

DE COLLISIONE  
CORPORVM PENDVLORVM,  
TAM OBLIQA, QVAM MOTV GYRATORIO  
PERTVRBATA.

Auctore

L. E V L E R O.

I.

Quae in differtatione praecedente sunt determi-  
nata, egregie per motum pendulorum illustra-  
ri atque experimentis comprobari possunt. Si enim  
duo globi M et N ita filorum ope ex punctis A  
et B suspendantur, vt dum fila situm verticalem  
tenent, globi se mutuo contingant, atque recta M N  
per eorum centra transiens fiat horizontalis; tum  
omnes illae collisiones, quas ante definiuimus, facili  
mechanismo produci possunt. Si enim ambo globi  
in eodem plano verticali, in quo fila A M et B N  
versantur, de situ naturali deducantur, indeque su-  
bito dimittantur, vt simul ad statum naturalem per-  
ueniant, tum conflictus orietur directus, cuius  
phoenomena iam pridem sunt explorata atque per  
huiusmodi experimenda comprobata. Si autem glo-  
bi in diuersis planis verticalibus deducantur iterum-  
que ita dimittantur, vt simul ad statum naturalem  
pertingant, tum conflictus eueniet obliquus, de quo  
etiam

Tab. IV.  
Fig. 3.

etiam nunc regulae certae nusquam reperiuntur traditae, semper autem in ipso collisionis momento, non solum recta  $MN$  sed etiam directio vtriusque motus erit horizontalis, omnino vti in superiori dissertatione assumimus.

2. Hoc autem modo non solum vtrique globo celeritates quaecunque, quibus conflictus inchoetur, imprimi possunt, sed etiam fila contorquendo vtrique motus gyratorius quicunque induci poterit, qui quum semper circa axem, quem ipsum filum exhibet fiat, etiam in conflictu axis vtriusque gyrationis erit verticalis, prorsus vti in superiori scripto assumimus, quin etiam durante conflictu, circa hos axes in globis motus gyratorius generari poterit, ita vt hoc modo non solum omnia, quae de collisione obliqua inuestigauimus, experimentis confirmari, sed globis insuper motus gyratorius imprimi possit, de quo motu nihil adhuc ab iis, qui de collisione corporum tractauerunt, accurate est definitum.

3. Neque etiam absolute opus est, vt ambo corpora sint globi, sed ad institutum nostrum sufficit, vt sint eiusmodi corpora rotunda, quorum axes incidant in ipsa fila suspensionis, tum vero etiam necesse est, vt eorum circuli maximi, quibus se mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis

Tab. IV. transeant. Sint igitur centra haec in punctis  $M$  et  $N$  et vocemus pro priore radium circuli illius maximi  $MC = a$ , alterius vero globi  $N$  radium  $NC = b$ , praeterea vero pondus illius siue massa statuatur

$$= M.$$

$= M$ , huius vero  $= N$ , praeterea autem pro motu gyrationis, sit prioris corporis  $M$  momentum inertiae respectu axis  $MA = \alpha M a a$ , alterius vero corporis  $N$  respectu axis  $NB = \beta N b b$ , vbi per nota praecepta, pro data vtriusque corporis figura, numeri  $\alpha$  et  $\beta$  inueniri possunt.

4. Ut nunc statum motus vtriusque corporis ante conflictum accurate describamus, repraesentent circuli  $AaC$  et  $BbC$  circulos illos maximos in plano horizontali, quibus corpora se in puncto  $C$  contingunt, ita ut sit  $MC = a$  et  $NC = b$ , hunc enim situm concipiamus in ipso collisionis initio tenere, quo ambo centra peruenerint secundum directiones  $\mu M$  et  $\nu N$ ; ex quorum motuum resolutione nascatur pro corpore  $M$  celeritas secundum  $p M = p$  et secundum  $n M = m$ , pro altero vero corpore  $N$ , celeritas secundum  $q N = q$  et secundum  $n N = n$ , praeterea vero corpus  $M$  gyretur in sensum  $CaA$ , celeritate angulari  $= \mu$ , alterum vero  $N$  in sensum  $CbB$  celeritate  $= \nu$ , ita ut pro illo celeritas puncti  $C = a \mu$ , pro hoc vero celeritas puncti  $C = b \nu$ , hisque elementis vtriusque corporis motus ante conflictum erit definitus.

5. Hic ante omnia notandum est, ut figura initium conflictus repraesentet, interuallum centrorum  $MN$  minus esse debere, quam instanti praecedente, vbi haec distantia erat  $\mu \nu$ , siue rectam  $\mu \nu$  maiorem esse debere, quam  $MN$ , hoc autem euenire nequit, nisi sit interuallum  $p q > MN$  siue nisi

fit  $M p > N q$ , siue  $p - q > 0$ , semper autem figuram ita repraesentare licet, vt fiat  $p$  quantitas positua, tum ergo vel  $q$  debet esse quantitas negatiua, vel si sit positua, debet esse  $q < p$ , quod ad reliquas quantitates attinet  $m, n, \mu$  et  $\nu$ ; eae censendae sunt posituae, si earum directiones cum figura conueniant, secus eae sumendae sunt negatiuae, quae quidem per se satis sunt perspicuae.

6. His circa statum corporum ante conflictum definitis, pro eorum statu post conflictum ponamus celeritates secundum easdem directiones sumtas, primo quidem pro corpore M:

celer. centri sec.  $p M = p'$ ; sec.  $m M = m'$  et angularem in sensum  $C a A = \mu'$

pro altero autem corpore N, sit

celerit. centri sec.  $q N = n'$  et angularis in sensum  $C b B = \nu'$

ficque nunc totum negotium eo redit, vt ex datis celeritatibus ante conflictum, quae sunt  $p, q, m, n, \mu, \nu$  definiantur celeritates post conflictum, quae sunt  $p', q', m', n', \mu', \nu'$ , cognitis scilicet, quae initio iam indicauimus, massis corporum M et N, porro radiis  $a$  et  $b$  ac denique etiam momenti inertiae  $\alpha M a a$  et  $\beta M b b$ .

7. Antequam autem statum corporum post conflictum definire liceat, nonnulla momenta sunt probe perpendenda. Primo enim, quum nulla collisio

lifo obliqua euenire queat, nisi in contactu corporum attritus contingat, frictionis ratio omnino haberi debet, quoniam igitur frictio certae parti cuius adpressionis mutuae aequalis cenferi solet, quae per vulgo siue  $\frac{1}{2}$  siue  $\frac{1}{4}$ , siue etiam minor aestimatur, prouti corpora fuerint magis minusue leuigata, loco huius fractionis hic in genere littera  $\delta$  utamur, ita vt vis qua ambo corpora sibi mutuo adprimuntur per  $\delta$  multiplicata exhibeat quantitatem frictionis. Deinde vero imprimis dispiciendum est, utrum ambo corpora sint elastica nec ne, et quum infiniti dentur gradus elasticitatis, hic duo praecipua corporum genera primum sumus contemplaturi. Primo scilicet loco corpora omni elasticitate destituta considerabimus, deinde vero eiusmodi corpora, quae perfecte sint elastica, seu in quibus impressiones inter conflictum inductae perfecte restituantur. De utroque autem genere tenendum est, impressiones sibi mutuo factas, quam minimas esse debere, quia alioquin regulae, quas sumus daturi ob figuram mutatam non amplius locum habere possent, vnde corpora molliora hinc excludi oportet. Denique quo sequentes calculi fiant faciliores breuitatis gratia loco formulae

$$\delta \frac{\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N}{\alpha\beta(M+N)},$$

scribamus simpliciter  $\Delta$ ; ita vt fieret  $\Delta = 0$ , si frictio euanesceret.

### L Collisio corporum omnis elateris expertium.

8. Hic ante omnia has duas formulas probe perpendi oportet,  $m + a\mu$  et  $n + b\nu$ , quarum illa indicat veram celeritatem puncti C quatenus ad corpus prius M pertinet, secundum directionem CD, normalem ad axem MN, haec vero indicat celeritatem eiusdem puncti C quatenus ad alterum corpus pertinet in eadem directione CD, prout enim haec duae formulae inter se fuerint vel aequales, casus collisionis sollicite distingui oportet, atque insuper casus inaequalitatis, duplici modo considerari debent, prouti differentia istarum formularum, fuerit vel minor vel maior, quam haec formula  $\Delta(p - q)$ , vnde cum ipsa differentia illa possit esse vel positiva vel negativa, hinc quinque casus nascuntur, secundum quos collisionis praecepta exhiberi oportet.

#### Casus Primus.

quo  $m + a\mu = n + b\nu$ .

9. Hoc casu post collisionem habebimus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; m' = m; \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; n' = n; \nu' = \nu.$$

#### Casus Secundus.

quo  $m + a\mu > n + b\nu$  et  $m + a\mu < n + b\nu + \Delta(p - q)$ ,  
ponatur ergo  $m + a\mu = n + b\nu + \gamma \Delta(p - q)$

ita

ita vt fit  $\gamma$  certa fractio vnitate minor.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; m' = m - \frac{\delta \gamma N(p - q)}{M + N}; \mu' = \mu - \frac{\gamma \delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N:

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; n' = n + \frac{\gamma \delta M(p - q)}{M + N}; \nu' = \nu + \frac{\gamma \delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

### Casus Tertius.

quo  $m + a\mu > n + b\nu + \Delta(p - q)$ .

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; m' = m - \frac{\delta N(p - q)}{M + N}; \mu' = \mu - \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; n' = n + \frac{\delta M(p - q)}{M + N}; \nu' = \nu + \frac{\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

### Casus Quartus.

quo  $n + b\nu > m + a\mu$ , at  $n + b\nu < m + a\mu + \Delta(p - q)$ ,

ponatur  $n + b\nu = m + a\mu + \gamma \Delta(p - q)$ ,

ita vt fit  $\gamma$  fractio vnitate minor.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; m' = m + \frac{\gamma \delta N(p - q)}{M + N}; \mu' = \mu + \frac{\gamma \delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; n' = n - \frac{\gamma \delta M(p - q)}{M + N}; \nu' = \nu - \frac{\gamma \delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

## Casus Quintus.

pro  $n + bv \geq m + a\mu + \Delta(p - q)$ .

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{M p + N q}{M + N}; \quad m' = m + \frac{\delta N (p - q)}{M + N}; \quad \mu' = \mu + \frac{\delta N (p - q)}{a (M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{M p + N q}{M + N}; \quad n' = n - \frac{\delta M (p - q)}{M + N}; \quad v' = v - \frac{\delta M (p - q)}{\beta b (M + N)}$$

10. Quemadmodum in primo casu est:

$$m + a\mu = n + b v,$$

ita si fuerit

$$m + a\mu > n + b v,$$

tum vel casus secundus vel tertius locum habet, ita ut casus secundus medium quoddam teneat inter primum et tertium, atque si sit  $\gamma = 0$  in primum recidat, si autem sit  $\gamma = 1$ , in tertium. Simili modo tam pro quarto, quam pro quinto casu est

$$n + b v \geq m + a\mu$$

et casus quartus certum tenet medium inter primum et quintum, ita ut si sit  $\gamma = 0$ , in primum, si autem sit  $\gamma = 1$  in quintum cadat. Praeterea etiam manifestum est, si frictio penitus euanelceret, tum omnes hos quinque casus prorsus inter se convenire, atque ad solum primum reduci, ita ut omnis diversitas horum casuum soli frictioni sit tribuenda. Quodsi ergo nulla esset frictio seu  $\delta = 0$ , in collisione tantum celeritates secundum directionem



nem ictus A B mutationem paterentur, celeritates vero laterales secundum directiones  $m$  M et  $n$  N prorsus immutatae relinquerentur, quin etiam motus gyratorius vtriusque corporis neququam per conflictum afficeretur. Huc autem redeunt omnia ea, quae ante de collisione corporum obliqua sunt tradita, ex quo omnes mutationes, quae hic occurrunt, a sola frictione originem ducunt.

11. Quodsi iam nostros quinque casus perpendamus, statim apparet, frictionem in celeritates  $p$  et  $q$ , quae in directione conflictus A B sunt constitutae, plane non influere, pro omnibus enim casibus semper est

$$p' = q' = \frac{M p + N q}{M + N},$$

ita vt secundum hanc directionem ambo corpora post conflictum communi motu progrediantur, cuius celeritas communi corporum centro grauitatis conueniat.

12. Quod deinde ad celeritates laterales attinet, quae ante conflictum sunt  $m$  et  $n$ , post conflictum vero  $m'$  et  $n'$ ; manifestum est pro omnibus casibus fore

$$M m' + N n' = M m + N n$$

sive etiam in his celeritatibus quantitatem motus conseruari. Porro vero circa motus gyratorios perpetuo haec proprietas subsistet

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

S s 2

quae

quae aequatio quodammodo conseruationem motus gyrorii continere est censenda. Denique vero etiam haec conditio in omnibus casibus locum inuenit, ut sit

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu \text{ siue } m' - m = \alpha a (\mu' - \mu)$$

$$\text{atque } n' - \beta b \nu' = n - \beta b \nu \text{ seu } n' - n = \beta b (\nu' - \nu).$$

13. Ut aliquod exemplum notatu dignum adferamus, ponamus massam corporis N esse quasi infinitam eiusque centrum ante conflictum quiescere ita, ut sit  $q = 0$  et  $n = 0$ , motum autem eius gyrorium celeritate angulari  $\nu$  exhiberi, tum vero alterum corpus M in id directe incurrat secundum directionem AB celeritate  $= p$ , celeritas autem tam lateralis  $m$ , quam gyroria  $\mu$  euanescat, hoc posito quum sit

$$m + a \mu = 0 \text{ et } n + b \nu = b \nu$$

euidens est, hanc quaestionem vel ad casum quartum vel quintum referendam esse, scilicet ad quartum casum pertinebit, si ob

$$\Delta = \delta \frac{(\alpha + 1)}{\alpha} \text{ fuerit } b \nu < \frac{\delta (\alpha + 1) p}{\alpha} < (1 + \frac{1}{\alpha}) \delta p$$

sin autem sit

$$b \nu > (1 + \frac{1}{\alpha}) \delta p,$$

tum ad quintum casum pertinebit. Pro casu quarto quum sit

$$\gamma = \frac{\alpha b \nu}{(\alpha + 1) \delta p}$$

post conflictum habebimus

$$p' = 0; m' = \frac{\alpha b \nu}{\alpha + 1}; \text{ et } \mu' = \frac{b \nu}{(\alpha + 1) \alpha}$$

tum

tum vero

$$q^i = 0; \quad n^i = 0 \quad \text{et} \quad v^i = v$$

verum si casus quintus locum habeat, post conflictum erit pro corpore M

$$p^i = 0; \quad m^i = \delta p \quad \text{et} \quad \mu^i = \frac{\delta p}{\alpha a}$$

## II. Collisio corporum perfecte elasticorum.

14. Totum iudicium hic iterum exordendum est a formalis  $m + a\mu$  et  $n + bv$ , vtrum eae sint aequales an inaequales, hocque casu vtra maior vel minor? tum vero differentiam comparari oportet, cum formula  $2\Delta(p - q)$ , an ea maior sit minorue, unde simili modo quinque casus diuersi euoluendi occurrunt.

### Casus Primus.

$$\text{quo } m + a\mu = n + bv.$$

Pro hoc casu habebimus post collisionem

$$\text{pro corpore M} \\ p^i = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m^i = m; \quad \mu^i = \mu$$

$$\text{pro corpore vero N} \\ q^i = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n^i = n; \quad v^i = v.$$

### Casus Secundus.

quo  $m + a\mu > n + bv$  at  $\mu + a\mu < n + bv + 2\Delta(p - q)$  ponatur ergo  $m + a\mu = n + bv + 2\gamma\Delta(p - q)$ , ita vt  $\gamma$  sit fractio vnitatis minor.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}$$

$$m' = m - \frac{2\gamma\delta N(p-q)}{M+N}; \mu' = \mu - \frac{2\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}$$

$$n' = n + \frac{2\gamma\delta M(p-q)}{M+N}; \text{ et } \nu' = \nu + \frac{2\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

Casus tertius.

quo  $m + a\mu > n + b\nu + 2\Delta(p-q)$ .

Pro hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; m' = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; n' = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N};$$

$$\text{et } \nu' = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

Casus Quartus.

quo  $n + b\nu > m + a\mu$  at  $n + b\nu < m + a\mu + 2\Delta(p-q)$

ponatur ergo  $n + b\nu = m + a\mu + 2\gamma\Delta(p-q)$ ,

ita ut sit  $\gamma$  fractio unitate minor.

Hoc ergo casu post collisionem habebimus:

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; m' = m + \frac{2\gamma\delta N(p-q)}{M+N}; \mu' = \mu + \frac{2\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; n' = n - \frac{2\gamma\delta M(p-q)}{M+N}; \nu' = \nu - \frac{2\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

Casus

## Casus Quintus.

quo  $n + b v > m + a \mu + 2 \Delta (p - q)$ .

Pro hoc ergo casu, post collisionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Np}{M+N}; \quad m' = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \mu' = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{aa(M+N)}$$

et pro corpore N

$$q' = \frac{(N-M)p + 2Mq}{M+N}; \quad n' = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad v' = v - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

15. Hic iterum vt supra imprimis animadverti conuenit, si omnis frictio euanuerit, ob  $\delta = 0$ , omnes hos quinque casus ad perfectum consensum reduci, ita vt celeritates post conflictum eisdem valores obtineant, qui in casu primo sunt expressi, quae determinationes conueniunt cum iis, quae vulgo ex sola motus resolutione pro collisione obliqua huiusmodi corporum deduci solent, omnis igitur diuersitas in nostris casibus a sola frictione proficiscitur.

16. In omnibus his quinque casibus, celeritates secundum directionem conflictus A B, quae sunt  $p'$  et  $q'$ , prorsus inter se conueniunt, iisque propterea nulla mutatio ob frictionem infertur. Circa has celeritates autem imprimis notasse iuuabit fore

$$M p' + N q' = M p + N q,$$

prorsus vti conseruatio motus postulat. Praeterea vero notatu dignum hic occurrit esse semper

$$q' - p' = p - q,$$

ex quibus duabus proprietatibus colligitur haec maxime memorabilis, quod fit

$$M p' p' + N q' q' = M p^2 + N q^2 \quad \text{qua}$$

qua conseruatio virium viuarum continetur, si enim ad quadratum prioris aequationis quadratum alterius in  $MN$  ductum addatur et summa per  $M+N$  diuidatur, haec ipsa formula resultat.

17. Quod vero ad celeritates  $m'$  et  $n'$  attinet, omnes casus in hoc conueniunt, vt fit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

qua conseruatio motus indicatur, hoc autem loco circa vires viuas nihil concluditur: Etsi enim ex primo casu oritur

$$M m' m' + N n' n' = M m m + N n n,$$

tamen ex reliquis longe alius valor eruitur, ita vt hic vires viuae locum non habeant.

18. Ratione motus gyratorii autem, omnes quinque casus in hoc conueniunt, quod fit

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

deinde vero si iste motus cum laterali conferatur, omnibus casibus sequentes quoque proprietates conueniunt:

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu, \text{ siue } m' - m = \alpha a (\mu' - \mu)$$

$$\text{et } n' - n = \beta b (\nu' - \nu).$$

19. Exempli loco, statuamus iterum corporis  $N$  massam quasi infinitam, cuius centrum ante conflictum quieuerit, solo motu gyratorio ei relicto celeritate angulari  $= \nu$ , pro altero autem corpore  $M$  ante conflictum fuerit  $m = 0$  et  $\mu = 0$ , quibus positis habebimus casum quartum, ob  $q = 0$  et  $n = 0$ , si fuerit

$$b \nu < 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \delta p, \text{ quo casu erit } \gamma \delta = \frac{\alpha b \nu}{2(\alpha + 1) p}$$

at,

at si fuerit

$$b v < 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \delta p,$$

tunc casus quintus locum habet, consequenter pro casu quarto corpus M post collisionem his feretur celeritatibus

$$p' = -p; m' = + \frac{a b v}{a + 1}; \mu' = \frac{b v}{(a + 1) a}$$

pro casu autem quinto, hae celeritates erunt

$$p' = -p; m' = 2 \delta p; \mu' = \frac{2 \delta p}{a a}$$

alterum autem corpus N, motum suum conferuat.

### III. Collisio corporum non perfecte elasticorum.

20. Ex binis praecedentibus corporum generibus facile possumus deducere, regulas pro collisione corporum non perfecte elasticorum, in quibus scilicet impressiones sibi inuicem inductae non penitus restituuntur. Quoniam igitur tantum ex parte restituuntur, denotet littera  $\epsilon$  eam partem, quae actu restituitur, ita vt si fuerit  $\epsilon = 0$ , corpora omni elasticitate destituantur, si autem sit  $\epsilon = 1$ , corpora habeantur perfecte elastica, vnde intelligitur fractionem  $\epsilon$  gradum elasticitatis commode exprimere, quo posito si ante conflictum omnia manent eadem, vt supra sunt constituta, regulae collisionis per quinque casus distributae sequenti modo se habebunt.

#### Casus Primus.

$$\text{quo } m + a \mu = n + b v.$$

Tom. XVII. Nou. Comm.

T t

Hoc

Hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \epsilon N(p - q)}{M + N}; m' = m; \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \epsilon M(p - q)}{M + N}; n' = n \text{ et } \nu' = \nu.$$

Casus Secundus.

quo  $m + a\mu > n + b\nu$  et  $m + a\mu < n + b\nu + (1 + \epsilon)\Delta(p - q)$   
ponatur ergo  $m + a\mu = n + b\nu + \gamma(1 + \epsilon)\Delta(p - q)$   
ita, vt  $\gamma$  sit fractio vnitatis minor.

Pro hoc ergo casu, post collisionem habebimus

$$p' = \frac{Mp + Nq - \epsilon N(p - q)}{M + N}; m' = m - (1 + \epsilon)\frac{\gamma \delta N(p - q)}{M + N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{(1 + \epsilon)\gamma \delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \epsilon M(p - q)}{M + N}; n' = n + (1 + \epsilon)\frac{\gamma \delta M(p - q)}{M + N}$$

$$\nu' = \nu + (1 + \epsilon)\gamma \delta \frac{M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

Casus Tertius.

quo  $m + a\mu > n + b\nu + (1 + \epsilon)\Delta(p - q)$ .

Pro hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \epsilon N(p - q)}{M - N}; m' = m - (1 + \epsilon)\delta \frac{N(p - q)}{M + N}$$

$$\mu' = \mu - (1 + \epsilon)\delta \frac{N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \epsilon M(p - q)}{M + N}; n' = n + (1 + \epsilon)\delta \frac{M(p - q)}{M + N}$$

$$\nu' = \nu + (1 + \epsilon)\delta \frac{M(p - q)}{\beta b(M + N)}$$

Casus



## Casus Quartus.

quo  $n+bv > m+a\mu$ , at  $n+bv < m+a\mu+(1+\epsilon)\Delta(p-q)$ ;  
ponatur ergo  $n+bv = m+a\mu+(1+\epsilon)\gamma\Delta(p-q)$ ,  
ita vt fit  $\gamma$  fractio vnitatis minor.

Hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \epsilon N(p-q)}{M+N}; \quad m' = m + (1+\epsilon)\gamma\delta \cdot \frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu + (1+\epsilon)\gamma\delta \cdot \frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \epsilon M(p-q)}{M+N}; \quad n' = n - (1+\epsilon)\gamma\delta \cdot \frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$v' = v - (1+\epsilon)\gamma\delta \cdot \frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

## Casus Quintus.

quo  $n+bv > a\mu + (1+\epsilon)\Delta(p-q)$

Pro hoc casu post collisionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \epsilon N(p-q)}{M+N}; \quad m' = m + (1+\epsilon)\delta \cdot \frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu + (1+\epsilon)\delta \cdot \frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \epsilon M(p-q)}{M+N}; \quad n' = n - (1+\epsilon)\delta \cdot \frac{M(p-q)}{M+N};$$

$$v' = v - (1+\epsilon)\delta \cdot \frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

21. Hic iterum ambae celeritates  $p'$  et  $q'$  per omnes quinque casus eisdem retinent valores, atque etiam nunc quantitas motus eadem conseruatur, quum fit

T t 2

M p

$$M p' + N q' = M p + N q.$$

Quod autem ad vires viuas attinet, quoniam hic fit

$$q' - p' = \varepsilon (p - q),$$

si ad quadratum illius aequationis addamus huius quadratum per  $MN$  multiplicatum, et per  $M+N$ , diuidamus, resultat sequens aequatio:

$$M p' p' + N q' q' = M p p + N q q - (1 - \varepsilon \varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p - q)^2$$

ex qua patet, summam virium viuarum post collisionem semper minorem esse, quam ante, nisi fit  $\varepsilon = 1$  et iacturam aequari

$$= (1 - \varepsilon \varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p - q)^2.$$

22. Praeterea pro omnibus quinque casibus iterum erit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

tum vero etiam

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

denique etiam hae proprietates omnibus sunt communes, vt fit

$$m' - m = \alpha a (\mu' - \mu) \text{ et } n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$$

atque adeo hae proprietates semper valent, siue corpora sint elastica, siue secus, quoniam in his formulis non solum littera  $\delta$ , sed etiam littera  $\varepsilon$  ex calculo est egressa.