

DIGRESSIO DE TRAIECTORIIS  
TAM ORTHOGONALIBVS QVAM  
OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. E V L E R O.

1.

Quaestionem de traiectoriis fere obsoletam, in scenam reuocaturi, primum accurate explicare debemus, qua ratione naturam et indolem curvarum secandarum in calculum introduci conueniat, deinde methodum exponere debemus, cuius ope traiectoriae determinari queant.

2. Quod primum ad curuas secandas attinet, ante omnia aequatio earum naturam exprimens est perpendenda et quoniam innumerabiles lineae sub eadem aequatione comprehendi debent, praeter coordinatas  $x$  et  $y$  quantitas quacpiam tanquam parameter, quam littera  $a$  designabimus, in aequatione inesse debet, quae in infinitum variata omnes curuas secandas exhibeat, ita scilicet vt quamdiu litterae  $a$  idem valor tribuitur, aequatio habeatur pro vna quadam determinata linea secunda, dum autem valor huius litterae successive vel augetur vel diminuitur, ad alias continuo lineas secandas perueniamus. Ita si aequatio proposita fuerit  $yy = ax$ , in ea continentur omnes parabolae super eodem axe descri-

ptae et eodem vertice praeditae, at ratione parametri  $a$  utcumque inter se discrepantes. At haec aequatio  $yy = fx + af$  vbi  $f$  fit quantitas vere constans, continebit infinitas parabolas super eodem axe, eadem parametro  $f$  descriptas, sed quarum vertices per axem continuo proferuntur, scilicet eadem parabola super axe promota omnes curvas secandas repraesentabit. Porro aequatio  $y = ax$  complectitur omnes lineas rectas ex eodem puncto eductas; at haec aequatio  $yy = aa - xx$ , praebet omnes circulos ex eodem centro descriptos.

### De natura curvarum secandarum.

3. Ante igitur quam quaestio de trajectoriis suscipiatur, aequatio omnes curvas secandas complectens, probe est perpendenda, quae uti iam notauimus, praeter coordinatas parametrum variabilem  $a$  continere debet, quam olim etiam moduli nomine indicauerunt, praeter quam aliae constantes quaecunque veluti  $f, g, b$  inesse possunt, quippe quae pro omnibus curuis eisdem valores retineant. Huiusmodi autem aequationum plura genera diuersa considerari merentur, ad quorum primum merito referuntur omnes aequationes algebraicae, cuiuscunque fuerint gradus; ad secundum referamus eas aequationes, quae quidem sunt transcendentes, verum tamen vel logarithmos vel arcus circulares inuolunt, quandoquidem hae quantitates nunc quidem perinde ac algebraicae tractari solent. Veluti si fuerit

$$y = a \text{ Ang. sin. } \sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(2ax - xx)} \quad \text{in}$$

in hac aequatione omnes cycloides super eadem basi descriptae exprimuntur, quomodocunque circulus generator immutetur. Tertium vero genus destinatum fit aequationibus differentialibus, quas quidem non nisi transcendenter integrare liceat, cuiusmodi supra occurrit  $dy = \frac{A dx}{\sqrt{(Xx - AA)}}$  vbi  $X$  functio quaecunque ipsius  $x$  et  $A$  ipsius  $a$ . Circa talem aequationem nihil omnino statuere licet, nisi ante accurate fuerit definitum, qua lege integratio fieri sit intelligenda, vtrum scilicet noua constans per integrationem introducenda, pendeat a parametro  $a$  nec ne? quod iudicium ita facillime institui posse videtur, vt dicamus integrationem ita esse instituendam, vt sumpto  $x = b$ , fiat  $y = c$ , quippe quo pacto integratio determinatur, tum autem liberum nobis relinquitur, vtrum hae litterae  $b$  et  $c$  sint vere constantes, an certo quodam modo a parametro  $a$  pendeant? Manifestum autem est in quaestione circa traiectorias istam indolem quantitatum  $b$  et  $c$  imprimis spectari debere, etiamsi earum neutra in ipsa aequatione differentiali occurrat.

4. Perinde fere se res habet, quando pro curvis fecandis aequatio quaecunque differentialis datur, in quo quartum genus constituimus veluti  $dy = V dx$ , vbi  $V$  fit functio quaecunque tam ipsarum  $x$ , et  $y$  quam parametri  $a$ , etiamsi enim huiusmodi aequationem forsitan nullo modo ad integrationem vel saltem ad separationem perducere liceat, tamen ratio integrationis apud nos constituta esse debet, vt posito

sito  $x = b$  fiat  $y = c$ , vbi iterum definiri oportet an et quam ratione haec quantitates  $b$  et  $c$  a parametro  $a$  pendeant, atque hoc quidem iudicium si res in genere spectetur vtiq; erit difficillimum.

5. Multo vero adhuc difficilius negotium expeditur, quando aequatio pro curuis secandis est quidem tantum differentialis primi gradus, sed vbi ipsa differentialia ad plures dimensiones exsurgunt, quo *quintum* genus ponamus, quod ita commodissime describi potest, vt si breuitatis gratia  $\frac{dy}{dx} = p$ , aequatio pro curuis secandis vtcunque composita fuerit ex quantitatibus  $x, y, p$  et parametro  $a$ , interim tamen pro determinatione curuarum secandarum eadem sunt tenenda, quae iam ante praecepimus. At si aequatio pro curuis secandis adeo ad differentialia secundi gradus ascendat, multo maiore circumspectione erit opus, cum ea duplicem integrationem requirat, et vtriusque constantis ingressae indoles perfecte debeat esse perspecta, quin etiam has binas constantes sollicitè a se inuicem distingui oportet, ex quo huiusmodi quaestiones etiam nunc vix in considerationem duci possunt.

### De Traiectoriis in genere.

Tab. II.  
Fig. 1.

6. Constituta aequatione pro curuis secandis, cuiuscunque sint generis, sit curva  $AM$  in vna earum, pro qua parameter  $= a$ , pro puncto autem  $M$  coordinatae  $IP = x$  et  $PM = y$ , ita vt detur certa aequatio inter has tres quantitates  $x, y$  et  $a$ , deinde

inde vero fit  $EM\mu$  traiectoria quaecunque, cuius cum punctum  $M$  ipsi commune fit cum curva secanda  $AM$ , etiam communes habebit coordinatas  $x$  et  $y$ , verum quatenus hae coordinatae ad traiectoriam referuntur, aequatio inter  $x$  et  $y$  maxime discrepabit a superiore, dum scilicet in hac parameter  $a$  neutiquam inesse debet, quoniam eadem traiectoria ad omnes secandas aequae refertur, ex quo iam intelligitur, quemadmodum ad aequationem pro traiectoria peruenire queamus, conditio scilicet sectionis suppeditabit nobis certam aequationem, in quam tres quantitates  $x$ ,  $y$  et  $a$  vtcunque ingrediantur, vnde si hanc aequationem cum praecedente combinemus, parametrum  $a$  inde per methodos notas eliminare poterimus atque aequatio resultans inter  $x$  et  $y$  erit ipsa aequatio quaesita pro traiectoria.

7. Cum nunc in problemate traiectoriarum angulus  $mM\mu$ , quem traiectoria cum quavis secandarum facit, constans atque adeo datus esse debeat, ponamus eius tangentem  $= a$ , atque vt eius valorem inuestigemus, consideretur applicata proxima  $pm\mu$  curvae secandae in  $m$ , traiectoriae vero in  $\mu$  occurrens, atque pro traiectoria fractio  $\frac{dy}{dx}$  exprimet tangentem anguli  $\mu M n$ , at pro angulo  $mMn$  inveniendi differentietur aequatio data pro curuis secandis et quia etiam parameter  $a$  ibi variabilis habetur, orietur inde huiusmodi aequatio differentialis:

$$dy = p dx + q da$$

vbi quantitates  $p$  et  $q$  quomodocunque litteras  $x$ ,  $y$  et  $a$  inuoluant, quo facto, cum pro curua  $AMm$  parameter  $a$  eadem maneat, habebitur pro elemento  $Mm$ ,  $\frac{Mm}{Mn} = p$ ,

quae est tangens anguli  $mMn$ , vnde colligitur differentiae horum angulorum  $\mu Mm$  tangens

$$= \frac{dy - p dx}{dx + p dy} = \alpha$$

ficque iam habemus alteram illam aequationem quae erit  $dy(1 - \alpha p) = dx(x + p)$ ,

quam cum aequatione pro curuis secandis data coniungere, indeque parametrum  $a$  eliminare debemus, vt obtineamus aequationem inter  $x$  et  $y$ , qua natura traiectionis exprimitur; probe autem hic animadvertendum est, etiamsi in aequatione inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(p + \alpha),$$

bina tantum differentialia  $dx$  et  $dy$  infint, tamen parametrum  $a$  quatenus scilicet in littera  $p$  inuoluitur, pro variabili haberi debere.

8. Quod si ergo eueniat, vt littera  $p$  parametrum  $a$  non inuoluat, sed tantum ex ipsis coordinatis  $x$  et  $y$  componatur, tum aequatio inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$$

quia tantum duas variables  $x$  et  $y$  continet, naturam traiectionis adaequate exprimet, tantum enim opus est, vt eius integrale inuestigetur. At si quantitas  $p$  etiam parametrum  $a$  contineat, tum ex aequatione finita pro curuis secandis data quaeratur  
valor

valor ipsius  $a$  per  $x$  et  $y$  expressus, qui in quantitate  $p$  loco  $a$  substitutus, praebebit aequationem differentialem puram pro traiectoria quaesita, veluti si curvae secundae fuerint rectae ex eodem puncto  $a$  ductae, pro quibus habeatur haec aequatio  $y = ax$  erit  $p = a$  et  $q = x$ , vnde altera aequatio fit

$$dy(1 - aa) = dx(\alpha + a)$$

in qua si ex aequatione data scribatur  $a = \frac{y}{x}$ , prodibit pro traiectoria haec aequatio differentialis

$$dy(x - ay) = dx(\alpha x + y),$$

quae quum fit homogenea posito  $y = ux$  transformatur in hanc

$$\frac{\alpha dx}{x} = \frac{du(1 - \alpha u)}{1 + uu} = \frac{du}{1 + uu} - \frac{\alpha u du}{1 + uu},$$

cuius integrale est:

$$\alpha Lx = \text{Ang. Tang. } u - \alpha LV(1 + uu) + \alpha Lc,$$

vnde fit

$$\alpha L \frac{x \sqrt{1 + uu}}{c} = \text{Ang. Tang. } u$$

sive etiam

$$\alpha L \frac{\sqrt{xx + yy}}{c} = \text{Ang. Tang. } \frac{y}{x},$$

qua aequatione natura spiralis logarithmicae exprimitur, nisi fit  $\alpha = \infty$ , seu angulus interfectionum rectus, quo casu fit  $V(xx + yy) = c$ , pro circulo.

9. Verum saepenumero vsu venit, vt ex aequatione data valorem ipsius  $a$  haud commode deriuare liceat, neque adeo eius loco substitutio in altera aequatione fieri queat, tum autem perpendendum

dum est, ad cognitionem trajectoriae non absolute requiri aequationem puram inter coordinatas  $x$  et  $y$ , sed sufficit, dummodo eliciatur aequatio differentialis, duas tantum variables inuoluens, ita si pro curuis secandis applicata  $y$  aequetur functioni cuicunque ipsarum  $x$  et  $a$  eaque differentiatu praebat

$$dy = p dx + q da$$

ita ut  $p$  et  $q$  tantum sint functiones ipsarum  $x$  et  $a$ , tum iste valor loco  $dy$  scribatur in aequatione inventa, et resultabit haec aequatio:

$$a dx (1 + pp) - q da (1 - ax) = 0,$$

quae quia tantum duas continet variables  $a$  et  $x$ , ea valor ipsius  $x$  per  $a$  determinari poterit, id quod ad trajectoriam construendam sufficit, tum enim pro qualibet curva secanda  $AMm$ , ubi parameter  $a$  certum sortitur valorem, definietur abscissa  $IP = x$  unde ipsum punctum  $M$ , quod simul est in trajectoria, innotescit, sicque omnia plane trajectoriae puncta reperientur. Veluti si fuerit

$$y = a\sqrt{1 - xx}, \text{ erit } p = \frac{-ax}{\sqrt{1 - xx}} \text{ et } q = \sqrt{1 - xx},$$

qui valores in illa aequatione substituti praebent

$$a dx (1 - xx + aax) - da (1 - xx)(aax + \sqrt{1 - xx}) = 0.$$

Sin autem statim eliminamus  $a$  ex aequatione

$$dy \left(1 + \frac{ax}{\sqrt{1 - xx}}\right) = dx \left(\alpha - \frac{ax}{\sqrt{1 - xx}}\right)$$

ponendo  $a = \frac{y}{\sqrt{1 - xx}}$ , prodibit

$$dy (1 - xx + ayx) = dx (\alpha - axx - yx),$$

unde



vnde pro casu traiectionum orthogonalium, vbi  $x = \infty$ , fit

$$xy dy = dx (1 - xx),$$

quae per  $x$  diuisa et integrata praebet

$$\frac{1}{2} xx + \frac{1}{2} yy = l_c^2,$$

quae est aequatio finita pro traiectione orthogonalí.

10. Quo autem hoc argumentum in se maxime diffusum ordine pertractemus, sequentes casus distinctius euoluamus.

*Casus Primus* quo parameter aequatur functioni cuiusque binarum coordinatarum  $x$  et  $y$ . Si aequatio pro curuis secandis ita fuerit comparata, vt ex ea valor parametri  $a$  commode per functionem ipsarum  $x$  et  $y$  determinari possit, facta differentiatione prodeat:

$$da = P dx + Q dy$$

vbi  $P$  et  $Q$  erunt certae functiones ipsarum  $x$  et  $y$ , quae vt constat ita a se inuicem pendent, vt fit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

quoniam ergo pro eadem parametro  $a$  fit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q},$$

ponatur hic valor in superiori aequatione inuenta loco  $p$ , et pro traiectione haec obtinebitur aequatio

$$dy (Q + aP) = dx (aQ - P),$$

quae ergo est aequatio differentialis, qua relatio inter ipsas coordinatas traiectionis exprimitur, ad quam integrandam quaeri oportet eiusmodi functionem

ipsarum  $x$  et  $y$ , per quam ea aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

11. Quod hic de ipsa parametro  $a$  est allatum, valet etiam de functione quacunque parametri, quae sit  $= A$ , si enim pro curvis secandis fuerit  $A =$  functioni ipsarum  $x$  et  $y$ , ponatur quae

$$dA = P dx + Q dy$$

habebitur utique ut ante pro trajectoriis haec aequatio:

$$dy(Q + aP) = dx(aQ - P),$$

ita si fuerit

$$A = a^m = x^n + y^n \text{ fit } P = n \cdot x^{n-1} \text{ et } Q = n \cdot y^{n-1}$$

unde pro trajectoriis habebitur haec aequatio

$$dy(y^{n-1} + a x^{n-1}) = dx(a y^{n-1} - x^{n-1})$$

quod si ergo trajectoriae orthogonales esse debeant, seu  $a = \infty$  aequatio erit

$$x^{n-1} dy = y^{n-1} dx,$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{y^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{1}{c^{n-2}},$$

vbi excipi debet casus  $n = 2$ , quo fit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

hincque

$$Ly = Lx + Lc, \text{ seu } y = cx.$$

12. Ut hunc casum exemplis aliquanto generalioribus quoque illustremus, fit  $X$  functio quaecunque

que ipsius  $x$  et  $Y$  functio quaecunque ipsius  $y$ , ponaturque breuitatis gratia

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy,$$

quo posito fit pro curuis secundis

$$A = X + Y, \text{ erit } P = X' \text{ et } Q = Y',$$

vnde pro traiectoriis habebitur ista aequatio:

$$dy (Y' + \alpha X') = dx (\alpha Y' - X'),$$

hincque pro orthogonalibus

$$X' dy = Y' dx \text{ seu } \frac{dy}{Y'} = \frac{dx}{X'}.$$

13. Ponamus nunc pro curuis secundis huiusmodi dari aequationem,

$$A = XY \text{ eritque } P = X'Y, \text{ } Q = XY'$$

atque hinc pro traiectoriis nascetur haec aequatio differentialis

$$dy (XY' + \alpha X'Y) = dx (\alpha XY' - X'Y)$$

hincque pro orthogonalibus

$$\frac{Y dy}{Y'} = \frac{X dx}{X'},$$

ita si fuerit

$$X = x^m, \text{ } Y = y^n,$$

ita vt pro curuis secundis proponatur haec aequatio

$$A = x^m y^n,$$

quae aequatio infinitas tam parabolas quam hyperbolas superiorum ordinum continet, tum ob

$$X' = m x^{m-1} \text{ et } Y' = n y^{n-1},$$

pro traiectoriis orthogonalibus oritur haec aequatio

$$\frac{y dy}{n} = \frac{x dx}{m},$$

cuius

cuius integrale est

$$\frac{1}{n} y y - \frac{1}{m} x x = \pm c c,$$

quae semper est pro sectione conica idque vel ellipfi vel hyperbola.

14. *Casus Secundus*, quo applicata  $y$  aequatur functioni cuicunque parametri  $a$  et abscissae  $x$ . Pro hoc casu prodeat per differentiationem:

$$d y = P d x + Q d a$$

vbi  $P$  et  $Q$  sunt certae functiones ipsarum  $a$  et  $x$  atque eiusmodi, vt fit  $\left(\frac{d P}{d a}\right) = \left(\frac{d Q}{d x}\right)$ , quare quum manente  $a$  hinc fit  $\frac{d y}{d x} = P$ , hic valor loco  $p$  in aequatione generali supra inuenta substitutus, dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$d y (1 - a P) = d x (a + P)$$

quae quum adhuc tras variables contineat loco  $d y$  valor modo datus substituatur, sicque oriatur haec aequatio

$$Q d a (1 - a P) = a d x (1 + P P)$$

Quae tantum duas variables  $x$  et  $a$  continet, vnde pro quavis parametro  $a$  hoc est pro qualibet curuarum secundarum definiiri potest abscissa  $i P \doteq x$ , hincque ipsum punctum  $M$  in traiectoria situm, quod ad curuam construendam sufficit. Pro traiectoriis ergo orthogonalibus habebitur haec aequatio

$$-P Q d a = d x (1 + P P) \text{ siue } d x (1 + P P) + P Q d a = 0$$

sicque totum negotium iam huc redit, vt huius aequationis integrale inuestigetur.

15. Quodsi hic pro exemplis statuere vellemus  $y = A + X$  vel  $y = AX$  perspicuum est haec eadem exempla iam casu praecedente esse pertractata, contemplemur ergo hoc exemplum satis memorabile

$$y = \sqrt{(2ax - xx)},$$

ita ut curvae secundae sint circuli infiniti, se mutuo tangentes in eodem puncto A, quorum centra in eandem rectam cadant. Hinc igitur erit

$$P = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}}, \quad Q = \frac{x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$$

hincque

$$1 + PP = \frac{aa}{2ax-xx},$$

unde pro traiectoria orthogonalii provenit haec aequatio

$$a a dx + (ax - xx) da = 0,$$

quae per  $a^2 xx$  diuisa dat

$$\frac{a dx + x da}{a a x x} = \frac{da}{a^2} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2aa} = \pm \frac{1}{2cc}, \text{ siue}$$

$$cc(2a - x) = \pm aax$$

quae abit in hanc

$$cc(2ax - xx) = \pm aaxx,$$

quum autem sit

$$2ax - xx = yy$$

radice extracta fit

$$cy = ax = \frac{xx+yy}{2},$$

ita vt eliminata  $a$ , pro traiectoria orthogonaliori oriatur haec aequatio

$$2cy = xx + yy,$$

quae etiam est pro circulo.

16. *Casus Tertius*, quo abscissa  $x$  aequatur functioni  $y$  et parametri  $a$ . Praebet haec aequatio differentiatam

$$dx = P dy + Q da$$

vbi  $P$  et  $Q$  erunt tales functiones ipsarum  $y$  et  $a$  vt sit  $(\frac{dP}{da}) = (\frac{dQ}{dy})$ ; iam quum manente  $a$  hinc fiat  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$ , hic valor loco  $p$  supra substitutus dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy(P - a) = dx(1 + aP)$$

in qua loco  $dx$  valor superior substituitur, vt obtineatur sequens aequatio duas tantum variables  $y$  et  $a$  inuoluens

$$Q da(1 + aP) + a dy(1 + P) = 0$$

cuius resolutio constructionem traiectoriarum suppedabit.

17. Hinc si traiectoriae debeant esse orthogonales seu  $\alpha = \infty$  pro iis habebitur haec aequatio:

$$P Q da + dy(1 + P) = 0$$

at si angulus intersectionis debeat euanescere, quod euenit si traiectoria curuas propositas, tangat ob  $\alpha = 0$  habebitur haec aequatio  $Q da = 0$ , siue  $Q = 0$ , quae est aequatio finita, ex qua  $y$  per  $a$  vel vicissim  $a$  per  $y$  definiri poterit, vnde resultabit eiusmodi

modi traectoria, quae omnes curvas secundas contingat, veluti si fuerit,  $x = \frac{2ay - a^2}{f}$ , quae est pro infinitis rectis certo modo in plano ductis, ob  $Q = \frac{2y - 2a}{f}$ , haec aequatio  $y = a$  praebit lineam curvam omnes rectas illas tangentem, cuius aequatio inter coordinatas  $x$  et  $y$  ob  $a = y$  erit  $x = \frac{y^2}{f}$ , quae est pro parabola parametro  $f$  descripta. Caeterum quum coordinatae inter se sint permutabiles, hic casus a praecedente non differre est censendus.

18. *Casus Quartus*, quo aequatio pro curvis secundis inter coordinatas  $x$ ,  $y$  et parametrum  $a$  est homogenea, ita vt hae tres quantitates vbique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quoniam aequatio inter  $x$ ,  $y$  et  $a$  proposita est homogenea, si faciamus has substitutiones  $x = at$  et  $y = au$ , parameter  $a$  per diuisionem penitus tolletur, ita vt resultet aequatio duas tantum variables  $t$  et  $u$  inuolvens, qua ergo certa relatio inter  $t$  et  $u$  exprimitur, vnde sumtis differentialibus prodire ponamus  $du = v dt$ , ita vt tam  $u$  quam  $v$  vt functiones ipsius  $t$  spectari queant. Hinc autem differentiando adificimur:

$$dx = a dt + t da \text{ et } dy = a v dt + u da$$

hinc ergo pro eadem curua secunda  $AM$ , quia parameter  $a$  manet eadem, erit  $dx = a dt$  et  $dy = a v dt$  vnde fit  $\frac{dy}{dx} = v$ , qui valor in aequatione generali supra inuenta loco  $p$  scribi debet, scribantur autem

ibidem loco  $dy$  et  $dx$ , valores modo exhibiti, atque pro trajectoriis obtinebitur ista aequatio

$$(avdt + u da)(1 - av) = (adt + t da)(a + v)$$

quae tantum duas continet variables  $t$  et  $a$ , ex qua elicimus

$$da(u - auv - at - tv) = aadt(1 + v)$$

quae sponte est separabilis et praebet

$$\frac{da}{a} = \frac{adt(1 + v)}{(u(1 - av) - t(a + v))}$$

19. Hac ergo aequatione parameter  $a$  aequabitur certae functioni ipsius  $t$ , quae si loco  $a$  in aequationibus principalibus,  $x = at$  et  $y = au$  substituatur, tam pro  $x$  quam pro  $y$  certas functiones ipsius  $t$  consequimur, vnde natura trajectoriae facillime perspicitur, quin etiam si ex his aequationibus quantitas  $t$  eliminetur; peruenietur ad aequationem puram inter ipsas coordinatas  $x$  et  $y$  pro trajectoria quaesita, quae quum novam constantem verbi gratia  $c$  inuoluat per integrationem ingressam, ea variata infinitas nanciscemur trajectorias, quod quo facilius perspiciatur, ponamus esse

$$\int \frac{adt(1 + v)}{(u(1 - av) - t(a + v))} = LT \text{ eritque integrando}$$

$$a = cT, \text{ vnde pro trajectoriis has reperimus}$$

$$\text{formulas } x = cTt \text{ et } y = cTu.$$

20. Quodsi hunc casum accuratius perpendamus, facile deprehendemus, omnes curuas secandas hoc casu similes inter se fore. Consideretur enim curua determinata, cuius abscissa sit  $t$ , applicata vero  $u$ ,  
fit



fit igitur DV haec curva determinata, cuius abscis- Tab. II.  
 sas  $IT = t$  et applicata  $TV = u$ , vbi scilicet in- Fig. 2.  
 ter  $t$  et  $u$  eadem aequatio subsistat, hac autem cur-  
 va descripta, si pro quocunque valore parametri  $a$   
 fiant haec proportiones

$$1 : a = IT : IP \quad \text{et} \quad 1 : a = TV : PM,$$

euidens est fore

$$IP = at = x \quad \text{et} \quad PM = au = y,$$

sicque punctum M erit in vna curuarum secunda-  
 rum huic scilicet parametro  $a$  conueniente, sicque  
 haec curva AM perfecte similis erit DV, quod  
 quum de omnibus curuis secandis aeque valeat, pa-  
 tet omnes etiam inter se esse similes, atque vicis-  
 sim si omnes curuae secandae fuerint similes; tum  
 describatur vna earum ex parametro  $a = 1$  quae sit  
 curva DV, vbi V fit punctum homologum puncto  
 M, eruntque coordinatae  $IT = t$  et  $TU = u$  eae  
 ipsae, ad quas initio aequationem homogeam re-  
 duximus. Simili autem modo intelligitur, quoniam  
 pro traiectoriis inuentae sunt formulae  $x = cTt$  et  
 $y = cTu$ , omnes has traiectorias etiam inter se fo-  
 re curuas similes, ita vt si vna fuerit descripta ver-  
 bi gratia pro valore  $c = 1$ , reliquae omnes ex ea  
 ope principii similitudinis construi queant. Manife-  
 stum autem est, principium similitudinis ad punctum  
 fixum I referri debere, quod probe notandum, ne  
 notio similitudinis hic perperam applicetur. Hic  
 scilicet non tam similitudo absoluta curuarum secan-  
 darum spectatur, quam similitudo positionis respectu

puncti fixi I, quam ita comparatam intelligi oportet, ut omnes rectae ex hoc puncto I eductae cunctas curvas secandas in punctis homologis similiter traiciant.

21. Exempli loco afferamus aequationem iam supra tractatam  $yy = 2ax - xx$  quippe quae est homogenea, posito autem  $x = at$  et  $y = au$ , ea abit in hanc

$$uu = 2t - tt \text{ seu } u = \sqrt{(2t - tt)}, \text{ ita ut sit } v = \frac{t - t}{\sqrt{(2t - tt)}}$$

quibus valoribus substitutis pro trajectoriis haec elicitur aequatio differentialis:

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha dt}{(t - \alpha\sqrt{(2t - tt))\sqrt{(2t - tt)}},$$

hinc ergo pro trajectoriis orthogonalibus habebitur

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t - tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2-t)}$$

cuius integrale est

$$\text{Log. } a = L \sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)} + Lc \text{ siue } a = c \sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)}$$

quare pro his trajectoriis habebimus

$$x = c \sqrt{(2t - tt)} \text{ et } y = c(2 - t),$$

ex posteriori fit

$$2 - t = \frac{y}{c} \text{ et } t = \frac{2c - y}{c}$$

hincque

$$\sqrt{(2t - tt)} = \frac{\sqrt{(2cy - yy)}}{c} = \frac{x}{c},$$

sicque resultat aequatio inter  $x$  et  $y$  haec

$$xx = 2cy - yy.$$

22. *Casus Quintus*, quo tam abscissa  $x$  quam applicata  $y$  aequatur functioni cuiusvis parametri  $a$  et

et nouae cuiusdam variabilis  $t$ . Quum  $x$  fit functio binarum variabilium  $t$  et  $a$  itidemque  $y$  functio earundem, ponamus differentiando prodire :

$$dx = P dt + Q da \quad \text{et} \quad dy = R dt + S da$$

vbi notandum est, fore

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dR}{dt}\right) = \left(\frac{dS}{da}\right).$$

Iam quia pro eadem curua secanda  $A M$  parameter  $a$  non variatur, pro ea erit  $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{P}$  qui valor loco  $p$  substitutus, in aequatione generali pro traiectoriis supra data, praebet istam aequationem :

$$(R dt + S da)(P - \alpha R) = (P dt + Q da)(\alpha P + R),$$

quae reducitur ad hanc :

$$da(PS - QR - \alpha(PQ + RS)) = \alpha dt(PP + RR).$$

23. Quodsi ergo traiectoriae orthogonales desiderentur, posito  $\alpha = \infty$  pro iis habebitur ista aequatio

$$dt(PP + RR) + da(PQ + RS) = 0$$

in cuius resolutione vel integratione totum negotium versatur. At si curua desideretur, quae omnes propositas contingat posito  $\alpha = 0$ , prodit haec aequatio finita  $PS - QR = 0$ . Talis scilicet curua locum habet, quando curuae secandae ita sunt comparatae, vt binae proximae quaeuis se alicubi contingant, tum enim curua, quae per omnia haec contactus puncta traducitur, simul omnes tanget. Huiusmodi contactus euenire potest in infinitis lineis rectis,

rectis, certa lege ductis, quas in genere nostro modo repraesentare licet, ut sit

$$x = t \quad \text{et} \quad y = at + A$$

vbi  $A$  denotat functionem quamcunque ipsius  $a$ , sitque

$$dA = A' da,$$

hoc ergo casu fiet

$$P = 1, \quad Q = 0, \quad R = a \quad \text{et} \quad S = A' + t$$

vnde pro curua quaesita reperitur

$$A' + t = 0$$

ita ut fiat

$$x = -A' \quad \text{et} \quad y = A - aA'$$

24. *Casus Sextus* quo tantum pro singulis curvis secandis aequatio differentialis inter coordinatas  $x$  et  $y$  datur.

Sollicite hic distingui oportet inter aequationem differentialem, quae tantum ad singulas curvas secandas refertur et inter aequationem differentialem, quae omnes plane curvas secandas in se simul complectitur, cuiusmodi aequationibus hactenus in casibus pertractatis sumus vti, tali forma

$$dy = p dx + q da$$

expressis, in quas scilicet binae coordinatae  $x$  et  $y$ , atque etiam parameter  $a$  tanquam variables ingrediuntur, earum igitur character in hoc consistit, quod ternaria differentialia  $dx$ ,  $dy$  et  $da$  in iis occurrant.

25. At aequationes, de quibus in hoc casu sermo est, tantum duo differentialia  $dx$  et  $dy$  inuolunt, etiamsi parameter  $a$  in eas ingrediatur, ad quarum indolem explicandam sit  $V$  functio quaecumque abscissae  $x$  et parametri  $a$ , quaelibet autem curva secunda hoc modo definiatur, ut sit  $y = \int V dx$ , in qua integratione sola  $x$  ut variabilis spectatur, parametro  $a$  pro constante habita, hac enim ratione una tota curva ex secundis penitus determinatur, quoniam pro ea parameter  $a$  reuera manet constans, interim tamen si pro qualibet integratione parameter  $a$  varietur, eadem formula successive ad omnes curvas secundas adhiberi poterit, ex quo iam satis intelligitur, quomodo aequatio differentialis hinc nata  $dy = V dx$ , tantum ad singulas curvas secundas pertinere, non vero omnes simul in se complecti dicatur.

26. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali  $dy = V dx$  probe animaduertendum est, in ea parametrum  $a$  pro constanti haberi, ita ut integrale more solito expressum  $\int V dx$ , valorem applicatae  $y$  exhibeat, quum autem haec ipsa integratio nouam constantem recipiat, eius determinatio simul praescribi debet, quia alioquin ipsa quaestio non foret determinata, quare si huiusmodi casus proponatur, ante omnia in ipsa propositione definiri debet, quamquam lege haec integratio sit instituenda, quae conditio ita generatim exprimi potest, utposito  $x = f$ , fiat  $y = g$ , ubi quidem quantitates  $f$  et  $g$  vel prorsus sunt constantes vel etiam certo quo-

dam modo a parametro  $a$  pendeant, ita ut dum variando parametrum  $a$  ad alias curvas secundas transimus, etiam litteris  $f$  et  $g$  alii valores tribui debeant. Manifestum enim est, nisi talis conditio expressis verbis fuerit constituta, quaestionem neutiquam esse absolutam.

27. Et si autem talis aequatio pro singulis curvis secandis sufficit, tamen eam neutiquam ad trajectorias determinandas adhibere licet, quoniam enim talis formula  $dy = V dx$ , ad nostrum casum secundum accedere videtur, ubi erat

$$dy = P dx + Q da,$$

primum quidem nullum est dubium, quin hic fit  $P = V$ , sed altera quantitas  $Q$ , a qua essentialiter determinatio trajectoriarum pendet, quandoquidem pro iis inuenimus

$$Q da (1 - a P) = a dx (1 + P P),$$

hic prorsus non iudicatur.

28. Quoties quidem vel formulam  $\int V dx$  vel integrare vel saltem ad quadraturas cognitae reducere licet, huic incommodo facile remedium adfertur, namque integrale inuentum  $\int V dx$ , atque ut modo ante praecipimus rite determinatum, denuo differentietur, dum non solum  $x$ , sed etiam  $a$  variable accipiatur, cuius differentialis quidem pars elementum  $dx$  continens erit ipsa formula proposita  $V dx$ , altera vero pars elemento  $da$  affecta dabit verum valorem membri illius  $Q da$ , vel breuius hoc membrum

brum  $Q da$  obtinebitur, si integrale  $\int V dx$  per solam variabilem  $a$  differentietur. Quando autem formulam  $V dx$  hoc modo integrare non licet, tum etiam nulla adhuc via patet, quantitatem  $Q$  ita cognoscendi, ut inde pro traiectoriis aequatio confici possit.

29. Cognita quidem est methodus in huiusmodi formulis differentialibus completis

$$dy = P dx + Q da,$$

si detur altera pars  $P dx$ , alteram  $Q da$  inuestigandi, quum enim sit  $(\frac{dQ}{dx}) = (\frac{dP}{da})$ , hic valor  $(\frac{dP}{da})$  assignari potest, hincque fiet  $dx (\frac{dQ}{dx}) = dx (\frac{dP}{da})$ , ubi quum  $dx (\frac{dQ}{dx})$  sit differentiale ipsius  $Q$  pro sola variabili  $x$ , manifestum est fore  $Q = \int dx (\frac{dP}{da})$ , si quidem in hac integratione tantum  $x$  pro variabili habeatur. Pro nostro ergo casu ubi  $P = V$  haberemus  $Q = \int dx (\frac{dV}{da})$  ideoque pro traiectoriis hanc aequationem

$$da (1 - aV) \int dx (\frac{dV}{da}) = a dx (1 + VV)$$

in qua quum parameter  $a$  sit essentialiter variabilis, formula  $\int dx (\frac{dV}{da})$  nullum plane usum praestare potest, nisi haec integratio actu expediri queat. His difficultatibus quibus praesens casus premitur dilucide explicatis, operae imprimis pretium erit, vnum casum inuestigasse, quo traiectorias assignare licet, etiam si neque formula  $\int V dx$  neque  $\int dx (\frac{dV}{da})$ , integrari possit, vnde sequens Problema proponamus.

**Problema.**  
 30. Quæritur, quomodo pro singulis curvis secandis æquationem differentialem  $dy = V dx$  (vbi  $V$  tam parametrum  $a$  quam abscissam  $x$  absolut) comparatam esse oporteat, ut inde trajectorias definire liceat, etiam si ipsa formula  $\int V dx$  nullo modo integrabilis existat.

### Solutio.

Totum ergo negotium huc redit, ut casum inuestigemus quo trajectorias sine formula  $\int dx \left(\frac{dV}{da}\right)$  definire liceat, ad quem inueniendum denotet tantisper  $Q$  valorem formalæ  $\int dx \left(\frac{dV}{da}\right)$ , ut æquatio differentialis completa pro omnibus curuis secandis sit

$$dy = V dx + Q da$$

unde secundum præcepta ante data pro trajectoriis inuenta est hæc æquatio

$$Q da (x - a V) = a dx (x + V V)$$

quæ quum duas variables  $a$  et  $x$  inuoluat, dabitur certa functio ipsarum  $x$  et  $a$ , per quam hæc æquatio multiplicata fiat integrabilis, verum euidens est inuestigationem talis functionis in genere non minoribus obstaculis exponi, quam id ipsum, de quo quaeritur.

31. Verum tamen datur casus quidam specialis, quo talis inuestigatio succedit, atque in hunc finem repræsentemus æquationem nostram sub hac forma:

$$a dx \frac{(x + V V)}{a V - 1} + Q da = 0$$

et



et quaeramus iam functionem ipsius  $a$  tantum, quae sit  $A$ , per quam ista aequatio multiplicata fiat integrabilis, scilicet haec forma

$$\alpha A dx \frac{(1+V V)}{\alpha V - 1} + A Q da = 0$$

quae comparata cum forma generali  $P dx + Q da$ , quae integrabilis existit, si

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

nobis praescribit hanc conditionem

$$\alpha \left(\frac{d. A (1+V V)}{\alpha V - 1}\right) = \left(\frac{d. A Q}{dx}\right) = A \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

verum ex ipsa aequatione proposita

$$dy = V dx + Q da$$

quae per hypothesin est integrabilis, est

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{da}\right).$$

Differentiemus igitur fractionem

$$\frac{A (1+V V)}{\alpha V - 1},$$

sumendo solum  $a$  variabilem, quod fit, si loco  $dV$  scribamus  $\left(\frac{dV}{da}\right)$ , similique modo  $\frac{dA}{da}$  loco  $dA$  atque hinc prius membrum nostrae postremae aequationis erit

$$\frac{\alpha dA}{da} \cdot \frac{(1+V V)}{\alpha V - 1} + \alpha A \left(\frac{dV}{da}\right) \frac{(\alpha V V - 2V - \alpha)}{(\alpha V - 1)^2}$$

posterius vero membrum erit  $A \left(\frac{dV}{da}\right)$  ita, ut nunc habeatur ita aequatio

$$\frac{\alpha dA}{da} \cdot \frac{(1+V V)}{\alpha V - 1} - A \left(\frac{dV}{da}\right) \frac{(1+\alpha \alpha)}{(\alpha V - 1)^2} = 0.$$

32. In hac aequatione tantum unius generis differentialia occurrunt scilicet  $\frac{dA}{da}$  et  $\left(\frac{dV}{da}\right)$  ad solum

variabilitatem ipsius  $a$  relata, ita ut abscissa  $x$  non aliter nisi, ut constans, in ea insit, quare si nunc  $x$  pro constante habeamus clausulis illis reiectis, quippe quae tantum ob duas variables fuerunt usurpatae, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\alpha dA (1 + VV) - \frac{A dV (1 + \alpha a)}{\alpha V - 1} = 0$$

qua certa relatio inter  $A$  et  $V$  exprimitur, abscissa scilicet  $x$  ut constante spectata, nunc vero inde statim elicimus

$$\frac{\alpha dA}{A} = \frac{(1 + \alpha a) dV}{(\alpha V - 1)(1 + VV)} = \frac{\alpha a dV}{\alpha V - 1} - \frac{\alpha V dV - dV}{1 + VV}$$

cuius integrale est

$$\alpha LA = \alpha L(\alpha V - 1) - \alpha LV(1 + VV) - \text{Ang. Tang } V + \alpha LX$$

vbi loco constantis introduximus functionem quamcunque ipsius  $x$ , quare per hanc aequationem quantitas  $V$  certo modo determinatur per  $A$  et  $X$ , ideoque erit functio ipsarum  $a$  et  $x$ , qualis in problemate nostro desideratur.

33. Quod si enim pro singulari curvis secundis habeatur ista aequatio differentialis  $dy = V dx$ , siue haec integralis  $y = \int V dx$ , vbi  $V$  sit ea ipsa functio ipsarum  $a$  et  $x$ , quam modo inuenimus, tum pro trajectoriis inuenta est haec aequatio per hypothesin integrabilis

$$\alpha A dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + A Q da = 0,$$

cuius integrale reperietur, si solum prius membrum integretur posito  $a$  constante, unde hoc integrale erit

$$\alpha A \int dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} = C,$$

vbi

vbi quantitas  $C$  vel est vere constans, vel certo modo a parametro  $a$  pendebit, qui modus ex ea conditione, qua prius integrale  $\int V dx$  capi debet, est petendus. Pro qualibet scilicet curua secunda ex eius parametro  $a$  hinc colligitur abscissa  $x$ , indeque punctum  $M$ , quod simul est in traiectoria quaesita.

34. Illa autem aequatio logarithmica, qua Tab. II. natura functionis  $V$  definitur, commodius ita repraesentari potest Fig. 1.

$$\text{Ang. Tang. } V = a L \frac{(\alpha V - 1)^x}{\Delta \sqrt{(1 + VV)}}$$

vnde generatim pro angulo intersectionis quocunque valorem ipsius  $V$  neutiquam elicere licet; consideremus autem casum quo traiectoriae requiruntur orthogonales, quia enim tum fit  $a = \infty$ , ideoque  $\alpha V - 1 = \alpha V$  aequatio nostra fiet

$$\frac{1}{a} \text{Ang. Tang. } V = a L \frac{Vx}{\Delta \sqrt{(1 + VV)}} = 0$$

vnde sequitur esse debere

$$\frac{\alpha Vx}{\Delta \sqrt{(1 + VV)}} = 1, \text{ siue } \frac{V}{\sqrt{(1 + VV)}} = \frac{A}{\alpha X},$$

vbi quum nihil impediatur, quo minus pro  $\alpha X$  scribamus  $X$ , habebimus

$$\frac{V}{\sqrt{(1 + VV)}} = \frac{A}{X},$$

hinc vero porro colligimus

$$V = \frac{A}{\sqrt{(X^2 - \Delta \Delta)}} \text{ et } V(1 + VV) = \frac{X}{\sqrt{(X^2 - \Delta \Delta)}}$$

35. Consequenter si pro curuis secandis proposita fuerit haec aequatio differentialis:

$$dy = \frac{\Delta dx}{\sqrt{(X^2 - \Delta \Delta)}},$$

vbi

vbi  $X$  denotat functionem quamcumque ipsius  $x$  et  $A$  ipsius  $a$ , poterimus trajectorias orthogonales invenire, pro iis enim habebimus istam aequationem

$$\int \frac{XX dx}{\sqrt{(XX - AA)}} = C$$

vbi  $C$  vel est quantitas constans vel certo quodam modo a parametro  $a$  pendet, quemadmodum scilicet conditio integrationis formulae

$$\int \frac{A dx}{\sqrt{(XX - AA)}} \text{ postulat.}$$

Hic ergo praeter omnem expectationem ad easdem trajectorias peruenimus, quas supra ex natura brachystochronarum sumus adepti.

36. Quo autem clarius appareat, quomodo quantitas  $C$  pendeat a conditionibus integrationis procuris secandis, sequenti ratione colligere poterimus, ponamus istam integrationem ita institui ut fiat

$$y = \int \frac{A dx}{\sqrt{(XX - AA)}} + B,$$

vbi  $B$  denotet vel quantitatem vere constansem, vel utcumque ab  $a$  pendentem, prouti libuerit, dum ipsum integrale evanescit posito  $x = 0$  vel cuiuspiam valori dato et quia aequationem differentialem in genere sumimus

$$dy = P dx + Q da,$$

hoc postremum membrum  $Q da$  complectetur  $dB$ , atque adeo reiectis terminis ab  $x$  pendentibus erit

$$Q da = dB.$$

Iam quia pro trajectoriis orthogonibus inuenimus hanc aequationem integram

$$\int \frac{XX dx}{\sqrt{(XX - AA)}} - C = 0,$$

huius-

huiusque differentiale contineri debet in forma

$$a A \frac{dx + y dy}{\sqrt{1 + y^2}} + A Q da = 0$$

neceffe est, vt hoc postremum membrum  $A Q da$  aequetur ipsi  $-dC$ , reiectis scilicet terminis ab  $x$  pendentibus, dum etiam haec integratio eadem lege instituatut vti prior, quare quum fit

$$Q da = dB$$

fiet nunc

$$dC = -A dB$$

ideoque

$$C = E - \int A dB$$

vbi  $E$  denotat quantitatem vere constantem. Quando ergo vt in brachystochronis vsu venit littera  $B$  vel euanescit vel vera est constans, tum posterior littera  $C$  denotabit veram constantem, quemadmodum ibi inuenimus. Quocirca haec determinatio multo latius patet quam illa, quae erat ex brachystochronis petita, quandoquidem hic pro  $B$  functionem quamcunque ipsius  $A$  assumere licet, cum ibi fuisset  $B = 0$ .

37. *Casus Septimus* quo aequatio pro curuis secundis refertur ad punctum fixum. Sit igitur  $I$  punctum illud fixum, ad quod primum curuae secundae  $A M m$  referantur, per distantiam  $IM = v$  et angulum  $CIM = \Phi$ , a directione fixa  $IC$  sumtum ac pro hac quidem curua  $A M m$  fit parameter  $= a$ , variabilis si ad alias curuas secundas transimus, constans vero quamdiu in eadem remanemus.

Tab. II.

Fig. 3.

Dabitur ergo pro curvis secandis aequatio inter  $v, \Phi$  et  $a$ , ex cuius differentiatione prodeat

$$d\Phi = p dv + q da,$$

vnde pro eadem curva secanda  $AMm$ ,

$$\text{erit } d\Phi = p dv,$$

vnde definire licet angulum  $AMI$ , quem haec curva cum recta  $IM$  constituit quippe cuius tangens, quae in genere est  $\frac{v d\Phi}{dv}$ , pro hoc casu erit  $= p \cdot v$ .

38. Sit iam curva  $EM\mu$  traectoria quaecunque secans curvam  $AM$  sub angulo  $AME$  cuius tangens sit vt ante  $= a$ , et quia eadem variables  $v$  et  $\Phi$  etiam ad traectoriā pertinent, pro qua parameter  $a$  utique variabilis haberi debet, erit anguli  $IME$  tangens  $= \frac{v d\Phi}{dv}$ , quo angulo cum praecedente comparato colligetur tangens differentiae eorum hoc est

$$\text{Tang. } AME = \frac{p v - \frac{v d\Phi}{dv}}{1 + \frac{p v v d\Phi}{dv}} = \frac{v(p dv - d\Phi)}{dv + p v v d\Phi} = a,$$

ita vt pro traectoriis resultet ista aequatio

$$(v p - a) dv = v d\Phi (1 + a p v)$$

quae pro traectoriis orthogonalibus ob  $a = \infty$  abit in hanc

$$dv + p v v d\Phi = 0$$

hanc ergo aequationem cum praecedente ita coniungi oportet, vt in ea duae tantum variables fuerint, hocque modo inuentio traectoriarum perducitur ad aequationem differentialem ordinariam, inter duas variables.

39. Quodsi ergo aequatio pro curvis secandis ita fuerit comparata, ut angulus  $\Phi$  commode per functionem ipsarum  $v$  et  $a$  exprimi possit, tum in aequatione differentiali

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

litterae  $p$  et  $q$  datae erunt functiones ipsarum  $v$  et  $a$  ita ut sit  $(\frac{dp}{da}) = (\frac{dq}{dv})$ ; hoc valore iam pro  $d\Phi$  substituto pro traiectoriis in genere orietur haec aequatio

$$qv\,da(1 + apv) + a\,dv(1 + ppv) = 0$$

hincque pro orthogonalibus:

$$pqv^2\,da + dv(1 + ppv) = 0.$$

40. Ponamus lineas secandas omnes esse rectas ex ipso puncto  $I$  eductas et quia anguli  $AMI$  evanescent; manifestum est fore  $p = 0$ , ideoque aequatio erit pro lineis secandis  $d\Phi = q\,da$  siue  $d\Phi = da$  nihil enim impedit quominus angulum  $\Phi$ , tamquam ipsam parametrum  $a$  spectemus ita ut sit  $q = 1$ , tum ergo pro traiectoriis habebimus hanc aequationem:

$$v\,da + a\,dv = 0 \text{ siue ob } da = d\Phi$$

hanc

$$v\,d\Phi + a\,dv = 0,$$

ita ut sit

$$\frac{v\,d\Phi}{a\,v} = -a,$$

unde patet traiectoriam esse spiralem logarithmicam, omnes radios  $IM$  sub angulo constante, cuius tan-

gens  $= -a$ , secantem, ac si fuerit  $a = \infty$ , fit  $dv = 0$  seu  $v = c$  ideoque  $v = c$ , quo casu trajectoria erit circulus centro  $c$  descriptus.

41. Retineamus aequationem generalem:

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

ita ut pro vnaquaque curua secanda, fit  $\Phi = \int p\,dv$  sumamusque hanc formulam integrari non posse, ita ut hinc  $q$  non liqueat, et quaeramus uti in problemate casui sexto annexo indolem functionis  $p$ , ut trajectoria construi possit, pro qua quum aequatio fit

$$q\,da + \frac{a\,dv(1 + p\,p\,v\,v)}{v(1 + a\,p\,v)} = 0,$$

ponamus ut supra hanc aequationem integrabilem reddi, si multiplicetur per  $A$  functionem quamcunque ipsius  $a$ , ne autem in ambages incidamus; consideremus tantum trajectorias orthogonales, pro quibus haec aequatio

$$A\,q\,da + A\,dv \frac{(1 + p\,p\,v\,v)}{p\,v\,v} = 0$$

debet esse integrabilis; necesse igitur est, ut fit

$$A \left( \frac{d\,q}{d\,v} \right) = \frac{d\,A}{d\,a} \left( \frac{1}{p\,v\,v} + p \right) + A \left( \frac{d \left( \frac{1}{p\,v\,v} + p \right)}{d\,a} \right)$$

at vero est

$$\left( \frac{d\,q}{d\,v} \right) = \left( \frac{d\,p}{d\,a} \right)$$

unde ista aequatio induet hanc formam

$$A \left( \frac{d\,p}{d\,a} \right) = \frac{d\,A}{d\,a} \left( \frac{1}{p\,v\,v} + p \right) + A \left( \left( \frac{d\,p}{d\,a} \right) - \frac{1}{p\,p\,v\,v} \left( \frac{d\,p}{d\,a} \right) \right).$$



42. Quia in his differentialibus sola parameter  $a$  ut variabilis occurrit, spectemus reuera  $v$  ut constantem et adipiscemur hanc aequationem

$$dA \left( \frac{1}{p^2 v^2} + p \right) = \frac{\Lambda da}{p^2 v^2}$$

vnde fit

$$\frac{dA}{A} = \frac{da}{p(1 + p^2 v^2)} = \frac{da}{p} - \frac{p v^2 da}{1 + p^2 v^2},$$

quae integrata dat

$$LA = L \frac{p}{\sqrt{(1 + v^2 p^2)}} + LV \text{ siue } \frac{p}{\sqrt{(1 + v^2 p^2)}} = \frac{\Lambda}{V}$$

vnde colligitur

$$p = \frac{\Lambda}{\sqrt{(V V - \Lambda \Lambda v^2)}} \text{ et } \sqrt{(1 + p^2 v^2)} = \frac{V}{\sqrt{(V V - \Lambda \Lambda v^2)}}$$

43. Consequenter si pro curvis secundis haec detur aequatio

$$\Phi = \int \frac{\Lambda dv}{\sqrt{(V V - \Lambda \Lambda v^2)}},$$

vbi  $V$  denotat functionem quamcunque ipsius  $v$  et  $A$  ipsius  $a$ , tum pro traiectoriis orthogonalibus colligitur ista aequatio differentialis:

$$A q da + \frac{v v dv}{v v \sqrt{(V V - \Lambda \Lambda v^2)}} = 0$$

quae quum per se fit integrabilis; aequatio finita ita se habebit

$$\int \frac{v v dv}{v v \sqrt{(V V - \Lambda \Lambda v^2)}} = C,$$

in qua integratione parameter  $a$  pro constante habetur. Atque haec aequatio pro curvis secundis eadem est, quam in superiori dissertatione §. 30. ex brachystochronis deduximus, si modo hic loco  $v$  scribamus  $u$ , loco  $V$  vero  $v u u$ .

EVOLVTIO VBERIOR CASVVM,  
 QVIBVS LINEAE SECANDAE  
 SVNT RECTAE.

Problema I.

Si rectae secandae ita fuerint ductae, vt singulae tangant datam lineam curuam, inuenire lineam curuam, quae has rectas ad angulum datum secat.

Solutio.

Tab. II.  
 Fig. 4.

Sit curua DU ad axem AT relata eaque proponitur, pro qua sit abscissa  $AT = t$  et applicata  $TU = u$ , ita vt  $u$  sit functio quaecunque ipsius  $t$  data, iam ex huius curuae puncto U ducatur tangens indefinita US, quae ergo erit vna ex nostris lineis secandis, vnde si in ea capiatur punctum quodcunque M, coordinatae supra adhibitae erunt nunc  $AP = x$  et  $PM = y$ , inter quas iam aequationem erui oportet, introducendo scilicet parametrum variabilem  $a$ . Quoniam autem haec linea secanda a reliquis distinguitur eo, quod haec ipsam curuam datam in puncto U tangat, hoc ipsum punctum U continebit notionem parametri, atque abscissam  $AI = t$  tamquam parametrum spectare licet, atque nunc  $u$  erit functio parametri  $t$ , ex natura autem huius functionis innotescit angulus quo recta haec US ad axem nostrum inclinatur, cuius quippe tangens est  $\frac{du}{dt} = a$ .

At

At vero etiam hunc angulum ex nostris coordinatis  $x$  et  $y$  cum  $t$  et  $u$  comparatis poterimus definire, erit enim etiam tangens  $c$  istius anguli  $\frac{u-y}{t-x} = v$  unde variando  $t$  aequatio pro omnibus curvis secandis erit,

$$y = vx + u - tv,$$

quae praeter variables  $x$  et  $y$  continet insuper parametrum  $t$  eiusque functiones  $u$  et  $v$ , quae in locum litterae  $a$  substitui intelligi debent. Quoniam vero iam posuimus  $du = dv$  fit porro  $dv = w dt$  atque nunc aequatio differentialis pro curvis secandis erit:

$$dy = v dx + (xw - wt) dt = v dx + (x - t)w dt,$$

quae cum forma nostra generali comparata

$$dy = p dx + q da$$

ob  $a = t$  praebet  $p = v$  et  $q = (x - t)w$ .

Hinc igitur pro traiectoriis quibuscunque, dum anguli interfectionis tangens est  $= \alpha$ , habebimus hanc aequationem

$$q dt (1 - \alpha p) = \alpha dx (1 + p p),$$

vbi  $p$  est functio parametri  $t$ , quae substitutis valoribus abit in hanc formam

$$w dt (1 - \alpha v) (x - t) = \alpha dx (1 + v v) \text{ siue}$$

$$dv (1 - \alpha v) (x - t) = \alpha dx (1 + v v),$$

quae ergo est aequatio pro omnibus traiectoriis.

Ponamus primo  $\alpha = 0$ , ita ut omnes lineae secandae a traiectoria tangi debeant, atque habebimus  $x = t$  unde fit  $y = u$ , sicque prodit ipsa linea cur-

va cuius per hypothefin noſtræ, lineæ ſunt tangentes, qui caſus per ſe eſt obuius.

Ponamus autem porro  $\alpha = \infty$ , vt traieſtoriae prodeant orthogonales, vnde naſci debent omnes illae curvae, quae ex evolutione curvae DU oriuntur, factò autem  $\alpha = \infty$  noſtra aequatio abit in hanc,

$-v dv(x-t) = dx(1+vv)$  ſeu  $-\frac{v dv}{1+vv} = \frac{dx}{x-t}$ , quae tantum duas variables continet, hac forma repræſentata

$$t v dv = dx(1+vv) + x v dv,$$

quae per  $\sqrt{1+vv}$  diuiſa maniſeſto fit integrabilis

$$\frac{t v dv}{\sqrt{1+vv}} = dx \sqrt{1+vv} + \frac{x v dv}{\sqrt{1+vv}}$$

integralis enim eſt

$$x \sqrt{1+vv} = \int \frac{t v dv}{\sqrt{1+vv}} = t \sqrt{1+vv} - \int dv \sqrt{1+vv} + C$$

vbi formula

$$\int dt \sqrt{1+vv}$$

denotat arcum curvae propositae DU, deinde ſi ex puncto A erigatur ad axem perpendicularis rectam MS ſecans in R erit

$$UR = t \sqrt{1+vv}$$

ideoque

$$RM = RU - DU + C,$$

ita vt fit

$$DU = MU + C$$

abſcindatur ergo in figura arcus  $DC = C$ , vt fiat recta UM aequalis UC, atque nunc maniſeſtum eſt punctum

punctum  $M$  esse in curua ex evolutione nata  $CM$ , initio evolutionis in puncto  $C$  facto. Verum si aequationem pro hac curua  $CM$  desideremus, ex aequatione inuenta habemus statim

$$x = t - \frac{\int dt \sqrt{(1+vv)}}{\sqrt{(1+vv)}},$$

hincque porro

$$y' = u - \frac{v \int dt \sqrt{(1+vv)}}{\sqrt{(1+vv)}},$$

vnde si liceret variabilem  $t$  eliminare, haberetur aequatio pura inter  $x$  et  $y$  pro curua quaesita.

Sed videamus etiam, qualis futura sit traiectoria, si angulus intersectionis fuerit quicumque constans, tum autem aequatio inuenta reducatur ad hanc formam

$$\alpha dx(x+vv) - x dv(x-\alpha v) = t dv(\alpha v-1) \text{ siue}$$

$$dx - \frac{\alpha dv(x-\alpha v)}{\alpha(1+vv)} = \frac{t dv(\alpha v-1)}{\alpha(1+vv)},$$

quae cum forma generali

$$dx + Px dv = Q dv,$$

comparata integrabilis redditur, si multiplicetur per  $e^{\int P dv}$ , tum enim integrale erit

$$x e^{\int P dv} = \int e^{\int P dv} Q dv,$$

quum igitur hic fit

$$P dv = \frac{dv(\alpha v-1)}{\alpha(1+vv)} \text{ erit } \int P dv = LV(1+vv)^{-\frac{1}{2}} \text{ Arc. Tang. } v,$$

ideoque

$$e^{\int P dv} = e^{-\frac{1}{2} \text{ Arc. Tang. } v} \sqrt{(1+vv)},$$

quocirca ob

$$Q = \frac{t(\alpha v - 1)}{\alpha(1 + vv)} = tP$$

Vnde erit

$$\int e^{\int P dv} \cdot Q dv = \int e^{\int P dv} t P dv = t e^{\int P dv} - \int dt e^{\int P dv}$$

ita vt fiat

$$x = t - e^{-\int P dv} \int dt \cdot e^{\int P dv}$$

ex quo facta substitutione habebimus

$$x = t - \frac{e^{\frac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang. } v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang. } v} \sqrt{(1 + vv)}$$

hincque

$$y = u - \frac{v e^{\frac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang. } v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang. } v} \sqrt{(1 + vv)}$$

## Problema II.

Sint rectae secundae ita ductae, vt singulae earum UM sint normales in curuam datam AU et quaerantur traectoriae pro quouis angulo intersectionis.

### Solutio.

Pro curua data AU sit iterum abscissa AT = t et applicata TU = u, tum vero sit du = v dt, ita vt haec quantitates tanquam functiones parametri variabilis spectentur, ducta iam ad punctum U normali UNM constat anguli TUN tangentem fore = v ob subnormalem

$$TN = \frac{u dv}{dt} = uv$$

hinc-

hincque normalem

$$UN = u \sqrt{(1 + v v)}.$$

Quia nunc recta UNM est vna ex secundis, sumatur in ea punctum quodcunque M et vocatis coordinatis

$$AP = x \text{ et } PM = y \text{ erit}$$

$$TP = x - t \text{ et } UT + PM = u + y,$$

manifestum autem est fore  $v = \frac{x-t}{u-y}$ , vnde deducitur haec aequatio

$$y = \frac{x}{v} - u - \frac{t}{v} \text{ et.}$$

Differentietur nunc ista aequatio et reperietur:

$$dy = \frac{dx}{v} - \frac{x dv}{v^2} - v dt - \frac{dt}{v} + \frac{t dv}{v^2},$$

quae comparata cum forma generali

$$dy = p dx + q da,$$

praebet  $p = \frac{1}{v}$  hinc

$$1 + pp = \frac{1 + v v}{v^2} \text{ et } q da = -\frac{x dv}{v^2} - dt \frac{(1 + v v)}{v} + \frac{t dv}{v^2}$$

at vero pro traiectoriis inuenta est haec aequatio

$$\alpha dx (1 + pp) = q da (1 - \alpha p).$$

Ponamus hic primo  $\alpha = 0$ , vt inueniamus eam traiectoriam, quae omnes nostras lineas rectas tangat, quam patet esse euolutam curuae propositae AV; pro hac ergo habebimus istam aequationem  $q da = 0$ , vnde fit

$$(x - t) dv + v dt (1 + v v) = 0$$

hincque

$$x = t - \frac{v dt(1+vv)}{dv},$$

hincque porro

$$y = -u - \frac{dt(1+vv)}{dv}$$

quae sunt coordinatae pro euoluta curuae propositae, praeterea vero notasse iuuabit, quum fit

$$TP = x - t = - \frac{v dt(1+vv)}{dv}$$

hanc proportionem

$$TN : UN = TP : UM$$

ita vt fit

$$UN = - \frac{dt(1+vv)^{3/2}}{dv},$$

quae est ipsa expressio cognita pro radio osculi UM.

Contemplemur etiam casum, quo  $a = \infty$ , vt omnes traiectorias orthogonales eliciamus. Tum vero aequatio inuenta abit in hanc

$$dx(1+pp) + pq da = 0$$

hoc est

$$dx(1+vv) - \frac{x dv}{v} + \frac{t dv}{v} - dt(1+vv) = 0,$$

quae reducitur ad hanc formam

$$dx - \frac{x dv}{v(1+vv)} = dt - \frac{t dv}{v(1+vv)}$$

quae cum forma generali

$$dx + P dx dv = Q dv$$

compa-



comparata, dat

$$P dv = - \frac{dv}{v(1+vv)}$$

hinc

$$\int P dv = L \frac{v(1+vv)}{v} \text{ et } e^{\int P dv} = \frac{v(1+vv)}{v}$$

per quam quantitatem nostra aequatio multiplicata fit

$$\frac{dx v(1+vv)}{v} - \frac{x dv}{vv(1+vv)} = \frac{dt v(1+vv)}{v} - \frac{t dv}{vv(1+vv)}$$

cuius integrale est

$$\frac{x v(1+vv)}{v} = \frac{t v(1+vv)}{v} + c,$$

ita vt fit

$$x = t + \frac{c v}{v(1+vv)}$$

hincque

$$y = \frac{c}{v(1+vv)} - u.$$

Quodsi iam hic constantem  $c$  ponamus  $= 0$ , habebimus  $x = t$  et  $y = -u$ , quo casu traectoria orthogonalis est ipsa curua nostra proposita  $AU$ , sed praeter hanc infinitae adhuc aliae dantur, quae inueniuntur, si  $c$  non fit  $= 0$ , capiantur enim in singulis nostris rectis portiones  $U\mu = c$ , atque manifestum est fore

$$\frac{c v}{v(1+vv)} = T\pi \text{ et } \frac{c}{v(1+vv)} = TU - \mu\pi,$$

quibus substitutis habebimus

$$x = AT + T\pi = A\pi \text{ et } y = \frac{c}{v(1+vv)} - u = -\mu\pi,$$

ex quo intelligitur omnes curuas per puncta haec  $\mu$  ductas, quae parallelae vocari solent curuae  $AU$ ,

esse trajectorias orthogonales, constat enim omnes has curvas communem habere evolutam.

Sin autem angulus intersectionis fuerit quicumque; aequatio inuenta erit

$$adx(1+vv) = -(v-a)\frac{x dv}{v} - (v-a)(1+vv)dt + (v-a)\frac{tdv}{v}$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$dx + \frac{(v-a)x dv}{av(1+vv)} = -\frac{(v-a)dt}{a} + \frac{(v-a)tdv}{av(1+vv)} = -\frac{du}{a} + dt + \frac{(v-a)tdv}{av(1+vv)}$$

unde fit

$$\int P dv = \frac{1}{a} \text{Ang. Tang. } v + L \frac{v(1+vv)}{v},$$

unde calculus reducitur ad quantitatem exponentialem, in cuius exponentem ingreditur angulus, cuius Tangens est  $v$ .

### Problema III.

Proposita curva quacunquē AU per coordinatas AT =  $t$  et TA =  $u$  data, si ad singulā eius puncta U secundum legem quamcunquē datam educantur rectae UM, inuenire trajectorias, quae omnes has rectas sub angulo dato traiciant.

### Solutio.

Ponamus vt ante  $du = v dt$  et vocemus angulum TUM =  $\Phi$  qui vel ipse vel cuius Sinus, Tangens, per quantitates ad curuam pertinentes vicane determinetur, ita vt fit  $d\Phi = \xi dt$ , atque

que omnes istae quantitates, tanquam functiones parametri spectari queant. Quum igitur  $U M$  sit vna ex rectis secandis, sumto in ea puncto quocunque  $M$  habebimus pro traiectoriis  $A P = x$  et  $P M = y$ , atque nunc vt ante euidentis est fore

$$\text{Tang. } \Phi = \frac{x-y}{u+y},$$

vnde definitur

$$y = \frac{x}{\text{Tang. } \Phi} - u - \frac{t}{\text{Tang. } \Phi}.$$

Differentietur haec aequatio :

$$dy = a x \cot. \Phi - \frac{x d \Phi}{\sin. \Phi^2} - v dt - dt \cot. \Phi + \frac{t d \Phi}{\sin. \Phi^2}$$

eritque

$$p = \cot. \Phi \quad \text{et} \quad 1 + p p = \frac{t}{\sin. \Phi^2} \quad \text{et}$$

$$q da = \frac{(t-x) d \Phi}{\sin. \Phi^2} - v dt - dt \cot. \Phi,$$

quare quum pro traiectoriis inuenta sit haec aequatio

$$a dx (1 + p p) + q da (\alpha p - 1) = 0,$$

quae duas tantum variables complectitur et altera  $x$  vnam dimensionem non superat, eius resolutio erit in nostra potestate.

Euoluamus autem potissimum casum, quo  $\alpha = 0$ , vt curua inueniatur omnes has rectas propositas tangens, pro hac igitur curua aequatio erit  $q da = 0$  siue

$$x = t - \frac{v d t \sin. \Phi^2}{d \Phi} - \frac{d t \sin. \Phi \cos. \Phi}{p} = t - \frac{v \sin. \Phi^2}{p} - \frac{\sin. \Phi \cos. \Phi}{p}$$

hinc-

hincque

$$y = -u - \frac{v \sin. \Phi \cos. \Phi}{\rho} - \frac{\cos. \Phi^2}{\rho},$$

quum ergo hinc fit

$$x - t = -\frac{v \sin. \Phi^2}{\rho} - \frac{\sin. \Phi \cos. \Phi}{\rho},$$

inde concluditur ipsa recta

$$UM = -\frac{v \sin. \Phi - \cos. \Phi}{\rho},$$

notandum autem M esse punctum, in quo duae huiusmodi rectae sibi proximae conueniunt.