores eiusdem generis inueniri poterunt. Ponatur

$$M(P dp + Q dx + R dy) = dv,$$

ita ut dv sit verum differentiale, ac denotet V functionem quamcunque ipsius v , manifestumque erit, multiplicatorem quoque fore VM , si quidem tum habebitur

$$VM(P dp + Q dx + R dy) = V dv,$$

quae formula per hypothesin est integrabilis.

10. Simili modo, si pro eadem formula proposita

$$P dp + Q dx + R dy$$

adhuc

adhuc alius multiplicator primitivus N fuerit re-
 pertus; tum ex eo etiam infiniti alii eiusdem generis
 erui poterunt, ita ut hoc modo duae inveniuntur
 formulae generales, pro multiplicatoribus formulae
 differentialis propositae. Hinc ergo ista quaestio maxi-
 mi momenti nascitur, quam seorsim proponi ope-
 rae pretium erit.

Problema.

Si formula

$$P dp + Q dx + R dy$$

integrabilis fiat tam per multiplicatorem M , quam
 per alium diuersae naturae N , inuenire expressio-
 nem generalem, quae omnes plane multiplicatores
 possibiles eiusdem formulae in se complectatur.

Solutio.

Quum M et N sint multiplicatores, ponamus

$$M(P dp + Q dx + R dy) = dv$$

et $N(P dp + Q dx + R dy) = du$

eruntque quantitates v et u cognitae functiones, iam
 denotet z functionem quamcunque binarum harum
 variabilium v et u , cuius differentiale propterea hu-
 iusmodi formam habebit:

$$dz = S dv + T du$$

vbi functiones S et T ex functione z erunt cog-
 itae, hac forma iam inuenta, dico expressionem ge-

K 2 neralem,

neralem, omnes plane multiplicatores in se complectentem, fore:

$$= S M + T N,$$

tum enim habebitur:

$$(S M + T N)(P dp + Q dx + R dy) = S dv + T du = dz,$$

cuius integrale per hypothefin est z , vbi pro z functio quaecunque binarum variabilium z et u pro lubitu sumi potest.

11. Vt hoc exemplo illustremus, fit proposita formula dp , cuius duo multiplicatores constant

$$M = 1 \text{ et } N = x, \text{ hinc ergo fit}$$

$$dp = dv \text{ et } x dp = du, \text{ ideoque}$$

$$v = p \text{ et } u = px - y,$$

quare si z denotet functionem quamcunque harum duarum variabilium v et u , fitque

$$dz = S dv + T du,$$

multiplicator vniuersalis erit $S + T x$.

12. Circa hanc formulam obseruandum est, non absolute necessarium esse, vt valores litterarum S et T ex certa quadam functione z deriuentur. Dummodo enim pro litteris S et T eiusmodi functiones ipsarum v et u capiantur, vt sit $(\frac{dS}{du}) = (\frac{dT}{dv})$, tum enim semper formula $S M + T N$ erit multiplicator idoneus formulae differentialis

$$P dp + Q dx + R dy,$$

et producti integrale erit ipsa functio illa z , quam ex litteris S et T facile inuenire licet.

13. Quod autem ista formula $S M + T N$ omnes plane multiplicatores formulae differentialis propositae in se complectatur, ratio in eo est sita, quod semper duo tantum eiusmodi multiplicatores primitiui M et N exhiberi queant, qui a se invicem non pendeant; si enim plures eiusmodi multiplicatores locum haberent; tum forma ista vtique non foret generalis, sed alia multo generalior exhiberi posset; ratio autem, cur duo tantum huiusmodi multiplicatores locum inueniant, in eo est quaerenda, quod inter ternas nostras variables, x, y et p vnica detur relatio, scilicet $p = \frac{dy}{dx}$, si enim ulterius progredi et insuper litteram q introducere velimus, vt fit

$$dp = q dx, \text{ siue } q = \frac{dp}{dx}$$

quaelibet formula differentialis tres adeo multiplicatores admitteret, quemadmodum ex forma simplicissima dq manifestum est, quae primum ipsa est integrabilis, seu multiplicator $= 1$, secundus multiplicator est y , quoniam

$$\int y dq = qy - \int q dy \text{ at } \int q dy = \int p q dx = \int p dp = \frac{p^2}{2}$$

vnde fit

$$\int y dq = qy - \frac{p^2}{2},$$

tertius vero multiplicator est x , quum fit

$$\int x dq = xq - p,$$

ex quo satis patet his casibus tria integrabilitatis genera locum habere.

14. Contemplemur autem hic tantum ternas variables x , y et p , existente $p = \frac{dy}{dx}$, et quo clarius appareat, semper duos multiplicatores primitivos locum habere, varios casus simpliciores in medium afferamus, quibus hos duos multiplicatores, siue diuinando, siue quocunque alio modo, reperire licuit, quos casus sequenti modo adiungamus.

$$I. \alpha x dp + \beta p dx.$$

15. Haec formula primo per se est integrabilis, quum eius integrale sit

$$\alpha(px - y) + \beta y$$

ita ut multiplicator primus sit $= 1$. Alter multiplicator erit $p^{\alpha-1} x^{\beta-1}$; tum enim integrale fit $p^{\alpha} x^{\beta}$. Pro multiplicatore igitur vniuersali inueniendocum erit ex §. 10.

$$M = 1 \quad \text{et} \quad N = p^{\alpha-1} x^{\beta-1} \quad \text{hinc}$$

$$v = \alpha(px - y) + \beta y = \alpha px + (\beta - \alpha)y$$

$$\text{et } u = p^{\alpha} x^{\beta},$$

quare si fuerit

$$dZ = S dv + T du,$$

multiplicator generalis erit

$$S. 1 + T p^{\alpha-1} x^{\beta-1}.$$

16. Vnico autem casu, quo $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, haec solutio fit incongrua, quippe quo ambo multiplicatores non amplius erunt diuersi, vterque enim fieret $= 1$, hocque incommodum etiam vsu venit, quoties $\beta = \alpha$, tum enim prius integrale est αpx et

et alter multiplicator $p^{\alpha-1} x^{\beta-1}$ eius foret potestas, neque propterea a priori multiplicatore differret, quod quidem per se evidens est, quum totum negotium a ratione inter α et β pendeat, quare hic nova quaestio oritur, num casu $\beta = \alpha$ exhiberi queat alius multiplicator, et quomodo futurus sit expressus, quem casum seorsim euoluamus.

II. $x dp + p dx$.

17. Circa priorem multiplicatorem $= 1$ hic nulla est difficultas, quum integrale sit $p x$, alter vero multiplicator, non tam facile se offert, re autem diligentius perpenſa, multiplicator se obtulit, $= L x$, erit enim

$$\int (x dp + p dx) L x = p x L x - y,$$

simili autem modo alius colligitur multiplicator $\frac{y}{p p + x y}$, fiet enim integrale

$$= \frac{-y}{p x} + \int \frac{d y}{p x} = \frac{-y}{p x} + L x,$$

neque vero hic multiplicator tertius a duobus prioribus discrepat, quum enim ex prioribus fit

$$M = 1, v = p x \text{ et } N = L x \text{ et } u = p x L x - y,$$

manifestum est, tertium integrale esse functionem ipsius u et v , quum fit

$$\frac{u}{v} = L x - \frac{y}{p x}.$$

Ex hoc igitur exemplo intelligitur, saepenumero plures multiplicatores diuersos videri posse, quum tamen ad duos reduci queant, ad quod diiudicandum tantum ex binis multiplicatoribus eliciantur litterae

v et u

v et u , ex quibus semper reliqua integralia, quotcunque fuerint inuenta, componi reperientur,

$$\text{III. } \alpha y dp + \beta v dy.$$

18. Hic iterum vnus multiplicator sponte se offert, scilicet $p^{\alpha-1} y^{\beta-1}$, cui respondet integrale $p^{\alpha} y^{\beta}$ siue quod eodem redit, sumpto multiplicatore $\frac{1}{p y}$, erit integrale

$$= \alpha \int p + \beta \int y = L p^{\alpha} y^{\beta},$$

quod quum fit illius logarithmus, etiam a priore differre non est censendum; alter multiplicator re probe perpenſa colligitur $x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, integrale enim erit

$$x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha}\right) y^{\frac{\beta + \alpha}{\alpha}},$$

tum etiam quasi sponte se prodit multiplicator $\frac{1}{p p}$, erit enim

$$\int \frac{\alpha y dp}{p p} = -\frac{dy}{p} + \int \frac{\alpha dy}{p} = -\frac{\alpha y}{p} + \alpha x \text{ et } \int \frac{\beta dy}{p p} = \int \frac{dy}{p} = x,$$

unde totum integrale erit

$$= -\frac{\alpha y}{p} + (\alpha + \beta) x,$$

hoc autem iam in duobus praecedentibus continetur, erit enim

$$M = p^{\alpha-1} y^{\beta-1} \text{ et } v = p^{\alpha} y^{\beta}, N = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\text{et } u = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha}\right) y^{\frac{\beta + \alpha}{\alpha}},$$

unde diuicendo u per

$$\frac{V_{\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha + \beta} = \frac{p y^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha + \beta}, \text{ oritur integrale } (\alpha + \beta) x - \frac{\alpha y}{p}.$$

Haec

Haec autem reductio non succedit, casu quo $\beta = -\alpha$, quem casum seorsim evoluamus.

IV. $y dp - p dy$.

19. Cum hoc casu sit $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, erit prior multiplicator $\frac{1}{y}$, praeterea vero colligitur multiplicator $\frac{x}{y^2}$, tum enim erit

$$\int \frac{x(y dp - p dy)}{y^2} = \frac{px}{y} - Ly$$

haec enim formula differentiata praebet

$$\frac{x(y dp - p dy)}{y^2} = p dx + x dp - \frac{dy px}{y^2} - \frac{dy}{y} \text{ ob } dy = p dx$$

quum nunc habeamus duos multiplicatores, alterum $M = \frac{1}{y^2}$, et alterum $N = \frac{x}{y^2}$, vnde fit

$$v = \frac{p}{y} \text{ et } u = \frac{px}{y} - Ly$$

si Z denotet functionem quamcunque binarum quantitatum v et u , erit multiplicator generalis

$$= M \left(\frac{dZ}{dv} \right) + N \left(\frac{dZ}{du} \right) = \frac{1}{y^2} \left(\frac{dZ}{dv} \right) + \frac{x}{y^2} \left(\frac{dZ}{du} \right)$$

V. $p dp + x dx$.

20. Primo haec formula ipsa per se est integrabilis, ita vt fit

$$M = 1 \text{ et } v = \frac{1}{2}(pp + xx),$$

tum vero alius multiplicator deprehenditur arcus cuius tangens est $\frac{x}{p} = N$, tum enim erit

$$\begin{aligned} & \int (p dp + x dx) A. \text{ tang. } \frac{x}{p} = \frac{1}{2}(pp + xx) A. \text{ tang. } \frac{x}{p} \\ & - \int \frac{1}{2}(pp + xx) d. A. \text{ tang. } \frac{x}{p} = \frac{1}{2}(pp + xx) A. \text{ tang. } \frac{x}{p} \\ & - \int \frac{1}{2}(p dx - x dp) \end{aligned}$$

at est

$$\int \frac{1}{2} (p dx - x dp) = y - \frac{px}{2},$$

vnde integrale quaesitum erit

$$\frac{1}{2} (p p + x x) A. \text{ tang. } \frac{x}{p} - y + \frac{px}{2}.$$

21. Ex his exemplis abunde patet, inuentio-
nem huiusmodi multiplicatorum nequam esse
obuiam, sed saepenumero admodum esse abscondi-
tam, quin etiam euenire potest, vt vires analyseos
plane superet. Interim tamen methodum quandam
hic aperiam, ad hoc institutum accommodatam, cu-
ius ope plurimis casibus tales multiplicatores inue-
nire licet.

22. Quum ratio duplicis multiplicatoris in eo
lateat, quod huiusmodi formulae differentiales sint
secundi gradus, vnde fit, vt vterque multiplicator
vnam tantum quasi integrationem inuoluat, ideo-
que duplex integratio etiam duplicem multiplicato-
rem requirat, hinc vicissim, ambos multiplicatores
reperire licebit, si vtramque integrationem absolu-
mus. Quemadmodum igitur hac methodo vti oport-
eat, in sequentibus exemplis docebimus.

Exemplum 1.

23. Proposita formula differentiali, $x dp + p dx$,
eius vtrumque multiplicatorem inuenire. Quum
haec formula per se sit integrabilis, ideoque $M = 1$,
ponatur

$$x dp + p dx = d v \text{ eritque } p x = v,$$

sicque

sicque vna integratio est absoluta, pro altera vero quum sit $p = \frac{v}{x}$, per dx multiplicando ob $pdx = dy$ habebimus $dy = \frac{v dx}{x}$, vnde integrando elicimus

$$y = v Lx - \int dv. Lx, \text{ ideoque}$$

$$\int dv Lx = v Lx - y = p x Lx - y,$$

vnde intelligimus, formulam $dv Lx$ esse integrabilem, siquidem eius integrale est $p x Lx - y$, quare quum dv denotet ipsam formulam nostram propositam, $x dp + p dx$, patet eius multiplicatorem fore Lx .

24. Eodem modo etiam alios multiplicatores reperire licet, quum enim sit

$$dy = \frac{v dx}{x} \text{ erit etiam } \frac{dy}{v} = \frac{dx}{x},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{v} + \int \frac{y dv}{v^2} = Lx, \text{ ergo } \int \frac{y dv}{v^2} = Lx - \frac{y}{v} = Lx - \frac{y}{p x},$$

integrabilis ergo est formula

$$\frac{y dv}{v^2} \text{ seu } d v \frac{y}{v^2},$$

sicque multiplicator erit

$$\frac{y}{v^2} = \frac{y}{p p x x},$$

quem ergo loco N assumere licet, vnde, quum sit

$$v = p x \text{ et } u = Lx - \frac{y}{p x},$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsarum v et u erit multiplicator generalis

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) + \frac{y}{p p x x} \left(\frac{dZ}{du}\right),$$

L 2

veluti

veluti si fuerit $Z = vu$ erit

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) = u \quad \text{et} \quad \left(\frac{dZ}{du}\right) = v,$$

vnde oritur hic multiplicator :

$$u + \frac{y}{p^2 x^2} v = Lx - \frac{y}{p^2 x} + \frac{y}{p^2 x} = Lx,$$

qui est multiplicator priori loco inuentus.

Exemplum 2.

25. Proposita formula differentiali $\alpha x dp + \beta p dx$, eius ambos multiplicatores inuenire. Quum haec formula iam per se sit integrabilis, erit $M = N$ et posito :

$$\alpha x dp + \beta p dx = dv \quad \text{erit} \quad v = \alpha px + (\beta - \alpha)y,$$

vnde colligitur

$$p = \frac{v}{\alpha x} + \frac{(\alpha - \beta)y}{\alpha} x,$$

quae per dx multiplicata praebet,

$$dy = p dx = \frac{v dx}{\alpha x} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \frac{y dx}{x},$$

hincque

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha dy}{v + (\alpha - \beta)y},$$

integrando igitur obtinebimus

$$Lx = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} Lv + (\alpha - \beta)y - \int \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{dv}{v + (\alpha - \beta)y}$$

sicque erit

$$\alpha \int \frac{dv}{v + (\alpha - \beta)y} = \alpha Lv + (\alpha + \beta)y - (\alpha - \beta)Lx,$$

vnde patet, formulae nostrae dv multiplicatorem fore

$$\frac{\alpha}{v + (\alpha - \beta)y} = \frac{1}{p^2 x^2}$$

vti per se est manifestum, tum enim integrale erit
 $\alpha L p + \beta L x$.

Exemplum 3.

26. Proposita formula $p dp + x dx$, eius
 ambos multiplicatores inuenire. Hic iterum primus
 multiplicator est $M = s$ et posito

$$p dp + x dx = dw \text{ erit } pp + xx = 2w, \text{ hinc}$$

$$p = \sqrt{(2w - xx)}$$

et per dx multiplicando

$$dy = p dx = dx \sqrt{(2w - xx)},$$

ponatur tamen $2w = ss$, fietque

$$y = \frac{1}{2}x \sqrt{(ss - xx)} + \frac{ss}{2} \text{Arc. sin. } \frac{x}{s} - \int \frac{xs ds}{2\sqrt{(ss - xx)}}$$

$$+ s ds \text{Arc. sin. } \frac{x}{s} - \frac{ss ds}{2\sqrt{(ss - xx)}} = \frac{1}{2}x \sqrt{(ss - xx)}$$

$$+ \frac{ss}{2} \text{Arc. sin. } \frac{x}{s} - \int s ds \text{Arc. sin. } \frac{x}{s}$$

ideoque

$$\int s ds \text{Arc. sin. } \frac{x}{s} = \frac{1}{2}x \sqrt{(ss - xx)} + \frac{ss}{2} \text{Arc. sin. } \frac{x}{s} - y = \frac{px}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}(pp + xx) \text{Arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}} - y,$$

at est

$$s ds = p dp + x dx,$$

vnde patet, nostrae formulae multiplicatorem esse

$$\text{Arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}}, \text{ siue Arc. tang. } \frac{x}{p}.$$

27. Haec autem operatio nimis est molesta,
 quam vt ea, in formulis magis complicatis, vti

queamus, quare eam sequenti modo faciliorem reddere conemur. Quum inuenerimus:

$$dy = dx \sqrt{ss - xx},$$

statuamus hic $x = sz$ fietque

$$dy = ss dz \sqrt{1 - zz} + z s ds \sqrt{1 - zz},$$

quae per ss diuisa dat

$$\frac{dy}{ss} = dz \sqrt{1 - zz} + \frac{z ds}{s} \sqrt{1 - zz}$$

et integrando

$$\frac{y}{ss} + 2 \int \frac{y ds}{ss} = \int dz \sqrt{1 - zz} + \int \frac{z ds}{s} \sqrt{1 - zz}$$

vbi membrum penultimum

$$\int dz \sqrt{1 - zz}$$

absolute datur, quum sit certa quaedam functio ipsius $z = \frac{x}{s}$, postremum autem membrum restituto pro z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int \frac{z ds}{s} \sqrt{1 - zz} = \int \frac{z ds}{s} \sqrt{ss - xx},$$

vnde binis integralibus per $\frac{ds}{s}$ affectis coniungendis, consequimur

$$+ \int \frac{ds}{s} (2y - x \sqrt{ss - xx}) = \int dz \sqrt{1 - zz} - \frac{y}{s^2}$$

ex quo patet, formulae nostrae

$$p dp + x dx = s ds$$

multiplicatorem esse

$$\frac{1}{s^2} (2y - x \sqrt{ss - xx})$$

qui ob

$$ss = pp + xx,$$

trans-

transmutatur in hanc formam $\frac{2y - px}{(x^2 - xx)^2}$, qui si ponatur $= M$, erit

$$u = \int dz \sqrt{(1 - zz)} - \frac{y}{pp + xx} \text{ existente } z = \frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}}$$

atque hinc multiplicatorem generalem facile elicere licet.

28. Hinc patet, si formula proposita sit $\alpha p dp + \beta x dx$, quo casu iterum est $M = 1$ et

$$v = \frac{\alpha pp}{2} + \frac{\beta}{2} \cdot xx,$$

alterum multiplicatorem repertum iri

$$N = \frac{2y - px}{(\alpha pp + \beta xx)^2}$$

tum enim integrale hinc natum erit

$$u = \int \frac{dz}{z^2} (2y - px) = \int dz \sqrt{\frac{(1 - \beta z z)}{2}} - \frac{y}{\alpha pp + \beta xx}$$

existente

$$z = \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{(\alpha pp + \beta xx)}}$$

Exemplum 4.

29. Proposita formula differentiali:

$$p^{n-1} dp + \beta x^{n-1} dx,$$

eius multiplicatores inuenire. Quum alter multiplicator iterum sit cognitus $= 1$, posita nostra formula $= dw$, erit

$$p^n + \beta x^n = nw$$

unde fit

$$p = (nw - \beta x^n)^{\frac{1}{n}}$$

hincque

$$dx = p dx = dx (nw - \beta x^n)^{\frac{1}{n}}$$

statua-

statuatur nunc

$$n v = s^n, \text{ sitque } x = s z,$$

habebimus

$$d y = (s d z + z d s) s (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}},$$

quae per $s s$ diuisa, dat

$$\frac{d y}{s s} = d z (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}} + \frac{z d s}{s} (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s s} + \int \frac{z y d s}{s^3} = \int d z (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}} + \int \frac{z d s}{s} (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}},$$

vbi membrum penultimum est determinatum, quippe certa quaedam functio ipsius

$$z = \frac{x}{s} = \frac{x}{(n v)^{\frac{1}{n}}},$$

ultimum vero membrum, si in eo restituatur $z = \frac{x}{s}$ abit in

$$\int \frac{x d s}{s^3} (s^n - \beta x^n)^{\frac{x}{n}},$$

atque ob

$$(s^n - \beta x^n)^{\frac{x}{n}} = p$$

erit

$$\int \frac{x d s}{s^3} (s^n - \beta x^n)^{\frac{x}{n}} = \int \frac{p x d s}{s^3},$$

quibus substitutis fiet

$$\int \frac{d s}{s^3} (2 y - p x) = \int d z (1 - \beta z^n)^{\frac{x}{n}} - \frac{y}{s^2}.$$

Quum autem sit $s = (n v)^{\frac{1}{n}}$, erit

$$d s = (n v)^{\frac{1}{n} - 1} d v \text{ et } \frac{d s}{s^3} = \frac{d v}{(n v)^{\frac{3}{n} + 1}}$$

ex quo primum membrum fiet

$$\int \frac{dv}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}} (2y - px),$$

cuius integrale quum iam fit inuentum, patet formulae propositae dv multiplicatorem esse

$$= \frac{2y - px}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}} = \frac{2y - px}{(p^n + \beta x^n)^{\frac{2+n}{n}}}$$

Exemplum 5.

30. Proposita formula differentiali:

$$p^{m-1} dp + \beta x^{n-1} dx = dv,$$

eius multiplicatorem alterum inuenire. Quum hinc sit

$$v = \frac{1}{m} p^m + \frac{\beta}{n} x^n; \text{ erit}$$

$$p = (mv - \frac{m\beta}{n} x^n)^{\frac{1}{m}} \text{ et } dy = p dx = dx (mv - \frac{m\beta}{n} x^n)^{\frac{1}{m}}$$

ponatur hic iterum

$$mv = s^n \text{ et } x = sz, \text{ erit}$$

$$dy = (s dz + z ds) s^{\frac{n}{m}} (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}},$$

quae diuisa per $s^{\frac{m+n}{m}}$, praebet

$$\frac{dy}{s^{\frac{m+n}{m}}} = dz (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}} + \frac{z ds}{s} (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}} + \int \frac{m+n}{m} \cdot \frac{y ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}} = \int dz (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}}$$

$$+ \int \frac{z ds}{s} (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}},$$

vbi membrum penultimum est functio cognita ipsius z , vltimum autem substituto loco z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int \frac{x ds}{s^{\frac{m+n}{m}}} (s^n - \frac{m\beta}{n} x^n)^{\frac{1}{m}} = \int \frac{x ds}{s^{\frac{m+n}{m}}},$$

quare hinc colligimus

$$\int \frac{ds}{s^{\frac{m+n}{m}}} (\frac{m+n}{m} y - px) = \int dz (1 - \frac{m\beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}} - \frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}},$$

quum autem fit

$$s = (m\psi)^{\frac{1}{n}} \text{ erit } ds = \frac{1}{n} m^{\frac{1}{n}} \psi^{\frac{1}{n}-1} d\psi$$

$$\text{et } \frac{ds}{s^{\frac{m+n}{m}}} = \frac{1}{n} \frac{d\psi}{m^{\frac{1}{n}} \psi^{\frac{m+n}{m n}}},$$

ex quo colligitur formulae nostrae propositae multiplicatorem esse

$$\frac{\frac{m+n}{m} y - px}{\psi^{\frac{m+n}{m n}} + 1} = \frac{\frac{m+n}{m} y - px}{(\frac{1}{m} p^m + \frac{\beta}{n} x^n)^{\frac{m+n}{m n}} + 1}.$$

31. Haecenus eiusmodi formulas sumus contemplati, quae cum per se sunt integrabiles, tum vero duas tantum variables p et x contineant; simili autem modo istas formulas tractare licebit, quae tantum has duas variables p et y inuoluant, vbi quidem assumimus, has formulas per se esse integrabiles.

Exemplum 6.

Proposita formula:

$$p^{m-1} dp + \beta y^{n-1} dy = d\psi,$$

eius

eius alterum multiplicatorem inueſtigare. Primum integrando colligimus

$$v = \frac{1}{m} p^m + \frac{\beta}{n} y,$$

vnde fit

$$p = (m v - \frac{m \beta}{n} y^n)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{et } dy = p dx = dx (m v - \frac{m \beta}{n} y^n)^{\frac{1}{m}}$$

ideoque

$$dx = \frac{dy}{(m v - \frac{m \beta}{n} y^n)^{\frac{1}{m}}},$$

ſtatuatur iam hic $m v = s^n$ et $y = s z$, vt obtineamus

$$dx = \frac{s dz + z ds}{s^{\frac{n}{m}} (1 - \frac{m \beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

quae aequatio diuiſa per $s^{\frac{m-n}{m}}$ dat

$$\frac{dx}{s^{\frac{m-n}{m}}} = \frac{dz}{(1 - \frac{m \beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}}} + \frac{z ds}{s (1 - \frac{m \beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

haec aequatio ſimili modo vt ſupra integratur, et ex penultimo membro iterum naſcitur functio determinata ipſius z ; ſi in membro poſtremo loco z ipſius valorem $\frac{y}{s}$ reſtituamus, conſequimur,

$$\frac{x}{s^{\frac{m-n}{m}}} + \int \frac{m-n}{m} \frac{x ds}{s^{\frac{2m-n}{m}}} = \int \frac{dz}{(1 - \frac{m \beta}{n} z^n)^{\frac{1}{m}}} + \int \frac{y ds}{s^{\frac{2m-n}{m}}},$$

ex his igitur colligimus

$$\int \frac{ds}{s^{\frac{n}{m}-\frac{n}{m}}} \left(\left(1 - \frac{n}{m}\right) x - \frac{y}{p} \right) = \int \frac{dz}{\left(1 - \frac{m\beta}{n} z^n\right)^{\frac{1}{m}} s^{\frac{n}{m}-\frac{n}{m}}}$$

quum nunc fit $s = (mv)^{\frac{1}{n}}$, erit $ds = \frac{1}{n} m^{\frac{1}{n}} v^{\frac{1}{n}-1} dv$,
hinc

$$\frac{ds}{s^{\frac{n}{m}-\frac{n}{m}}} = \frac{1}{n} dv \cdot \frac{1}{m^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}$$

unde concludimus formulae nostrae propositae multiplicatorem fore

$$\frac{\left(1 - \frac{n}{m}\right) x - \frac{y}{p}}{v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}} = \frac{\left(1 - \frac{n}{m}\right) x - \frac{y}{p}}{\left(\frac{1}{m} p^m + \frac{\beta}{n} y^n\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}$$

32. Etsi haec exempla iam satis late patere videntur; tamen, si res ipsa spectetur, ea etiam nunc sunt vehementer particularia, siquidem pro v formula binomialis utroque casu prodit, in exemplo penultimo litteras p et x , in ultimo vero p et y inuoluens, atque hinc vix liquet, quomodo operationes institui oporteat, si plures termini in valore ipsius v occurrant. Interim tamen sequenti modo ista inuestigatio multo generalior reddi poterit.

Problema.

Si Ω eiusmodi fuerit functio quantitatum p et x , ut eaposito $p = x^\lambda q$, induat hanc formam $x^\mu Q$, ita ut Q tantum sit functio ipsius q , tum
propo-

proposita formula differentiali $d\Omega$ eius alteram multiplicatorem inuenire.

Solutio.

Posito ut ante $d\Omega = dv$, ut fit $v = \Omega$, ponatur $p = x^\lambda q$ eritque per hypothesin $v = x^n Q$,

hinc $Q = \frac{v}{x^n}$, nunc statuatur porro $x^n = \frac{v}{z}$, ut fiat

$Q = z$, iam quotcunque dimensiones ipsius q in functione Q contineantur, etiamsi resolutio istius aequationis vires analyticos superet, tamen certum est, inde valorem radicis q per certam quandam functionem ipsius z , quae fit Z , expressum iri, ita ut fit $q = Z$, hinc

$$p = x^\lambda Z \text{ et } dy = p dx = x^\lambda Z dz,$$

iam cum fit

$$x^n = \frac{v}{z}, \text{ erit } x^{\lambda+1} = \left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n}}$$

$$\text{et } x^\lambda dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{zdv - vdz}{z^2} \cdot \left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n} - 1} = \frac{1}{n} \left(\frac{d v \cdot v^{\frac{\lambda+1}{n} - 1}}{z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - dz \cdot \frac{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}{z^{\frac{\lambda+1}{n} + 1}} \right)$$

et multiplicando per $\frac{n}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, habebimus

$$\frac{n dy}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = \frac{Z dv}{v \cdot z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - \frac{Z dz}{z^{\frac{\lambda+1}{n} + 1}}$$

vbi membrum vltimum variabilem z continens dabit functionem determinatam ipsius z , penultimum vero pro z restituto valore $\frac{v}{x^n}$ ob $Z = \frac{p}{x^\lambda}$, abit in

$\frac{p x d v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$, quare integrando habebimus

$$\frac{n y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} + \int (\lambda+1) \frac{y d v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} = \int \frac{p x d v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} - \int \frac{Z d z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$$

vnde fit

$$\int \frac{d v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} (p x - (\lambda+1) y) = \int \frac{Z d z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} + \frac{n y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$$

Quocirca concludimus, formulae nostrae $d v = d \Omega$ multiplicatorem quaesitum esse

$$\frac{p x - (\lambda+1) y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$$

Problema.

33. Si Ω eiusmodi fuerit functio ipsarum p et y , vt posito $p = y^\lambda q$ ea obtineat hanc formam $y^n Q$, existente Q functione ipsius q , tum proposita formula differentiali $d \Omega$, eius multiplicatorem invenire.

Solutio.

Posito iterum $d \Omega = d v$, erit $v = \Omega$, et posito $p = y^\lambda q$, fiet $v = y^n Q$, hincque $Q = \frac{v}{y^n}$
statua-

statuatur nunc $y^n = \frac{v}{z}$, ut fiat $Q = z$, unde quum Q sit functio ipsius q , per resolutionem aequationum q aequabitur certae cuiusdam functioni ipsius z , quae sit Z , ita ut sit

$$q = Z, \text{ hinc } p = y^\lambda Z$$

et $dy = p dx = y^\lambda Z dx$, unde fit $dx = \frac{dy}{y^\lambda Z}$,

quum autem sit $y^n = \frac{v}{z}$, erit

$$y = \frac{v^{\frac{1}{n}}}{z^{\frac{1}{n}}} \text{ et } dy = \frac{1}{n} \left(\frac{dv \cdot v^{\frac{1}{n}-1}}{z^{\frac{1}{n}}} - \frac{v^{\frac{1}{n}} dz}{z^{\frac{1}{n}+1}} \right),$$

ex quo habebitur

$$dx = \frac{1}{n} \frac{v^{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}-1} dv}{z^{\frac{1-\lambda}{n}} \cdot Z} - \frac{1}{n} \frac{v^{\frac{1-\lambda}{n}} dz}{Z \cdot z^{\frac{1-\lambda}{n}+1}},$$

quod multiplicatum per $n \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}}$ praebebit

$$n dx \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}} = \frac{dv}{v \cdot z^{\frac{1-\lambda}{n}} \cdot Z} - \frac{dz}{z^{\frac{1-\lambda}{n}+1} \cdot Z},$$

hic ultimi membri integrale manifesto est certa potestas ipsius z , quam saltem per quadraturas exhibere licet; penultimum vero membrum ob

$$Z = q = \frac{p}{y^\lambda}, \text{ abit in } \frac{dv \cdot y^\lambda}{p \cdot v \cdot z^{\frac{1-\lambda}{n}}}$$

et substituto pro z eius valore $\frac{v}{y^n}$, transformatur in

$$\frac{y dv}{p \cdot v^{\frac{1-\lambda}{n}} + 1},$$

quare

quare primo membro per reductionem integrando, consequimur

$$n x \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}} - \int (\lambda-1) x \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}-1} d v = \int \frac{y d v \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{p} - \int \frac{d z \cdot z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

atque hinc colligitur

$$\int d v \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \frac{y}{p} \right) = n x \cdot v^{\frac{\lambda-1}{n}} + \int \frac{d z \cdot z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

quum igitur fit $d v = d \Omega$, patet formulam propositam $d \Omega$ integrabilem reddi, si multiplicetur per

$$(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \frac{y}{p} \right),$$

qui idcirco est multiplicator quaesitus.

34. Quum in problemate penultimo formulae $d \Omega$ multiplicator fit

$$\frac{p x - (\lambda+1) y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}, \text{ huius formulae } \frac{d \Omega}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

quae etiam est verum differentiale, quippe cuius integrale est, $\frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, multiplicator erit $p x$

$-(\lambda+1) y$, simili modo quum in ultimo problemate formulae $d \Omega$ multiplicator fit inuentus $(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \frac{y}{p} \right)$; erit huius formulae quippe

$d\Omega (\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}}$, quae etiam est verum differentiale, quippe cuius integrale est $\frac{n}{\lambda-1} (\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}}$, multiplicator erit $(\lambda-1)x + \frac{y}{p}$; hi duo casus ob simplicitatem multiplicatoris in primis notatu digni videntur, ex quo operae pretium erit, in genere omnes formulas differentiales inuestigare, quibus talis multiplicator conueniat, quem in finem hoc Lemma praemittimus.

L e m m a.

35. Si formulae differentialis $d\Omega$ multiplicator fuerit V , tum vicissim formulae differentialis dV multiplicator erit Ω , quum enim sit

$$\int \Omega dV = V \Omega - \int V d\Omega,$$

quoniam formula $V d\Omega$ per hypothesein est integrabilis; necesse est, etiam formulam $\int \Omega dV$ esse integrabilem.

P r o b l e m a.

36. Inuenire omnes formulas differentiales $d\Omega$, quibus conueniat multiplicator $\alpha y + p x$, denotante α numerum quemcunque.

S o l u t i o.

Quum ob $dy = p dx$, sit

$$d(\alpha y + p x) = (\alpha + 1) p dx + x dp,$$

huius formulae multiplicatorem oportet esse Ω , ex
 Tom. XVII. Nou. Comm. N qua

qua conditione quantitatem Ω determinare licet.
Sic igitur proposita haec formula differentialis

$$(\alpha + 1) p dx + x dp,$$

pro qua habetur multiplicator

$$M = 1 \text{ eritque } v = \alpha y + p x,$$

alter vero multiplicator erit

$$N = x^\alpha, \text{ fietque tum } u = p \cdot x^{\alpha+1},$$

quare si Z denotet functionem quamcunque binarum
variabilium

$$v = \alpha y + p x \text{ et } u = p \cdot x^{\alpha+1},$$

in genere multiplicator nostrae formulae erit,

$$M \left(\frac{dZ}{dv} \right) + N \left(\frac{dZ}{du} \right),$$

quamobrem, quum fit

$$\Omega = \left(\frac{dZ}{dv} \right) + x^\alpha \left(\frac{dZ}{du} \right),$$

eius differentiale $d\Omega$ continebit omnes formulas
differentiales, quibus conuenit multiplicator $\alpha y + p x$.

37. Si pro Z sumatur functio quaecunque
ipfius u , erit

$$\left(\frac{dZ}{dv} \right) = 0$$

et $\left(\frac{dZ}{du} \right)$ erit functio quaedam ipfius u quae fit $f: u$,
hinc nostrum erit Ω

$$x^\alpha \cdot f: u = x^\alpha f: x^{\alpha+1},$$

quae forma probe conuenit cum problemate §. 32.
vbi multiplicator erat $p x - (\lambda + 1) y$, ita, vt fit
 $\alpha = -(\lambda + 1)$. Deinde quod hic est $d\Omega$,

ibi

ibi erat $\frac{dv}{v^{\frac{\lambda+1}{n}} + 1}$,

ficque quod hic est Ω ;

ibi erat $\frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$,

at vero ibi erat

$$v = x^n Q = x^n \Phi : \frac{p}{x^\lambda},$$

ita ut inde fit

$$\frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = x^{-\lambda+1} \cdot \Delta : \left(\frac{p}{x^\lambda}\right),$$

quam formam in illa contineri, satis manifestum est. Hinc ergo patet illud problema esse casum maxime particularem huius problematis, huiusque solutionem infinites latius patere.

Problema.

38. Invenire omnes formulas differentiales $d\Omega$, quibus conveniat multiplicator $\alpha x + \frac{\gamma}{p}$.

Solutio.

Quum ob $dx = \frac{dy}{p}$, fit

$$d(\alpha x + \frac{\gamma}{p}) = (\alpha + 1) \frac{dy}{p} - \frac{\gamma dy}{p^2},$$

consideremus hoc ipsum differentiale tanquam formulam propositam, cuius multiplicator Ω fit investigandus, et quum primus multiplicator sit $M = 1$,

N 2

erit

erit $v = x x + \frac{y}{p}$, alter autem multiplicator colligitur $N = y^a$, ex quo fit $u = \frac{y^{a+1}}{p}$, quare si Z denotet functionem quamcunque binarum variabilium

$$v = a x + \frac{y}{p} \quad \text{et} \quad u = \frac{y^{a+1}}{p},$$

expressio generalis pro multiplicatore quaesito erit

$$\Omega = \left(\frac{dZ}{dv}\right) + y^a \left(\frac{dZ}{du}\right),$$

vbi notandum, si pro Z sumatur tantum functionis univariae variabilis u , tum hanc solutionem ad casum problematis §. 33. perducere.

39. Quae hactenus de investigatione multiplicatorum sunt tradita, insignem praestant usum in resolutione aequationum differentialium secundi gradus, quum enim ob $dy = p dx$, omnes aequationes huius ordinis ad hanc formam redigere liceat,

$$P dp + Q dx + R dy = 0,$$

manifestum est, si vnus huius formulae multiplicator innotescat; tum statim aequationem semel integratam, quae erit differentialis primi ordinis, obtineri, quam deinceps secundum praecepta cognita tractari conueniet; at vero si bini eius formulae multiplicatores fuerint cogniti, tum statim aequationem finitam seu bis integratam elicere licebit, ita vt non opus sit integratione repetita, quam operationem sequenti problemate doceamus.

Pro-

Problema.

40. Proposita aequatione differentiali:

$$P dp + Q dx + R dy = 0,$$

si eius duo multiplicatores innotescant M et N, eius aequationem finitam bis integratam inuenire.

Solutio.

Quum M et N sint multiplicatores cogniti, ponamus:

$$M (P dp + Q dx + R dy) = dv$$

$$\text{et } N (P dp + Q dx + R dy) = du,$$

hinc habebuntur quantitates v et u , quomodocunque ex ternis variabilibus p , x et y constatae. Ob priorem igitur multiplicatorem fiet $v = a$ et ob posteriorem $u = b$, ubi a et b sunt binae constantes, utraque integratione ingressae; quum igitur duae habeantur aequationes finitae inter ternas variables x , y et p , si inde p eliminetur, prodibit aequatio finita inter binas coordinatas x et y , vel quod eodem redit, inde determinari poterunt binae harum litterarum per tertiam.

41. Hanc methodum ex praecedentibus per plura exempla facile illustrare liceret, verum instar omnium nobis erit, problema initio huius dissertationis commemoratum, quo linea curva aequatione inter binas coordinatas x et y exprimenda quaeritur, cuius radius osculi aequetur formulae $n\sqrt{xx+yy}$.

Exemplum.

Proposita aequatione differentiali secundi gradus

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ndx}{V(xx+yy)} = 0,$$

inuenire aequationem finitam inter x et y , ope duplicis multiplicatoris. Primum multiplicatorem iam supra obseruauimus esse $x+py$, vnde fit

$$dv = \frac{dp(x+py)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n(xdx+ydy)}{V(xx+yy)},$$

adeoque erit

$$v = \frac{px-y}{V(1+pp)} - nV(xx+yy) = a.$$

Pro altero multiplicatore, quoniam is tam facile non liquet, tam eum, quam integrale inde natum simul inuestigemus, ponamus primo $y = xz$, et ob $dy = p dx$ fiet

$$p dx = z dx + x dz \text{ hincque } \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z},$$

quo valore substituto, formula nostra erit

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ndz}{(p-z)V(1+zz)} = 0,$$

quare posito porro $z = \frac{p+q}{1-pq}$, vnde fit

$$p-z = -\frac{q(1+pp)}{1-pq}, \quad V(1+zz) = \frac{V(1+pp)(1+qq)}{1-pq},$$

$$\text{et } dz = \frac{dp(1+qq) + dq(1+pp)}{(1-pq)^2}$$

trans-

transformatur nostra formula in hanc

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ndp(1+qq) + ndq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}V(1+qq)},$$

$$= \frac{(qV(1+qq) + n(1+qq))dp + ndq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}V(1+qq)},$$

vel in

$$\frac{q+nV(1+qq)}{qV(1+pp)} \left(\frac{dp}{1+pp} + \frac{ndq}{q+nV(1+qq)} \right),$$

hinc igitur patet, pro altero multiplicatore sumi debere

$$M = \frac{qV(1+pp)}{q+nV(1+qq)},$$

tumque fit

$$du = \frac{dp}{1+pp} + \frac{ndq}{q+nV(1+qq)}$$

quae formula est integrabilis fietque inde

$$u = \int \frac{dp}{1+pp} + \int \frac{ndq}{q+nV(1+qq)} = b$$

ex qua vel q per p , vel p per q determinabitur, tum vero quum fit

$$z = \frac{p+q}{1-pq} = \frac{y}{x}$$

inde fit

$$y = \frac{(p+q)x}{1-pq},$$

qui valor in prima aequatione substitutus praebet

$$\frac{-qxV(1+pp)}{(1-pq)} - nx \frac{V(1+pp)(1+qq)}{1-pq} = a,$$

nunc

104 VARIA GENERA INTEGRABIL.

nunc igitur inueniri potest x , vnde colligitur

$$x = \frac{-a(r-pq)}{(q+p\sqrt{r+q})\sqrt{r+pp}}$$

ficque quia datur p per q , vel q per p , etiam x eodem modo definitur, deinde vero erit

$$y = \frac{-a(p+q)}{(q+p\sqrt{r+q})\sqrt{r+pp}}$$

quae est solutio completa problematis.