DE VERA TAVTOCHRONA IN FLVIDO.

Auctore

L. EVLERO.

Quae hactenus de tautochronis in medio refiftente ingenti ftudio funt prolata, non tam ob vfum practicum omni laude digna funt aeftimanda, fed vires ingenii, quibus fcientia plurimum locupletari folet, non mediocriter exercuerunt. Primum enim in rerum natura vix alia refiftentiae lex reperitur, nifi quae quadrato velocitatis fit proportionalis; tum vero etiam in hac ipfa refiftentiae hypothefi curua tautochrona a Geometris affignata nullum plane vfum in praxi habere poteft; propterea quod afcenfus et defcenfus corporis peculiares et diuerfas curuas ad tautochronismum requirunt; etiamfi enim hae duae curuae coniungantur et ofcillationes in curua defcenfuum incipientes aequalibus abfoluantur temporibus; tamen ofcillationes fequentes, quae in tautochrona afcenfus effent incepturae, tautochronismi proprietate erunt deftitutae. Quemadmodum autem huic incommodo occurri poffet, in opere meo mechanico fummo ftudio inueftigaui, neque tamen optatum fcopum mihi attingere licuit, nifi eo cafu, quo refiftentia fuerit quam minima;

neque vero quisquam ab eo tempore feliciori ſucceſſu in hoc negotio elaborauiſſe videtur. Ob tantas igitur difficultates operae pretium erit, praecipua momenta, quibus haec inueſtigatio innititur, perſpicue expoſuiſſe, cum nullum ſit dubium, quin analyſis inſignia incrementa ſit acceptura, ſi cui arduum hoc negotium expedire contigerit. Fundamentum huius inueſtigationis ſine dubio ex eo problemate repeti oportet, quo pro data curua quacunque, ſuper qua corpus deſcenſus ſuos abſoluat, inveni curuam iungendam aſcenſui deſtinatam, ita, vt quilibet deſcenſus cum aſcenſu ſequente dato tempore abſoluatur. Nunc enim totum negotium eo reducitur, vt caſus quaeratur, quo curua aſcenſus ipſi curuae deſcenſus ſimilis euadat et aequalis; ſic enim omnes plane oſcillationes ſiue in hac ſiue in altera curua incipiant, neceſſario erunt iſochronae; atque hanc demum curuam licebit veram tautochronam in fluido adpellari. Quomodo igitur huius quaeſtionis ſolutionem tentari conueniat, hic adcuratius ſum examinaturus.

Tab. IV. Fig. 5. §. 1. Repraeſentetur igitur iſta curua in figura annexa, quae circa axem verticalem OA duos ramos habeat ſimiles et aequales O E et O e et ſumamus corpus ex E deſcenſum inchoaſſe, in altero autem ramo iterum aſcendere vsque ad e, ita, vt tempus totius oſcillationis per arcum E O e ſemper eiusdem quantitatis eſſe debeat, vbicunque deſcenſus inceperit.

§. 2.

§. 2. Iam vtrumque motum tam aſcenſus quam deſcenſus ſeorſim perpendamus ac primo quidem pro deſcenſu vocetur abſciſſa $Ox = x$ et arcus $OS = S$; celeritas autem in puncto S debita ſit altitudini V, ac principia motus hanc praebent aequationem

$$dV = -dX + cVdS$$

ſiue $dV - cVdS = -dX$

quae in e^{-cV} ducta et integrata dabit

$$e^{-cS}V = C - \int e^{-cS}dX$$

quod poſtremum integrale ita capiatur, vt in puncto infimo O, vbi et $x = 0$ et $S = 0$, euaneſcat; pro conſtante autem inuenta C ſtatuamus corporis celeritatem in puncto infimo O debitam eſſe altitudini k, factoque $S = 0$ et $V = k$, elicitur conſtans $C = k$, ſicque habebimus

$$V = e^{cS}(k - \int e^{-cS}dX).$$

§. 3. Eodem modo euoluamus motum aſcenſus, pro quo ſit abſciſſa $Ox = x$ et arcus $Os = s$ et altitudo celeritati in s debita $= v$; quo poſito aequatio motum exprimens erit

$$dv = -dx - cvds$$

ſiue $dv + cvds = -dx$

quae per e^{cs} multiplicata et integrata dat

$$e^{cs}v = C - \int e^{cs}dx$$

quod poſtremum integrale etiam euaneſcat in ipſo puncto O et quia hic altitudo celeritati debita etiamnum

iamnum est k, facto $s = o$ colligitur $C = k$, ita, vt sit pro ascensu

$$v = e^{-cs}(k - \int . e^{cs}\, dx).$$

§. 4. Definita vtraque celeritate consideremus etiam tempora, quibus arcus O S et O s absoluuntur et quia ipsae celeritates per $\sqrt{V}$ et $\sqrt{v}$ exprimuntur, erit pro descensu tempus per arcum O S

$$\int . \frac{dS}{\sqrt{(e^{cS}[k - \int . e^{-cS} dx])}} = \int . \frac{e^{-\frac{cS}{2}}\, dS}{\sqrt{(k - \int . e^{-cS}\, dx)}},$$

ita sumendum, vt euanescat, facto $S = o$. Pro ascensu autem erit simili modo tempus per O s

$$\int . \frac{e^{\frac{cs}{2}}\, ds}{\sqrt{(k - \int . e^{cs}\, dx)}},$$

quod integrale etiam in nihilum abire debet, facto $s = o$.

§. 5. Prior harum formularum integralium exprimet tempus totius descensus per arcum E O, si peracta integratione statuatur

$$\int . e^{-cS}\, dx = k;$$

tempus autem ascensus per totum arcum O e ex formula posteriore elicitur, si post integrationem fiat

$$\int . e^{cs}\, dx = k;$$

quocirca efficiendum est, vt haec duo tempora iunctim sumta quantitati constanti fiant aequalia; in quam autem neutiquam ingredi debet quantitas k, quippe

quippe quae pro diuerſis oſcillationibus diuerſos ſortitur valores.

§. 6. Quoniam hic binae variabiles X et x perinde ac S et s nullo modo a ſe inuicem pendent, quoniam in figura punctum s reſpectu S nulla relatione definitur, nobis liberum relinquitur, certam quandam relationem inter haec bina puncta s et S ſtabilire; ad noſtrum autem inſtitutum conuenit ſtatui

$$\int e^{-cS} d X = \int e^{cs} d x;$$

ſic enim tam in ipſo puncto O, vbi vtraque formula euaneſcit, quam pro terminis S et s, vbi vtraque formula fieri debet $= k$, conditio motus impletur. Denotemus autem hunc vtriusque formulae valorem littera $= z$ ſicque habebimus

$$d X = e^{cS} d z \text{ et } d x = e^{-cs} d z.$$

§. 7. Hoc facto tempus per vtrumque arcum OS et Os iunctim ſumtum erit

$$\int \frac{e^{-\frac{cS}{2}} d S}{\sqrt{(k-z)}} + \int \frac{e^{\frac{cs}{2}} d s}{\sqrt{(k-z)}} = \int \frac{e^{-\frac{cS}{2}} dS + e^{\frac{cs}{2}} d s}{\sqrt{(k-z)}},$$

cuius integralis valor ſumto $z = k$ debet eſſe quantitas conſtans, non pendens a k, quae proprietas cum huic formulae conueniat

$$\int \frac{\alpha\, d z}{\sqrt{(z(k-z))}}$$

quippe quae abit in $\alpha \pi$, quare ſi huic formulae noſtram aequalem ſtatuamus, adipiſcimur

$$e^{-\frac{cS}{2}} . d S + e^{\frac{cs}{2}} . d s = \frac{\alpha d z}{\sqrt{z}}$$

et integrando

$$-\frac{2}{c}e^{-\frac{cS}{2}}+\frac{2}{c}e^{\frac{cs}{2}}=2\alpha\sqrt{z}$$

vbi conſtante addenda non eſt opus, quia caſu, quo $S=0$ et $s=0$, ſponte fit $z=0$; ſicque obtinuimus hanc formulam ſatis concinnam

$$-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}.$$

§. 8. Conditiones igitur, quibus ſatisfieri oportere hactenus inuenimus, ſequentibus formulis continentur

I. $dX=e^{cS}dz$

II. $dx=e^{-cs}dz$

III. $-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}$

quibus facile infinitis modis ſatisfieri poteſt, atque adeo hinc clare intelligitur, quomodo ſi curua pro deſcenſu OE vtcunque fuerit data, inde curua pro aſcenſu Oe definiri poſſit; quod quidem problema in opere citato fuſius ſum perſecutus.

§. 9. Nunc autem potiſſimum praecipua conditio ad inſtitutum noſtrum pertinens eſt expendenda, qua poſtulatur, vt curua Oe prorſus ſimilis et aequalis prodeat curuae OE. Ad hoc autem neceſſe eſt, vt elementum dX eodem prorſus modo per arcum OS cum ſuo elemento dS determinetur, quo elementum dx per arcum reſpondentem Os cum ſuo elemento ds; ſcilicet ſi ſtatuamus

$dX=dS.\Delta:S$,

quoque

quoque esse debet

$$dx = ds.\Delta : s;$$

dum character Δ vtrinque denotat functionem eiusdem indolis. Hac ergo conditione principali introducta sequentibus aequationibus satisfieri oportebit:

$$\text{I.}\quad dS.\Delta : S = e^{cS}\,dz$$

$$\text{II.}\quad ds.\Delta : s = e^{-cs}\,dz$$

$$\text{III.}\quad -e^{-\frac{cS}{2}} + e^{\frac{cs}{2}} = \alpha c.\sqrt{z}.$$

His ergo tribus aequationibus solutio huius quaestionis difficillimae continetur, et Geometrae, qui hunc laborem suscipere voluerint, plurimum certe praestitisse erunt censendi, si his conditionibus satisfaciendi methodum inuenerint.

§. 10. Quo vim istarum formularum melius perspiciamus, consideremus casum, quo vel ipsum fluidum est rarissimum vel totus arcus vna oscillatione confectus quasi infinite paruus, quandoquidem motus ascensus et descensus inter se erunt similes et aequales, tum autem pro descensu erit:

$$1 - e^{-\frac{cS}{2}} = \tfrac{1}{2}\alpha c\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cs}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}\alpha c\sqrt{z}$$

hoc enim modo tertiae aequationi manifeste satisfit. Iam pro prima aequatione, quum sit

$$\sqrt{z} = \tfrac{2}{\alpha c}(1 - e^{-\frac{cS}{2}}) = a(1 - e^{-\frac{cS}{2}})$$

ponendo $\frac{2}{\alpha c} = a$, erit $z = aa(1 - 2e^{-\frac{cS}{2}} + e^{-cS})$

 et

et $dz = caadS(e^{-\frac{cS}{2}} - e^{-cS}) = e^{-cS}dX$,

ideoque habebitur $dX = aacdS(e^{+\frac{cS}{2}} - 1)$.

quae est aequatio pro arcu descensus. Pro ascensu autem quum sit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - 1) \text{ erit } z = aa(e^{+cs} - 2e^{+\frac{cs}{2}} + 1)$$

et $dz = aacds(e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) = e^{+cs}.dx$

ideoque $dx = aacds(1 - e^{-\frac{cs}{2}})$,

quae duae aequationes vtique conueniunt casu, quo vel S siue s, vel c est infinite paruum, tum enim fit

$$e^{+\frac{cS}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}cS \text{ et } 1 - e^{-\frac{cs}{2}} = +\tfrac{1}{2}cs,$$

ita vt oriatur:

$$dX = \frac{aacc}{2}SdS \text{ et } dx = \frac{aacc}{2}sds,$$

sicque vtraque aequatio eandem curuam exprimit.

§. 11. Generatim autem plurimum notasse iuvabit, binas aequationes inuentas lege continuitatis inter se cohaerere, si enim in priori loco S scribatur $-s$ et $+x$ loco X aequatio abit in hanc

$$dx = aacdS(1 - e^{-\frac{cs}{2}}),$$

quae est ipsa altera aequatio, vnde patet curuam ascensus reuera esse continuationem curuae descensus eademque aequatione exprimi, etiamsi ambo rami non

non fuerint inter ſe aequales. Hoc caſu perpenſo in genere colligimus ſtatui debere

$$y - e^{-\frac{cs}{2}} = \tfrac{1}{2}\alpha c \sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cs}{2}} - y = \tfrac{1}{2}\alpha c \sqrt{z}$$

ſic enim quoque tertiae noſtrae aequationi ſatisfit, et nunc bina tempora deſcenſus et aſcenſus non amplius ſunt aequalia. Tenendum autem eſt, quantitatem y pro puncto infimo O in vnitatem abire debere, quoniam hoc loco quantitas z euaneſcit, exponentialia autem abeunt in vnitatem. Hinc iam pro deſcenſu ob

$$\sqrt{z} = a(y - e^{-\frac{cs}{2}}) \text{ et } z = aa(y^2 - 2ye^{-\frac{cs}{2}} + e^{-cs}),$$

habebimus

$$dz = 2aady(y - e^{-\frac{cs}{2}}) + aacdS(ye^{-\frac{cs}{2}} - e^{-cs}) = e^{-cs}.dX,$$

vnde pro curua deducitur iſta aequatio

$$dX = 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) + aacdS(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1).$$

Eodem modo pro aſcenſu, quum ſit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - y)$$

ideoque

$$z = aa(e^{+cs} - 2ye^{+\frac{cs}{2}} + yy),$$

differentiando nanciſcimur

$$dz = aacds(e^{+cs} - ye^{+\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{+\frac{cs}{2}} - y) = e^{+cs}dx, \text{ vnde fit}$$

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs}),$$

 quae

quae aequatio ex praecedente resultat, si loco X scribatur x et $-s$ loco S dum quantitas y eundem retinet valorem, ex quo etiamnunc intelligimus curvam ascensus cum curua descensus esse continuam, dummodo y fuerit functio par ipsius S, quae scilicet eadem maneat, etiamsi arcus S negatiue capiatur.

§. 18. Nunc igitur quaestio huc redit, cuiusmodi functio par ipsius S pro y accipi debeat, vt aequatio pro ascensu inter x et s, cum aequatione inter X et S plane conueniat. Attendenti autem statim perspicuum erit, hoc euenire, si X aequetur functioni pari arcus S, vnde sequitur dX aequari elemento dS in functionem imparem ipsius S ducto. Hoc obseruato alterutram harum duarum aequationum considerasse sufficiet, quam ita comparatam esse oportet, vt si arcus S vel s negatiue accipiatur manente y inuariato, eadem aequatio resultare debeat, consideremus igitur aequationem posteriorem:

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs})$$

quae sumto s negatiue abit in hanc

$$dx = aacds(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}),$$

quae duae aequationes vt inter se congruant, necesse est, vt sit

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$
$$+ cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) - 2cds = 0$$

vbi

v'x singula membra inuoluunt functiones impares ipsius s, quandoquidem y est functio par. Nam quum sit per seriem

$$e^{+cs} = 1 + cs + \tfrac{1}{2}c^2 s^2 + \tfrac{1}{6}c^3 s^3 + \tfrac{1}{24}c^4 s^4 \text{ etc.}$$

et $e^{-cs} = 1 - cs + \tfrac{1}{2}c^2 s^2 - \tfrac{1}{6}c^3 s^3 + \tfrac{1}{24}c^4 s^4 - \tfrac{1}{120}c^5 s^5$ etc.

erit vtique

$$e^{+cs} - e^{-cs} = 2cs + \tfrac{2}{6}c^3 s^3 + \tfrac{2}{120}c^5 s^5 \text{ etc.}$$

quae manifesto est functio impar, quod etiam de

$$e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}$$

valet, simul autem hinc perspicitur formulam

$$e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}$$

fore functionem parem.

§. 13. Huc ergo ardua nostra quaestio est perducta, vt ex postrema illa aequatione valor quantitatis y eruatur, quippe quem iam nouimus fore functionem parem ipsius s. Ac primo quidem vt exponentialia elidamus, statuamus

$$e^{\frac{1}{2}cs} - e^{-\frac{1}{2}cs} = 2p,$$

ita vt p sit functio impar ipsius s, ac viciſſim s impar ipsius p, hinc autem elicimus:

$$e^{\frac{1}{2}cs} = \sqrt{(1+pp)} + p; \quad e^{-\frac{1}{2}cs} = \sqrt{(1+pp)} - p$$

$$e^{cs} = 1 + 2pp + 2p\sqrt{(1+pp)}; \quad e^{-cs} = 1 + 2pp - 2p\sqrt{(1+pp)}$$

et $c\,ds = \frac{2\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$;

his

his autem valoribus substitutis aequatio nostra induet hanc formam:

$$2ydy.\, p\sqrt{(1+pp)} - pdy + ydp - \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = 0.$$

§. 14. Vt hanc aequationem etiam ab irrationalibus liberemus, statuamus

$$y = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vbi r debet esse functio par ipsius p, vt sit

$$dy = \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{r\,p\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$$

et facta multiplicatione per $(1+pp)^{3:2}$ sequentem impetramus aequationem:

$$2rdrp(1+pp) - pdr(2+pp) - 2r^2p^2dp + rdp(1+2pp) - dp(1+pp) = 0.$$

Quia nouimus casu $p=0$ fieri debere $r=1$, statuamus $r = 1+q$, ita vt q sit functio par ipsius p euanescens casu $p=0$ atque hinc perueniemus ad istam aequationem:

$$2qdq.p(1+pp) + pdq(1+pp) - 2q^2p^2dp + qdp(1-2pp) - ppdp = 0.$$

Tentanti hinc facile patebit, pro littera q nullam potestatem simplicem ipsius p satisfacere posse, vnde concludere debemus, valorem ipsius q vix aliter nisi per seriem infinitam exprimi posse, quocirca ponamus:

$$q = Ap^2 + Bp^4 + Cp^6 + Dp^8 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{dq}{dp} = 2Ap + 4Bp^3 + 6Cp^5 + 8Dp^7 + \text{etc.}$$

porro

porro

$$q^2 = A^2 p^4 + 2ABp^6 + (2AC + B^2)p^8 + \text{etc.}$$

et

$$\frac{2q\,dq}{dp} = 4A^2p^3 + 12ABp^5 + 8(2AC + B^2)p^7 + \text{etc.}$$

qui valores ſubſtituantur vt ſequitur:

	p^2	p^4	p^6	p^8
$\frac{2q\,dq}{dp}p(1+pp) =$		$+4A^2$	$+12AB$ $+4A^2$	$+8(2AC+B^2)$ $+12AB$
$\frac{p\,dq}{dp}(1+pp) =$	$+2A$	$+4B$ $+2A$	$+6C$ $+4B$	$+8D$ $+6C$
$-2q^2p^2 =$			$-2A^2$	$-4AB$
$+q(1-2pp) =$	$+A$	$+B$ $-2A$	$+C$ $-2B$	$+D$ $-2C$
$-pp =$	-1			

§. 15. Singulas igitur columnas ad nihilum redigentes reperiemus ſequentes aequationes:

I. $3A - 1 = 0$; ſicque $A = \frac{1}{3}$

II. $4A^2 + 5B = 0$; et $B = -\frac{4A^2}{5} = -\frac{4}{5.9}$

III. $2A^2 + 12AB + 2B + 7C = 0$; hinc $C = +\frac{2}{45}$

IV. $16.AC + 8B^2 + 8AB + 4C + 9D = 0$; $D = -\frac{8.61}{9.45^2}$

ex quo valores ipſius q indeque ipſius r colligimus ſequentes:

$$r = 1 + \frac{1}{3}p^2 - \frac{4}{45}p^4 + \frac{2}{45}p^6 - \frac{8.61}{9.45^2}p^8 +$$

quo inuento habemus $y = \frac{r}{\surd(1+pp)}$, vbi recordemur eſſe

 $p =$

$$p=\frac{e^{\frac{cs}{2}}-e^{-\frac{cs}{2}}}{2} \text{ et } \sqrt{(1+pp)}=\frac{e^{\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}}{2},$$

ita vt nunc quantiras y nobis iam satis exacte sit explorata, quum enim in praxi nonnisi oscillationes satis paruae admitti soleant ideoque arcum s perpetuo tanquam satis paruum spectare liceat, valor inuentus vsque ad octauam potestatem ipsius s exactus, praxi omnino satisfaciens est censendus, quum sit

$$p=\tfrac{1}{2}cs+\frac{c^3s^3}{2.4.6}+\frac{c^5s^5}{2.4.6.8.10}+\frac{c^7s^7}{2.4\ldots\ldots14}\text{ etc.}$$

Supra autem vidimus, quemadmodum vicissim formulae arcum s inuoluentes per p determinentur, erat scilicet

$$e^{\frac{1}{2}cs}=\sqrt{(1+pp)}+p \text{ et } e^{-\frac{1}{2}cs}=\sqrt{(1+pp)}-p$$

$$e^{cs}=1+2pp+2p\sqrt{(1+pp)};\; e^{-cs}=1+2pp-2p\sqrt{(1+pp)}$$

$$s=\tfrac{2}{c}\,\mathrm{L}\sqrt{(1+pp)}+p \text{ et } cds=\frac{2dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

§. 16. Quodsi nunc quantitatem y pro cognita habeamus, videamus, quomodo ipsa aequatio tautochronae exprimatur, quoniam pro dx duplicem inuenimus aequationem

$$dx=aacds(1-y.e^{-\frac{cs}{2}})-2aady(e^{-\frac{cs}{2}}-y.e^{-cs})$$

$$dx=aacds(y.e^{+\frac{cs}{2}}-1)+2aady(y.e^{+cs}-e^{+\frac{cs}{2}})$$

quarum prior a posteriori subtracta nobis suppeditavit valorem ipsius y: nunc has duas aequationes inuicem addamus, vt prodeat

2dx

$$2dx = aa(2ydy.(e^{+cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}))$$
$$+ aacyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

quae aequatio, ſi loco s etiam noſtra variabilis p introducatur, fiet

$$2dx = aa(4ydy(1+2pp) - 4dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{4ypdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

ſiue

$$\frac{dx}{2a^2} = ydy(1+2p^2) - dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{ypdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

quae ergo eſt aequatio pro vera curua tautochrona, quam quaeſiuimus.

§. 17. Hoc modo problema noſtrum per approximationem reſoluimus, ſin autem vti in analyſi ſublimiori operationes algebrae communis pro conceſſis haberi ſolent, ita reſolutionem aequationum differentialium primi gradus nobis tamquam conceſſam ſpectare liceat, ſolutio noſtri problematis ita concinne expedietur. Quaeratur quantitas variabilis y, ex hac differentiali primi gradus:

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}})$$

$-2cds = 0$, integratione ita inſtituta, vt poſito $s = 0$, fiat $y = 1$, quo facto aequatio pro tautochrona quaeſita inter abſciſſam x et arcum s ita exprimetur:

$$bdx = 2ydy(e^{cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

vnde per operationes notiſſimas conſtructio curuae confici poterit.

§. 18. Haec ipſa autem ſolutio merito non parum ſuſpecta videri poteſt, quoniam ratiocinia, quibus innititur, plena perſpicuitate carent, quamobrem Geometrae eo magis ſunt excitandi, vt arduae huius quaeſtionis dignitate impulſi vires ſuas in eius ſolutione exercere velint; equidem lubens fateor me omnem hactenus operam in hoc negotio fruſtra conſumſiſſe, interim tamen ſolutio hic in medium allata, etiamſi ſit errorea, tamen ratione ipſius analyſeos attentione non indigna eſt viſa; caeterum hoc ipſum Problema in Mechanicae meae Volumine II^{do} pro caſu quo fluidum eſt rariſſimum, iam rite ſolutum dedi. Solutio autem ibi data ad praeſentes denominationes translata pro vera tautochrona hanc aequationem praebuerat:

$$dx = \alpha c\, ds\, (cs + \tfrac{1}{q} c^2 s^2),$$

quae ad vſum practicum prorſus eſt ſufficiens; quin etiam ſi fluidum non fuerit admodum rarum, dummodo oſcillationes admittantur ſatis paruae, eadem ſolutio valebit. Nihilo vero minus ſolutionem completam merito deſideramus.

DE