

DE  
COLLISIONE CORPORVM  
GYRANTIVM.

Auctore

L. EULER O.

Problema I.

**S**i globus circa axem fixum in gyrum agatur, celeritate quacunque, in eamque impingat directe alius globus; definire conflictum, siue motum, quo posterior globus post conflictum mouebitur, quandoquidem prior globus vi aliena perpetuo in motu suo gyratorio conseruetur.

Solutio.

Tab. IV. **1.** Axis fixus circa quem prior globus gyra-  
Fig. 1. tur, perpendicularis concipiatur ad planum tabulae, sitque eius centrum in A et radius  $AD = a$ , ducaturque directio fixa, quae sit ADE, ad quam tamquam axem elementa calculi referamus; ponamus istius globi radium  $AD = a$  et celeritatem gyratoriam seu angularem  $= \alpha$ , qua hic globus in sensum DCF in gyrum agatur, ita vt eius celeritas in puncto D vel C sit  $= \alpha a$ , vbi notandum  $\alpha$  esse angulum vno minuto secundo absoluendum.

2. Quia

2. Quia conflictum fieri in directum assumimus, necessum est, ut centrum alterius globi in ipso plano tabulae proferatur, ponamus autem huius globi radium  $= b$ , eiusque massam  $= B$ , ita autem sit comparatus, ut eius centrum inertiae in ipsum centrum globi incidat. Qualem autem motum hic globus ante conflictum habuerit, deinceps indicemus, quoniam in ipsa Analyfi, quatenus ex principiis Mechanicae instituitur, nihil refert, quicumque fuerit status initialis.

3. Postquam conflictus inchoauerit et etiam nunc durat elapso tempore  $= t''$ , teneat alter globus situm in figura repraesentatum, cuius centrum sit B ideoque ducta recta AB, contactus mutuus in punctum C incidet, foretque centrorum distantia  $AB = a + b$ , nisi ob conflictum quaequam impressio mutua esset producta, unde ob hanc impressionem distantia AB aliquantillum erit minor, quare posito breuitatis gratia  $a + b = c$ , sit nunc distantia  $AB = c - s$ , ubi quidem tenendum est, hanc quantitatem  $s$  semper fore quam minimam, dum autem ambo globi per hoc spatium  $= s$ , in se mutuo quasi penetrarunt, in ipso contactu C nascetur certa vis vltiori penetrationi reluctans, quae sit  $= S$ , haecque in globum B aget secundum directionem CB, quamquam autem hanc vim a priori definire non licet, tamen ea certe spectari poterit, ut functio ipsius  $s$ .

4. Ponatur nunc angulus  $EAB = \Phi$ , et ex B ad rectam fixam AE ducta normali BX, vo-

catisque coordinatis  $AX = x$  et  $BX = y$ , habebimus

$$x = (c - s) \cos. \Phi \quad \text{et} \quad y = (c - s) \sin. \Phi$$

Unde fit

$$x \cos. \Phi + y \sin. \Phi = c - s \quad \text{atque} \quad x \sin. \Phi - y \cos. \Phi = 0,$$

quas formulas in posterum plurimum notasse iuua-bit. Constitutis his coordinatis motum centri globi  $B$  exprimere poterimus, quippe cuius celeritas secundam directionem  $AE$  erit  $= \frac{dx}{dt}$  et secundam directionem  $XB = \frac{dy}{dt}$ , quatenus autem hic globus a vi  $S$  in directione  $CB$  vrgetur, inde nascetur vis in directione  $AX = S. \cos. \Phi$  et in directione  $XB = S. \sin. \Phi$ .

5. Quia vero globus  $A$  in gyrum agitur in sensum  $DCF$ , simul ac alter globus eum contingere incoepit, ipsi tam ob impressionem, quam ob frictionem inducetur etiam motus gyratorius in sensum  $CGH$ , cuius celeritas angularis praesenti momento, fit  $= \frac{d\zeta}{dt}$ , ita vt celeritas in puncto  $C$  futura fit  $= \frac{d\zeta}{dt}$ , quoniam hic exiguam illam diminutionem ob particulam  $s$  negligere licet, cuius celeritatis directio erit recta  $C\gamma$  ad  $BC$  normalis. Haec scilicet foret celeritas puncti  $C$ , si centrum globi  $B$  quiesceret; verum quia ipsum centrum motum habet ante assignatum, idem quoque insuper puncto  $C$  tribui debet. Quatenus autem punctum  $C$  in directione  $AX$  celeritate  $= \frac{dx}{dt}$  fertur, inde in directionem  $C\gamma$  resultat celeritas  $= \frac{dx}{dt} \sin. \Phi$ , ex altera ve-

ro celeritate  $\frac{dy}{dt}$  in directione  $XB$  resultat  $\frac{dy}{dt} \cos. \Phi$   
 ita vt vera celeritas globi  $B$  in puncto  $C$  futura fit

$$\frac{bd\xi}{dt} - \frac{dx}{dt} \sin. \Phi + \frac{dy}{dt} \cos. \Phi,$$

quum autem fit

$$x \sin. \Phi - y \cos. \Phi = 0$$

erit differentiando

$$dx \sin. \Phi - dy \cos. \Phi + d\Phi (x \cos. \Phi + y \sin. \Phi) = 0$$

vnde fit

$$dx \sin. \Phi - dy \cos. \Phi = -d\Phi (c - s),$$

quare vera celeritas illa secundum  $C\gamma$  obtinetur

$$= \frac{bd\xi}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} (c - s).$$

6. Quatenus autem punctum  $C$  in priori glo-  
 bo  $A$  accipitur, eius celeritas in eadem directione  
 $C\gamma$  est  $a\alpha$ , cui si illa celeritas esset aequalis, nul-  
 lus attritus in contactu contingeret, nulla ergo vis  
 exurgeret, motum gyratorium globi  $B$  siue accele-  
 rans siue retardans. Verum quamdiu celeritas  $a\alpha$   
 maior est celeritate

$$\frac{bd\xi}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} (c - s)$$

attritus orietur, quo celeritas gyratoria globi  $C\gamma$   
 accelerabitur, contra vero si

$$\frac{bd\xi}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} (c - s)$$

maior esset quam illa  $a\alpha$ , motus gyratorius globi  $B$   
 retardaretur, quam ob rem hi tres casus probe a se  
 inuicem distingui conuenit.

I<sup>mus</sup> Casus quo  $aa > \frac{bd\zeta}{a^2} + (c-s) \frac{d\phi}{2t}$  et motus gyrotorius globi B acceleratur.

II<sup>us</sup> Quo  $aa = \frac{bd\zeta}{a^2} + (c-s) \frac{d\phi}{2t}$  et motus iste nullam alterationem patitur, ac

III<sup>us</sup> quo  $aa < \frac{bd\zeta}{a^2} + (c-s) \frac{d\phi}{2t}$  motusque ille retardatur.

7. Haec autem vis siue accelerans siue retardans motum gyrotorium globi B ob frictionem nascitur, quam nouimus partim ab aspritie in contactu, partim vero a mutua pressione, qua ambo corpora se vrgent, pendere. Quum igitur hi duo globi se mutuo vrgent vi  $= S$ , frictio commode exprimi solet formula  $\delta S$ , vbi  $\delta$  est certa fractio ab aspritie pendens, quae plerumque aestimatur  $\frac{1}{4}$  vel  $\frac{1}{3}$  vel si corpora fuerint probe leuigata adhuc minor, consequenter globus B in puncto C, secundum directionem  $C\gamma$  ita sollicitatur, vt haec vis pro primo casu fit  $= +\delta S$ , pro secundo casu  $= 0$  at pro tertio casu  $= -\delta S$ .

8. Ne opus habeamus hos tres casus perpetuo a se inuicem distinguere, sit  $ba$  breuitatis gratia  $= \Sigma$  vis secundum directionem  $C\gamma$  agens, ita vt sit casu primo

$$\Sigma = \delta S, \text{ casu secundo } \Sigma = 0 \text{ et casu tertio } \Sigma = -\delta S.$$

Haec autem vis  $\Sigma$  non solum motum gyrotorium globi B afficit, sed etiam eius motum progressiuum, idque perinde, ac si in ea in ipso centro B esset applicata, inde ergo orietur vis secundum

$$AX = -\Sigma \sin \phi$$

et

et secundum directionem

$$XB = + \Sigma \cos. \Phi$$

vnde omnes vires motum progressiuum huius globi sollicitantes erunt:

$$I^a. \text{Vis secundum directionem } AX = S \cos. \Phi - \Sigma \sin. \Phi$$

$$II^da \text{ secundum directionem } XB = S \sin. \Phi + \Sigma \cos. \Phi.$$

Ex his viribus accelerantibus, posita altitudine ex qua graue delabitur vno secundo  $= g$ , sumtoque elemento  $dt$  constante, motus progressiuus globi  $b$  determinabitur his duabus aequationibus:

$$I. \frac{B. ddx}{2gdt^2} = S \cos. \Phi - \Sigma \sin. \Phi$$

$$II. \frac{B. ddy}{2gdt^2} = S \sin. \Phi + \Sigma \cos. \Phi,$$

at vero pro eius motu gyratorio, si globi momentum inertiae ponatur  $= Bkk$ , quia momentum vis  $\Sigma$  est  $= \Sigma b$  habebitur ista aequatio:

$$III. \frac{Bkkdd\zeta}{2gdt^2} = \Sigma b \text{ siue } dd\zeta = \frac{2gb\Sigma dt^2}{Bkk}$$

9. Euoluamus primo duas aequationes priores, atque ex iis eliciemus has duas sequentes:

$$ddx \cos. \Phi + ddy \sin. \Phi = \frac{2gSdt^2}{B} \text{ et}$$

$$ddy \cos. \Phi - ddx \sin. \Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}$$

quum autem fit

$$x \cos. \Phi + y \sin. \Phi = c - s \text{ et } x \sin. \Phi - y \cos. \Phi = 0$$

erit vti iam vidimus

$$dx \cos. \Phi + dy \sin. \Phi = -ds \text{ et } dx \sin. \Phi - dy \cos. \Phi = -(c-s)d\Phi$$

atque ulterius differentiando

$$ddx \cos. \Phi + ddy \sin. \Phi = -dds - (c-s)d\Phi^2$$

$$ddy \cos. \Phi - ddx \sin. \Phi = (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi$$

consequenter binæ aequationes motum progressuum definiuntur sunt:

$$I. dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2g\Sigma dt^2}{B} \text{ et}$$

$$II. (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}.$$

10. In his duabus aequationibus tres occurrunt variables,  $t$ ,  $\Phi$  et  $s$ , liquidem  $S$  et  $\Sigma$  sunt functiones ipsius  $s$ , harum autem aequationum, quia sunt differentiales secundi gradus, resolutio maximas haberet difficultates, nisi commode vsu veniret, ut quantitatum  $t$  et  $\Phi$  tantum differentialia, non vero ipsae occurrant atque hanc ob causam eas ad differentialia primi gradus reuocare licebit, sequenti modo. Ponatur

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{p}} \text{ et } d\Phi = \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$

et quia  $dt$  erat constans, prior positio praebet

$$0 = 2p dds - dsdp$$

unde fit

$$dds = \frac{dp ds}{2p},$$

altera vero praebet

$$dd\Phi = \frac{dds\sqrt{q}}{p} + \frac{dsdq}{2\sqrt{p}q} - \frac{dsdp\sqrt{q}}{2p\sqrt{p}} - \frac{dsdq}{2\sqrt{p}q},$$

quibus valoribus substitutis, ambae nostrae aequationes sequentes induent formas:

$$dp + 2(c-s)q ds = -\frac{2g\Sigma ds}{B}$$

$$(c-s)\frac{dq}{q} - 4 ds = \frac{2g\Sigma ds}{B\sqrt{p}q}$$

in

in quibus adhuc insunt tres variables  $p$ ,  $q$  et  $s$ , sicque binas priores  $p$  et  $q$  per posteriorem  $s$  definiiri oportet, quo autem hoc facilius praestari possit, plurimum notasse iuuabit, quoniam  $s$  est particula admodum parua, hic loco  $c - s$  scribi posse simpliciter  $c$ . Nulla autem patet via ad harum aequationum resolutionem perducens. Videtur autem hic potissimum eo spectari oportere, quod quantitas  $s$  sit quasi infinite parua, num forte hinc aliquid subsidium peti possit.

II. Quando autem  $s$  est quantitas vehementer exigua, quemadmodum vsu venit in corporibus saltem mediocriter duris; tum conflictus tam exiguo temporis puncto absoluitur, vt interea angulus  $\Phi$  quam minimam mutationem subeat, ita vt quantitates  $s$  et  $\Phi$  quasi infinite parua eiusdem ordinis spectari debeant, tum autem in prima aequatione secundus terminus  $c d \Phi^2$  ad ordinem infinite parvorum quasi secundum pertinet ideoque respectu primi termini reici potest, simili modo in altera aequatione secundus terminus  $-2 d s d \Phi$  continens duas dimensiones infinite paruorum euanescit prae primo, vbi tantum vnica est dimensio, hoc autem admisso nostrae aequationes differentiales secundi gradus erunt:

$$d d s = -\frac{2 g s d t^2}{B} \text{ et } c d d \Phi = 2 g \frac{\Sigma d t^2}{B}$$

quarum prior per  $d s$  multiplicata et integrata praebet

$$\frac{d s^2}{d t^2} = C - \frac{4 g}{B} \int S d s,$$

vnde



vnde colligitur

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{1}{B} f S ds)}}$$

iam secunda aequatio hoc modo expressa

$$\frac{c d d \Phi}{dt} = \frac{2g \Sigma dt}{B} = \pm \frac{2g \Sigma dt}{B \sqrt{(C - \frac{1}{B} f S ds)}}$$

integrale dabit

$$\frac{c d \Phi}{dt} = D \pm \frac{2g}{B} \int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{1}{B} f S ds)}}$$

quam formulam semper actu integrare licet, quia vel  $\Sigma = 0$  vel  $\Sigma = \pm S$ .

12. Definito igitur motu progressiuo globi B, simili modo eius motum gyrationem definire poterimus, tertia enim aequatio supra inuenta

$$\frac{d d \zeta}{dt} = \frac{2gb \Sigma dt}{B k k}, \text{ cuius integrale erit}$$

$$\frac{d \zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{B k k} \int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{1}{B} f S ds)}}$$

quae formula denuo est integrabilis, et ex valoribus hic inuentis prioribus  $\frac{ds}{dt}$ ,  $\frac{d\Phi}{dt}$  celeritas motus progressiui globi B definiri potest, siquidem est

$$\frac{dx}{dt} = -c \sin. \Phi \frac{d\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt} \cos. \Phi$$

$$\text{et } \frac{dy}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} c \cos. \Phi - \frac{ds}{dt} \sin. \Phi.$$

13. At vero pro hoc motu perfecte cognoscendo etiam ipsum angulum  $\Phi$  nosse debemus, quae inuentio nulla laborat difficultate, quum sit

$$\Phi = f \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{g}{B} f S ds)}} \left( \frac{D}{c} \pm \frac{2g}{Bc} f \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{g}{B} f S ds)}} \right).$$

Deinde eodem modo ipsa celeritas gyratoria globi B quae est  $= \frac{d\zeta}{dt}$ , ita reperietur expressa

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk} f \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{g}{B} f S ds)}}.$$

14. Expressiones autem has ob geminam integrationem nimis generales atque adeo vagas, ex statu initiali, quem merito uti datum spectamus, restringi et determinari oportet, iam autem innuimus initio fuisse  $t = 0$  et quia tum conflictus incipit et nulla adhuc impressio facta est, erat etiam  $s = 0$ , ita utposito  $t = 0$ , fiat etiam  $s = 0$ . Ponamus autem globi B ante conflictum motum ita fuisse comparatam, ut primus contactus contingerit in puncto D sicque initio fuerit  $\Phi = 0$ ; deinde vero huius globi celeritatem secundum directionem EA fuisse  $= m$  et in directione ID  $= n$ , ita ut hic globus in directione LD aduenerit, denique vero eidem globo ante conflictum tribuamus motum gyratorium  $= \gamma$  in eundem sensum CGH, hinc igitur facto  $t = 0$  debet esse

$$\frac{dx}{dt} = -m \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = n,$$

quia igitur initio erat  $\sin \Phi = 0$  et  $\cos \Phi = 1$ , erat utique

$$m = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad n = c \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

Tom. XVII. Nou. Comm.

N n

ita

ita vt pro initio fieri debeat

$$\frac{ds}{dt} = m \quad \text{et} \quad \frac{cd\Phi}{dt} = n.$$

Denique pro motu gyatorio initio fieri debet  $\frac{d^2s}{dt^2} = \gamma$ .

15. Quare si primum integrale  $\int S ds$  ita capiamus vt posito  $s = 0$ , quod initio euenit, euanescat pro prima aequatione §. 11.

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C - \frac{2g}{B} \int S ds,$$

fit constans  $C = m^2$  ita, vt haec prima aequatio determinata fit

$$\frac{ds^2}{dt^2} = m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds, \quad \text{hincque}$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds} \quad \text{ergo} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds}}.$$

Pro secunda aequatione integrata, fit constans illa  $D = n$  siquidem sequens integrale

$$\int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds}}$$

euanescat ipso initio, sicque haec secunda aequatio ita se habebit

$$\frac{cd\Phi}{dt} = n + \frac{2g}{B} \int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds}};$$

quoniam autem  $\Sigma$  est  $\pm \delta S$  nisi  $= 0$ , haec formula actu integrata dat

$$\frac{cd\Phi}{dt} = n \pm \delta \left( m - \sqrt{m^2 - \frac{2g}{B} \int S ds} \right)$$

hincque porro ob

$$cd\Phi = (n \pm \delta m) dt \mp \delta ds$$

conclu-

concluditur ipse angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$$

quae expressio sponte evanescit in initio.

Simili modo pro motu gyratorio sumto iterum

$\Sigma = \pm \delta S$  habebimus primo.

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \frac{2\delta b g}{Bkk} \int \frac{S ds}{V(mm - \frac{g}{B} f S ds)} = \gamma \pm \frac{\delta b}{k k} (m - V(mm - \frac{g}{B} f S ds))$$

ficque omnes formulae solutionem continentis sunt penitus determinatae, atque ex his deducimus utramque celeritatem progressivam

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -n \sin \Phi \mp \delta \sin \Phi (m - V(mm - \frac{g}{B} f S ds)) - \cos \Phi V(mm - \frac{g}{B} f S ds) \\ &= -\sin \Phi (n \pm \delta m) \mp V(mm - \frac{g}{B} f S ds) (-\cos \Phi \mp \delta \sin \Phi) \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m) \cos \Phi - (\sin \Phi \pm \delta \cos \Phi) V(mm - \frac{g}{B} f S ds)$$

quarum illa pro initio manifesto dat

$$\frac{dx}{dt} = -m \text{ et altera } \frac{dy}{dt} = +n.$$

16. Hoc ergo modo satis feliciter problema resolvimus, siquidem ambo corpora fuerint ita dura, ut impressio facta tanquam infinite parva spectari possit, quum autem omnes formulae, quae solutionem constituunt, inuoluant functionem  $S$ , cuius natura nobis neutiquam est cognita, quoniam tantum novimus crescente impressione  $s$ , etiam functionem  $S$  augeri, hae formulae nobis parum lucis suppeditant ad cognitionem omnium mutationum, quae motui globi  $B$  durante conflictu inducuntur. Verum parum refert omnes has mutationes accurate cognovisse,

viffe, dummodo eius motum, quem finito conflictu est habiturus, assignare valeamus; quare in hoc nobis erit elaborandum, ut id temporis momentum inveftigemus, quo conflictus penitus cessat. Hic autem finis conflictus definiri non potest, nisi constet, vtrum ambo corpora proposita sint elastica nec ne, atque hinc duo genera principalia sunt constituenda, quorum priore ambos globos omni elasticitate destitutos assumemus, altero vero vtrique perfectam elasticitatem tribuemus.

Primum genus globorum omni elasticitate carentium.

17. Quando ambo corpora nulla prorsus elasticitate sunt praedita conflictus eo usque tantum durat, quoad impressio sibi mutuo facta, seu spatium  $s$  maximum euaserit, tum enim subito vis repellens  $S$  evanescit, quoniam impressiones inductae non restituuntur atque tum globi non amplius in se mutuo agunt, cessante enim mutua actione ipse conflictus cessat. Hoc ergo genere conflictus finitur, quando valor formulae  $\frac{ds}{dt}$  in nihilum abit. Quum igitur inuenerimus §. 15.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{mm - \frac{g}{B} fS ds}$$

hic valor evanescit, quando fit

$$mm = \frac{g}{B} fS ds, \text{ siue } fS ds = \frac{mmB}{g};$$

scilicet cum initio esset  $s = 0$  et  $S = 0$  eo usque  $s$  cum  $S$  crescit, donec fiat

$$\frac{g}{B} fS ds = mm,$$

atque

atque tum conflictus subito finitur. Substituamus igitur ubique hunc valorem loco  $\int S ds$ , atque formulae ante inuentae sequenti modo determinabuntur

$$\text{I}^\circ. \frac{dx}{dt} = 0; \text{II}^\circ. \frac{cd\Phi}{dt} = n \pm \delta m; \text{III}^\circ. \Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$$

$$\text{IV}^\circ. \frac{d\theta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk},$$

18. Pro motu ergo progressiuo globi B post conflictum habebimus primo eius celeritatem, secundum directionem AX sine

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m) \sin. \Phi,$$

deinde celeritatem in directione

$$XB = \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m) \cos. \Phi$$

atque tertio pro eius motu gyratorio celeritatem angularem

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk},$$

vnde intelligitur, ista motus momenta perfecte cognosci non posse, nisi pro sine conflictus innotescat tam tempus  $t$ , quam quantitas impressionis  $s$ , his enim inuentis etiam angulus  $\Phi$  erit cognitus; at vero inter  $s$  et  $t$  hanc eliciamus relationem

$$dt = \frac{ds}{V(mn - \frac{cg}{B} \int S ds)}$$

quocirca hic nihil certi definire licet, nisi natura functionis S fuerit perspecta.

19. Quo igitur hinc saltem aliquid colligere liceat, fingamus aliquam hypothesin a veritate non adeo abhorrentem statuamusque

$$\frac{2g}{B} S = \lambda \lambda s,$$

vt fiat

$$\frac{2g}{B} \int S ds = \lambda \lambda s s,$$

ideoque pro fine conflictus

$$m m = \lambda \lambda s s \text{ siue } s = \frac{m}{\lambda},$$

deinde quia fit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(m m - \lambda \lambda s s)}}$$

erit integrando

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{Ang. fin. } \frac{\lambda s}{m}$$

pro fine ergo conflictus erit

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{Ang. fin. } 1 = \frac{\pi}{2\lambda},$$

pro hac ergo hypothesi prodit angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m}{c\lambda} = \frac{n\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(\pi - 2)}{2\lambda c}$$

cognito autem hoc angulo  $\Phi$  reliqua momenta erunt

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m) \sin. \Phi; \quad \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m) \cos. \Phi \text{ et}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{k k}$$

vbi notetur, numerum  $\lambda$  esse quasi infinitum, propterea, quod  $\lambda = \frac{m}{s}$  et  $s$  per hypothesin quantitas infinite parua.

20. Quoniam igitur angulus  $\Phi$  est quam minimus, erit

$$\sin. \Phi = \Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2\lambda c} \mp \frac{\delta m}{\lambda c} \text{ et } \cos. \Phi = 1,$$

hinc ergo finito conflictu globi B celeritas in directione AX reperietur

$$\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(n \pm \delta m)^2 \pi}{2 \lambda c} \pm \frac{\delta m (n \pm \delta m)}{\lambda c} = \frac{n \pm \delta m}{2 \lambda c} \left( -\frac{(n \pm \delta m) \pi}{2} \pm 2 \delta m \right)$$

$$= -\frac{(n \pm \delta m)}{2 \lambda c} (n \pi \pm \delta m (\pi - 2))$$

et celeritas in directione X B

$$\frac{dy}{dt} = n \pm \delta m,$$

tum vero celeritas angularis in sensum C G H

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{k k}$$

vnde intelligitur, primam celeritatem secundum A X quasi evanescere, celeritatem autem angularem, quae ante conflictum erat  $\gamma$ , nunc mutari in  $\gamma \pm \frac{\delta m b}{k k}$  et globo motum secundum X B relinqui, cuius celeritas fit  $= n \pm \delta m$ , vbi notandum, signum  $\pm$  valere,

*Casu primo*, quo est

$$a \alpha > \frac{b d^2}{d t} + (c - s) \frac{d \phi}{d t}; \text{ ideoque}$$

$$a \alpha > b \gamma + \frac{\delta m b^2}{k k} + n \pm \delta m, \text{ ita vt si fuerit}$$

$$a \alpha > b \gamma + \frac{\delta m b^2}{k k} + n \pm \delta m,$$

tum celeritas globi post conflictum in directione X B futura fit  $n \pm \delta m$ ,

*Casu secundo*, quo est

$$a \alpha = b \gamma - \frac{\delta m b^2}{k k} + n$$

ista celeritas euadet  $= n$ .

*Tertio vero casu* quo

$$a \alpha < b \gamma - \frac{\delta m b^2}{k k} + n - \delta m$$

celeritas ista fiet  $n - \delta m$ .

De altero genere globorum perfecte elasticorum.

21. Si ambo globi fuerint perfecte elastici, conflictus non finitur, vbi impressio facta est maxima, sed



sed quia haec ipsa impressio iterum restituitur, tum demum conflictus cessat, cum de novo evaserit  $s = 0$ , ita ut tam in fine quam initio conflictus habeamus  $s = 0$ , utroque ergo casu quoque erit  $S = 0$ , atque adeo etiam  $\int S ds = 0$ . Neque tamen hinc sequitur motum post conflictum eundem fore, qui erat ante, ubi nunc ostendemus.

22. Quoniam enim invenimus:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = (mm - \frac{1}{B} \int S ds),$$

hincque

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(mm - \frac{1}{B} \int S ds)},$$

ex hac forma perspicuum est post initium conflictus quamdiu impressio augetur, siue formula  $\frac{ds}{dt}$  positivum obtinet valorem, tum formulae huic radicali signum + tribui debere; at quando iam fit restitutio, siue impressio iterum diminuitur, tum ob  $\frac{ds}{dt}$  negativum, formulam illam radicalem quoque negative capi oportebit, ideoque quum in fine conflictus fiat

$$\int S ds = 0, \text{ tum erit } \frac{ds}{dt} = -m.$$

Quum igitur post conflictum in nostris formulis supra inventis expressio

$$\sqrt{(mm - \frac{1}{B} \int S ds)}$$

vbique fiat  $= -m$ , illae formulae sequenti modo se habebunt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = m \pm 2\delta m; \quad \Phi = \frac{(v \pm \delta m)t}{\gamma}; \quad \frac{d^2}{dt^2} = \gamma \pm \frac{2\delta m b}{kk};$$

ex

ex quibus colligimus ambas celeritates post conflictum

$$\frac{dx}{dt} = m \cos. \Phi - (n \pm 2 \delta m) \sin. \Phi \text{ et}$$

$$\frac{dy}{dt} = m \sin. \Phi + (n \pm 2 \delta m) \cos. \Phi.$$

23. Quia autem corpora admodum dura assumimus, etiam totum tempus conflictus  $t$  pro evanescente haberi poterit, ex quo simul angulus  $\Phi$  evanescet, ita ut sit

$$\sin. \Phi = 0 \text{ et } \cos. \Phi = 1,$$

quo circa post conflictum celeritas globi B secundum directionem

$$A X \text{ erit } \frac{dx}{dt} = m,$$

celeritas vero secundum

$$A B \frac{dy}{dt} = n \pm 2 \delta m,$$

tum vero celeritas gyratoria in sensum

$$C G H \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2 \delta m b}{k k},$$

vbi ratione celeritatis  $\frac{dy}{dt}$  notari oportet, signorum ambiguum superius valere, si fuerit

$$a a > \frac{b d \xi}{dt} + n + 2 \delta m > b \gamma + \frac{2 \delta m b^2}{k k} + n + 2 \delta m$$

inferius vero, quando fuerit

$$a a < \frac{b d \xi}{dt} + n - 2 \delta m < b \gamma - \frac{2 \delta m b^2}{k k} + n - 2 \delta m$$

at vero casu quo

$$a a = \frac{b d \xi}{dt} + n = b \gamma + n,$$

tum celeritas illa  $\frac{dy}{dt}$  erit  $= n$ .

24. Caeterum probe hic est animaduertendum, solutionem hanc locum habere non posse, nisi ambo corpora fuerint maxime dura, ita vt tam ipsa impressio  $s$ , quam angulus  $\Phi$  pro quantitibus euanescentibus haberi queant, vnde nisi tanta durties in vtroque corpore insit, mirari non debemus, si hae determinationes e veritate recesserint. Quod autem hoc problema tantis difficultatibus fuerit in volutum, causa sine dubio in hoc est sita, quod globum A, vi quadam aliena perpetuo in eodem motus statu conseruari supposuimus, ad quod quumvis admodum irregularis requiratur, mirum non est hanc ipsam irregularitatem in nostram solutionem esse ingressam, vnde sequentis Problematis solutionem faciliorem sperare poterimus.

## Problema II.

Si duo corpora sphaerica super plano horizontali vtcunque mota, atque insuper motu gyrationis circa axem verticalem praedita, in se mutuo incurrant, inuestigare motus mutationem, quam haec corpora durante conflictu, sibi mutuo inducent.

## Solutio.

25. Moueantur igitur centra vtriusque globi in eodem plano tabulae et motus gyrationis vtriusque fiat circa axem ad hoc planum normalem, hoc enim modo eueniet, vt dum in se mutuo impingunt contactus semper in eodem plano fiat, et per  
mutuam

mutuam actionem neque motus de hoc plano deturbetur, neque positio axium varietur.

26. Post conflictus initium elapso tempore  $t''$ , reperiantur centra utriusque globi in punctis M et N, ponaturque massa prioris  $= M$  eius radius  $= a$  et momentum inertiae respectu axis gyrationis  $= \alpha M a a$ ; alterius vero globi massa fit  $= N$ , radius  $= b$  et momentum inertiae  $= \beta N b b$ ; ubi notandum, si ambo globi ex materia homogenea constent, fore  $\alpha = \beta = \frac{2}{5}$ . Posita porro summa radiorum  $a + b = c$ , nunc interuallum centrorum M N ob impressiones sibi mutuo inductas aliquanto minus erit quam  $c$ , ponatur igitur distantia M N  $= c - s$ , sitque vis, qua iam se mutuo urgent,  $= S$ , quam uti functionem ipsius  $s$  spectare licet, quae euanescat facto  $s = 0$ , hac igitur vi S globus M sollicitabitur in directione T M alter vero globus in directione T N existente T puncto contactus, per quod ducta sit recta  $t T \theta$ , tangens communis ad rectam M N normalis.

27. Sumta iam recta fixa A B loco axis, ad quam ex centris M et N demittantur perpendiculara M P et N Q vocenturque coordinatae

A P  $= x$ ; P M  $= y$  et A Q  $= x'$  et Q N  $= y'$ , tum vero ponatur angulus, quo recta M N ad istum axem inclinatur  $= \Phi$  eritque manifesto

$$x' = x + (c - s) \cos. \Phi \quad \text{et} \quad y' = y + (c - s) \sin. \Phi.$$

28. His positis pro temporis momento proposito  $t$  motus progressius globi M ita erit comparatus,

tus, vt eius celeritas secundum A P futura sit  $\frac{dx}{dt}$  et secundum P M  $\frac{dy}{dt}$ ; alterius vero globi N celeritas secundum A Q  $\frac{dx'}{dt}$  et secundum Q N  $\frac{dy'}{dt}$ ; vbi obseruandum est fore

$$dx'' = dx - ds \cos. \Phi - (c-s) d\Phi \sin. \Phi \text{ et}$$

$$dy'' = dy - ds \sin. \Phi + (c-s) d\Phi \cos. \Phi \text{ vnde fit}$$

$$dx'' \cos. \Phi + dy'' \sin. \Phi = dx \cos. \Phi + dy \sin. \Phi - ds \text{ et}$$

$$dx'' \sin. \Phi - dy'' \cos. \Phi = dx \sin. \Phi - dy \cos. \Phi - (c-s) d\Phi.$$

Pro motu autem gyatorio et eodem temporis momento gyretur globus M ita, vt eius punctum T moueatur secundum directionem Tz celeritate angulari  $\frac{d\zeta}{dt}$ , alterius vero globi punctum T secundum eandem directionem Tz celeritate angulari  $\frac{d\eta}{dt}$ ; vnde sequitur, si vtriusque globi centrum quiesceret, veram celeritatem puncti T quatenus ad globum M pertinet fore  $= MT \cdot \frac{d\zeta}{dt}$ , quatenus autem idem T pertinet ad alterum globum N, eius celeritatem fore  $= NT \cdot \frac{d\eta}{dt}$ ; verum quia semper impressionem s vt valde exiguam spectare licet, hinc tuto ponere poterimus  $MT = a$  et  $NT = b$ .

29. Quoniam vero etiam centra globorum mouentur, eorum motus insuper ad istos motus puncti T accedet. Hinc autem per resolutionem eam tantum partem adiciamus, quae etiam secundum directionem Tz sit directa, dum altera pars incidit in directionem MN, et in impressionem factam

Etiam redundet. Hinc autem pro globo M vera celeritas puncti T secundum directionem T t erit

$$= \frac{a d \xi}{dt} - \frac{d x}{dt} \sin. \Phi + \frac{d y}{dt} \cos. \Phi.$$

In altero vero globo N vera celeritas puncti T, secundum directionem T t erit

$$= \frac{b d \eta}{dt} - \frac{d x'}{dt} \sin. \Phi + \frac{d y'}{dt} \cos. \Phi = \frac{b d \eta}{dt} - \frac{d x}{dt} \sin. \Phi + \frac{d y}{dt} \cos. \Phi + \frac{(c-s) d \Phi}{dt}.$$

30. Hanc utramque autem celeritatem ideo definire necesse est, ut iudicare possimus, utrum in ipso contactu attritus hincque frictio eueniat nec ne? perspicuum autem est, si ambae illae celeritates inter se fuerint aequales, nullum plane dari attritum, neque propterea ob hanc causam motum globorum affici. Hic ergo casus locum habet, quando fuerit

$$\frac{a d \xi}{dt} = \frac{b d \eta}{dt} + (c-s) \frac{d \Phi}{dt}$$

vel  $\frac{a d \xi}{dt} - \frac{b d \eta}{dt} = (c-s) \frac{d \Phi}{dt},$

quem casum *primum* constituamus. *Secundus* autem casus locum habeat, quando celeritas prior maior est posteriore, quod euenit si fuerit

$$\frac{a d \xi}{dt} - \frac{b d \eta}{dt} > (c-s) \frac{d \Phi}{dt},$$

hoc casu, quia celeritas globi M maior est quam globi N, huius punctum T abripietur ideoque accelerabitur secundum directionem T t, contra vero ob reactionem motus gyriorius prioris M retardabitur. *Tertius* vero casus statuatur, si fuerit

$$\frac{a d \xi}{dt} - \frac{b d \eta}{dt} < (c-s) \frac{d \Phi}{dt},$$

atque hoc casu motus gyratorius prioris globi M accelerabitur, alterius vero retardabitur.

31. Constat autem frictionem semper proportionalem esse adpressioni mutuae, quae hic est ipsa vis  $= S$ , unde ponamus frictionem inde natam  $= \delta S$ , atque casu *secundo* globus M praeter vim ante memoratam, etiam sollicitabitur secundum directionem  $t \theta$  vi  $= \delta S$ , alterum vero globum N praeterea sustinere etiam vim  $= \delta S$  secundum directionem  $T t$ . Calculum autem tantum ad hunc casum secundum accommodabimus, quoniam is facillime ad casum *tertium* transferri poterit, sumendo tantum litteram  $\delta$  negativae; quin etiam pro primo valebit sumto  $\delta = 0$ .

32. Nunc demum accelerationes utriusque motus definire poterimus, quum enim globus M a duabus viribus sollicitetur altera  $= S$  in directione  $T M$ , altera vero  $\delta S$  in directione  $T \theta$ , ex his deducetur pro-

directione  $A P$  vis  $= -S \cos. \Phi + \delta S \sin. \Phi$  et pro directione  $P M$  vis  $= -S \sin. \Phi - \delta S \cos. \Phi$ .

Pro altero vero globo elicimus

vim sec.  $A Q = +S \cos. \Phi - \delta S \sin. \Phi$  et

vim sec.  $Q N = +S \sin. \Phi + \delta S \cos. \Phi$

quae vires ad motum progressivum referuntur, pro motu vero gyratorio globi M vis  $T \theta = \delta S$  praebet momentum retardans  $\delta a S$ , globi vero N vis  $T t = \delta S$  praebet momentum accelerans  $\delta b S$ .

33. His viribus inuentis, pro motu progressiuo globi M has duas adipiscimur aequationes:

$$\text{I. } \frac{M d d x}{2 g d t^2} = - S \text{ cof. } \Phi + \delta S \text{ fin. } \Phi;$$

$$\text{II. } \frac{M d d y}{2 g d t^2} = - S \text{ fin. } \Phi - \delta S \text{ cof. } \Phi$$

pro motu progressiuo autem globi N has:

$$\text{III. } \frac{N d d x'}{2 g d t^2} = S \text{ cof. } \Phi - \delta S \text{ fin. } \Phi;$$

$$\text{IV. } \frac{N d d y'}{2 g d t^2} = S \text{ fin. } \Phi - \delta S \text{ cof. } \Phi;$$

denique pro motu gyatorio globorum M et N nanciscimur adhuc has duas aequationes:

$$\text{V. } \frac{\alpha M a a d d \xi}{2 g d t^2} = - \delta a S; \text{ VI. } \frac{\beta N b b d d \eta}{2 g d t^2} = + \delta b S.$$

Has aequationes inspicienti statim patet primam et tertiam iunctim sumtam dare:

$$M d d x + N d d x' = 0;$$

similique modo secundam et quartam coniunctim dare

$$M d d y + N d d y' = 0,$$

atque hinc statim deducimus integrando:

$$M d x + N d x' = A d t; \text{ et } M d y + N d y' = B d t$$

vbi A et B sunt constantes per integrationem ingressae, quas adeo ulterius integrantes, consequimur

$$M x + N x' = A t + \text{II}; \text{ et } M y + N y' = B t + \text{III}$$

quibus formulis promotio vniformis centri inertiae communis, vel etiam conseruatio quantitatis motus indicatur. Eodem autem modo aequatio quinta et sexta iunctim praebent:

*a M a*



$$\alpha M a d d \zeta + \beta N b d d \eta = 0$$

ideoque

$$\alpha M a \frac{d \zeta}{d t} + \beta N b \frac{d \eta}{d t} = \text{Const.},$$

vnde intelligitur, dum motus gyriorius vnus globi vel augetur vel minuitur, tum motum gyriorium alterius vice versa vel diminui vel augeri.

34. Si hos valores pro  $x$  et  $x'$  inuentos, in formulis supra datis (§. 27.) substituamus, reperiemus.

$$x = \frac{A t + U - N(c-s) \cos. \Phi}{M+N}; \quad x' = \frac{A t + U + M(c-s) \cos. \Phi}{M+N}$$

$$\text{et } y = \frac{B t + V - N(c-s) \sin. \Phi}{M+N}; \quad y' = \frac{B t + V + M(c-s) \sin. \Phi}{M+N}$$

ex his colligimus differentiando

$$d x = \frac{A d t + N d s \cos. \Phi + N(c-s) d \Phi \sin. \Phi}{M+N}$$

$$\text{et } d y = \frac{B d t + N d s \sin. \Phi - N(c-s) d \Phi \cos. \Phi}{M+N}$$

denuoque differentiando

$$d d x = \frac{N d d s \cos. \Phi - 2 N d s d \Phi \sin. \Phi + N(c-s) d d \Phi \sin. \Phi + N(c-s) d \Phi^2 \cos. \Phi}{M+N}$$

$$d d y = \frac{N d d s \sin. \Phi + 2 N d s d \Phi \cos. \Phi - N(c-s) d d \Phi \cos. \Phi + N(c-s) d \Phi^2 \sin. \Phi}{M+N}$$

inuentis autem  $x$  et  $y$  sponte patent  $x'$  et  $y'$ .

35. Ex his vltimis formulis secundi gradus, elicimus binas sequentes concinniores

$$d d x \cos. \Phi + d d y \sin. \Phi = \frac{N d d s + N(c-s) d \Phi^2}{M+N} \text{ et}$$

$$d d x \sin. \Phi - d d y \cos. \Phi = \frac{2 N d s d \Phi + N(c-s) d d \Phi}{M+N}$$

vero ex formulis principalibus I et II. §. 32.

adipi-

adipiscimur

$$\frac{M(d d x \cos. \Phi + d d y \sin. \Phi)}{2 g d t^2} = - S$$

et  $\frac{M(d d x \sin. \Phi - d d y \cos. \Phi)}{2 g d t^2} = + \delta S,$

atque hinc duas sequentes aequationes finales

$$d d s + (c - s) d \Phi^2 = - \frac{2 g (M + N) S d t^2}{M - N} \text{ et}$$

$$(c - s) d d \Phi - 2 d s d \Phi = + \frac{2 g \delta (M + N) S d t^2}{M \cdot N},$$

ex quibus binas variables  $s$  et  $\Phi$  ad quoduis tempus definiti oportet, siue quod perinde est, quantitates  $t$  et  $\Phi$  per variabilem  $s$ , cuius functio est  $S$ , exprimantur. Ponamus autem breuitatis gratia

$$\frac{2 g (M + N) S}{M N} = \Sigma \text{ vt habeamus:}$$

$$d d s + (c - s) d \Phi^2 = - \Sigma d t^2; \text{ et } (c - s) d d \Phi - 2 d s d \Phi = + \delta \Sigma d t^2$$

hae ergo aequationes omnino similes sunt iis, ad quas praecedens problema perduximus, ideoque eas etiam ad differentialia primi gradus tantum reducere liceret, uti supra fecimus §. 10., quoniam autem haec reductio nihil plane subsidii ad nostrum institutum adfert, aliud remedium nobis relinqui non videtur, nisi ut hic etiam ambos globos valde duros statuamus, ut quantitates  $s$  et  $\Phi$  tuto tamquam minimas spectare eaque membra, in quibus eae ad plures quam vnam dimensionem ascendunt, reiicere queamus, quemadmodum etiam in superiori problemate fecimus. Hoc autem modo nostra tractatio non adeo limitari est censenda, quoniam omnia, quae adhuc de collisione corporum sunt prolata, eidem

hypothefi inaituntur, quod corpora collidentia sint duriffima.

36. Sint igitur ambo noftri globi duriffimi et quia ambas quantitates  $s$  et  $\Phi$  tamquam euaneſcentes ſpectare licet, ſiquidem axis  $AB$  ita ducatur, vt in initio conflictus per amborum globorum centra tranſeat, ita vt poſitio axis  $AB$  non amplius ſit arbitraria; noſtrae duae aequationes ſequentes formas induent

$$dds = -\sum dt^2 \text{ et } c d d \Phi = \delta \sum dt^2$$

quarum illa vti ſupra integrata praebet

$$\frac{ds^2}{dt^2} = D - 2f \sum ds \text{ hincque } \frac{ds}{dt} = V(D - 2f \sum ds)$$

$$\text{et } dt = \frac{ds}{V(D - 2f \sum ds)},$$

quam valorem ſi in altera aequatione ſubſtituamus, prodibit haec aequatio

$$\frac{c d d \Phi}{dt} = \delta \sum dt = \frac{\delta \sum ds}{V(D - 2f \sum ds)}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{c d \Phi}{dt} = E - \delta V(D - 2f \sum ds).$$

Atque ſimili modo pro motu gyatorio ob

$$\frac{d d \zeta}{dt} = - \frac{\delta N \sum dt}{\alpha a(M+N)} = - \frac{\delta N \sum ds}{\alpha a(M+N) V(D - 2f \sum ds)}$$

$$\text{et } \frac{d d \eta}{dt} = + \frac{\delta M \sum dt}{\beta b(M+N)} = \frac{\delta M \sum ds}{\beta b(M+N) V(D - 2f \sum ds)}$$

per integrationem obtinetur

$$\frac{d \zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)} V(D - 2f \sum ds) \text{ et}$$

$$\frac{d \eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b(M+N)} V(D - 2f \sum ds).$$

37. Quo omnes istas constantes integratione ingressas rite definiamus, contemplemur statum initialem, quo erat  $t = 0$  hincque etiam  $s = 0$ , atque adeo  $\int \Sigma ds = 0$  et pro globo M sumamus eius celeritatem fuisse secundum  $AP = p$  et secundum  $PM = m$ , eiusque celeritatem angularem in sensum  $Tt = \mu$ , pro altero globo N fuisse celeritatem in directione  $AQ = q$  et in directione  $QN = n$ , celeritatem vero angularem in  $Tt = \nu$ , ita ut initio fuerit

$$\frac{dx}{dt} = p; \frac{dy}{dt} = m; \text{ et } \frac{d\xi}{dt} = \mu,$$

tum vero etiam

$$\frac{dx'}{dt} = q; \frac{dy'}{dt} = n; \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

38. Si hos valores pro statu initiali in superioribus aequationibus substituamus: ex §. 33. erit ob cos.  $\Phi = 1$  et sin.  $\Phi = 0$

$$\frac{dx}{dt} = p = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N} \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N} \frac{cd\Phi}{dt}$$

$$\text{deinde ex §. 28. } \frac{dx'}{dt} = q = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = p - \frac{ds}{dt} \quad \text{et}$$

$$\frac{dy'}{dt} = n = \frac{dy}{dt} + \frac{cd\Phi}{dt} = m + \frac{cd\Phi}{dt}$$

unde immediate colligimus pro initio

$$\frac{ds}{dt} = p - q \quad \text{et} \quad \frac{cd\Phi}{dt} = n - m;$$

hincque porro

$$A = Mp + Nq \quad \text{et} \quad B = Mm + Nn,$$

reliquae vero constantes hinc ita determinabuntur:

$$Pp = 2$$

$$D =$$

$$D = (p-q)^2; \quad E = n - m + \delta(p-q); \quad F = \mu - \frac{\delta M(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et  $G = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$

39. Definitis his constantibus durante ipsa conflictu ad tempus  $t$  colligamus aequationes inuentas et habebimus:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds}; \quad \frac{e d\Phi}{dt} = n - m + \delta(p-q) - \delta \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)} ((p-q) - \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds}), \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M}{\beta b(M+N)} (p-q - \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds})$$

vnde deducuntur ipsae celeritates progressivae

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N} \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds} \left. \vphantom{\frac{dx}{dt}} \right\} \text{ pro globo M}$$

$$\frac{dy}{dt} = s - \frac{\delta N}{M+N} (p-q - \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds}) \left. \vphantom{\frac{dy}{dt}} \right\}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N} \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds} \left. \vphantom{\frac{dx'}{dt}} \right\} \text{ pro globo N.}$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M}{M+N} (p-q - \sqrt{(p-q)^2 - 2f \sum ds}) \left. \vphantom{\frac{dy'}{dt}} \right\}$$

Applicatio ad corpora omnis elateris expertia.

40. Si ambo globi omni elasticitate careant, iam supra obseruauimus, conflictum terminari, vbi impressio facta est maxima seu  $\frac{ds}{dt} = 0$ , quare infine conflictus erit  $2f \sum ds = (p-q)^2$ , ideoque pro hoc momento habebimus praeter  $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{e d\Phi}{dt} = n - m + \sqrt{(p-q)}$$

deinde vero celeritates progressivas post conflictum.

Pro

Pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p - q)}{M + N}$$

Pro globo N vero

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p - q)}{M + N}$$

celeritates autem gyratorias in sensum  $Tt$  vtrinque

$$\text{pro globo M, } \frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)},$$

$$\text{pro globo N, } \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p - q)}{\beta b'(M + N)}$$

41. Antequam autem hinc vllas conclusiones Primus  
Casus. deducere liceat, diligenter dispiciendum est, sub quibusnam conditionibus quilibet casuum supra constitutorum locum habeat; quod iudicium seorsim tam pro initio conflictus, quam pro fine institui debet. Ex allatis autem ibi criteriis, patet *primum* casum quo  $\delta = 0$  pro initio conflictus locum esse habiturum, si fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m$$

pro fine autem conflictus si fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

quae duae conditiones quum inter se conueniant, patet, primum casum per totum conflictum valere, si modo initio valuerit. Pro hoc ergo *primo* casu si fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

post conflictum singula motus elementa ita se habebunt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

Vnde intelligitur post conflictum vtrumque globum secundum directionem axis A B eadem celeritate progredi, at secundum directionem ad A B normalem, vtrumque globum eam celeritatem, quam ante habebat, conservare; quia etiam vterque pristinum motum gyratorium retinebit.

II. Casus. 42. *Secundus* autem casus, quo  $\delta$  habet valorem positivum, pro conflictus initio locum habebit, si fuerit

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

at vero pro fine conflictus si fuerit

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha(M+N)} - \frac{\delta M(p-q)}{\beta(M+N)} > n - m + \delta(p-q) \text{ seu}$$

$$a\mu - b\nu > n - m + \delta(p-q) \left( 1 + \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha\beta(M+N)} \right) > n - m$$

$$+ \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quare dummodo posterior conditio locum habeat, casus secundus per totum conflictum vigebit, motusque post conflictum sequenti modo se habebit:

Si conditio

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M + N}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha\beta(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M + N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta\alpha(M+N)}$$

43. Vt porro casus tertius, quo  $\delta$  sumi de- III. Casus.  
bet negatiue, locum habeat, pro initio conflictus  
haec conditio requiritur:

$$a\mu - b\nu < n - m, \text{ pro fine vero conflictus haec}$$

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quae posterior conditio priorem iam inuoluit, vnde  
casus tertius per totum conflictum vigeat, si fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

tum autem post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N}; \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N}; \frac{d\xi}{dt} = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N}; \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta M(p+q)}{M+N} \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\alpha(M+N)}$$

44. His autem tribus casibus solutio problema-  
tis nequitiam exhauritur, supersunt enim adhuc duo  
casus maxime memorabiles, alter quo

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

alter vero quo

$$a\mu - b\nu = n - m - k \text{ existente}$$

$$k < \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ita tamen, vt sit  $k > 0$ , priori enim casu in ipso  
conflictus initio  $\delta$  habeat valorem positium, sed  
durante conflictu frictio subito cessabit, ita vt dein-  
ceps vsque ad finem conflictus statui debeat  $\delta = 0$ ,  
id quod etiam de altero casu est intelligendum, hoc  
tantum discrimine, quod ab initio  $\delta$  habeat valo-  
rem negatiuum. Quemadmodum igitur his casibus

vtrius-



utriusque globi motus post conflictum se sit habiturus, quaestio haud parum est ardua, quum intervallum conflictus in duas partes dividi debeat, quae continuitatis lege destituuntur, sequenti autem modo hos casus prorsus singulares expedire poterimus.

45. Durante igitur conflictu id temporis punctum inuestigari debet, quo frictio primùm evanescere incipit, id quod euenit vbi fit

$$\frac{a d \xi}{d t} - \frac{b d \eta}{d t} = \frac{c d \phi}{d t}$$

ex formulis autem §. 38. inuentis, haec conditio praebet

$$a \mu - b \nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha \beta(M + N)} (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s}) \\ = n - m + \delta (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s})$$

sive

$$a \mu - b \nu = n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)(p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s})}{\alpha \beta(M + N)}$$

ponamus hic breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)}{\alpha \beta(M + N)} = \Delta$$

vt fiat

$$a \mu - b \nu = n - m + \Delta (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s})$$

et quia per hypothesin est

$$a \mu - b \nu = n - m + k,$$

hinc habebimus

$$k = \Delta (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s}),$$

quare pro hoc momento temporis colligimus

$$p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s} = \frac{k}{\Delta} \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma d s} = p - q - \frac{k}{\Delta}$$

46. Pro hoc iam temporis momento inuesti-  
gemus vtriusque globi motum, et habebimus, pro  
motu globi M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N(p - q)}{M + N} - \frac{kN}{\Delta(M + N)}$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{ds}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha \beta \Delta(M + N)}$$

pro motu globi N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta \delta \Delta(M + N)}$$

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$\frac{cd\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}.$$

47. Hae ergo celeritates modo inuentae lo-  
cum habent in fine prioris partis collisionis, ideo-  
que tamquam celeritates initiales pro parte collifio-  
nis posteriori sunt spectandae, hanc igitur partem  
inuestigaturi, resumamus formulas integrales pri-  
mum inuentas, in quibus adhuc constantes indeter-  
minatae, A, B, C etc. insunt, easque nunc ita de-  
finiamus, vt pro initio huius temporis, quo est

$$\sqrt{(p - q)^2 - 2 \int \Sigma ds} = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

celeritates eae ipsae prodeant, quas modo inuenimus,  
vbi notari oportet, pro hac temporis parte sumi de-  
bere  $\delta = 0$ , hae autem formulae nunc ita se ha-  
bebunt

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta}; \quad \frac{cd\Phi}{dt} = E \quad \text{hincque}$$

istae constantes ita determinantur

Tom. XVII. Nou. Comm.

Qq

E = s

$$E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}; \quad A = Mp + Nq;$$

$$B = Mm + Nn; \quad F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

$$G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$$

48. Nunc demum ad finem partis posterioris temporis progredi licet, pro quo quum sit

$$2 \int \Sigma ds = (p - q)^2, \text{ siue}$$

$$V((p - q)^2 - 2 \int \Sigma ds) = 0,$$

eadem formulae generales ad hunc flatum accommodatae pro fine conflictus dabunt:

$$\frac{ds}{dt} = 0; \quad \frac{cd\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

et pro globo priori M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}; \quad \frac{dz}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}; \quad \frac{dz'}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$$

Quae formulae si fuerit  $k = 0$ , congruunt cum casu primo; at si fiat  $k = \Delta(p - q)$ , eae cum casu secundo conueniunt, prorsus yti natura rei postulat.

49. At si fuerit  $a\mu - b\nu = n - m - k$  ratiocinium simili modo institui deberet, verum facile intelligitur inde pro fine conflictus sequentes formulas esse prodituras

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}; \quad \frac{dz}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}; \quad \frac{dz'}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$$

vbi

vbi iterum notasse iuuabit, hunc casum in primum recidere, si  $k = 0$ , in tertium vero si  $k = \Delta(p - q)$ . Sicque tota haec determinatio quinque casibus comprehendi debet.

### Applicatio ad corpora elastica.

50. Quando ambo globi sunt perfecte elastici, conflictus ante non finitur, quam impressio facta iterum ad nihilum redigatur, ita vt in fine conflictus denuo fiat  $s = 0$  atque etiam  $\int \Sigma ds = 0$ . Verum formula radicalis

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p - q)^2 - 2 \int \Sigma ds)}$$

quam diu impressio augetur, positium fortitur valorem, negatiuum vero, dum restitutio absoluitur, siquidem priori casu  $\frac{ds}{dt}$  positium, altero vero negatiuum induit valorem. Quocirca in fine conflictus erit haec formula radicalis  $= -(p - q)$ .

51. Quodsi ergo hunc valorem vbique substituiamus, pro fine conflictus habebimus primo

$$\frac{dx}{dt} = -(p - q) \text{ et } \frac{cd\Phi}{dt} = n - m + 2\delta(p - q)$$

deinde pro globo M reperiemus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{N(p - q)}{M + N}; \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p - q)}{M + N}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{M(p - q)}{M + N}; \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p - q)}{M + N}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

52. Hic autem imprimis ratione litterae  $\delta$  animaduertendum est, eam habere valorem positivum, quamdiu fuerit

$$\frac{a \, d \, \xi}{d \, s} - \frac{b \, d \, \eta}{d \, t} > \frac{c \, d \, \Phi}{d \, r}$$

sive substitutis valoribus

$$a \mu - b \nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha \beta (M + N)} (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2f \Sigma ds}) \\ > n - m + \delta (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2f \Sigma ds}), \text{ sive} \\ a \mu - b \nu > n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)}{\alpha \beta (M + N)} (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2f \Sigma ds})$$

vnde iam intelligitur litteram  $\delta$  negativae capi debere, quando fuerit

$$a \mu - b \nu < n - m - \frac{\delta(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)}{\alpha \beta (M + N)} (p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2f \Sigma ds})$$

at vero quando fit

$$a \mu - b \nu = n - m,$$

tum litteram  $\delta$  in nihilum abire. Vnde ut ante tres casus resultant, quorum *primus* fit vbi  $\delta = 0$ , *secundus* vbi  $\delta$  habet valorem positivum, *tertius* vero vbi negativum.

53. Incipiamus a casu primo, quo  $\delta = 0$  atque is in initio conflictus locum habebit, quoties fuerit

$$a \mu - b \nu = n - m,$$

in fine vero conflictus quando etiam fuerit

$$a \mu - b \nu = n - m$$

ex quo intelligitur, si hic casus in initio conflictus locum habeat, tum eum per totum conflictum esse duraturum; quare hinc sequentes determinationes deducimus: Si

Si fuerit  $a\mu - b\nu = n - m$  erit

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Ng}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \frac{dz}{dt} = \mu$$

pro globo vero N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2Mp + (N-M)g}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \frac{dz'}{dt} = \nu$$

54. Consideremus nunc casum secundum, quo  $\delta$  est positivum, atque ut is iam initio confictus eueniat oportet esse

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

verum ut etiam in fine locum habeat, debet esse

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)};$$

vnde quum semper sit  $p > q$ ; conditio posterior priorem in se continet, ideoque casus secundus per totum confictum subsistit, vnde hae sequuntur determinationes:

$$\text{Si fuerit } a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

tum erit pro globo M;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Ng}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N} \text{ et}$$

$$\frac{dz}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha\beta(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)g + 2Mp}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{dz'}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta\alpha(M+N)}$$

55. Casus denique tertius tam in initio, quam in fine adhuc vigeat, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

Qq 3

ac

ac tum in superioribus formulis  $\delta$  negative capi debet, unde sequentes determinaciones adipiscimur:

$$\text{Si fuerit } a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha\alpha(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

56. Vt nunc etiam in casus hinc exclusos inquiramus, qui contingunt quando fuerit:

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

dum scilicet  $k$  inter limites 0 et

$$\frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

continetur; ante omnia formulas integrales supra inventas in genere sumtas, neque ad certum statum initialem accommodatas ob oculos ponamus:

$$\text{ob } \frac{ds}{dt} = \sqrt{D - 2f\sum ds}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N} \sqrt{D - 2f\sum ds}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N} (E - \delta \sqrt{D - 2f\sum ds})$$

$$\frac{d\xi}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)} \sqrt{D - 2f\sum ds}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{M+N} - \frac{M}{M+N} \sqrt{D - 2f\sum ds}; \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{B}{M+N} + \frac{M}{M+N} (E - \delta \sqrt{D - 2f\sum ds})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b(M+N)} \sqrt{D - 2f\sum ds}$$

57. Quodsi hae formulae ad statum nostrum initialem referantur, quo est

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dt} = m, \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{dt} = q, \quad \frac{dy'}{dt} = n \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu,$$

constantes nostrae sequenti modo determinabuntur:

$$A = Mp + Nq; \quad \sqrt{D} = p - q; \quad B = Mm + Nn;$$

$$E = n - m + \delta(p - q); \quad F = \mu - \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}; \quad G = \nu + \frac{\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

qui sunt ipsi valores iam ante inuenti.

His ita praeparatis aggrediamur casum, quo

$$a\mu - b\nu = n - m + k, \quad \text{existente}$$

$$k < 2\delta \frac{(p - q)(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)}{\alpha\beta(M + N)},$$

atque iam vidimus in ipso initio casum secundum  $\delta > 0$  valere, dehinc vero tantum ad certum quendam terminum continuari, quem reperiemus pro hoc loco, posito vt ante breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta + 1)M + \beta(\alpha + 1)N)}{\alpha\beta(M + N)} = \Delta;$$

$$p - q - \sqrt{(p - q)^2 - 2\int \Sigma ds} = \frac{k}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{(p - q)^2 - 2\int \Sigma ds} = p - q - \frac{k}{\Delta};$$

vnde pro hoc momento valor  $\int \Sigma ds$  determinatur, nobis autem sufficit valorem formulae huius radicalis nosse. Atque hinc pro hoc termino habebimus istas determinationes:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M + N)};$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)}$$

scilicet



scilicet quoniam totum conflictus tempus in duas partes diuidi debet, hae celeritates locum habent in fine partis prioris, quae ergo eadem locum quoque habebunt in initio secundae partis, ubi erit  $\delta = 0$ .

58. Nunc motum per secundam partem investigemus, pro qua celeritates modo inuentae statum initialem constituunt, quam ob causam nunc uti debemus formulis generalibus §. 55. allatis, quoniam autem pro initio huius partis est

$$V(D - 2 \int \Sigma ds) = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

hoc valore posito ipsae illae celeritates prodire debent, vnde nascuntur sequentes aequationes

$$\text{I. } \frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right) = \frac{A}{M + N} + \frac{N}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right)$$

$$\text{II. } \frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right) = \frac{A}{M + N} - \frac{M}{M + N} \left( p - q - \frac{k}{\Delta} \right)$$

$$\text{III. } \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)} = \frac{B}{M + N} - \frac{NE}{M + N}$$

$$\text{IV. } \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)} = \frac{B}{M + N} + \frac{ME}{M + N}$$

$$\text{V. } \frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha \Delta(M + N)} = F; \quad \text{VI. } \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta \Delta(M + N)} = G$$

ex priore et secunda sequitur

$$A = Mp + Nq,$$

quia D manet vt ante  $= (p - q)^2$ , deinde ex tertia et quarta

$$B = Mm + Nn \quad \text{et} \quad E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

at ex quinta et sexta litterae F et G immediate dantur

$$F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha \Delta(M + N)}; \quad G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta \Delta(M + N)}$$

59. Quodsi hos valores constantium introduca-  
mus, formulae §. 55. generales exhibebunt motum  
corporum per partem posteriorem temporis, vbi  
 $\delta = 0$ . Atque hinc pro fine huius partis adeoque  
totius conflictus statui debet

$$V(D - 2 \int \Sigma ds) = -(p - q),$$

vnde consequimur sequentes determinationes:

Si fuerit  $a\mu - b\nu = n - m + k$  existente

$$k < 2 \Delta (p - q)$$

tum post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Ng}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha \Delta(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)p + 2Mg}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta \Delta(M+N)}$$

60. Hinc iam sponte casus adhuc residuus re-  
soluitur in hunc modum:

Si fuerit  $a\mu - b\nu = n - m - k$ , existente

$$k < 2 \Delta (p - q)$$

post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Ng}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha \Delta(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)p + 2Mg}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta \Delta(M+N)}$$

### 314 DE COLLISIONE CORPOR. GYRANTIVM.

vbi manifestum est, si fuerit  $k = 0$ , ambos hos casus ad casum primum reuocari, at si fuerit

$$k = 2 \Delta (p - q),$$

tum casus penultimus reuoluitur ad casum secundum, vltimus autem ad casum tertium, ita vt nusquam saltus occurrat.