DE CHORDIS VIBRANTIBVS DISQVISITIO VLTERIOR.

Auctore

L. EVLERO.

Etsi in huiusmodi quaestionibus analyticis vix vllus locus controuersiis relinqui videtur; tamen, quia determinatio omnium motuum, quos chorda inter vibrandum recipere potest, nouum plane calculi genus requirit, cui Geometrae parum adhuc sunt assueti, mirum non est, quod solutio completa, quam iam olim ex his principiis deductam dederam, plerisque non parum suspecta videatur. Quam ob rem hic operam dabo, vt omnia momenta, quibus haec solutio innititur, dilucide exponam atque ab omnibus dubiis et obiectionibus vindicem, et quoniam ista dubia plerumque circa ipsam methodum, qua sum vsus, moueri solent, sufficiet casum simplicissimum, quo chorda per totam longitudinem eiusdem crassitiei statuitur, omni studio euoluisse. Praeterea vero omnes vibrationes tanquam infinite paruas spectabo, quae hypothesis ab omnibus, qui hoc argumentum tractarunt, est assumta.

§. 1. Primum ergo crassitiem et massam chordae, cuius motum hic sum inuestigaturus, ita ad calculum reuocabo, vt portionis istius chordae, cuius longitudo $=k$, maſſam ſeu pondus ſtatuam $=K$; neque enim hic ipſam materiam, ex qua chorda eſt confecta, conſiderare opus eſt, dummodo chorda fuerit perfecte flexilis, quandoquidem totus motus tantum ab eius longitudine et maſſa, praecipue autem a vi tendente pendet; quod quidem nulli dubio eſt ſubiectum.

§. 2. Sit igitur chorda in punctis A et B fixa, cuius longitudinem ponamus $AB=a$; cuius ergo maſſa ſeu pondus erit $=\frac{Ka}{k}$; tum vero ſit tenſa vi quacunque, quam ponderi $=\pi$ aequalem ſtatuamus; id quod etiam ſequenti modo menti repraeſentare licet, quod chorda vtrinque ſecundum ipſius directionem trahatur a viribus aequalibus $Aa=Bb=\pi$; tum vero vt inter vibrandum ipſi termini A et B immoti maneant, neceſſe eſt, vt chorda in punctis A et B inſuper certis viribus $A\alpha$ et $B\beta$ ad priores normalibus vrgeatur, quae quidem vires per ſe non dantur, ſed quouis momento ita comparatae eſſe debent, vt ambo chordae termini A et B in ſuo loco retineantur; perſpicuum autem eſt, quamdiu chorda ſitum naturalem in directum extenſum AB teneat, has vires fore nullas; dum autem verbi gratia ſurſum incuruatur in ſitum AyB, euidens eſt, vires illas $A\alpha$ et $B\beta$ deorſum tendere debere; neque vero opus eſſe, has vires noſſe, ſed deinceps per ipſam ſolutionem pro quouis chordae ſtatu facile determinabuntur. Hac ratione clariorem ideam conſequimur earum virium, quibus chorda in punctis A et B fixa retinetur.

Tab. V. Fig. 1.

§. 3.

§. 3. Ponamus iam tempore quocunque elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus, chordam noſtram incuruatam eſſe in figuram $A y B$, pro qua vocemus coordinatas $AX = x$; et $XY = y$; ita, vt ſit $BX = a - x$; et quoniam omnes vibrationes pro infinite paruis habentur, omnes adplicatae $XY = y$ erunt quam minimae; vnde ſtatim duo inſignia calculi ſubſidia adipiſcimur: 1°) quod chordae portio AY ipſi abſciſſae $AX = x$ aequalis cenſeri poteſt; cuius propterea pondus erit $= \frac{Kx}{k}$. 2°) quod punctum chordae Y inter vibrandum alium motum recipere nequit, niſi qui fiat ſecundum ipſam directionem adplicatae YX, dum ſcilicet ad ſitum naturalem AB accedit; ſin autem inde recedit, directio motus erit contraria ſecundum Yv. His conſtitutis euidens eſt, angulos AYX vbique fore tantum non rectos, ſeu quod eodem redit, tangentem in puncto Y tantum non parallelam axi AB. Quanquam autem haec hypotheſis ſtatim, ac vibrationes non amplius ſunt quaſi infinite paruae, a veritate aberrare debet; tamen contra illam ab aduerſariis nullum dubium moueri ſolet.

§. 4. Cum igitur ad quoduis tempus t figuram chordae $A y B$ determinari oporteat; euidens eſt, adplicatam y tanquam functionem binarum variabilium, temporis ſcilicet t et abſciſſae x, ſpectari debere, ex quo adplicata duplicis differentiationis eſt capax; prouti ſcilicet vel ſolum tempus t vel ſola abſciſſa x variabilis reputatur. Sumta ſcilicet abſciſſa x conſtante, illa functio indicabit quanta ad quodvis

vis tempus t futura fit puncti Y distantia ab axe A B, et post quantum tempus hoc punctum Y in locum pristinum reuertatur; vnde tempora vibrationum diiudicare licebit; sumto autem tempore t constante eadem functio pro quauis abscissa $AX = x$ praebebit quantitatem adplicatae $XY = y$, sicque indolem curuae AyB ad datum tempus declarabit.

§. 5. Sumamus autem praesenti tempore punctum chordae Y ab axe recedere atque eius celeritas formula $(\frac{dy}{dt})$ exprimetur, cuius differentiale denuo per dt diuisum dabit ipsam accelerationem $= (\frac{ddy}{dt^2})$; quae vt cum grauitate naturali per vnitatem expressa comparari possit, diuidi debet per $2b$, denotante b altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur; ita, vt haec acceleratio futura sit $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$; cui ergo aequalis esse debet vis, qua hoc cordae elementum versus Yv vrgetur, diuisa per ponduscu lum huius elementi: quare cum hoc ponduscu lum sit $\frac{K\,dx}{k}$; elementum chordae $Yy = dx$ in directione Yv sollicitari debet vi $= \frac{K\,dx}{2bk}.(\frac{ddy}{dt^2})$, tanta scilicet vi in singulis chordae elementis opus est, vt motus talis prodeat, qualem formulae analyticae complectuntur. Assumimus autem nostris formulis verum chordae motum definiri, sicque necesse est, vt singula chordae elementa in directione Yv sollicitentur.

§. 6. Cum autem tales vires reuera non adsint; necesse est, vt hae vires quasi fictae illis viribus,

bus, quibus chorda reuera sollicitatur, aequiualeant, sicque quaestio huc est perducta, quomodo illae vires inuentae, quas elementares vocabimus, quoniam singulis elementis adplicatae concipiuntur, comparatae esse debeant, vt viribus, quibus chorda actu sollicitatur, perfecte aequiualeant; siue si singulis chordae elementis eaedem vires in directione contraria adplicatae concipiantur, necesse est, vt hae vires cum illis, quibus chorda actu sollicitatur, in aequilibrio consistant; sicque nostra quaestio ad inuestigationem status aequilibrii est perducta.

§. 7. Adplicemus igitur nostras vires elementares modo contrario, ita, vt nunc elementum chordae Y sollicitetur in directione YU Tab. V. Fig. 2.

$$vi = \frac{K\,dx}{2\,b\,k}\cdot\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

et quia hae vires in aequilibrio consistere debent cum illis, quae chordam actu sollicitant et quae, vti vidimus, sunt 1°. vires tendentes $A\,a = B\,b = \pi$ deinde vero vires illae incognitae $A\,\alpha$ et $B\,\beta$, quas ponamus $A\,\alpha = F$ et $B\,\beta = G$ quae, certae erunt functiones temporis t, vti deinceps videbimus; ante omnia necesse est, vt omnium virium momenta, quae in punctum Y agunt, vtrinque se destruant, propterea quod chorda perfecte flexilis assumitur. Inuestigemus ergo momenta omnium nostrarum virium, quae a parte anteriore seu sinistra in punctum Y agunt, vt ea deinceps ad nihilum redigamus; tum enim ex altera parte dextrorsum momenta ſponte quoque euaneſcent, quia omnes vires ſumtae ſimul in aequilibrio conſiſtunt.

§. 8. Ad partem ergo ſiniſtram primum agit vis tendens $A\alpha = \pi$, cuius momentum in punctum Y eſt πy in ſenſum XA, alterius autem vis $A\alpha = F$ momentum in ſenſum contrarium agens erit Fx atque in eundem ſenſum etiam agent omnes illae vires elementares verſus axem vrgentes. Ad harum igitur momentum inueſtigandum conſideremus punctum Y tanquam fixum et ſpectemus punctum quodcunque y tanquam variabile a termino A vsque ad Y ſucceſſiue promouendum, pro quo puncto ſint coordinatae

$$Ax = X, \text{ et } xy = Y$$

et vis elementaris ſecundum yx vrgens

$$= \frac{K\,dX}{2bk} \cdot \frac{ddY}{dt^2},$$

cuius momentum in punctum Y prodit multiplicando per interuallum

$$xX = x - X,$$

ita, vt hoc momentum ſit

$$\frac{(x-X)K\,dX}{2bk} \cdot \frac{ddY}{dt^2},$$

cuius integrale ob x conſtans erit

$$= \frac{Kx}{2bk} \int \frac{dX\,ddY}{dt^2} - \frac{K}{2bk} \int \frac{X\,dX\,ddY}{dt^2}$$

et exprimit momentum virium elementarium ad arcum Ay adplicatarum, ſiquidem haec integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant, ſumto $X = 0$. Promoueamus nunc punctum y vsque in Y atque momen-

momentum virium elementarium per totum arcum Ay adplicatarum erit

$$\frac{K}{2bk}\left(x\int.\frac{dx.ddy}{dt^2}-\int\frac{x\,dx.ddy}{dt^2}\right)$$

quod reducitur ſponte ad hanc expreſſionem

$$\frac{K}{2bk}\int.dx\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae gemina integratio ita inſtitui debet, vt ſumto $x=0$ vtraque euaneſcat.

§. 9. His igitur momentis collectis, quia eorum ſumma ad nihilum redigi debet, conſequimur ſequentem aequationem:

$$\pi y = Fx + \frac{K}{2bk}\int.dx.\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quam vt a ſignis ſummatoriis liberemus, quae abſciſſam x tanquam variabilem inuoluunt, differentiemus poſita ſola x variabili et per dx diuidendo obtinemus

$$\pi\left(\frac{dy}{dx}\right) = F + \frac{K}{2bk}\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae denuo ſimili modo differentiata ſuppeditat hanc aequationem ſatis concinnam

$$\pi.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{K}{2bk}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Poſito ergo breuitatis gratia

$$\frac{2bk.\pi}{K} = c^2$$

habebimus tandem iſtam elegantem aequationem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae aequatio totum motum, cuius chorda eſt capax, in ſe complectitur, ita, vt reſolutio noſtrae quaeſtionis ab integratione iſtius aequationis differen-

 tialis

tialis fecundi gradus pendeat, et quae a confuetis aequationibus huius ordinis hoc potiffimum difcrepat, quod hic functio binarum variabilium t et x quaeritur atque ob hanc ipfam circumftantiam ifta quaeftio ad nouam illam calculi integralis partem eft referenda, quae ad functiones duarum pluriumue variabilium eft accommodata.

§. 10. Hic autem ftatim commodiffime vfu venit, vt iftam aequationem perfecte integrare liceat, dum eius integrale completum reperitur

$$y = \Phi.(ct + x) + \psi.(ct - x)$$

cuius veritas tentanti mox facile patebit; fi enim huiusmodi functiones more iam recepto differentiemus; habebimus

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c.\Phi'(ct + x) + c\psi'.(ct - x)$$

et $\frac{ddy}{dt^2} = c^2.\Phi''(ct + x) + c^2.\psi''(ct - x)$

fimilique modo, fumendo folam x variabilem, erit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi'.(ct + x) - \psi'.(ct - x)$$

et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Phi''.(ct + x) + \psi''.(ct - x)$

vnde manifefto fit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

Hic iam probe notandum eft, characteribus Φ et ψ functiones quascunque denotari fiue regulares fiue vtcunque irregulares: quo ipfo haec analyfeos fpecies ab ordinaria plurimum difcrepat, quod hic adeo functiones vtcunque irregulares et nulla continuitatis lege adftrictae ingrediantur; id quod in confueta Ana-

Analyſi nusquam vſu venire ſolet; quae quo clarius ob oculos ponantur, quoniam functiones per lineas curuas indicare Geometrae aſſueuerunt, formula $\Phi(ct+x)$ denotet adplicatam curuae cuiuscunque abſciſſae $ct+x$ reſpondentem; ſimilique modo formula $\psi(ct-x)$ denotabit adplicatam alius curuae cuiuscunque abſciſſae $ct-x$ reſpondentem atque neutiquam opus eſt, vt hae duae lineae curuae certa quadam aequatione analytica exprimi queant, verum etiam curuae ex portionibus variis diuerſarum curvarum vtcunque conflatae atque adeo curuae libero manus ductu vtcunque formatae hic locum inueniunt; dummodo omnes partes inter ſe cohaereant et nusquam hiatu abrumpantur. Nihil ergo impedit, quominus hae curuae ex pluribus lineis rectis inter ſe iunctis vel etiam arcubus circularibus aliarumue curuarum permixtis componantur.

§. 11. Ob hanc ipſam autem circumſtantiam iſta mea ſolutio Illuſtri *D'Alemberto* aliisque Geometris maxime ſuſpecta videtur, qui in hoc negotio alias lineas curuas admittere non vult, niſi quae certis aequationibus analyticis exprimantur, quaeque continuitatis lege ſtricto ſenſu contineantur. Inprimis autem hinc portiones diuerſarum curuarum, quae in iuncturis angulis promineant, excludit, dum huiusmodi anguli naturae aequationis differentio-differentialis penitus aduerſari ipſi videntur; ſaepius equidem reſpondi, hic tales angulos, quales pertimeſcit, nullo modo locum habere poſſe, quia hic tantum vibrationes infinite paruae ſpectantur, vbi, vti

vti iam notauimus, omnes tangentes tantum non axi debent eſſe parallelae, verum tamen hoc Viro Illuſtri neutiquam ſufficere eſt viſum atque etiam inclinationes adeo infinite paruas reformidat. Hanc autem litem equidem prorſus dirimere ſpero, ſi oſtendero, angulos adeo maxime prominentes in curvis illis functiones ϕ et ψ repraeſentantibus negotium plane non turbare, id quod hoc ſolo exemplo probaſſe ſufficiet. Functio ſcilicet ϕ eiusmodi linea curua regulari repraeſentetur, cuius abſciſſae cuicunque u reſpondeat adplicata

$$\phi u = \sqrt[3]{(a-x)^2 a};$$

cuius lineae forma ita erit comparata; eſt ſcilicet notiſſima parabola cubicalis Neiliana, quae adeo in
Tab. V. Fig. 3. puncto C cuſpidem infinite acutam continet; interim tamen haec cuſpis neutiquam impedit, quominus iſta functio aequationi noſtrae ſatisfaciat; ſumta enim abſciſſa $u = ct + x$ vt habeamus ſaltem pro functione priore

$$y = \sqrt[3]{a(a-ct-x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-2c.\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

$$\text{et } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2c^2\sqrt[3]{a}}{9.\sqrt[3]{(a-ct-x)^4}}$$

ſimilique modo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3.\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

et

et $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = \frac{-2\,\sqrt[3]{a}}{9.\,\sqrt[3]{(a-c\,t-x)^4}}$

quibus formulis aequationi

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = c^2.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

perfecte satisfit; nequidem excluso casu $a = c\,t + x$, vbi cuspis occurrit, ex quo sine dubio recte concludere licet, si cuspis adeo negotium non turbat, multo minus angulosas prominentias easque adeo infinite paruas esse pertimescendas.

§. 12. His praenotatis integrale completum nostrae aequationis ad ipsum casum propositum chordae vibrantis adcommodemus, vbi duabus conditionibus erit satisfaciendum. Primum scilicet vt in A, vbi $x = 0$, adplicata y semper euanescat pro omni tempore t; deinde vt idem eueniat in altero termino B, vbi $x = a$. Prima autem conditio posito $x = 0$ praebet

$$y = \Phi\,c\,t + \psi\,c\,t$$

qui valor cum debeat esse $= 0$, necesse est, vt sit

$$\psi\,c\,t = -\Phi.\,c\,t$$

hoc est, curua functione ψ repraesentanda ita esse debet comparata, vt adplicata eidem abscissae respondens negatiua sit illius, quae in curua Φ eidem abscissae respondet, vnde sequitur, fore generatim

$$\psi.\,(c\,t - x) = -\Phi.\,(c\,t - x);$$

vnde ista conditio nobis suppeditat hanc aequationem:

$$y = \Phi.\,(c\,t + x) - \Phi.\,(c\,t - x)$$

sic

ſic enim facto $x = 0$, manifeſto prodit $y = 0$. Pro altera conditione faciamus nunc $x = a$; iterumque fieri debet

$$\Phi(ct + a) - \Phi(ct - a) = 0 \text{ ſiue}$$
$$\Phi(ct + a) = \Phi(ct - a);$$

vnde ſi faciamus

$$ct - a = u; \text{ erit } ct + a = u + 2a,$$

ita vt in genere eſſe debeat

$$\Phi.(u + 2a) = \Phi u.$$

Curua ſcilicet hac functione Φ repraeſentanda ita debet eſſe comparata, vt quaecunque adplicata reſpondeat abſciſſae u, eadem quoque reſpondeat omnibus abſciſſis

$$u + 2a;\ u + 4a;\ u + 6a; \text{ etc.}$$

itidemque retrogrediendo his abſciſſis

$$u - 2a;\ u - 4a;\ u - 6a \text{ etc.}$$

ex quo intelligitur, quemadmodum hanc curuam in infinitum continuari oporteat. Talem ergo curuam ſequenti modo conſtrui conueniet; ſuper portione axis $AC = 2a$ conſtruatur pro lubitu linea curua quaecunque FC, ita tamen, vt adplicata CG aequalis fiat adplicatae AF, tum vero eadem haec curua FG vltra C dextrorſum deſcribatur, ſimilique modo etiam ſiniſtrorſum ab F ita, vt ſingulis axis portionibus $= 2a$ ſimiles et aequales portiones curuae FG ſuperſtruantur; haecque ſola circumſtantia obſeruata deſcriptio curuae FG penitus noſtro arbitrio

Tab. V Fig. 4

trio relinquitur atque siue ex pluribus lineis rectis siue ex arcubus quarumcunque curuarum siue libero manus tractu vtcunque delineari poterit, dummodo vtrinque prouti modo innuimus continuetur.

§. 13. Tali autem linea curua, quam scalam constructionis adpellare liceat, erecta, semper certus quidam motus vibratorius chordae sequenti modo facillime definietur, dum scilicet figura chordae, quam ad quoduis tempus t est habitura, assignabitur. Cum enim c lineam quandam rectam, t vero numerum absolutum denotet, sumatur ab axis puncto A interuallum $AT = ct$, et ab hoc puncto T vtrinque abscindantur interualla $TS = Ts = x$ et adplicatae SZ et sz; quo facto pro figura chordae nostrae abscissae $AX = x$ respondebit adplicata $XY = SZ - sz$ quia in scala nostra est $AS = ct + x$ et $As = ct - x$; hic autem per se clarum est, pro ipso termino chordae A, vbi $x = 0$, ideoque et $TS = 0$; $ts = 0$, adplicatam fore $= TV - TV = 0$. Pro altero autem termino B, vbi $x = a$, ideoque etiam capi oportet $TS = ts = a$, adplicatae SZ et sz vtique erunt aequales, quandoquidem tum interuallorum AS et As distantia est $2a$, consequenter earum differentia $= 0$, pro chorda adplicatam in termino B praebens; quare cum hoc modo ad quoduis tempus figura chordae facillime assignetur, totus chordae motus perfecte innotescit.

§. 14. Quoniam in scala abscissis interuallo $= 2a$ continuo crescentibus aequales adplicatae reſpondent; manifeſtum eſt, pro alio tempore t' ſi fuerit $c\,t' = c\,t + 2\,a$, chordam eandem figuram eſſe recuperaturam, quam tempore t habuerat; interea vero chorda duas vibrationes abſoluiſſe cenſetur ita, vt $t' - t$ exhibeat tempus duarum vibrationum; quia autem $t' - t = \frac{2\,a}{c}$ tempus vnius vibrationis erit $= \frac{a}{c}$ idque iam in minutis ſecundis expreſſum, atque hic commodiſſime vſu venit, vt tempus cuiusque vibrationis neutiquam pendeat ab indole figurarum, quas chorda inter vibrandum induit, ſed ſemper ſimpliciſſima hac formula $\frac{a}{c}$ exprimatur. Cum vero ſupra poſuiſſemus $c^2 = \frac{2\,b\,k.\pi}{K}$; nunc patet tempus vnius vibrationis fore $\frac{a.\sqrt{K}}{\sqrt{2\,b\,k.\pi}}$ ſicque pro chordis eiusdem craſſitiei, pro quibus ſcilicet $\frac{K}{k}$ eundem obtinet valorem, tempora vibrationum erunt vti $\frac{a}{\sqrt{\pi}}$; hoc eſt, inter ſe tenent rationem compoſitam ex ſimplici longitudinum et reciproca ſubduplicata virium tendentium, quae quidem ratio iam dudum eſt cognita et per experimenta confirmata. Praeterea quoniam ſoni a chordis editi ex numero vibrationum dato tempore abſolutarum aeſtimari ſolent; hic notaſſe iuuabit, numerum vibrationum a noſtra chorda ſingulis minutis ſecundis editarum fore $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2\,b\,k.\pi}}{a\sqrt{K}}$ ſicque ipſi ſoni tenent rationem compoſitam ex directa ſubduplicata tenſionum π et reciproca ſimplici longitudinum a.

§. 15. Si in ſuperioribus formulis ponamus tempus $t = 0$; reperiemus ipſam figuram, quam chorda

chorda initio habuerit, pro qua igitur abſciſſae x reſpondet adplicata

$$y = \Phi . x - \Phi . - x$$

vnde viciſſim ex figura chordae initiali iam quodammodo natura ſcalae conſtructionis colligi poterit; neque tamen penitus inde determinatur, cuius ratio per ſe eſt manifeſta, quoniam in ſtatu initiali praeter figuram etiam motus, qui chordae potuit eſſe impreſſus, ſpectari debet, ita, vt ſtatus initialis duabus rebus contineatur; primo ſcilicet figura chordae inducta, deinde etiam motu, qui ipſi fuerit impreſſus. Quo igitur huius circumſtantiae rationem teneamus, ex formulis generalibus celeritatem chordae puncti Y deriuemus, quae erit

$$\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) = c\,\Phi' (c\,t + x) - c\,\Phi' (c\,t - x)$$

qua exhibetur celeritas puncti y ab axe recedentis atque ipſa celeritas per ſpatium vno minuto percurrendum indicatur.

§. 16. Vt igitur vniuerſam noſtram inueſtigationem ad ſtatum chordae initialem atque cognitum adcommodemus, referat A Y B figuram chordae initialem et ponamus adplicatam abſciſſae x reſpondentem $XY = \Gamma . x$; deinde pro motu initiali ſuper eodem axe $AB = a$ exſtruatur ſcala celeritatum A Z B, cuius quaelibet adplicata X Z exhibeat celeritatem, qua punctum chordae ab axe recedit, quae cum etiam ſit certa functio abſciſſae $AX = x$, repraeſentetur functione $\Delta' x$; nunc igitur neceſſe eſt, vt pro noſtris formulis generalibus fiat Tab. V. Fig. 5.

$$\Phi x - \Phi . - x = \Gamma . x$$

ſimilique modo pro celeritate, facto ibi $t = 0$

$$c \Phi' x - c \Phi' . - x = \Delta' x$$

quam poſteriorem aequationem per $d x$ multiplicando et integrando reducimus ad hanc formam:

$$c \Phi x + c \Phi . - x = \Delta . x + f$$

vbi Δx exprimit aream curuae A X Z, ſicque erit

$$\Phi x + \Phi . - x = \frac{\Delta x}{c} + f = \text{areae } \frac{AXZ}{c}.$$

Nunc igitur ex his duabus aequationibus primum elicimus

$$2 \Phi x = \Gamma x + \frac{\Delta x}{c} + f$$

et $2 \Phi . - x = \frac{\Delta x}{c} - \Gamma x + f.$

Hunc in finem in fig. 5 ſuper axe A B inſuper deſcribatur curua M O N ſumendo primam adplicatam A M arbitrariae longitudinis $= f$ et pro abſciſſa x fiat

$$XO = f + \text{area } \frac{AXZ}{c}.$$

§. 17. Iam ex iſta figura 5. ſcala conſtructionis facile ſequenti modo extruetur: cum enim ſit

$$\Phi x = \tfrac{1}{2} xO + \tfrac{1}{2} XY \text{ et } \Phi - x = \tfrac{1}{2} xO - \tfrac{1}{2} XY;$$

primo ſumto $x = 0$, erit in A adplicata

$$A a = \tfrac{1}{2} A M;$$

Tab. V. Fig. 6. deinde ſumtis vtrinque

$$A X = A X' = x,$$

ita, vt ſit proprie

$$A X' = - x;$$

erit

erit pro x adplicata

$$Xx = \tfrac{1}{2} xO + \tfrac{1}{2} XY$$

et pro altera

$$X'x' = \tfrac{1}{2} xO - \tfrac{1}{2} XY$$

ac denique ſumtis vtrinque abſciſſis

$$AB = a = AA'$$

tum fiet adplicata in puncto $B = \tfrac{1}{2} BN$ et

$$Aa' = BN$$

ſicque adplicatae extremae Bb et $A'a'$ fiunt inter ſe aequales, ſicque tota haec curua baſi

$$A'B = 2a$$

inſiſtens ex ſtatu chordae initiali plene eſt conſtructa; et nihil aliud ſupereſt, niſi vt haec ipſa curua $a'b$ replicetur tam dextrorſum, quam ſiniſtrorſum, quoties libuerit; hocque modo tota ſcala conſtructionis conficietur, ex qua deinceps ad quoduis tempus figura chordae innoteſcet.

§. 18. Poſtquam igitur ipſum chordae motum determinauimus: nunc vires illas initio memoratas $A\alpha$ et $B\beta$, quae ad retinendos chordae terminos A et B immotos requiruntur et quae erant incognitae, definire poterimus. Quem in finem cunctas vires ſingulis chordae punctis X adplicatas propius perpendamus. Supra autem §. 8. vidimus a parte ſiniſtra in punctum Y agere vires ſequentes 1°. vim tendentem $Aa = \pi$ 2°. vim illam incognitam $A\alpha = F$ et 3°. omnes vires elementares portioni Ay adplicatas, quarum cum quaelibet fit $= \frac{K\,dx}{2\,b\,k} \cdot \frac{ddY}{dt^2}$, omnium fumma erit

$$\frac{K}{2\,b\,k} \int. \frac{dx.\,d\,dy}{dt^2} = \pi \int. dx \frac{ddy}{dx^2}$$

cuius integrale eft

$$\pi.\frac{dy}{dx} + \text{Conft.}$$

quae ita debet effe comparata, vt integrale euanefcat fumto $x = 0$. Deinde etiam harum virium momenta pro puncto Y fumus contemplati; ac primae vis A $a = \pi$ momentum erat πy; vis autem F momentum in fenfum contrarium ageus F x, cui adiungi debet momentum ex omnibus viribus elementaribus ortum

$$= \frac{K}{2\,b\,k} \int. dx \int \frac{dx.\,ddy}{dt^2} = \pi. \int dx \left(\frac{dy}{dx} + \text{Conft.}\right) = \pi(y + Cx).$$

Cum igitur iam inuentum fit

$$y = \Phi(ct + x) - \Phi(ct - x)$$

erit $\frac{dy}{dx} = \Phi'(ct + x) + \Phi'(ct - x)$

vnde fumma illa virium elementarium ob

$$\frac{dy}{dx} + C = \Phi'(ct + x) + \Phi'(ct - x) - 2\,\Phi' ct$$

erit $= \pi[\Phi'(ct + x) + \Phi'(ct - x) - 2\,\Phi' ct]$.

Progenita autem inde momenta iam erunt, vis tendentis π momentum

$$= \pi(\Phi(ct + x) - \Phi(ct - x))$$

alterius autem vis F momentum $=$ F x; virium autem elementarium momentum

$$\pi(\Phi(ct + x) - \Phi(ct - x) - 2\,x\,\Phi' ct)$$

quae

quae duo posteriora in contrarium sensum vrgent et quia se mutuo destruere debent, nascitur haec aequatio

$$\pi(\Phi(ct+x)-\Phi(ct-x))$$
$$=Fx+\pi(\Phi(ct+x)-\Phi(ct-x)-2x\Phi'ct)$$

vnde manifesto innotescit vis illa incognita

$$F=2\pi\Phi'ct$$

cui autem non aequabitur vis in altero termino $B\beta=G$ quandoquidem adplicata y pro abscissa $Bx=a-x$ alia functione exprimitur. Hanc autem vim G simili modo per sequens ratiocinium colligere poterimus, quod omnium virium elementarium per totam chordam Ay adplicatarum summa erit

$$\pi(\Phi'(ct+a)+\Phi'(ct-a)-2\Phi'ct)-G$$

quae cum debeat esse $=0$; concludimus fore

$$G=\pi(\Phi'(ct+a)+\Phi'(ct-a)-2\Phi'ct).$$

§. 19. Hactenus igitur solutionem sequentis problematis generalis tradidimus:

Problema generale.

Dato statu initiali chordae vniformiter crassae tam ratione figurae, quam ratione motus ipsi impressi, definire ad quoduis tempus figuram, quam chorda deinceps est habitura, quatenus scilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.

Perspicuum autem est, solutionem, quam dedimus, non solum esse admodum facilem et concinnam, sed etiam naturae quaestionis admodum con-

conformem, quandoquidem ad omnes ſtatus initiales eſt adcommodata, dum aliae ſolutiones, quae plerumque prodierunt, tantum ad certas curvarum ſpecies, ad quas chorda inter vibrandum ſe componere poteſt, ſunt reſtrictae. Nemo autem negare poteſt, quin ſtatus initialis chordae penitus a noſtro arbitrio pendeat nec quisquam oſtendere eſt conatus, quod chorda ſemper ſe ad illas curuarum ſpecies formare debeat, poſtquam ipſi initio aliae figurae fuerint impreſſae; quia etiam ipſe Illuſtr. *D'Alembertus* hoc negotium non ſuſcepit, ſed potius declarauit, illis caſibus, quibus chordae initio figurae ab illis curuis diſcrepantes fuerint inductae, motum ſecuturum ope Analyſeos plane aſſignari non poſſe; quod equidem de Analyſi ordinaria facile concedo; atque in hoc ipſo non parum mihi praeſtitiſſe videor, quod nouum illud Analyſeos genus, quod circa functiones duarum variabilium verſatur, felici ſucceſſu ad motum chordarum adplicuerim. Vt autem omnibus plane dubiis occurram, aliquot caſus ſimpliciſſimos, qui Analyſi refragari videntur, euoluam ac deinde oſtendam, meam ſolutionem non ſolum experientiae, ſed et omnibus motuum principiis perfecte eſſe conſentaneam.

Caſus primus.

Tab. V. Fig. 7. Si chorda initio a ſtatu naturali A B ita fuerit diducta, vt triangulum iſoſceles A D B conſtituat, cuius quidem altitudo C D fuerit quam minima, hincque ſubito dimittatur, vt motum a quiea quiete incipiat, inuenire eius motum vibratorium.

Euolutio.

§. 20. Cum ergo initio omnia chordae elementa fuerint in quiete et singula puncta in vtroque latere A D et B D nullis plane viribus sollicitentur, quoniam tensiones chordae vbique sunt aequales et contrariae, euidens est, primo instanti omnia haec puncta nullum motum adipisci, sed in quiete esse permansura; solum supremum elementum in apice D situm ob tensionem chordae vtrinque oblique sollicitatur, secundum directiones D A et D B; inde ergo vtique nascetur vis secundum directionem D C sollicitans, ex quo punctum D reuera in directione D C moueri incipiet, dum omnia reliqua chordae puncta adhuc in quiete perseuerant. Statim autem atque hoc punctum D moueri incipiet ac primo quasi instante ad G vsque peruenerit, nunc puncta illa E et F ad motum concitari incipient, propterea quod tensiones vtrinque circa haec puncta non amplius in aequilibrio sunt positae, dum reliqua puncta ab E versus A et a F versus B etiam nunc manent immota. Puncta autem in spatiolo E G F sita, quia non amplius sollicitantur, motu iam acquisito versus axem A B properabunt, sicque denuo quopiam tempusculo elapso chordae inducetur figura A $e f$ B, hocque modo tandem ad statum naturalem A B perueniet; vnde simili modo in plagam oppositam extrauagabitur.

§. 21. Qui haec attentius perpendere voluerit, fine dubio concedere cogetur, chordam tali modo, vt diximus, ad motum se esse composituram. Videamus ergo, cuiusmodi motum solutio nostra generalis sit praebitura; si enim ea ad similem plane motum perduxerit; dubitari certe amplius non poterit, quin ea sit veritati consentanea. Sin autem alium atque diuersum motum inde inuenerimus: tum ea sine dubio pro suspecta haberi potest.

§. 22. Quia omnes celeritates initiales euanescunt sicque scala celeritatum in ipsum axem A B incidit, etiam areae illae A X Z (fig. 5.) euanescent hincque linea illa F V G erit recta axi A B parallela ab eoque interuallo arbitrario A F $=$ C G remota; ex quo scala constructionis sequenti modo erit comparata. Scilicet super interuallo principali A B existit etiam $\triangle$ isosceles $a\,\alpha\,b$, cuius altitudo tantum semissis est figurae initialis C D. Interuallo autem A A' sinistrorsum simile $\triangle$ isosceles situ inuerso imminebit $a'\,\alpha'\,a$ atque hoc modo dextram versus super interualla aequalia similia triangula alternatim deorsum et sursum vergentia exstrui debent atque ex hac scala vtique pro $t = 0$ ipsa figura initialis resultat.

Tab. V. Fig. 8. §. 23. Quoniam hic tempus vnius vibrationis habetur $= \frac{a}{c}$; sumto interuallo A T $= c\,t = a$, punctum T incidet in ipsum punctum B, vnde figura chordae similis prodiret initiali, sed in plagam oppositam versa, vti natura vibrationum exigit; tempo-

tempore autem medio, quo $t = \frac{a}{2c}$, punctum illud T in scala constructionis sub ipso apice erit situm; hicque manifestum est, pro figura chordae omnes adplicatas in nihilum esse abituras seu momento hoc medio chorda per ipsum statum naturalem transit, id quod etiam nulli dubio est obnoxium.

§. 24. Quaeramus vero figuram chordae pro tempore $t = \frac{a}{4c}$; ita, vt sit $AT = ct = \frac{a}{4} = \frac{1}{4} AB$ et quamdiu abscissae x sunt minores, quam $AT x = \frac{1}{4} a$, adplicatae y continuo crescere debent ideoque tantum, quantum in figura initiali a puncto A increscebant; simulac vero abscissa x euadit $= \frac{1}{4} a$, adplicata y aequabitur dimidiae altitudini figurae initialis. Nunc igitur capiatur abscissa x maior, quam $\frac{1}{4} a$, ac facile patebit, adplicatas y prodire inter se aequales et quidem $= m\alpha - A a$; quod euenit, donec fiat $x = \frac{3}{4} a$, sicque per hoc spatium portio chordae parallela erit axi AB; sin autem $x > \frac{3}{4} a$; adplicatae denuo decrescent vniformiter, donec in ipso termino B euanescunt. Consequenter elapso tempore $t = \frac{a}{4c}$; chorda figuram habebit AETB cum figura initialis fuisset ADB, ita, vt crura illa AD et BD in punctis E et F bisecentur et portio EF axi sit parallela; patet igitur, quod initio monuimus, solam chordae portionem EF hucvsque esse promotam; portiones autem extremas AE et BF etiamnum mansisse immotas; qui ergo motus cum extra omnem dubitationem sit positus; soliditatem nostrae solutionis generalis maxime Tab. V. Fig. 9.

confirmat, ita, vt nunc quidem nulli iam dubio locus relinqui videatur.

§. 25. Statim quidem obiicietur, cum initio chorda in angulum A D B fuerit efformata, hunc angulum in sequentibus vibrationibus continuo magis magisque obtusum fieri; ac fortasse adeo ad experientiam prouocabitur, quod equidem negare neutiquam sustineo; verum hic probe obseruari conueniet, in nostro calculo chordam perfecte flexibilem esse assumtam, ita, vt flexurae angulosae neutiquam resistat. Cum autem nulla chorda ex quacunque materia confecta plane omni rigore sit destituta; huic ipsi caussae vtique erit adscribendum, si illi anguli inter vibrandum continue magis obtunduntur neque ergo hoc etiamsi experientiae fuerit consentaneum, nostrae methodo vllam vim inferre potest, vt eius soliditas inde suspecta reddi queat.

Casus secundus.

Tab. V. Fig. 10. Si initio non tota chorda A B; sed tantum eius semissis A C in figuram trianguli isoscelis A C d diducatur; altera parte C B manente immota, tum vero chorda subito ex hoc statu remittatur; inuestigare eius motum tremulum secuturum.

Euolutio.

§. 26. Hic casus eo magis est memoratu dignus, quod non solum Ill. *d'Alembertus*, sed etiam alii, qui idem argumentum tractauerunt, istum casum

ſum non ſunt auſi attingere, eumque adeo Auctori aduerſari ſunt arbitrati. Ante autem quam eius euolutionem ſuſcipiamus, populari ratiocinio vtentes videamus, cuiusmodi motus inſequi debeat ac primo quidem cum chorda ipſo initio fuerit in quiete, euidens eſt, haec duo tantum puncta d et C ad motum ſollicitari, propterea quod in omnibus reliquis chordae punctis tenſiones vtrinque ſe in aequilibrio ſeruant; hinc ergo punctum d axem A B verſus vrgebitur, punctum C vero ab axe ſurſum detorquebitur, quoniam alium motum niſi in directione ad axem normali recipere nequit. Sequentibus vero porro temporis punctis continuo maior trianguli A d C portio ad axem accedet, ſimul vero alterius partis C d portio quaedam ſupra axem eleuabitur, et ſic mox vndatio ſurſum vergens A d C vſque ad alterum terminum B propagabitur, quae cum negari nequeant, videamus, qualem motum noſtra ſolutio producere debeat.

§. 27. Quia primo inſtanti chorda motum ex quiete incepit, ſcala conſtructionis ita erit comparata, vti figura exhibet, ſcilicet interuallo A B, quo ipſa chorda refertur imminebit ſcala $\alpha\,\delta\,\gamma\,\varepsilon\,\beta$, ſimilis plane ipſi figurae initiali, triangulo nimirum iſoſcele $\alpha\,\delta\,\gamma$ et reliqua portione recta $\gamma\,\beta$ conſiſtens, hoc ſolo diſcrimine, quod hic trianguli altitudo duplo minor eſt, quam in figura initiali; at vero ſiniſtrorſum eadem figura ſitu inuerſo eſt delineanda, ita, vt portioni axis A 𝔈 immineat $\Delta\,\alpha\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}$ Tab. V. Fig. 11.

 deorſum

deorsum vergens; reliqua parte $c\,a$ existente recta, axi parallela; quo facto haec figure $a\,c\,b\ldots\beta$ axi $\mathfrak{A}B = 2\,a$ insistens replicetur dextrorsum, quousque libuerit; singula porro interualla $\mathfrak{A}A$, AB, BB' in quaternas partes secentur, quo facilius status chordae sequentes scrutari valeamus.

§. 28. Cum tempus vnius vibrationis supra sit inuentum $= \frac{a}{c}$, ipsa chordae longitudo $AB = a$, tempus vnius vibrationis exhibere censeatur, ideoque quartae illae partes in figura expressae etiam quartam partem durationis vnius vibrationis exhibebunt atque hinc ad temporis momenta ab initio elapsa $\frac{1}{4}a$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{3}{4}a$ et a figuram chordae exploremus.

§. 29. Pro tempore igitur $= \frac{1}{4}a$ adplicata illa TV (fig. 4) in puncto D erit accipienda, et cum semper pro abscissa $x = 0$ adplicata in ipsa chorda etiam sit $= 0$; pro abscissa $x = \frac{1}{4}a = AD$ adplica-
Tab. V. Fig. 12. ta erit $C\gamma - A\alpha = 0$ vnde patet, chordam ab A vsque ad D in ipsum axem incidere. Tum vero capiatur $x = \frac{1}{2}a = AC$; atque in scala relationis adplicatae a TV vtrinque hoc interuallo distantes erunt $E\varepsilon$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$; vnde pro figura chordae adplicata erit $E\varepsilon = \mathfrak{D}\mathfrak{d} = Cc$, ita, vt iam Dc sit portio chordae; porro sumamus $x = \frac{3}{4}a = AE$ atque in scala relationis a puncto D vtrinque capiantur tanta interualla $DB = D\mathfrak{C} = \frac{3}{4}a$ et iam nostra adplicata erit $B\beta - \mathfrak{C}\mathfrak{c} = 0$, ita, vt in hoc loco punctum chordae iterum in axem incidat; denique pro

pro abſciſſa $x = a$ in ſcala relationis a puncto D abſcindantur vtrinque interualla $DD' = D\mathfrak{E} = a$; et iam adplicatarum differentia in his punctis $D'\varepsilon^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{b} = 0$; hinc igitur cognoſcimus elapſo tempore $= \frac{1}{4}a$ figuram chordae ita fore comparatam, vt vtrinque per interualla AD et BE chorda cum ipſo axe conueniat; per interuallum autem DE triangulum iſoſceles ſurſum formet AcE cuius autem altitudo Cc duplo erit minor, quam in ſtatu initiali; ita, vt vndatio vsque in ſpatium DE ſit promota.

§. 30. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{1}{2}a$ et nunc adplicata illa TV conſtituenda erit in puncto C, a quo puncto ſucceſſiue vtrinque capi debebunt interualla $\frac{1}{4}a$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{3}{4}a$ et a ac primo pro $x = \frac{1}{4}a$ habebimus in ſcala relationis adplicatas $E\varepsilon$ et $D\delta$, quarum differentia $E\varepsilon - D\delta$ ſit negatiua ſiue pro abſciſſa $x = \frac{1}{4}a$ oſtendit adplicatam deorſum verſam; quae iterum erit duplo minor, quam in figura initiali. Capiatur nunc $x = AC = \frac{1}{2}a$ et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae $B\beta$ et $A\alpha$, quarum differentia euaneſcit, ita, vt in puncto C chordae adplicata iterum euaneſcat, ita, vt hic Δ iſoſceles ſub axe deorſum ſit verſum. Porro ſumto $x = \frac{3}{4}a$, in ſcala conſtructionis habebuntur adplicatae $D\varepsilon'$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$, quarum differentia erit poſitiua et duplo minor altitudine trianguli in figura initiali. Quocirca elapſo tempore $= \frac{1}{2}a$ chorda in duo triangula iſoſcelia erit inflexa, priore deorſum, poſteriore vero ſurſum vergente. Tab. V. Fig. 13.

§. 31.

§. 31. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{3}{4} a$, et nunc adplicata T V ſtatuenda erit in E; hinc pro figura chordae ſumatur primo $x = \frac{1}{4} a$ et in ſcala conſtructionis habebimus binas adplicatas B β et C γ, quarum differentia $= 0$ oſtendit portionem chordae A D in ipſo axe fore ſitam; capiatur porro $x = \frac{1}{2} a = A C$, et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae $D' \varepsilon'$ et D δ, quarum differentia negatiua aequabitur ſemiſſi altitudinis trianguli in figura initiali. Sumto autem $x = \frac{3}{4} a$, binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et A α, quarum differentia $= 0$ oſtendit chordam in E in axem incidere pariter atque per totum interuallum reſiduum E B ſicque manifeſtum eſt, hanc figuram ſimilem prorſus eſſe illi, quam pro tempore elapſo $x = \frac{1}{4} a$ inuenimus; niſi quod haec ſitum inuerſum teneat.

§. 32. Elapſum denique ſit ab initio tempus $= a$, ita, vt hic figura chordae circa finem primae vibrationis ſit definienda et nunc adplicata illa T V incidet in B, ex quo ergo vtrinque abſcindamus interualla $\frac{1}{4} a$; $\frac{1}{2} a$ et $\frac{3}{4} a$. Nunc ergo pro $x = \frac{1}{4} a$ in ſcala habebimus binas adplicatas $D' \varepsilon'$ et E ε, quarum differentia $= 0$ praebet pro chorda $y = 0$. Sit nunc $x = \frac{1}{2} a$ et binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et C γ quarum differentia iterum $= 0$ praebet $y = 0$, ita, vt iam tota prior ſemiſſis chordae in ipſum axem incidat. Verum ſumto $x = \frac{3}{4} a$; binae adplicatae ſcalae erunt $B' \delta'$ et D δ, quarum differentia eſt negatiua atque ipſi altitudini trianguli in

Tab. V. Fig. 15.

in ſtatu initiali aequalis; ex quo patet, hanc chordae figuram prorſus ſimilem et aequalem eſſe ipſi figurae initiali, niſi quod eius ſitus ſit inuerſus; et cum iam prima vibratio ſit terminata, etiam ſequens motus per ſe cognoſcetur; ita, vt ſuperfluum foret has determinationes vlterius proſequi.

§. 33. Omnino igitur noſtra euolutio motum oſtendit illi, quem coniectura collegimus, conformem; ita, vt hinc nullum amplius dubium contra hanc ſolutionem moueri poſſit; quare cum iſte caſus maxime aduerſari ſit viſus, eo iam feliciſſime expedito meam theoriam de chordis vibrantibus abunde extra omnem dubitationem collocaſſe mihi equidem videor; atque adeo ſpero, in poſterum omnibus obiectionibus ſufficienter eſſe reſponſum, ita, vt ſuperfluum foret, plures adhuc caſus ſimili modo euoluere.